Февраль 2023 г. *Том 193, № 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика

А.В. Слюняев, Д.Е. Пелиновский, Е.Н. Пелиновский

Волны-убийцы — неожиданно возникающие аномально высокие волны на морской поверхности — привлекли внимание исследователей, от океанографов до математиков, на рубеже XX – XXI *вв. Обсуждаются результаты исследования этого явления*: *физические механизмы возникновения аномально высоких волн и соответствующие математические модели, натурные данные, результаты прямого численного моделирования и лабораторных экспериментов, новые подходы к моделированию и прогнозу экстремальных морских волн.*

Ключевые слова: волны-убийцы, морские ветровые волны, нелинейные волны

PACS numbers: **05.45. – a**, 92.10.Hm DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.08.039038

Содержание

1. **Введение (155).**
2. **Данные наблюдений и регистраций волн-убийц (157).**
3. **Физические механизмы и модели возникновения морских волн-убийц (160).**
   3.1. Базовые уравнения гидродинамики. 3.2. Геометрическая и дисперсионная фокусировка. 3.3. Нелинейные взаимодействия волн и модуляционная неустойчивость. 3.4. Обобщения параметра модуляционной неустойчивости. 3.5. Когерентные волновые структуры и их взаимодействия. 3.6. Нелинейная динамика волн при изменяющихся условиях. 3.7. Нелинейная динамика захваченных волн.
4. **Математические модели волн-убийц на фоне модулированных волн (165).**
   4.1. Периодические решения нелинейного уравнения Шрёдингера. 4.2. Волны-убийцы на фоне волн постоянной амплитуды (бризеры). 4.3. Волны-убийцы на фоне модулированных волн. 4.4. Более сложные структуры волн-убийц.
5. **Прямое моделирование морских волн (171).**
   5.1. Традиционный подход. 5.2. Быстрые модели для описания динамики поверхностных волн. 5.3. Стохастическое численное моделирование морских волн. 5.4. Характерный портрет волны-убийцы. 5.5. Сильно нелинейные солитоны и бризеры на поверхности воды. 5.6. Реконструкция морских волн-убийц.
6. **Заключение (177).**

Список литературы (178).

А.В. Слюняев [1, 2, a], **Д.Е. Пелиновский** [1, 3, b], **Е.Н. Пелиновский** [1, 2, c]
[1] Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород,
Российская Федерация
[2] Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики",
ул. Большая Печерская 25/12,
603155 Нижний Новгород, Российская Федерация
[3] Department of Mathematics, McMaster University,
1280 Main Street West, Hamilton, Ontario, L8S4L8, Canada
E-mail: [a] slunyaev@ipfran.ru, [b] dmpeli@math.mcmaster.ca,
[c] pelinovsky@ipfran.ru

Статья поступила 24 июля 2021 г.,
после доработки 6 августа 2021 г.

1. Введение

Описания необычных морских волн в научной литературе имеют более чем полувековую историю [1, 2], но серьёзное внимание "волны-убийцы" (в англоязычной литературе наиболее часто называемые *rogue wave* или *freak wave*) получили на рубеже XX – XXI вв. после появления значительного числа аккуратных инструментальных измерений, которые демонстрировали единичные волны или короткие цуги волн, значительно превышающих по высоте фоновое волнение [3]. С волнами-убийцами связывают ряд крупных инцидентов с кораблями и шельфовыми платформами (в частности, с танкером Prestige (2002 г.), лайнерами Norwegian Dawn (2005 г.), Louis Majesty (2010 г.), грузовым судном Cemfjord (2015 г.)) (см. [4 – 8], а также [9, 10] о неожиданных заплесках волн на берег). Возможность описания аномально высоких волн в рамках уже используемых в океанологии и морской инженерии моделей ветрового волнения в спектральной форме подвергается сомнению. В связи с этим в последние два десятилетия проводились интенсивные работы по натурным измерениям морских волн, построению новых физико-математических и вероятностных моделей, физическому моделированию, учёту создаваемых экстремальными волнами нагрузок, развитию методов прогноза морских волн. Обзоры актуальных исследований волн-убийц можно найти, например, в монографиях [5, 11 – 14], статьях [7, 15 – 19]. Настоящий обзор посвящён в первую очередь обсуждению полученных в последние несколько лет результатов построения физико-математических моделей волн-убийц и моделирования аномально высоких морских волн. Одновременно с прогрессом в изучении морских волн-убийц родственные исследования стали проводиться в других

© А.В. Слюняев, Д.Е. Пелиновский, Е.Н. Пелиновский 2023

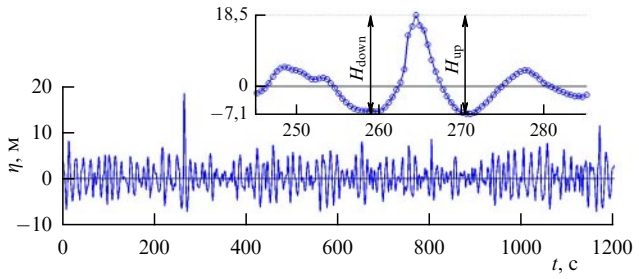

Рис. 1. Запись Новогодней волны: смещение поверхности в точке измерения от времени. Высоты аномальной волны, определённые согласно методам *down-crossing* и *up-crossing*, показаны на вставке как $H_{\rm down}$ и $H_{\rm up}$.

областях физики, прежде всего в нелинейной оптике (см. [17, 20–22]). Специфика "оптических волн-убийц" в настоящем обзоре обсуждаться не будет.

Абсолютное большинство осуществлённых и ныне проводящихся измерений волн в море представлено временны́ми последовательностями моментального смещения поверхности воды в точке измерения. Длинные записи разделяются на интервалы 10–30 мин, которые предполагаются статистически однородными. Для каждого такого временно́го интервала запись разбивается на единичные волны на основе пересечения уровня невозмущённой поверхности. Главными характеристиками индивидуальных волн являются их периоды и высоты. Последние вычисляются как вертикальное расстояние между верхней точкой (гребнем) и нижней точкой (ложбиной) индивидуальной волны (см. вставку на рис. 1). Существуют различные варианты реализации описанной процедуры [23], потому периоды и высоты волн могут оцениваться немного по-разному.

На рисунке 1 приведён наиболее известный пример аномально высокой волны — так называемой Новогодней волны (New Year Wave), зарегистрированной лазерным альтиметром на платформе "Дропнер" (Draupner) в Северном море [24] 1 января 1995 г. На рисунке представлены 20-минутная запись смещения поверхности, а также её отрезок с аномальной волной. Частота измерений 2,1 Гц обеспечивает достаточно подробное описание профиля волны (кружки на вставке). Высота Новогодней волны, оцениваемая как $H = 25{,}6$ м, значительно превышает уровень фонового волнения.

Традиционным для описания волн на морской поверхности первым приближением является их представление в виде линейной суперпозиции независимых случайных синусоидальных волн. Тогда в силу центральной предельной теоремы смещение поверхности подчиняется гауссовой статистике, а при предположении достаточно узкого спектра вероятность измерения волны с высотой не менее чем H описывается распределением Рэлея [25]:

$$P(H) = \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right), \tag{1}$$

где σ^2 — дисперсия смещений поверхности. В океанографии характерная (так называемая значительная, *significant*) высота волн $H_{\rm s}$ обычно определяется как среднее от трети наиболее высоких волн в записи, $H_{1/3}$. В случае узкого спектра эта величина связана со среднеквадратичным смещением поверхности, $H_{1/3} \approx 4{,}004\sigma$. Для не слишком узкого спектра используется модификация формулы (1):

$$P(H) \approx \exp\left(-2\frac{H^2}{H_{\rm s}^2}\right), \tag{2}$$

где использование $H_{\rm s} = H_{1/3}$ позволяет снизить вклад мелкомасштабных волн в оценку значения средней высоты и получить лучшее совпадение с результатом прямого моделирования.

В качестве характеристики "неординарности" высокой волны вводят параметр превышения фонового волнения AI (*amplification index* или *abnormality index*)

$$\mathrm{AI} = \frac{H}{H_{\rm s}}, \tag{3}$$

где значительная высота $H_{\rm s}$ определяется как $H_{\rm s} = H_{1/3}$ или $H_{\rm s} = 4\sigma$. Наиболее часто используемое в литературе определение, выделяющее класс "волн-убийц", задаёт минимальное необходимое превышение высоты волны $\mathrm{AI} > 2$. Альтернативные определения морских волн-убийц могут использовать другие пороговые значения AI, включать в себя дополнительные требования (к абсолютной величине волны, асимметрии волны), формулироваться для высоты гребня и т.д. В настоящем обзоре в качестве определения волн-убийц будет использоваться критерий превышения для высот волн (3) или схожий критерий для коэффициента усиления амплитуд волн (39).

Распределение вероятностей превышения высот волн (2) довольно хорошо описывает реальную ситуацию для не слишком редких событий и соответственно не слишком высоких волн [25]. Для введённого параметра AI (3) легко сделать оценку повторяемости событий экстремальных волн согласно распределению вероятностей (2). Для Новогодней волны $H_{1/3} \approx 11{,}4$ м и $H/H_{1/3} \approx 2{,}24$, отсюда следует, что она соответствует событию с вероятностью примерно 4×10^{-5}, т.е. одной волне из примерно 20 тыс. Полагая период ветровых волн равным 10 с, получим, что волна с индексом $\mathrm{AI} = 2{,}24$ имеет повторяемость менее 3 сут. Аналогично, волны с превышением $\mathrm{AI} = 2$ должны регистрироваться 2–3 раза в сутки. Поскольку с практической точки зрения важна высота волн по абсолютной величине, что не учитывается определением волн-убийц на основе параметра AI, в действительности опасные волны-убийцы встречаются намного реже.

Проблема волн-убийц на морской поверхности может быть сформулирована в статистическом смысле как описание вероятностных свойств волн (их высот, амплитуд гребней и ложбин и т.д.) в условном диапазоне волн-убийц $\mathrm{AI} > 2$; распределение Рэлея обычно используют в качестве референтного. В практических приложениях в рамках квадратичной слабонелинейной теории учитываются отличия формы волн от синусоидальной, что в первую очередь изменяет распределения вероятностей для амплитуд гребней и ложбин волн, но не высот. Волны-убийцы не описываются статистическими моделями второго порядка. В разделе 2 обсуждается, что, несмотря на большое количество инструментальных измерений волн на поверхности моря (несколько сотен миллионов индивидуальных волн), достоверного статистического описания в диапазоне волн-убийц не получено. Там же приводятся имеющиеся наблюдения аномально высоких волн очевидцами.

Отклонение статистики волн от гауссовой удобно оценивать по значениям статистических моментов. Дис-

персия определяется через среднеквадратичное отклонение смещения поверхности η: $\sigma^2 = \langle \eta^2 \rangle$ с нулевым средним, $\langle \eta \rangle = 0$; третий и четвёртый статистические моменты λ_3, λ_4 определяются по формулам

$$\lambda_3 = \frac{\langle \eta^3 \rangle}{\sigma^3}, \qquad \lambda_4 = \frac{\langle \eta^4 \rangle}{\sigma^4}. \tag{4}$$

Хорошо известно, что для гауссовой случайной величины $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 3$. Отклонения от этих значений измеренных величин означают соответственно вертикальную асимметрию волн и изменение баланса между долями смещений поверхности малой и большой величины (величину $\lambda_4 - 3$ называют эксцессом).

В динамическом смысле проблема волн-убийц может пониматься как поиск действующих механизмов быстрого значительного усиления амплитуды волн; (см. обсуждение в разделе 3). В первую очередь в литературе были рассмотрены линейные механизмы фокусировки волн, эффекты усиления волн на течениях. Поскольку процессы случайной суперпозиции волн в однородных условиях уже учтены в гауссовой статистике, важны другие эффекты усиления волн. В настоящем обзоре акцент делается на новых для океанологии механизмах роста волн в результате "быстрых" нелинейных взаимодействий волн, инициируемых в том числе изменением условий (неоднородное дно, течения, переменный ветер). Эти эффекты не учитываются в кинетических уравнениях, используемых центрами прогноза для моделирования волнения. Наиболее представительный пласт работ связан с "переоткрытием" эффекта модуляционной неустойчивости морских волн, которая представляется наиболее вероятным кандидатом на роль универсального механизма повышения вероятности аномально высоких волн при определённых условиях.

Бóльшая часть исследований морских волн-убийц выполнена для условий глубокого моря. В этом пределе из постановки задачи выпадает параметр глубины и трёхволновые взаимодействия приводят лишь к изменению формы волн. В случае бассейна небольшой глубины смещение поверхности подчиняется гауссову распределению только для волн с очень малой амплитудой. Действенная для условий глубокой воды модуляционная неустойчивость исчезает на мелководье. Однако эффекты нелинейной динамики волн на мелкой воде также могут приводить к значительному увеличению вероятности высоких волн. Волны, распространяющиеся в условиях переменной глубины, подвержены разным нелинейным механизмам усиления. Эти эффекты также обсуждаются в разделе 3.

Использование интегрируемых нелинейных моделей в качестве первого приближения для описания эффектов волн-убийц позволяет применять метод обратной задачи рассеяния и родственные точные методы для получения модельных аналитических решений, эффективного описания нелинейных волн и их ансамблей [26 – 28]. В работах [29, 30], например, в качестве математических моделей волн-убийц были предложены бризерные решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) [31 – 34], реализующие нелинейный механизм генерации неожиданно высоких волн, которые "возникают из ниоткуда и исчезают без следа" [35]. Позднее этот класс решений был дополнен новыми решениями НУШ и других интегрируемых уравнений, описывающими нелинейную стадию развития неустойчивости синусоидальных и несинусоидальных волн. Класс подобных решений нелинейных уравнений называют "решениями типа волн-убийц" (*rogue wave solutions*), они уже утратили свои физические "корни" и исследуются как самостоятельные математические объекты. Было показано соответствие между модуляционной неустойчивостью и решениями типа волн-убийц, получено универсальное описание картины модуляционной неустойчивости. Эти результаты обсуждаются в разделе 4.

Ввиду упомянутых выше трудностей определения вероятностных свойств волн-убийц по натурным данным особое внимание получило моделирование волн в рамках лабораторных экспериментов и численное моделирование. Используемый в наши дни для оперативного прогноза расчёт эволюции волн в рамках спектральных уравнений энергетического баланса основан на предположениях относительно слабой нелинейности, квазистационарности и независимости случайных фаз волн [36]. Кинетические модели не способны учитывать волны-убийцы, и требуется прямое (фазоразрешающее) численное моделирование наиболее полных уравнений гидродинамики. В то же время для получения больших статистических ансамблей нужны быстрые коды [37, 38]. Методы расчёта уравнений гидродинамики, используемые для стохастического (Монте-Карло) моделирования морских волн, приводятся в разделе 5. Далее в том же разделе обсуждаются результаты численного моделирования ансамблей нерегулярных волн: наблюдение быстрой эволюции волн, вероятностные распределения, а также результаты исследований характерного портрета волн-убийц: формы экстремальных волн, длительности событий.

Обсуждение общей картины полученных результатов, открытых проблем и перспективных направлений исследований волн-убийц приведено в заключении (раздел 6). Кроме получения расчётных характеристик экстремальных волн практически важной является возможность предсказания опасных волн на разных временны́х горизонтах: детерминистский прогноз на малых временах (несколько минут) и вероятностный прогноз для более продолжительных временны́х интервалов.

2. Данные наблюдений и регистраций волн-убийц

Сообщения о внезапных морских волнах, приводящих к повреждению кораблей и конструкций в открытом море и на берегу, смывающих людей на побережье, появляются в средствах массовой информации (СМИ) практически каждую неделю. Из последних случаев — 16 января 2021 г. 114-метровое грузовое судно "Арвин" было разбито надвое волной в Чёрном море у побережья Турции и затонуло, спаслось только шестеро членов экипажа из 13 [39]. 4 января того же года неожиданная волна смыла двух детей с пляжа в Калифорнии, и их отец погиб, пытаясь спасти детей [40]. В интернете можно найти большое количество описаний, фото- и видеодокументов таких событий и волн. В последние 20 лет были сделаны попытки собрать и проанализировать подобные случаи волн-убийц [8 – 10, 41 – 47]. Составленные каталоги содержат подробные описания произошедших событий, а также некоторые их характеристики по свидетельствам очевидцев и доступным данным (метеообстановка, реанализ волнения в акватории и т.п.). В качестве определяющего критерия волн-убийц обычно исполь-

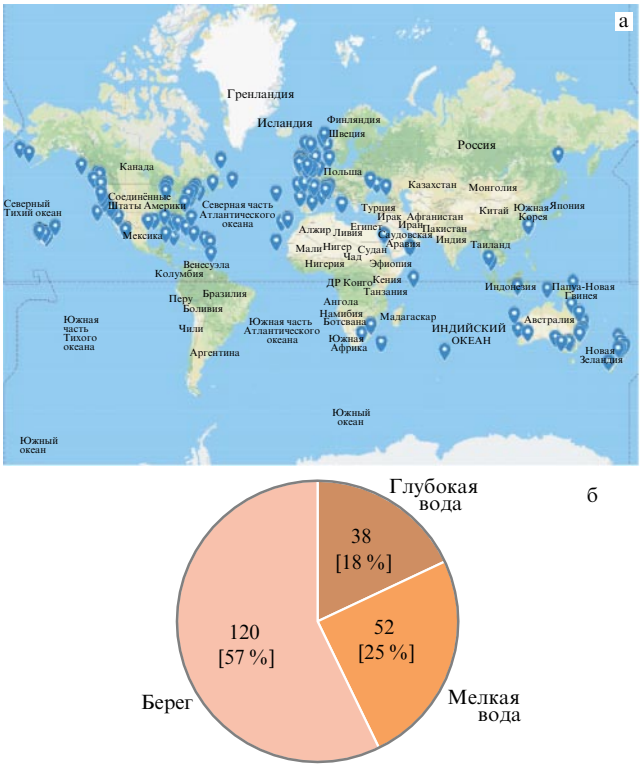

Рис. 2. (а) Места событий волн-убийц в мире по данным СМИ в 2011 – 2018 гг. (б) Распределение случаев по местам возникновения [10].

зуется высотный (3), хотя сведения об амплитуде волны не всегда достоверно известны. Кроме того, в СМИ обычно освещаются события, принёсшие наибольший урон, безотносительно высоты волн.

Последний каталог [8] содержит описания 210 событий за период 2011 – 2018 гг., что в среднем соответствует одному случаю в три недели. Географическое распределение наблюдавшихся волн-убийц представлено на рис. 2а. Неравномерность распределения связана как с привязкой к основным путям судоходства в Мировом океане, так и с разной плотностью заселения берега, трудностями поиска информации в неанглоязычных СМИ. Рисунок 2б иллюстрирует распределение зарегистрированных случаев по местам наблюдения: глубокая или мелкая вода (в качестве пороговой выбрана глубина 50 м), а также на берегу. Как видно из рисунка, аномальные волны наблюдались как на глубокой воде, так и на мелководье (этот факт отдельно исследовался в работе [48]). Наиболее часто в поле зрения СМИ попадают случаи аномальных волн на берегу (в англоязычной литературе их называют *sneaker waves*), но катастрофы с затонувшими кораблями в открытом море лидируют по числу погибших.

Перелом в признании проблемы аномально высоких морских волн сообществом океанологов и морских инженеров связан с появлением большого массива данных инструментальных измерений морских волн. Подавляющее большинство измерений представлено записями смещения морской поверхности в одной точке, полученными устройствами разного рода (буи, высотомеры, датчики донного давления и т.д.) на различных глубинах. В XXI в. ветровые волны 30-метровой высоты регистрировались неоднократно; значительная высота волн может достигать 14 – 16 м в Северной Атлантике [49, 50] и даже выше в других акваториях [51]. Некоторые волны, демонстрирующие экстраординарное превышение фонового волнения, получили собственные имена: кроме Новогодней волны (или волны Дропнера, Draupner wave, 1995 г., AI $\approx 2{,}24$) это волны Yura (1987 г., AI $\approx 2{,}67$), Andrea (2007 г., AI $\approx 2{,}67$), Killard (2014 г., AI $\approx 2{,}29$). Накопленные данные регистрации поверхностных волн позволяют говорить о количественных характеристиках волн-убийц и строить соответствующие вероятностные распределения, требуемые в инженерии.

Так, в работе [52] приводятся результаты обработки 122 млн индивидуальных волн, измеренных с добывающих платформ и буями в четырёх разных географических пунктах (более 30 мест измерений, глубины от 7 м до 1,3 км), более 3,5 тыс. из этих волн удовлетворяют амплитудному критерию волн-убийц (3). Таким образом, примерно одна волна из 33 тыс. оказывается аномально высокой, и если за характерный период ветровых волн принять 10 с, то получается, что волна-убийца в среднем появляется каждые четыре дня. В рассматривавшемся банке данных максимальная высота волны 25,5 м, а максимальная высота гребня 18,5 м. Авторы [52] не смогли выявить характеристики волнения, благоприятствующие возникновению волн-убийц; аномальные волны встречаются при различных комбинациях ветрового волнения и зыби. По итогам работы был сделан вывод, что волны-убийцы являются результатом дисперсионной фокусировки, для их объяснения нелинейных механизмов не требуется.

Другой банк данных на основе 20-летних записей на 34 буях в Тихом океане проанализирован в [53], он содержит примерно 800 млн индивидуальных волн, включая 8 тыс. волн-убийц (одна волна-убийца на 100 тыс. волн). Отмечается, что число волн-убийц, зарегистрированных на одном буе за год, может достигать 50. Заметной связи между частотой волн-убийц и глубиной моря обнаружено не было (измерения проводились в условиях довольно глубокой воды, более 80 м). За всё время наблюдений индекс превышения высоты AI (3) пять раз достигал значения 3.

В то же время вывод о зависимости частоты возникновения аномальных волн от места регистрации делался в работе [54] на основе обработки записей с 80 буёв вдоль берегов Америки для глубин от 10 м и более: 1,1 млрд индивидуальных волн, почти 75 тыс. волн-убийц с AI > 2, включая 19 волн с AI > 5, в среднем одна волна-убийца на 15 тыс. волн. (Согласно рэлеевской статистике (2), усиление AI $= 5$ должно соответствовать повторяемости события более чем 10^{15} лет в случае волн с периодом 10 с. Поэтому полученный результат, очевидно, говорит либо о фактически много большей вероятности возникновения волн-убийц, либо о недостоверности измерений.) Как подчёркивалось в исследовании, чувствительность к локальным условиям особенно высока для прибрежных районов и наиболее вероятно, что механизмы возникновения волн-убийц в разных местах различны. Многолетние наблюдения в [55] показывают также межгодичную изменчивость частоты появления волн-убийц, которая по-разному проявляется в различных районах океана.

Более 300 млн индивидуальных волн, измеренных разными датчиками в условиях мелководья Северного моря (не глубже 35 м), проанализированы в статье [56]. В сравнении с описанными выше случаями они демонстрируют более высокую среднюю частоту появления волн-

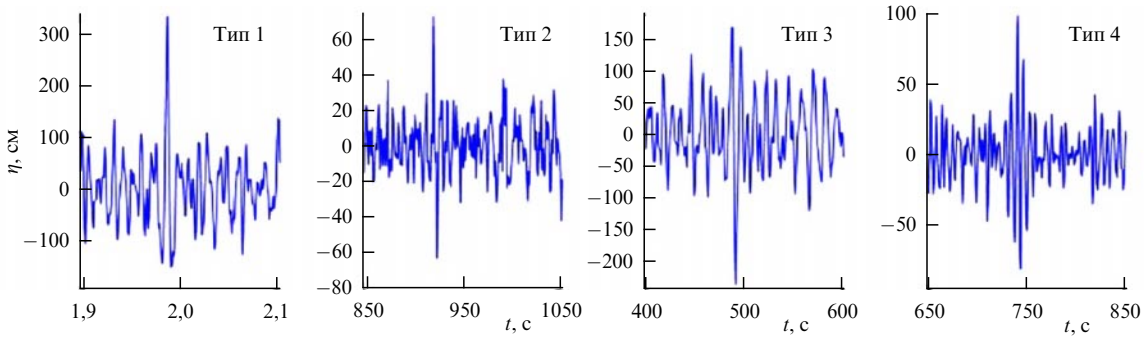

Рис. 3. Разные формы волн-убийц, зарегистрированных буем на западном шельфе Индии [61]: высокий гребень (тип 1), знакопеременная волна (тип 2), "дырка в море" (тип 3), интенсивная группа (тип 4).

убийц — один раз на 5–8 тыс. волн в зависимости от точки измерения. В то же время в [44] по итогам статистического исследования более 1 млн волн, зарегистрированных буями на разных глубинах, делается вывод о более частом возникновении волн-убийц в условиях открытого моря, глубокой воды.

Отметим, что приведённые выше оценки средней частоты повторяемости аномально высоких волн существенно *ниже*, чем следует из линейной теории для узкополосного гауссова процесса — рэлеевской кривой (2) (одна волна-убийца из 3000). Они также противоречат результатам более ранних натурных исследований [57–59], в которых заявлялось о значительной недооценке вероятности волн-убийц распределением Рэлея.

Принципиальными трудностями построения вероятностных распределений на основе натурных измерений являются статистическая неоднородность и конечность выборок (*sampling variability*). В то же время остаётся актуальным и вопрос качества регистрации экстремальных волн: как точность процедуры восстановления информации о смещении поверхности в случае косвенных измерений (донным датчиком давления или акселерометром на буе и т.п.), так и технические особенности приборов и связанные с ними погрешности. Применяемые при регистрации волн эмпирические процедуры контроля качества записей сами могут являться источником систематических ошибок. Обсуждаемая выше противоречивость выводов, следующих из статистической обработки данных длительных натурных измерений, придаёт особую важность результатам физического моделирования в рамках прямого численного моделирования или экспериментальных измерений в контролируемых условиях.

Кроме оценивания вероятностных свойств экстремальных волн данные натурных измерений исследуются на предмет характерных форм экстремальных волн, что может быть использовано, например, для оценки воздействия на сооружения. Ранее в литературе отмечалась особенная форма аномальных волн, возникающих на сильном встречном течении мыса Игольного (юго-восточное побережье Африки), — с протяжённой пологой ложбиной и последующим крутым высоким гребнем, так называемая волна Лавренова [60].

В целом, данные наблюдений свидетельствуют о разнообразии форм волн-убийц, даже измеренных в одном и том же месте в разное время. На рисунке 3 приведены формы волн-убийц, обнаруженных в записях на буе, установленном на глубине 13 м у западного побережья Индии [61]. Наиболее часто аномально высокие волны являются

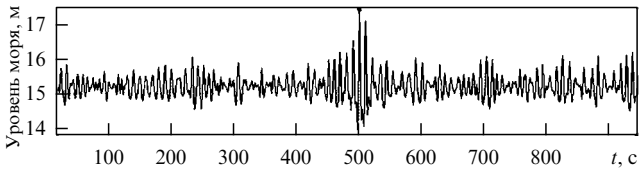

Рис. 4. Запись волнения в районе устья озера Изменчивое (Сахалин), содержащая аномальную волну с AI = 2,65 [63].

единичными с большим гребнем (тип 1), могут быть знакопеременными (тип 2), но возникают и в составе группы из нескольких больших волн ("девятый вал" или "три сестры", тип 4). Также регистрируются и волны с очень глубокой ложбиной (так называемая дырка в море, тип 3), причём в исследовании [61] дырки в море составили почти 40 % от общего числа волн-убийц. По результатам измерений в прибрежной зоне Балтийского моря [62] 63 % наблюдаемых волн-убийц представляли собой одиночный гребень, а 17 % — одиночную впадину. Бóльшая часть аномальных волн на мелководье шельфа острова Сахалин [63] оказалась представленной группами высоких волн, как в примере, приведённом на рис. 4. Регистрировались волны-убийцы и в Чёрном море [4, 64].

Последовательных статистических исследований форм аномальных волн с хорошей обеспеченностью немного. Усреднённые профили натурных волн-убийц по результатам двух работ приведены на рис. 5; они выглядят довольно схожими. В [52] отмечалась в среднем бóльшая крутизна волн-убийц по сравнению с крутизной "нормальных" больших волн (рис. 5а). Как видно, гребни волн острее, их высота больше глубин соседних ложбин, что качественно согласуется с решением для стационарной нелинейной волны на глубокой воде (волны Стокса). Некоторые из записей волн-убийц (например, Andrea Wave) демонстрируют сильную асимметрию гребня, являющуюся признаком обрушения. Усреднённые профили экстремальных волн для заданных порогов AI были построены в [54] и сравнены с формами "обычных" волн (AI < 2), а также с выводами других работ на основе натурных данных. Хотя авторы упомянутых работ едины в том заключении, что в характерном портрете волны-убийцы имеется острый гребень, следующий между более мелкими ложбинами, выводы по более детальному описанию неоднозначны. На рисунке 5б из [54] приведены профили экстремальных волн, которые выглядят заметно различными для наборов волн-убийц, выделенных по высотному признаку (3) (синяя кривая) и аналогичному критерию для высот гребней волн (красная кри-

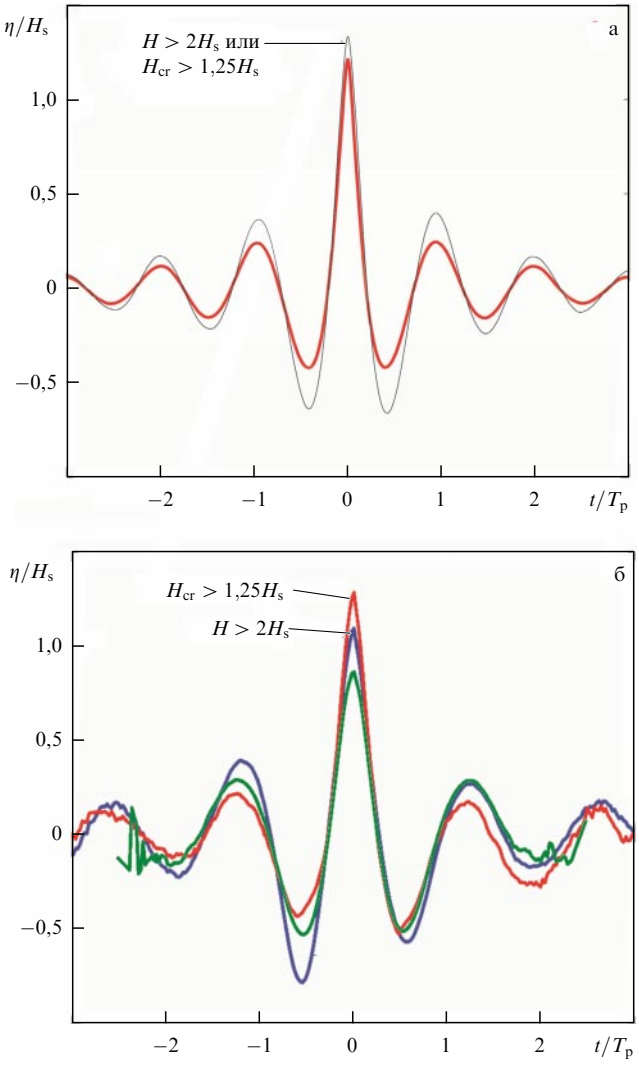

Рис. 5. (а) Усреднённый профиль волн-убийц (чёрная кривая) и 1 % "нормальных" волн с максимальной амплитудой гребня (красная кривая) по результатам [52]. (б) Формы волн-убийц с высотой более $2H_s$ (синяя кривая), высотой гребня более $1{,}25H_s$ (красная кривая), а также 1 % самых высоких "нормальных" волн (зелёная кривая) по результатам [54].

вая). По результатам измерений у побережья Бразилии [58] волны-убийцы с более глубокими ложбинами позади экстремального гребня встречаются почти в два раза чаще, чем с ложбинами, расположенными спереди. Этот вывод противоположен картине на рис. 5б (синяя кривая). В [65] обсуждались существенные различия формы и асимметрии экстремальных волн в зависимости от достижения ими порога обрушения.

В последние годы развиваются новые для океанографии теоретические и экспериментальные подходы для описания движения двумерной поверхности, что поддерживается растущими возможностями по прямому численному моделированию морских волн и развитием методов стереометрической регистрации волн в натурных условиях [66–68]. Как можно ожидать, выход за рамки одноточечных измерений морской поверхности, отслеживание динамики волн в пространстве и времени позволят более определённо ответить на вопросы о характерных формах волн-убийц, их вероятностных свойствах и наиболее действенных механизмах генерации.

3. Физические механизмы и модели возникновения морских волн-убийц

Верное представление о физических эффектах, приводящих к возникновению волн-убийц, необходимо для моделирования динамики и статистики этих волн, а также разработки методов прогноза. Кроме описания собственно физических механизмов в разделе 3.1 мы сформулируем базовые модели.

3.1. Базовые уравнения гидродинамики

Для описания морских волн интересующих нас масштабов обычно хорошо применимо предположение о потенциальности движения жидкости, приводящее к уравнению Лапласа для потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, которое запишем для слоя однородной несжимаемой воды выше горизонтального уровня дна $z = -h$ со свободной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,, \quad -h \leqslant z \leqslant \eta\,. \tag{5}$$

Используется декартова система координат (x, y, z), где ось z направлена вертикально вверх, а направление оси x далее будет выбираться совпадающим с доминирующим направлением движения волн. Система уравнений гидродинамики также включает в себя условие непротекания на дне, кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности [26, 69]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,, \quad z = -h\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,, \quad z = \eta\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \times \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] - P_a\,, \quad z = \eta\,. \tag{8}$$

В (7) и (8) введён поверхностный потенциал $\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y, z = \eta, t)$, g — ускорение свободного падения, P_a — давление атмосферы над поверхностью. В рассматриваемых задачах для волн длиннее 10 см можно пренебречь силой поверхностного натяжения. Пренебрегая слабыми эффектами неоднородности давления P_a, без потери общности можно выбрать $P_a \equiv 0$, и тогда уравнения (5)–(8) описывают только движение воды.

В приближении волн малой амплитуды решение уравнений (5)–(8) имеет вид [69]

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}\left[A\exp(\mathrm{i}\theta)\right]\,, \quad \theta = \mathbf{kx} - \omega t\,, \tag{9}$$

$$\varphi(\mathbf{x}, z, t) = \frac{g}{\omega}\,\mathrm{Im}\left[A\exp(\mathrm{i}\theta)\right]\Psi(z)\,,$$
$$\Psi(z) = \frac{\cosh\left(|k|(z+h)\right)}{\cosh\left(|\mathbf{k}|h\right)}\,, \tag{10}$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|\tanh\left(|\mathbf{k}|h\right)}\,. \tag{11}$$

Здесь введено обозначение $\mathbf{x} = (x, y)$ для вектора, лежащего в горизонтальной плоскости, параметр $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — волновой вектор, ω — частота, связанная с волновым вектором дисперсионным соотношением (11), A — амплитуда волны. Вертикальная структура потенциала скорости входит в (10) в виде множителя $\Psi(z)$, зависящего от волнового числа. Общее линейное решение начальной задачи представляется в виде свёртки (9)–(11) по волновым векторам (представление в виде интеграла Фурье).

Эффективным подходом для описания поверхностных волн является гамильтонов формализм, развитый в работе [26]. Переменные η и Φ образуют каноническую пару с гамильтонианом H, уравнения движения для которых имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Phi}\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}\,, \tag{12}$$

$$H = T + U\,, \quad T = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{-h}^{\eta} (\nabla\varphi)^2\, \mathrm{d}\mathbf{z}\,,$$

$$U = \frac{g}{2}\int \eta^2\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{13}$$

Введение нормальных переменных $a_{\mathbf{k}}(t)$ в двумерном пространстве волновых векторов позволяет получить нелинейные уравнения в спектральной форме:

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\mathrm{i}\frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^*}\,, \tag{14}$$

$$\eta_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2g}}\,(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*)\,, \quad \Phi_{\mathbf{k}} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\,(a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*)\,,$$

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi}\int a(\mathbf{x}, t)\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,, \tag{15}$$

где $\eta_{\mathbf{k}}$ и $\Phi_{\mathbf{k}}$ — преобразования Фурье от смещения поверхности и поверхностного потенциала соответственно, $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$ — дисперсионное соотношение для линейных волн. Гамильтониан взаимодействий между волнами H_{int} ($H = H_0 + H_{\mathrm{int}}$, $H_0 = \int \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*\, \mathrm{d}\mathbf{k}$) имеет сложную форму. Его представление в виде асимптотического разложения по малому параметру крутизны волн позволяет получить более простые приближённые уравнения [70–72]. Переход к новым каноническим переменным $b_{\mathbf{k}}(t)$ исключает из динамических уравнений нерезонансные трёхволновые (распадные) взаимодействия и упрощает нелинейную часть. Получаемое в итоге эволюционное уравнение для волн на глубокой воде в новых переменных сохраняет форму (14),

$$\mathrm{i}\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \int T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \times$$

$$\times\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1\, \mathrm{d}\mathbf{k}_2\, \mathrm{d}\mathbf{k}_3\,. \tag{16}$$

Уравнение Захарова (16) остаётся технически сложным для решения из-за шестикратного интеграла в правой части. Нелинейный коэффициент 4-волновых взаимодействий $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ в подынтегральной части также имеет довольно громоздкий вид [70], но обладает свойствами симметрии по индексам взаимодействующих волн, а также однородности, что может быть использовано (см. раздел 5.2).

3.2. Геометрическая и дисперсионная фокусировка

Для описания фокусировки волн, в том числе в условиях плавно изменяющейся среды, например при переменной глубине, в поле неоднородных течений, удобным является приближение геометрической оптики [69]. Лучи, вдоль которых распространяется линейная волна (9)–(11), определяются системой в гамильтоновой форме:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}\,, \tag{17}$$

а являющиеся функциями координаты и времени волновой вектор и частота определяются через фазу волны $\theta(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \nabla\theta$, $\omega(\mathbf{x}, t) = -\partial\theta/\partial t$. При тех же предположениях амплитуда волн находится из уравнения баланса энергии,

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{c}_{\mathrm{gr}} |A|^2\right) = 0\,, \tag{18}$$

где $\mathbf{c}_{\mathrm{gr}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — групповая скорость. Амплитуда волн возрастает в областях схождения лучей, вдоль которых переносится волновая энергия (эффект геометрической фокусировки). Такая ситуация может возникать при интерференции различных волновых систем (например, ветровых волн, созданных разными штормами), рефракции волн на особенностях батиметрии (подводные холмы, гребни, береговые линии и т.д.), а также на течениях.

Лучевая теория в физике, в частности в приложении к волнам на поверхности воды (например, к волнам цунами), очень хорошо разработана. Формально обращающаяся в бесконечность амплитуда волн на каустиках оказывается конечной при более аккуратном анализе. Картина лучей, каустик и областей фокусировки волновой энергии в условиях реального океана очень сложна и изменчива и может рассматриваться как случайная.

Дисперсионная фокусировка является другим очевидным линейным механизмом возникновения волн большой амплитуды. Она может быть описана с помощью преобразования Фурье на основе решения (9)–(11), но особенно наглядной становится после сведения (17) к кинематическому уравнению для групповой скорости $c_{\mathrm{gr}}(k)$ (здесь для простоты рассмотрено однонаправленное движение, $\mathbf{c}_{\mathrm{gr}} = (c_{\mathrm{gr}}, 0)$) [73]

$$\frac{\partial c_{\mathrm{gr}}}{\partial t} + c_{\mathrm{gr}}\frac{\partial c_{\mathrm{gr}}}{\partial x} = 0\,. \tag{19}$$

Решение уравнения (19) имеет вид простой волны $c_{\mathrm{gr}}(x, t) = c_0(x - c_{\mathrm{gr}}t)$ и может быть проанализировано графически. В начальный момент времени $t = 0$ в последовательности волн более быстрые оказываются позади медленных, если $\mathrm{d}c_0/\mathrm{d}x < 0$. Соответственно в этих интервалах цуга будет происходить сложение энергии волн, соответствующее возрастанию моментального градиента функции $c_{\mathrm{gr}}(x)$. Эволюция интенсивности волн описывается одномерной версией уравнения (18), решение которого в виде римановой волны находится аналитически и может достигать формально бесконечной величины при сложении волн разных длин.

Генерируемые ветром волны могут быть крайне неоднородными по направлениям и длинам, что создаёт условия для постоянно происходящих процессов случайной пространственно-временно́й фокусировки [74]. В то же время случайная суперпозиция волн учитывается в рамках гауссовой статистики и следующего из неё рас-

пределения Рэлея для высот волн, поэтому события геометрической и дисперсионной фокусировки в однородных стационарных условиях не изменяют рэлеевского распределения вероятностей экстремальных волн.

Процессы линейной суперпозиции волн с разными длинами или направлениями неоднократно воспроизводились в лабораторных условиях в различных вариациях и могут считаться стандартными [75, 76]. Учёт нелинейных поправок к частоте (так называемое нелинейное дисперсионное соотношение) улучшает описание, но значительно усложняет проблему нахождения последовательности волн, обеспечивающей наиболее сильную фокусировку. Здесь эффективным является метод обращения волнового фронта, когда решается начальная нелинейная задача с ожидаемой формой волны-убийцы и получаемое на больших временах решение необходимо инвертировать для осуществления обратного процесса [73, 77, 78]. С физической точки зрения фокусирование линейных и нелинейных пакетов происходит одинаково в отсутствие неустойчивости, поэтому обычно говорят о дисперсионном фокусировании даже в рамках нелинейной задачи. Эффекты дисперсионного и геометрического схождения волн могут обеспечивать начальную стадию роста волн, который далее продолжается в результате действия нелинейных механизмов [79 – 81].

3.3. Нелинейные взаимодействия волн и модуляционная неустойчивость

Нелинейность нарушает независимость спектральных компонент, предполагаемую центральной предельной теоремой, что может приводить к существенным отклонениям от гауссовой статистики. Эффекты нелинейности определяют динамику больших волн и потому принципиальны для описания реалистичных волн-убийц. Ввиду сложности решения нелинейных задач значительная часть исследований базируется на численном моделировании и/или приближённых уравнениях.

Доминирующая часть исследований посвящена условиям открытого океана и большой глубины ($kh \gg 1$), когда дисперсия сильная. Для волн на глубокой воде резонансные условия между тройками волн (квадратичная нелинейность) в обычных ситуациях не выполняются, нелинейная динамика обусловлена нелинейностью следующего порядка (4-волновые взаимодействия). Нерезонансные квадратичные и более высокого порядка взаимодействия явно проявляются в отклонении формы волн от синусоидальной, но не влияют на эволюцию спектра нормальных волн $b_{\mathbf{k}}$ (16). Условия 4-волновых резонансных взаимодействий имеют вид

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\,, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4\,, \tag{20}$$

где каждая из частот определяется через дисперсионное соотношение, $\omega_j = \omega(\mathbf{k}_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Резонансные условия записываются для предела волн бесконечно малой амплитуды, хотя под действием нелинейности они изменяются. Неоднократно показывалось, что квазирезонансные (почти резонансные) взаимодействия играют не меньшую роль, чем взаимодействия между волнами, находящимися в точном резонансе [82, 83]. В случае волн на большой глубине степень нелинейности определяет крутизна волн, $\varepsilon \sim k|A|$.

Выражение для эксцесса смещений поверхности, учитывающее слабые корреляции нормальных волн в результате 4-волновых взаимодействий в рамках уравнений Захарова, можно найти в [84]:

$$\lambda_4^{\mathrm{dyn}} = \frac{12}{g^2\sigma^2}\int T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\sqrt{\omega\omega_1\omega_2\omega_3}\,G_r N_1 N_2 N_3 \times \\ \times\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}-\mathbf{k_3})\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\mathrm{d}\mathbf{k}_2\mathrm{d}\mathbf{k}_3\,, \\ \langle b b_1^*\rangle = N(\mathbf{k})\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,, \quad G_r = \frac{1-\cos(\Delta\omega t)}{\Delta\omega}\,, \tag{21}$$

где

$$\Delta\omega = \omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3\,.$$

Соотношение (21) записывается для спектральных компонент волнового действия $N(\mathbf{k})$ (угловые скобки означают усреднение по ансамблю), поэтому уже не содержит зависимости от фаз волн, но наследует от динамического уравнения 6-кратный интеграл. Этот интеграл вычислен в [85] для квазистационарных условий (большие времена t) при предположении узкого спектра:

$$\lambda_4^{\mathrm{dyn}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\mathrm{BFI}^2\,, \tag{22}$$

где параметр BFI (Benjamin – Feir Index — индекс Бенджамина – Фиера) вычисляется через отношение меры нелинейности волн к дисперсии:

$$\mathrm{BFI} = \sqrt{2}\,\frac{\varepsilon}{\delta_k}\,. \tag{23}$$

Здесь $\delta_k = \Delta k/k$ — относительная ширина спектра волновых чисел. Полный эксцесс в (4) складывается из динамического λ_4^{dyn} и определяемого нерезонансными взаимодействиями $\lambda_4^{\mathrm{bound}}$ (связанные нелинейные волны),

$$\lambda_4 = 3 + \lambda_4^{\mathrm{dyn}} + \lambda_4^{\mathrm{bound}}\,, \quad \lambda_4^{\mathrm{bound}} = 24\varepsilon^2\,. \tag{24}$$

В рамках слабонелинейной теории второго порядка $O(\varepsilon^2)$ асимметрия задаётся связанными волнами, $\lambda_3 = 3\varepsilon$. Для реального моря можно использовать оценку для средней крутизны $\varepsilon = k\sigma = 0{,}03 - 0{,}1$, поэтому асимметрия и эксцесс от связанных волн малы. В то же время параметр BFI может быть не малым, если крутизна волн велика или спектр волновых чисел достаточно узок, и тогда общий эксцесс может значительно возрастать за счёт его динамической части.

В [85] теоретически показано для слабонегауссова процесса, что возрастание четвёртого момента, $\lambda_4 > 3$, приводит к увеличению вероятности волн с большой высотой, $H > 4\sigma$:

$$P(H) \approx \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right)\left[1 + (\lambda_4 - 3)B\left(\frac{H}{\sigma}\right)\right], \\ B(\xi) = \frac{1}{384}\,\xi^2(\xi^2 - 16) \tag{25}$$

(ряд Грама – Шарлье для слабонегауссова распределения [25]), поэтому эксцесс часто используют в качестве показателя степени экстремальности волнения.

Индекс BFI (23), который соответствует параметру подобия нелинейного уравнения Шрёдингера, был предложен в работах [84, 86] как глубоководный аналог известного параметра Урселла для слабонелинейных слабодисперсионных волн на мелкой воде. Основываясь на этом понимании, параметр BFI для конечной глубины моря можно легко записать с учётом коэффициентов НУШ (см. раздел 5.2, уравнение (61)) — нелинейности α и дисперсии β: $\mathrm{BFI}_{\mathrm{finite\ depth}} = \mathrm{BFI}(\alpha/\beta)^{1/2}$ [87].

Критерий BFI > 1 соответствует условиям возникновения модуляционной неустойчивости волн (см. обзор [27]). Неустойчивость однородных волн по отношению к достаточно длинным возмущениям развивается в результате квазирезонансных 4-волновых нелинейных взаимодействий и является доминирующим типом неустойчивости волн малой и умеренной крутизны на глубокой воде [88]. Продольные возмущения нелинейных волн становятся устойчивыми при уменьшении глубины, $kh < 1{,}363$; напротив, возмущения под углом к направлению движения волн остаются неустойчивыми, но с меньшим инкрементом до глубин $kh \sim 0{,}5$. Модуляционная неустойчивость исчезает на меньших глубинах.

Отметим, что фактически параметр BFI обсуждался намного ранее И. Альбером [89], который предложил аналог НУШ для описания случайных волн. На основе сделанных оценок Альбер заключил, что типичные морские спектры соответствуют устойчивому условию, хотя и близки к порогу неустойчивости. Им была высказана гипотеза, что модуляционная неустойчивость не позволяет реализовываться условиям со слишком узким спектром. Сегодня эффект модуляционной неустойчивости морских волн рассматривается как механизм возникновения волн большой амплитуды, увеличивающий их вероятность. Математическое описание этих процессов в рамках приближённых интегрируемых моделей обсуждается в разделе 4. Важная роль эффектов сильной нелинейности, приводящих к более резкому росту аномальной волны и последующему обрушению, подчёркивалась в работе [90]. Отметим, что в работе [91] обращалось внимание на нелинейные эффекты 5-волновых взаимодействий, проявления которых авторы наблюдали в спектре записи Новогодней волны. Пятиволновые резонансы реализуются только для трёхмерных волн, что осложняет исследование.

3.4. Обобщения параметра модуляционной неустойчивости

Введённый теоретически с использованием ряда предположений индекс модуляционной неустойчивости BFI (23) записан для параметров спектра ε и δ_k, поэтому он гипотетически позволяет оценивать опасность состояний моря на основе стандартных выходных данных существующих (спектральных) моделей прогноза волнения. Ряд исследований был направлен на поиск формы записи этого индекса, определяющей порог модуляционной неустойчивости волн при более реалистичных для моря условиях.

Продольные возмущения волн на глубокой воде соответствуют максимальному инкременту модуляционной неустойчивости [88], в то время как возмущения под слишком большим углом к доминирующему направлению движения волн устойчивы. Для описания неколлинеарных случайных волн в литературе предложено несколько альтернативных вариантов параметра модуляционной неустойчивости. В [92] модификация BFI сформулирована на основе теоретических представлений о зависимости эксцесса от параметров слабонелинейных волн с узким спектром, численного моделирования НУШ для двух поверхностных координат и сопоставления с данными лабораторных измерений,

$$\mathrm{BFI}_{2\mathrm{D}}^2 = \frac{\mathrm{BFI}^2}{1+\alpha_2 R}\,, \quad R = \frac{\delta_\theta^2}{2\delta_\omega^2}\,. \tag{26}$$

Здесь $\delta_\omega = \delta_k/2$ — относительная ширина частотного спектра для волн на глубокой воде, δ_θ — относительная ширина углового спектра, $\alpha_2 = 7{,}1$ — эмпирический коэффициент. В таком представлении формула для динамического эксцесса (22) сохраняет свой вид, только параметр BFI должен быть заменён своим двумерным аналогом $\mathrm{BFI}_{2\mathrm{D}}$. Схожая запись, основанная на модификации формулы для спектральной ширины, использовалась в [93].

Другие альтернативы индексу BFI предлагались в работах [94, 95] на основе уже упоминавшихся уравнений Альбера. В [94] в определение (23) был добавлен фактор, зависящий от ширины углового спектра. В [95] использован в явной форме модельный спектр морского волнения JONSWAP [96] (см. раздел 5) и предложены новые параметры в виде

$$\Pi_1 = \frac{\varepsilon}{\alpha_{\mathrm{P}}\gamma}\,, \quad \Pi_2 = \Pi_1 + \frac{0{,}0256}{\varepsilon A_{\mathrm{d}}}\,, \tag{27}$$

где α_{P} — множитель при профиле спектра, задающий интенсивность волн (так называемый параметр Филипса), γ — пиковатость спектра (степень выраженности главного спектрального пика). По умолчанию $\alpha_{\mathrm{P}} \sim 0{,}01$ и $\gamma = 3{,}3$. Авторы настаивают, что введённый для однонаправленных волн параметр Π_1 существенно отличается от BFI (23), поскольку параметры α_{P} и γ влияют и на крутизну волн, и на спектральную ширину, причём являются физически более адекватными характеристиками спектра. В той же работе предложено обобщение индекса модуляционной неустойчивости для неколлинеарных волн Π_2. Конечная ширина углового спектра учитывается в Π_2 (27) с помощью так называемой глубины углового спектра A_{d}, $\delta_\theta \sim A_{\mathrm{d}}^{-1}$. Также в [95] оценены пороговые значения, соответствующие модуляционно неустойчивым спектрам: $\Pi_1 > 1$ и $\Pi_2 > 1{,}1$; эти значения позднее уточнялись другими авторами.

3.5. Когерентные волновые структуры и их взаимодействия

При предположении слабости эффектов нелинейности, а также узости частотного и углового спектров система (5) – (8) может быть сведена к более простым нелинейным уравнениям (см. также раздел 5.2), в том числе к уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния (МОЗР): уравнениям Кортевега – де Вриза и Кадомцева – Петвиашвили (когда длина волн больше глубины, $kh \ll 1$) или к нелинейному уравнению Шрёдингера для слабых модуляций волн. Все перечисленные уравнения допускают точные решения в виде структурно устойчивых уединённых волн или волновых групп, существующих в результате баланса эффектов нелинейности и дисперсии. В случае волн на глубокой воде модуляционная неустойчивость непосредственно связана с бризерными решениями НУШ (см. раздел 4), которые в свою очередь могут интерпретироваться как солитоны огибающей на фоне однородной волны. Существование солитонов поддерживается когерентной динамикой соответствующих спектральных компонент, поэтому присутствие солитонов в полях нерегулярных волн изменяет статистику. Известно, что вероятность возникновения высоких волн на мелкой и глубокой воде возрастает при увеличении вклада солитонной части [86, 97]. Солитонные взаимодействия могут обеспечивать и прин-

ципиально нелинейные механизмы генерации волн-убийц [98 – 100]. Взаимодействие уединённых групп волн, распространяющихся под малым углом друг к другу, предлагалось в качестве естественного механизма возникновения волн-убийц в [101].

В предельном случае, когда волны представлены исключительно солитонами, говорят о солитонном газе. Спектр ассоциированной задачи рассеяния для интегрируемых уравнений содержит ключевую информацию о составе волн. Проблема установления связи между таким "нелинейным спектром" и статистическими свойствами солитонного газа (описание интегрируемой турбулентности) является предметом активных исследований [102 – 107] и выходит за рамки настоящего обзора. Отметим только, что разные типы солитонного газа обеспечивают повышенную или пониженную вероятность возникновения экстремальных волн [103]. Выполнен ряд работ по моделированию газа солитонов и солитонов огибающей в рамках неинтегрируемых обобщений модельных уравнений, а также исходных уравнений гидродинамики [108 – 110] (см. также раздел 5.5).

3.6. Нелинейная динамика волн при изменяющихся условиях

В многочисленных экспериментальных и теоретических работах показано, что модуляционно неустойчивая волновая система приходит в квазиравновесное состояние. При этом сначала спектр волн резко уширяется и вероятность экстремальных волн существенно возрастает; затем спектр сужается, но в меньшей степени (см. раздел 5.3). Элегантное теоретическое обоснование связи между шириной спектра и эксцессом дано в работе [111] с использованием гамильтонова представления для НУШ:

$$\lambda_4(t) = \lambda_4(t_0) + \frac{\beta}{2\alpha}\,\frac{\delta_k^2(t) - \delta_k^2(t_0)}{\sigma^2}\,. \tag{28}$$

Здесь α и β — соответственно коэффициенты нелинейности и дисперсии НУШ (см. уравнение (61) в разделе 5.2); в той же работе приведена и формула для неколлинеарных волн.

Эволюция эксцесса во времени в предположении слабой негауссовости была исследована в теоретических работах [112, 113], где шестимерный интеграл (21), необходимый для расчёта динамического эксцесса, при использовании некоторых предположений приводится к виду [85, 113]

$$\lambda_4^{\mathrm{dyn}}(t) = 3J(R,\tau)\,\mathrm{BFI}^2\,, \quad \tau = \delta_\omega^2\omega_0 t\,. \tag{29}$$

Здесь J — интегральная функция, имеющая кубическую зависимость от спектра волн, τ — функция времени, определяющая качественный вид зависимости J от времени, R — характеристика ширины углового спектра (26). Было показано, что нелинейная самомодуляция развивается при достаточно узком угловом спектре, $R < 1$, тогда динамический эксцесс возрастает, достигает локального максимума и затем убывает в меньшей степени.

Схожая быстрая эволюция спектров и вероятностных характеристик волн возникает в разных ситуациях, когда нелинейная волновая система становится модуляционно неустойчивой или подвергается возмущению: при задании начальных условий в виде линейной суперпозиции волн с достаточно узким спектром [114], при принудительном перемешивании фаз волн [115], при включении или выключении накачки, моделирующей действие ветра [116 – 118]. Аналогичное поведение наблюдалось при быстром изменении условий распространения течений [119, 120] или локальной глубины [121 – 123].

Последний случай — переменной глубины — привлёк особое внимание ввиду его важности для прибрежных районов. Проблема трансформации волн над изменяющимся дном имеет длительную историю (линейная трансформация, распространение солитонов длинных волн), но в последние годы акцент делается на нелинейные нерегулярные волны, больший диапазон глубин. Известно, что в случае адиабатически медленного уменьшения глубины солитоны длинных волн растут быстрее, чем линейные волны (нелинейный и линейный законы Грина соответственно). Качественно схожие эффекты реализуются и для солитонов огибающей, распространяющихся в неоднородных условиях или при внешнем воздействии [118, 124, 125].

Эффект возрастания асимметрии, эксцесса и вероятности высоких волн при быстром уменьшении глубины был обнаружен в численных и лабораторных экспериментах относительно давно [121 – 123]. Решение этой проблемы в общем виде представляется сложной задачей из-за большого количества управляющих параметров и изменчивости нелинейных и дисперсионных свойств волн в зависимости от глубины [126 – 128]. В недавно вышедшей работе [129] эффект экстремизации волн при резком уменьшении глубины объясняется в рамках слабонелинейной теории второго порядка. При быстрой смене глубины нарушается баланс между свободными и связанными волновыми компонентами, вследствие чего возникают новые свободные волны (в частности, вдвое более короткие) в противофазе с порождающими нелинейными волнами. Дальнейшая эволюция волн приводит к конструктивной интерференции.

Нелинейный механизм усиления волн при резком увеличении глубины, предложенный в [125], связан с трансформацией солитонов огибающей, которые могут распространяться на не слишком мелкой воде, $kh > 1{,}363$, в том числе с генерацией новых солитонов огибающей и их взаимодействием. Предложенный механизм потенциально применим к любым ситуациям, когда свойства нелинейности и дисперсии изменяются так, что эффективный индекс BFI возрастает. Например, при усилении встречного течения, как предлагалось в [120].

3.7. Нелинейная динамика захваченных волн

Захват и последующая блокировка волн течениями, ведущие к возрастанию амплитуды волн в определённых областях, уже давно обсуждались в рамках линейной теории (см., например, [74, 130, 131]). Позднее эти эффекты воспроизводились с учётом слабой нелинейности и в рамках полных по нелинейности моделей [119, 122, 132] (см. также обзор [133]). Новое понимание связано с принципиально нелинейными механизмами возникновения экстремальных волн в полях захваченных волн. Как следует из прямого численного моделирования и отражено в двумерных формулировках индекса модуляционной неустойчивости (26), (27), эффект нелинейной самомодуляции быстро ослабевает с возрастанием ширины углового спектра. Наиболее подвержены модуляционной неустойчивости волны с узким угловым и частот-

ным спектром, которые нетипичны для натурных условий. В случаях захвата волн струйными течениями или протяжёнными неоднородностями дна (топографические волны), в частности склоном дна на мелководье (краевые волны), имеет место формирование волноводов с модовой поперечной структурой. В результате происходит эффективное уменьшение размерности динамической системы, нелинейная динамика становится близкой к случаю коллинеарных волн и реализуются значительно более благоприятные для модуляционной неустойчивости условия, недостижимые в обычных случаях [134, 135].

4. Математические модели волн-убийц на фоне модулированных волн

Наибольшее внимание получило исследование динамики волн в рамках НУШ фокусирующего типа, описывающего модулированные волны на поверхности достаточно глубокого бассейна (см. раздел 5.2). В безразмерных переменных НУШ выражается в виде

$$\mathrm{i}\psi_t + \frac{1}{2}\,\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0\,. \tag{30}$$

Здесь комплексная функция $\psi(x,t)$ описывает модуляции волн, функция $|\psi(x,t)|$ определяет амплитуды волн. Уравнение (30) инвариантно по отношению к масштабному преобразованию, так что если функция $\psi(x,t)$ является решением (30), то для произвольного действительного числа C решением является и функция $C\psi(Cx, C^2t)$.

4.1. Периодические решения нелинейного уравнения Шрёдингера

НУШ (30) имеет решение в виде однородной волны постоянной амплитуды

$$\psi(x,t) = \exp(\mathrm{i}t)\,, \tag{31}$$

которое обобщается с учётом масштабного преобразования и произвольного сдвига времени t. Более сложные решения представимы в виде периодических по координате функций

$$\psi(x,t) = u(x)\exp(\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{32}$$

В (32) параметр ω имеет смысл поправки к частоте, $u(x)$ — периодический профиль огибающей, удовлетворяющий уравнению Лакса – Новикова второго порядка

$$u'' + 2|u|^2u - 2\omega u = 0\,. \tag{33}$$

Периодические решения уравнения (33) выражаются в терминах эллиптических функций Якоби с модулем $k \in (0,1)$. Два простейших периодических решения с тривиальными фазами представляются выражениями:

$$u(x) = \mathrm{dn}\,(x;k)\,,\quad \omega = \frac{1}{2}\,(2-k^2)\,, \tag{34}$$

$$u(x) = k\,\mathrm{cn}\,(x;k)\,,\quad \omega = \frac{1}{2}\,(2k^2-1)\,. \tag{35}$$

"Дноидальное" решение (34) строго положительное, в то время как "кноидальное" (35) — знакопеременное. В пределе $k = 1$ оба решения, (34) и (35), переходят в солитон огибающей

$$u(x) = \frac{1}{\cosh x}\,,\quad \omega = \frac{1}{2}\,. \tag{36}$$

Другие решения уравнения (33) могут быть сконструированы в представлении полярных координат, $u(x) = R(x)\exp(\mathrm{i}\Theta(x))$, подстановка которого в (33) приводит к выражениям для функций R и Θ':

$$R(x) = \sqrt{b - k^2\mathrm{sn}^2(x;k)}\,,\quad \Theta'(x) = \frac{b(1-b)(b-k^2)}{b-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(x;k)}\,,$$
$$\omega = \frac{1}{2}\,(3b - 1 - k^2)\,, \tag{37}$$

для произвольных параметров $b \in (k^2, 1)$ и $k \in (0,1)$, $\Theta'(x)$ — производная функции $\Theta(x)$. На краях допустимых значений параметра, $b = 1$ и $b = k^2$, решение (37) воспроизводит решения (34) и (35) соответственно. Точные решения (34) – (37) исследовались в контексте модуляционной неустойчивости и волн-убийц [136, 137].

Следуя определению волн-убийц как возникающих словно ниоткуда и исчезающих без следа на заданном фоне ψ_b, можно дать математическое определение этого свойства для функции ψ:

$$\max_{x\in\Re}\left|\psi(x,t) - \psi_\mathrm{b}(x - x_\pm, t - t_\pm)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{38}$$

для некоторых действительных констант $x_\pm$ и $t_\pm$. Схожий с (3) числовой фактор усиления волны M определим как отношение максимально достижимой амплитуды решения к максимальной амплитуде фона,

$$M = \frac{\max\limits_{(x,t)\in\Re^2}\left|\psi(x,t)\right|}{\max\limits_{(x,t)\in\Re^2}\left|\psi_\mathrm{b}(x,t)\right|}\,. \tag{39}$$

Как хорошо известно, НУШ (30) является условием совместности $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ пары Лакса со спектральным параметром $\zeta \in \mathbb{C}$ и комплекснозначными собственными векторами $\varphi(x,t)$:

$$\varphi_x = U(\psi,\zeta)\varphi,\quad U(\psi,\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta & \psi \\ -\psi^* & -\zeta \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\varphi_t = V(\psi,\zeta)\varphi,$$
$$V(\psi,\zeta) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \zeta^2 + \frac{1}{2}|\psi|^2 & \zeta\psi + \frac{1}{2}\psi_x \\ -\zeta\psi^* + \frac{1}{2}\psi_x^* & -\zeta^2 - \frac{1}{2}|\psi|^2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Такое представление позволяет получить аналитические результаты по описанию модуляционной неустойчивости волн и процессов возникновения на их фоне волн-убийц. Уравнение с производной по координате (40) представляет собой спектральную задачу Захарова – Шабата, полученную в пионерской работе [138] (она является частным случаем системы Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сегура (АКНС) (Ablowitz, Kaup, Newell, Segur) [139]).

Уравнения Лакса обладают такой симметрией, что если $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\mathrm{T}$ — собственный вектор с собственным значением ζ, то $\varphi = (\varphi_2^*, -\varphi_1^*)^\mathrm{T}$ — собственный вектор для собственного значения $-\zeta^*$. Таким образом, собственные значения ассоциированной задачи рассеяния (40) появляются на комплексной плоскости симметричными по отношению к мнимой оси парами.

4.2. Волны-убийцы на фоне волн постоянной амплитуды (бризеры)

Хорошо известно, что решение НУШ в виде однородной волны (31) модуляционно неустойчиво [27]: малые возмущения достаточно большой длины экспоненциально возрастают. Для иллюстрации этого явления рассмотрим возмущение однородной волны (31) в виде

$$\psi(x,t) = \exp(\mathrm{i}t)\left[1 + (u_0 + \mathrm{i}v_0)\exp(\lambda t + \mathrm{i}kx) + (u_0^* + \mathrm{i}v_0^*)\exp(\lambda^* t - \mathrm{i}kx)\right], \quad (42)$$

где $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$ — собственный вектор, описывающий слабые возмущения, $k \in \Re$ — волновое число. Соотношение для постоянных $\lambda = \lambda(k)$ следует из линейного анализа устойчивости решения,

$$\lambda^2 = k^2\left(1 - \frac{1}{4}k^2\right). \quad (43)$$

Неустойчивые возмущения с положительными значениями λ соответствуют волновым числам возмущения k в интервале (0, 2). Таким образом, неустойчивыми являются достаточно длинные возмущения, длиной $L = 2\pi/k > \pi$.

В [140] представлена универсальная картина динамики локализованных возмущений однородной волны. Для широкого класса локализованных начальных возмущений, для которых задача Захарова – Шабата (40) не имеет дискретных собственных значений, показано, что решение $\psi(x,t)$ состоит из двух внешних невозмущённых секторов, разделённых клинообразной центральной областью, заполненной модулированными периодическими волнами.

Универсальная картина периодических возмущений плоской волны исследовалась в работе [141]. Динамика одной неустойчивой моды анализировалась с помощью метода конечно-зонных потенциалов, базирующегося на спектральной задаче Захарова – Шабата с периодическими граничными условиями. В простейшем случае однозонного возмущения показано, что асимптотическое решение описывается бризером (см. ниже) с параметрами, задаваемыми начальными условиями.

В отношении модуляционной неустойчивости вопрос заключается в том, как фоновая однородная волна деформируется при развитии неустойчивых мод, как аномально высокие волны возникают, распространяются и исчезают. Рассматриваемые ниже *бризерные* (от англ. *breather*) решения моделируют волны-убийцы.

Решение НУШ типа волны-убийцы (38), локализованное по координате x, сконструировано Д. Перегрином [32],

$$\psi_{\mathrm{P}}(x,t) = \left[1 - \frac{4(1+2\mathrm{i}t)}{1 + 4(x^2 + t^2)}\right]\exp(\mathrm{i}t), \quad (44)$$

а периодические по x решения с периодом $L = 2\pi/k > \pi$ — в работе [33]:

$$\psi_{\mathrm{A}}(x,t) = \left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)\frac{k^2\cosh(\lambda t) + 2\mathrm{i}\lambda\sinh(\lambda t)}{k\cosh(\lambda t) - \lambda\cos(kx)}\right]\exp(\mathrm{i}t). \quad (45)$$

Здесь $k \in (0,2)$ — свободный параметр, λ задаётся (43). Максимальная амплитуда решения (44) определяется как $M = |\psi(0,0)| = 3$. Таким образом, бризер Перегрина обеспечивает троекратное усиление по сравнению с фоновой волной. Коэффициент усиления волн в решении (45), обычно называемом бризером Ахмедиева, задаётся соотношением

$$M = |\psi(0,0)| = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, \quad k \in (0,2), \quad (46)$$

он монотонно убывает от 3 до 1 при изменении k от 0 до 2. Возмущение с максимальным инкрементом неустойчивости $\lambda = 1$ при $k = 2^{1/2}$ соответствует значению $M = 1 + 2^{1/2} \approx 2{,}4$.

Бризерное решение НУШ, описывающее периодические по времени (поэтому оно не удовлетворяет формальному критерию (38)) и локализованные по x модуляции, было получено Е.А. Кузнецовым [31] ещё ранее,

$$\psi_{\mathrm{K}}(x,t) = \left[1 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)\frac{\kappa^2\cos(\gamma t) + 2\mathrm{i}\gamma\sin(\gamma t)}{\gamma\cosh(\kappa x) - \kappa\cos(\gamma t)}\right]\exp(\mathrm{i}t), \quad (47)$$

где $\gamma = \kappa(1 + \kappa^2/4)^{1/2}$, $\kappa \in (0,\infty)$ — свободный параметр. Решение Кузнецова (47) связано с (45) формальной заменой $k = \mathrm{i}\kappa$, $\lambda = \mathrm{i}\gamma$. Бризер Перегрина может быть получен из (45) и (47) в пределах $k \to 0$ и $\kappa \to 0$ соответственно.

Были построены в аналитической форме мультибризерные решения, в первую очередь представляющие собой многократно вырожденные алгебраические бризеры Перегрина (бризеры высокого порядка, или *super-rogue waves*) [35, 142, 143].

Как показано в [34], решения (44), (45), (47) являются вырожденными случаями более общего класса двоякопериодических (по x и t) решений НУШ (30) в виде

$$\psi(x,t) = \left[q(x,t) + \mathrm{i}\delta(t)\right]\exp\left(\mathrm{i}\theta(t)\right), \quad (48)$$

где q, δ и θ — действительные функции. Для фиксированного момента времени t функция $u(x) = q(x,t) + \mathrm{i}\delta(t)$ удовлетворяет уравнению Лакса – Новикова третьего порядка

$$u''' + 6|u|^2u' - 2\omega u' = 0, \quad (49)$$

а двоякопериодические решения выражаются в виде рациональных функций, содержащих эллиптические функции Якоби (детали см. в [144]).

На рисунке 6 построен спектр задачи рассеяния (40) для двух семейств двоякопериодических решений (48). Вид решения зависит от трёх пар корней: $\pm\sqrt{z_1}$, $\pm\sqrt{z_2}$, $\pm\sqrt{z_3}$ — ассоциированного полинома $P(\zeta)$:

$$P(\zeta) = \zeta^6 - \omega\zeta^4 + \frac{1}{4}(\omega^2 + 8C_1)\zeta^2 + C_2 - \omega C_1, \quad (50)$$

где ω — параметр уравнения (49), C_1 и C_2— константы интегрирования этого уравнения (см. детали в [144]). Спектр на рис. 6а соответствует действительным корням $0 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant z_3$, а спектр на рис. 6б — одному действительному, $z_1 > 0$, и двум комплексно-сопряжённым корням, $z_2 = z_3^*$. Корни $\pm\sqrt{z_1}$, $\pm\sqrt{z_2}$, $\pm\sqrt{z_3}$ показаны на рис. 6 красными кружками.

Согласно теории Флоке, спектр задачи рассеяния, соответствующий периодическим по x решениям (48), состоит из кусков непрерывного спектра, показанных на рис. 6 чёрными линиями, для которых решениями спектральной проблемы Захарова – Шабата являются ограниченные квазипериодические функции. Кроме мнимой оси (всегда принадлежащей спектру) спектру принадлежат

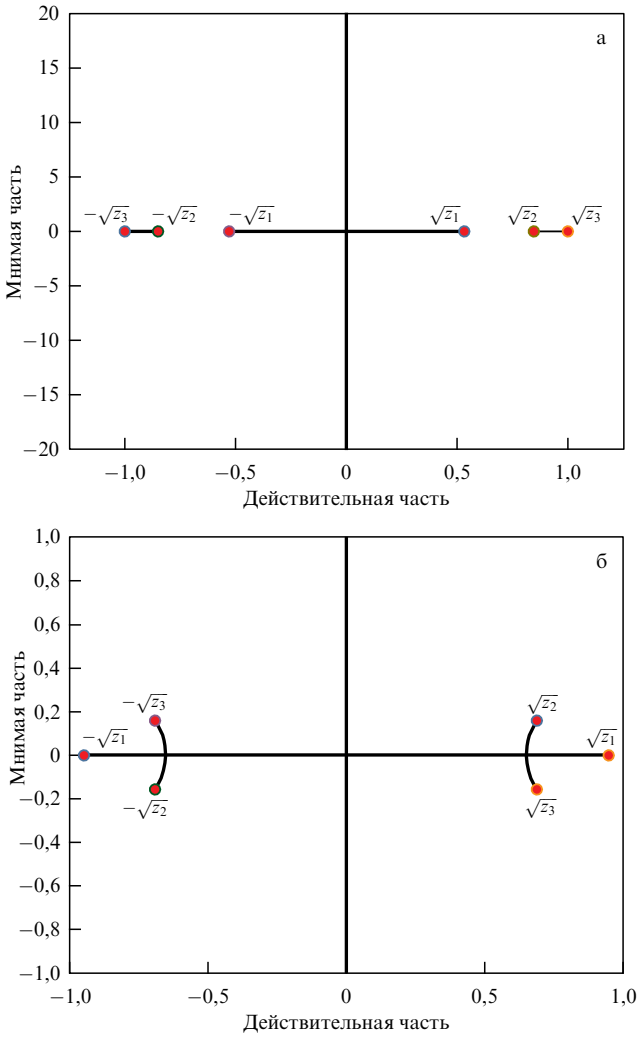

Рис. 6. Примеры спектров задачи рассеяния на комплексной плоскости ζ для двоякопериодических решений (48) [144].

три непрерывные линии, соединяющие шесть корней полинома $P(\zeta)$.

Когда $z_3 = 1$, $z_1 = z_2 = \zeta_0^2 < 1$, где $\zeta_0 = (1 - k^2/4)^{1/2}$, щели между спектральными линиями на действительной оси (рис. 6а) смыкаются в пару точек $\pm\zeta_0$, принадлежащих интервалу $[-1, 1]$. В этом пределе решение (48) преобразуется в бризер Ахмедиева (45). Когда $z_1 = 1$ и $z_2 = z_3 = \zeta_0^2 > 1$, где $\zeta_0 = (1 + \kappa^2/4)^{1/2}$, внешние спектральные линии на действительной оси (рис. 6а) сжимаются в пару точек $\pm\zeta_0$ вне интервала $[-1, 1]$. Данная ситуация соответствует трансформации решения (48) в бризер Кузнецова (47). Такое же вырождение происходит, когда $z_1 = 1$ и комплексные спектральные линии на рис. 6б сжимаются в пару точек $\pm\zeta_0$.

Если $z_1 = z_2 = z_3 = 1$, то все три пары корней порождают пару точек ± 1 на краях спектрального интервала $[-1, 1]$. В этом пределе двоякопериодическое решение (48) вырождается в убывающий степенны́м образом по x и t бризер Перегрина (44).

Обобщённые бризерные решения для комплексных собственных значений $\{\zeta_0, -\zeta_0^*\}$, сконструированные в [145, 146], обсуждались в связи с волнами-убийцами; они представляют собой возмущения фоновой волны, движущиеся относительно выбранной системы отсчёта. Пары распространяющихся навстречу бризеров соответствуют квадруплетам собственных чисел $\{\pm\zeta_0, \pm\zeta_0^*\}$, такие точные решения построены в [147].

В недавних публикациях большое внимание уделяется вопросу устойчивости бризеров. Динамика бризеров Перегрина и Кузнецова под действием возмущений исследовалась в [148, 149] с использованием МОЗР для функций, спадающих к ненулевым граничным условиям. Полнота квадратов собственных функций спектральной задачи Захарова – Шабата (40) в классе функций, спадающих к ненулевым граничным условиям, доказана в [150], где этот результат использовался в исследовании линеаризованного уравнения НУШ:

$$\mathrm{i}v_t + \frac{1}{2}\,v_{xx} + 2|\psi|^2 v + \psi^2 v^* = 0\,. \tag{51}$$

Линейная аппроксимация не даёт описания трансформации возмущённых бризеров Перегрина. В [151] показана структурная неустойчивость спектра задачи рассеяния для решения Перегрина по отношению к малым возмущениям. В зависимости от знака скалярной величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mathrm{P}}(x,0)\left[\mathrm{Re}\left(\psi(x,0)\right) - \psi_{\mathrm{P}}(x,0)\right]\mathrm{d}x\,, \tag{52}$$

где ψ_{P} — решение Перегрина (44), $\psi(x,0)$ — начальное условие для НУШ (30), удовлетворяющее граничному условию $\psi(x,0) \to 1$ при $|x| \to \infty$, из крайних точек спектрального отрезка $[-1, 1]$ рождается либо пара действительных собственных значений, либо квадруплет. Первый случай соответствует возникновению "стоячего" бризера Кузнецова, как показано на рис. 7а, а во втором случае рождается симметричная пара бризеров, движущихся в противоположных направлениях (рис. 7б).

Картина неустойчивости бризеров Перегрина проиллюстрирована в [152] посредством численного моделирования временно́й эволюции в рамках НУШ. Линейная неустойчивость бризеров Перегрина исследовалась также в [153].

Детальное численное исследование линейной устойчивости бризеров Кузнецова проводилось в [154] с помощью теории Флоке во времени после усечения пространственного интервала до конечного с использованием периодических граничных условий. Как показано, бризер Кузнецова неустойчив с тем же инкрементом, что и фоновая однородная волна, но число неустойчивых мод зависит от размера области моделирования и убывает с уменьшением пространственного периода.

Другое интересное исследование касается линейной неустойчивости бризеров Ахмедиева в пространстве функций, периодических по x. В [155] утверждалось, что решение (45) линейно неустойчиво, если в области неустойчивости (43) помещается более чем одна неустойчивая мода, однако оно линейно устойчиво при $L \in (\pi, 2\pi)$, когда в область неустойчивости (43) попадает лишь одна мода. Этот вывод опровергнут в недавней работе [156], где авторы построили явные решения линеаризированного НУШ (51) для $\psi = \psi_{\mathrm{A}}$, задаваемого решением Ахмедиева (45), экспоненциально возрастающие во времени t в случае как одной, так и нескольких неустойчивых мод.

Другим способом заключение о неустойчивости бризеров Ахмедиева в классе периодических функций полу-

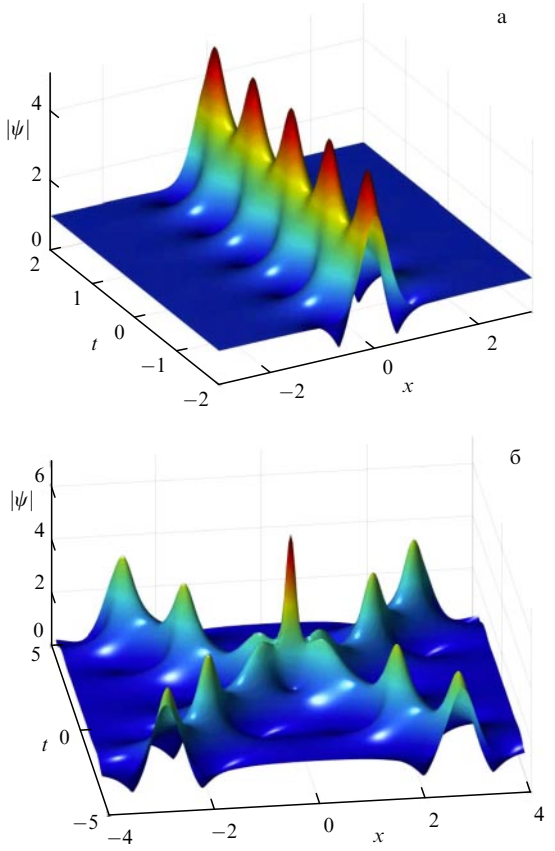

Рис. 7. Поверхность $|\psi(x,t)|$ в координатах пространства и времени для бризера Кузнецова с собственным значением $\zeta = 2$ (а) и двух бризеров с собственными значениями $\zeta = 1{,}5 \pm 0{,}5\mathrm{i}$, движущихся навстречу друг другу (б).

чено с использованием уравнения Лакса – Новикова четвёртого порядка и вариационного представления бризеров [157]. Схожий подход применён к бризерам Кузнецова и Перегрина, которые оказались энергетически неустойчивыми в классе функций, спадающих к ненулевым граничным условиям. Хотя обсуждаемые бризерные решения являются решениями уравнения Лакса – Новикова третьего порядка (49), они также удовлетворяют уравнению четвёртого порядка (и всем уравнениям Лакса – Новикова более высоких порядков), что было использовано в [157].

4.3. Волны-убийцы на фоне модулированных волн

Известно, что волны с периодическими модуляциями вида (32) неустойчивы по отношению к длинным возмущениям [136] (см. недавний обзор [158]). В связи с этим возникает естественный вопрос о существовании волн-убийц на фоне периодически модулированных волн, аналогичных описанным выше бризерам на фоне однородной волны.

Такие решения впервые были построены численно в [159]. Волны-убийцы, возникающие из периодических дноидальных волн (34), наблюдались в численном моделировании временно́й эволюции в рамках НУШ в [109]. Точные решения для таких волн-убийц построены в [160] и обобщены в [161]. Модуляционная неустойчивость периодически модулированных волн и возникающие на их фоне волны-убийцы наблюдались в экспериментах [162].

Связь между неустойчивостью решений (32) и возникновением волн-убийц установлена в [137]. Чёрная линия

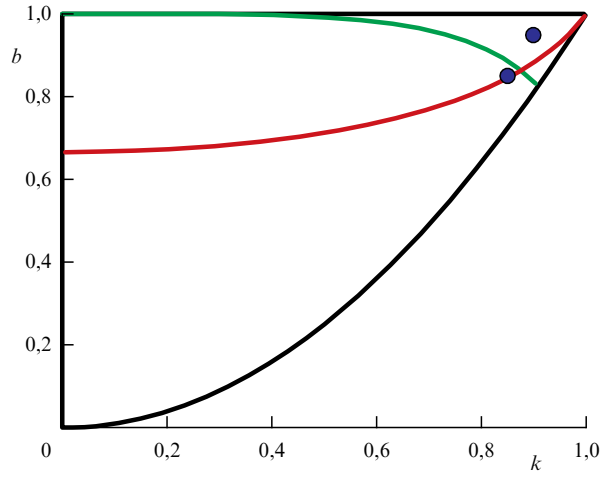

Рис. 8. Границы треугольной области на плоскости (b,k), где существуют периодические решения (37) с нетривиальной фазой.

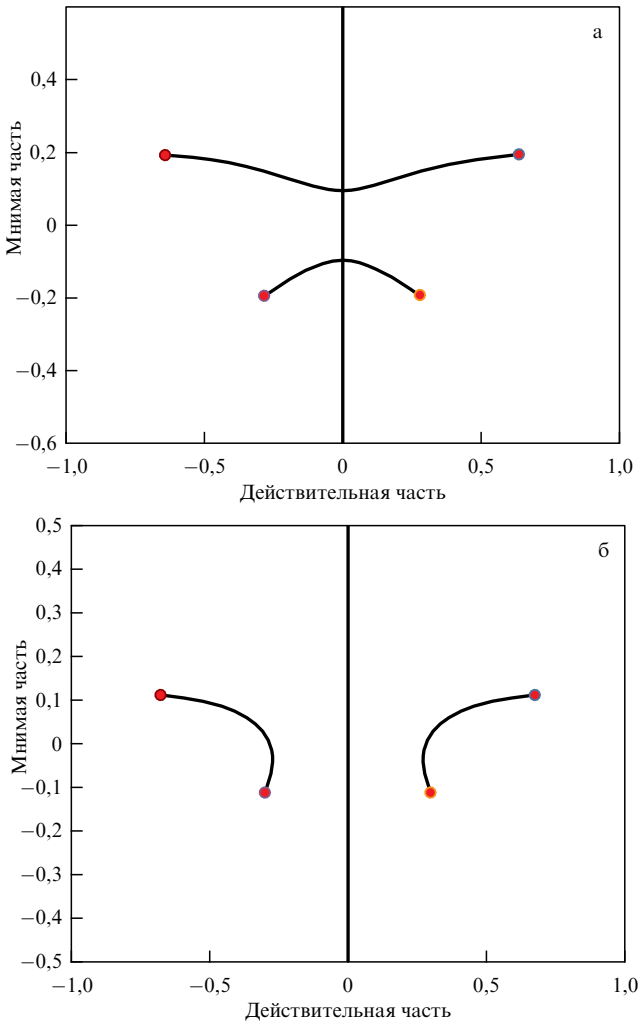

Рис. 9. Спектры задачи рассеяния на комплексной плоскости ζ для периодических решений (37) с параметрами $(b,k) = (0{,}85, 0{,}85)$ (а) и $(b,k) = (0{,}95, 0{,}90)$ (б) [137].

на рис. 8 ограничивает область на плоскости параметров (b,k), где существуют периодические решения (37) с нетривиальной фазой. Спектры системы Лакса на рис. 9 построены для наборов параметров, отмеченных на

рис. 8 синими кружками. Чёрные линии на рис. 9 показывают спектральные линии, а красные кружки соответствуют положениям корней ассоциированного полинома для периодических решений (37) (см. детали в [136, 137]):

$$P(\zeta) = \zeta^4 - \frac{1}{2}(3b - 1 - k^2)\zeta^2 - \mathrm{i}\sqrt{b(b-k^2)(1-b)}\,\zeta + \\ + \frac{1}{16}\left[-3b^2 + 2b(1+k^2) + (1-k^2)^2\right]. \qquad (53)$$

Полином (53) обладает двумя симметричными парами корней $\{\zeta_\pm, -\zeta_\pm^*\}$:

$$\zeta_\pm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} \pm \sqrt{b-k^2}\right) \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{1-b}\,. \qquad (54)$$

Зелёная кривая на рис. 8 разделяет две области с качественно разными спектрами. Спектр задачи рассеяния для периодических решений в нижней (или верхней) области содержит спектральные линии, пересекающие мнимую (или действительную) ось на плоскости ζ (см. рис. 9).

Связь между спектром системы Лакса и спектром модуляционной неустойчивости периодических решений (32) объяснена в [136]. Подстановка с разделяющимися переменными $\psi(x,t) = u(x)\exp(\mathrm{i}\omega t)$, $v(x,t) = w_1(x)\exp(\mathrm{i}\omega t + \lambda t)$ и $v^*(x,t) = w_2(x)\exp(-\mathrm{i}\omega t + \lambda t)$ сводит линеаризованное НУШ (51) к задаче на устойчивость решения со спектральным параметром λ. Эта задача на устойчивость может быть записана в форме

$$\mathcal{L}w = \mathrm{i}\lambda\sigma_3 w\,, \qquad (55)$$

где $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$, $\sigma_3 = \mathrm{diag}\,(1,-1)$, и линейный оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\partial_x^2 + \omega - 2|u|^2 & -u^2 \\ \mathrm{i}u^{*2} & -\frac{1}{2}\,\partial_x^2 + \omega - 2|u|^2 \end{pmatrix}. \qquad (56)$$

Из теории Флоке следует, что спектр задачи (55) состоит из непрерывных спектральных линий, для которых собственный вектор w является ограниченной квазипериодической функцией координаты x. Неустойчивые решения соответствуют $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Модуляционной неустойчивости периодических решений соответствуют спектральные линии с $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, проходящие через точку $\lambda = 0$.

Спектр задачи (55) может быть получен из спектра задачи Захарова – Шабата (40) с использованием формулы преобразования

$$\lambda = \pm 2\mathrm{i}\sqrt{P(\zeta)}\,, \qquad (57)$$

где полином $P(\zeta)$ определён в (53). Спектр задачи на устойчивость на комплексной плоскости λ построен на рис. 10 для тех же наборов параметров, что и на рис. 9. В зависимости от спектра задачи рассеяния спектр задачи устойчивости имеет вид либо двух восьмёрок (рис. 10а), либо бабочки (рис. 10б).

В отличие от спектра модуляционной неустойчивости плоских волн (42), (43), спектр λ неустойчивых возмущений периодических решений с нетривиальной фазой более не действительный. Это свойство усложняет наблюдение модуляционной неустойчивости кноидальных волн (35) или волн с нетривиальной фазой (37), воспроизведённой в экспериментах [162]. Только в случае дноидальных волн (34), который обобщает решение для волн постоянной амплитуды (31), существует лишь одна ветвь модуляционной неустойчивости, располагающаяся на действительной оси, аналогично решению (43) [136, 158, 162].

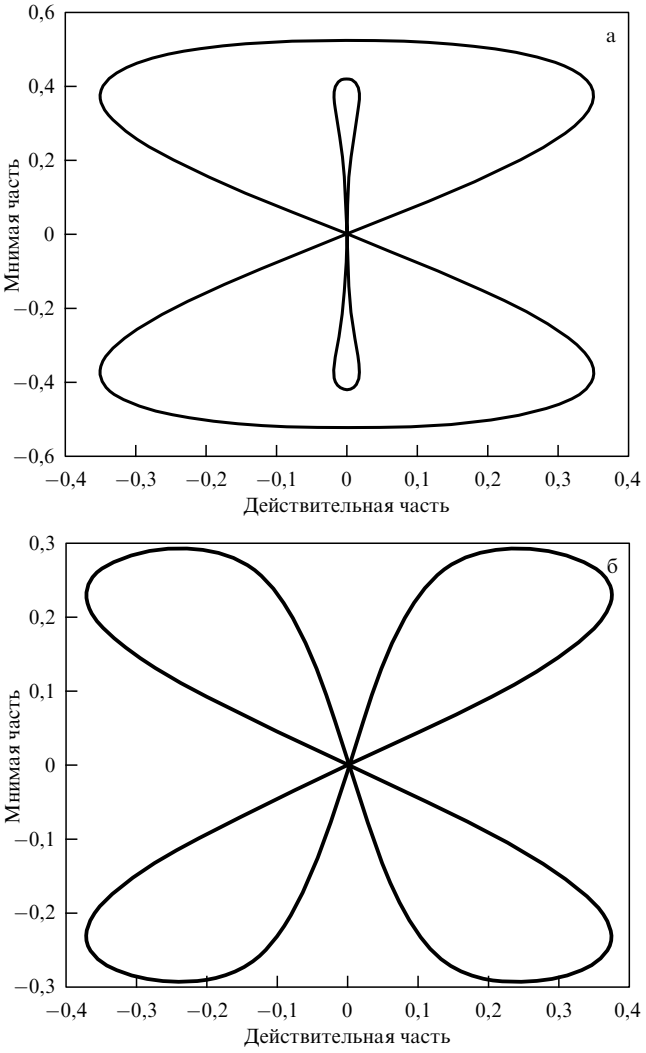

Рис. 10. Ветви модуляционной неустойчивости на комплексной плоскости λ для периодического решения (37) с параметрами $(b,k) = (0{,}85, 0{,}85)$ (а) и $(b,k) = (0{,}95, 0{,}90)$ (б) [137].

Теперь объясним роль красной кривой на рис. 8 и связь между модуляционной неустойчивостью периодически модулированных волн и возникновением на их фоне аномально высоких волн. Точке на красной кривой на рис. 8 отвечают рис. 9а и 10а. Красная кривая соответствует ситуации, когда внутренняя восьмёрка на спектральной плоскости λ сплющивается к мнимой оси, как показано на рис. 10а. Это приводит к делокализации аномально высоких волн, возникающих на периодическом фоне, как объясняется ниже.

В [137] решения в виде волн-убийц были сконструированы с помощью алгебраического метода на основе корней (54) полинома $P(\zeta)$ (53). На рисунке 11 показаны решения в виде волн-убийц на фоне периодических модуляций, соответствующие выбору параметров на рис. 9 и 10. Верхний ряд изображений соответствует корню ζ_+, нижний ряд — корню ζ_-.

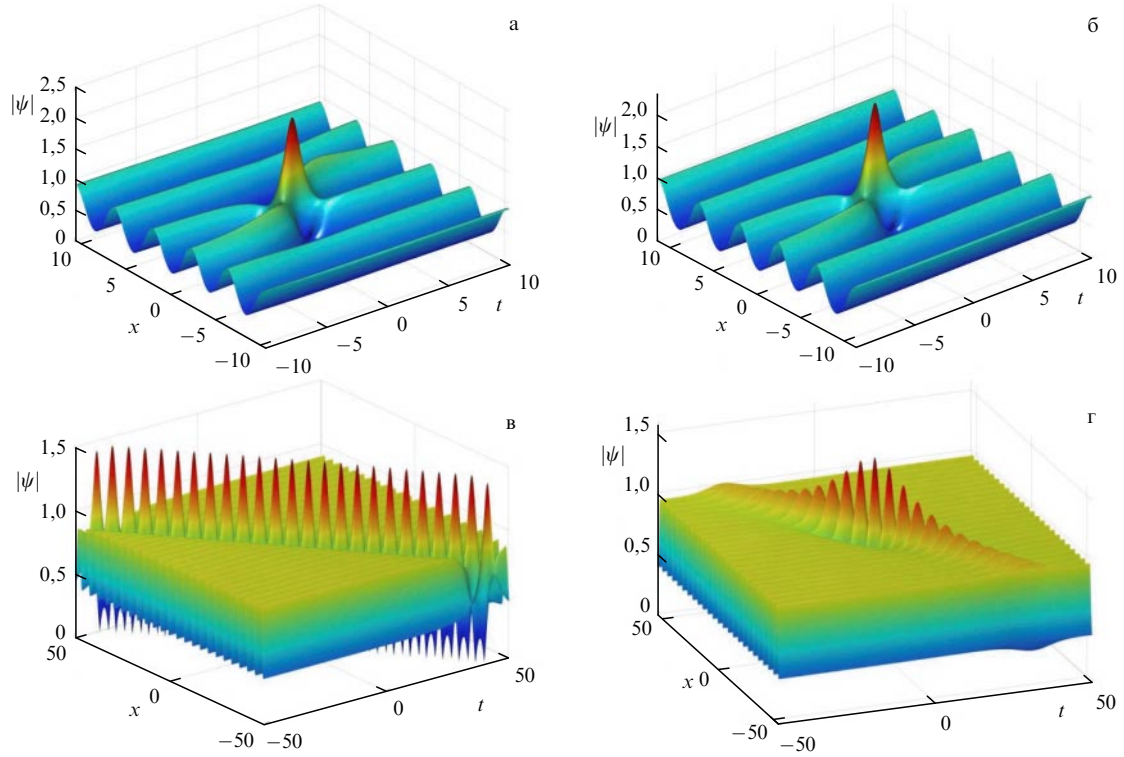

Рис. 11. Точные решения в виде волн-убийц на фоне периодической волны (37) для выбора параметров $(b,k)=(0{,}85,0{,}85)$ (а, в) и $(b,k)=(0{,}95,0{,}90)$ (б, г). Рисунки а, б отвечают верхним конечным точкам спектра Лакса на рис. 9, рис. в, г — нижним [137].

Коэффициент усиления волн, определённый в (39), вычислен в [137]:

$$M_{\pm}=2\pm\sqrt{1-\frac{k^2}{b}}, \tag{58}$$

где верхний и нижний знаки отвечают корням $\zeta_{\pm}$ в (54). Величина усиления волны связана с расстоянием на рис. 9 от корня до мнимой оси.

Для дноидальных волн (34) с $b=1$ формула (58) даёт зависимость $M=2\pm(1-k^2)^{1/2}$, а для кноидальных волн с $b=k^2$ достигаемое усиление равно двум, $M=2$. Коэффициент усиления M для этих случаев получен теоретически в [160] и затем подтверждён экспериментально [162].

Каждый из корней $P(\lambda)$, показанных красными кружками на рис. 9, преобразованием (57) отображается в точку начала отсчёта комплексной плоскости λ на рис. 10. Инкремент модуляционной неустойчивости зависит от угла, под которым спектральная линия пересекает точку $\lambda=0$: он меньше, если линия проходит ближе к мнимой оси, и больше, если она ближе к действительной оси.

Этот же угол определяет и степень локализации волны-убийцы. Решение на рис. 11в соответствует внутренней восьмёрке на рис. 10а, сжатой вдоль мнимой оси. Данное решение делокализовано на плоскости (x,t) и фактически представляет собой распространение солитона на фоне периодически модулированной волны. Решение на рис. 11г соответствует той части бабочки на рис. 10б, которая пересекает начало координат ближе к мнимой оси. Это решение локализовано на плоскости (x,t) и соответствует определению волны-убийцы (38), хотя степень локализации и слабее, чем у волн-убийц, соответствующих другой ветви бабочки.

Связь между наклоном линии модуляционной неустойчивости на плоскости λ для периодически модулированного решения и локализацией возникающих аномально высоких волн также подтверждалась на многих других примерах. Для систем связанных НУШ в работах [163, 164] сделан вывод, что аномально высокие волны на фоне волн постоянной амплитуды могут вырастать только в модуляционно неустойчивых случаях. Для подмножеств параметров, соответствующих модуляционной устойчивости, не удаётся сконструировать решения типа волн-убийц, и в прямом численном моделировании локализованных волн большой амплитуды не возникает [165]. Здесь важно отметить, что если решение с постоянной амплитудой или периодическое решение для огибающей неустойчивы по отношению к коротким возмущениям, но устойчивы по отношению к более длинным возмущениям, то волна считается модуляционно устойчивой.

Другой пример математических волн-убийц представляется уравнением синус-Гордона [166], где два решения в виде периодических волн имеют различные свойства модуляционной неустойчивости [167, 168]. Кноидальные волны модуляционно неустойчивы, и возникающие волны-убийцы локализованы в пространстве и времени. В то же время дноидальные волны модуляционно устойчивы (но неустойчивы по отношению к возмущениям с меньшим пространственным периодом) и решения в виде волн-убийц вырождаются в распространяющиеся солитоны. Схожая ситуация наблюдается в рамках модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза [169].

4.4. Более сложные структуры волн-убийц

Более сложные квазипериодические волновые паттерны описываются точными решениями НУШ (30) в терминах

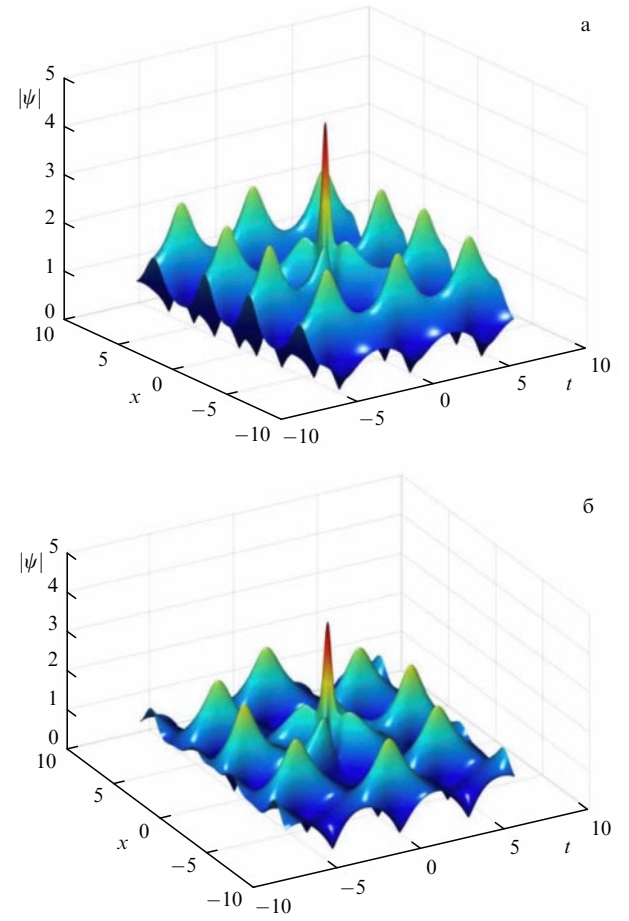

Рис. 12. Решения в виде волн-убийц, возникающих на фоне двоякопериодических решений. Решения соответствуют спектру системы Лакса, приведённому на рис. 6: собственному значению $\sqrt{z}_3$ (а) и $\sqrt{z}_1$ (б) [144].

тета-функций Римана [170 – 173]. Риманова тета-функция второго рода описывает общее решение уравнения Лакса – Новикова третьего порядка (49) и в частных случаях сводится к рациональным функциям эллиптических функций Якоби, как было найдено в [34]. В последнем случае решения являются периодическими и в пространстве, и во времени. Представляется, что эти двоякопериодические решения описывают промежуточную стадию перед возникновением хаотичных волн в результате развития модуляционной неустойчивости плоских волн.

Два семейства двоякопериодических решений задают фоновые волны [174]: с повторяющимися фазами модуляций (рис. 12а) и с чередующимися фазами (рис. 12б). Соответствующие им спектры системы Лакса построены на рис. 6а и б. Эти два семейства обобщают решения в виде бризеров Ахмедиева (45), что наглядно видно по спектрам, как описано в разделе 4.2. Экспериментальные наблюдения двоякопериодических решений как возмущений бризеров Ахмедиева упоминались в [175, 176].

Решения, описывающие возникновение волн-убийц на фоне двоякопериодических решений, построены аналитически и численно в [144]. Инкременты двоякопериодических решений рассчитаны в [158] на основе численного анализа уравнений системы Лакса, а также получены по результатам прямого численного моделирования НУШ в [177]. В работе [158] показано, что инкремент модуляций однородной волны больше, чем у двоякопериодического решения с эквивалентной амплитудой. Так же как и в случаях, описанных выше, аномально высокие волны, возникающие на фоне двоякопериодических решений для огибающей, связываются с неустойчивостью фоновой волны.

На рисунке 12 представлены решения, описывающие волны-убийцы, возникающие на фоне периодически модулированных волн. Для каждого собственного значения спектра системы Лакса, расположенного на краях спектральных линий на рис. 6, может быть построено решение в виде локализованной по координате и времени волны-убийцы. При этом коэффициент усиления волны максимален для собственного значения, наиболее удалённого от мнимой оси. Именно такие решения, соответствующие максимальному усилению, показаны на рис. 12.

5. Прямое моделирование морских волн

5.1. Традиционный подход

В основе описания морского волнения в прогностических моделях (WAM, WaveWatch, SWAN) лежит спектральная кинетическая теория (уравнения Хассельманна). В консервативном виде уравнения баланса спектральной плотности волнового действия $N(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = E(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)/\omega(\mathbf{k})$, где E — поверхностная плотность полной механической энергии, записываются в виде [71, 72, 96]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}_{\mathrm{gr}} N) = S_{\mathrm{nl}}\,, \quad \mathbf{c}_{\mathrm{gr}} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega\,, \tag{59}$$

$$S_{\mathrm{nl}} = 4\int\!\!\int\!\!\int |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 (N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - N N_1 N_2 - N N_1 N_3)\,\mathrm{Im}\left[G(\Delta\omega, t)\right]\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2\,\mathrm{d}\mathbf{k}_3\,, \tag{60}$$

$$\Delta\omega = \omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3\,,$$

$$G(\Delta\omega, t) = \frac{1 - \exp(-\mathrm{i}\Delta\omega t)}{\Delta\omega}\,,$$

где соотношение между волновыми векторами и частотами задаётся линейным дисперсионным соотношением. Выражение (60) для интеграла столкновений S_{nl}, получаемое из спектральных уравнений Захарова (16) в предположении слабого отклонения от гауссова процесса, содержит коэффициент 4-волновых взаимодействий $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$. Вывод системы (59), (60) предполагает независимость случайных фаз волн (гипотеза замыкания). Неконсервативная форма кинетического уравнения (59) учитывает эффекты воздействия ветра и диссипации, но строгого вывода их вида из первых принципов не существует.

В "классическом" варианте кинетического уравнения явно используется предел больших времён в предположении медленно меняющейся функции волнового действия, тогда $\mathrm{Im}\, G(\Delta\omega, t) \to \pi\delta(\Delta\omega)$ и на эволюцию влияют только резонансные нелинейные взаимодействия, обращающие в нуль функцию разностной частоты $\Delta\omega$, что облегчает вычисление интеграла S_{nl}. Для однородных условий характерный масштаб времени эволюции следует из уравнения (60): для "классического" случая это так называемый *кинетический* масштаб $O(\omega_0\varepsilon^{-4})$, где ω_0 — ха-

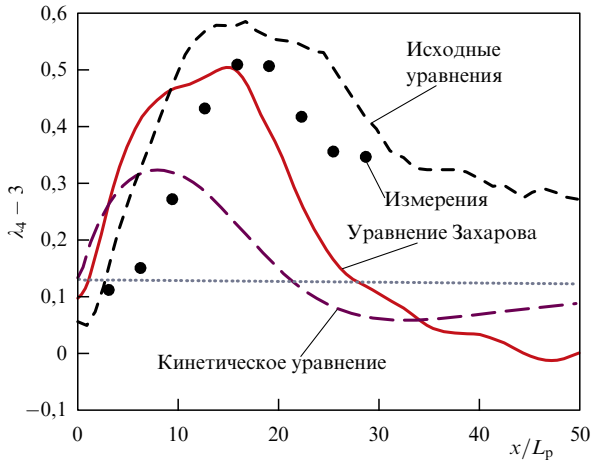

Рис. 13. Эволюция эксцесса смещения поверхности ($\lambda_4 - 3$) по результатам численного моделирования модифицированного кинетического уравнения, уравнений Захарова, кода HOSM для уравнений Эйлера и лабораторных измерений. По оси абсцисс отложено расстояние, нормированное на длину волн, соответствующих пику спектра [179].

рактерная частота, $\varepsilon = k_0\sigma$ — параметр нелинейности. Для малых времён $\operatorname{Im} G(\Delta\omega, t) \approx t$, и тогда возникает более быстрый так называемый *динамический* масштаб $O(\omega_0\varepsilon^{-2})$. Быстрая эволюция волновых спектров наблюдалась в прямом численном моделировании уравнений Захарова в работах [116, 117]. Как показано ниже, на динамическом масштабе времени развивается модуляционная неустойчивость и связанная с ней повышенная вероятность волн-убийц. Для учёта быстрых волновых взаимодействий в [83, 113, 178] предложены версии кинетического уравнения, учитывающие зависимость функции G от времени.

Пример эволюции четвёртого статистического момента для одних и тех же условий нерегулярных волн с узким начальным спектром приведён на рис. 13 [179] по данным расчёта кинетического уравнения, учитывающего зависимость функции G от времени, расчёта фазоразрешающих уравнений Захарова, а также решения уравнений гидродинамики в исходной формулировке. Как видно из рисунка, несмотря на примерное сходство поведения кривых, они демонстрируют заметное различие. Расчёт исходных уравнений гидродинамики воспроизводит лабораторные измерения (показанные кружками) лучше других.

Для моделирования эффектов сильной нелинейности, когерентных и быстро протекающих процессов требуется расчёт динамических уравнений, разрешающих фазы волн. Для задач прогноза и расчёта статистических распределений нужны "быстрые" эволюционные модели и численные коды. Далее даётся краткий обзор таких моделей, причём особое внимание уделяется случаю глубокой воды, приведены результаты их использования для исследования волн-убийц в сопоставлении с данными лабораторных и натурных экспериментов.

5.2. Быстрые модели для описания динамики поверхностных волн

В предположении узкого спектра с доминирующим волновым числом k_0 и частотой $\omega_0 = \omega(k_0)$ из уравнений Захарова следует НУШ для комплексной огибающей $A(x,t)$ [26, 69]:

$$-\mathrm{i}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_{\mathrm{gr}}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \alpha|A|^2 + \beta\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0\,, \tag{61}$$

$$\eta(x,t) = \operatorname{Re}\left[A(x,t)\exp\left(\mathrm{i}k_0 x - \mathrm{i}\omega_0 t\right)\right], \tag{62}$$

которое полностью интегрируется с помощью МОЗР (см. раздел 4). К безразмерному виду (30) для функции $\psi(x',t')$ уравнение (61) сводится после преобразований

$$x' = \sqrt{\frac{\omega_0}{4\beta}}\,(x - c_{\mathrm{gr}}t)\,, \quad t' = \frac{\omega_0}{2}\,t\,, \quad \psi = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega_0}}\,A^*\,. \tag{63}$$

НУШ учитывает эффекты третьего порядка $O(\varepsilon^3)$ слабых нелинейности и дисперсии, $\delta_k = O(\varepsilon)$. Действительные коэффициенты уравнения (61) являются функциями безразмерной глубины $k_0 h$, причём $\beta > 0$. Нелинейный коэффициент α меняет свой знак при $k_0 h = 1{,}363$ и на большей глубине обеспечивает выполнение критерия модуляционно неустойчивой среды $\alpha\beta > 0$.

В литературе представлены асимптотические модели модулированных волн более высокого порядка (см., например, [180, 181]), но наиболее популярны модификации уравнения Диста [182, 183], являющегося нелокальным обобщением НУШ четвёртого порядка, $O(\varepsilon^4)$, для достаточно глубокой воды, $k_0 h \geqslant O(\varepsilon^{-1})$. Эволюционное уравнение описывает амплитуду волны $A(x,t)$, где потенциал индуцированного течения $\bar{\varphi}(x,z,t)$ находится из уравнения Лапласа с заданными граничными условиями на дне и на невозмущённом уровне поверхности $z = 0$:

$$-\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial t} + \hat{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]A + \frac{\omega_0 k_0^2}{2}|A|^2 A - \mathrm{i}\,\frac{3\omega_0 k_0}{2}|A|^2\frac{\partial A}{\partial x} -$$

$$-\,\mathrm{i}\,\frac{\omega_0 k_0}{4}\,A^2\frac{\partial A^*}{\partial x} + k_0 A\,\frac{\partial\bar{\varphi}|_{z=0}}{\partial x} = 0\,, \tag{64}$$

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z^2} = 0\,, \qquad -h \leqslant z \leqslant \eta;$$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} = \frac{\omega_0}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,|A|^2\,, \qquad z = 0; \qquad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} = 0\,, \quad z = -h\,.$$

В первом приближении смещение поверхности $\eta(x,t)$ рассчитывается по формуле (62) (формулы реконструкции с точностью $O(\varepsilon^3)$ можно найти в [184]). Оператор дисперсии, имеющий в пространстве Фурье вид $\hat{L}_k = \sqrt{g(k_0 + k)} - \omega_0$, описывает линейное решение уравнений гидродинамики. Классическое НУШ (61) для предела глубокой воды получается из (64) отбрасыванием последних трёх слагаемых в эволюционном уравнении и усечением дисперсии до $\hat{L}A = \omega_0 A_{xx}/(8k_0^2) + +O(\varepsilon^4)$. Для краткости здесь приведены версии уравнений для огибающей (61), (64) без учёта поперечной поверхностной координаты.

В плоской геометрии (одна горизонтальная координата) для решения уравнений гидродинамики эффективен метод конформных отображений, сводящих заполненную жидкостью область $Z = x + \mathrm{i}z$, ограниченную сверху нестационарной свободной границей $z = \eta(x,t)$, к слою $W = u + \mathrm{i}v$ с неизменной верхней границей $v = 0$. В случае бесконечно глубокой воды такое преобразование

записывается в виде

$$z = \hat{H}\{x(u,t) - u\}, \quad x(u,t) = u - \hat{H}\{z(u,t)\}, \qquad (65)$$

где $\hat{H}$ — оператор Гильберта. Тогда полная система уравнений гидродинамики (5)–(8) может быть сведена к кубическим по нелинейности уравнениям в конформных переменных [185, 186]:

$$R_t = \mathrm{i}(UR_W - RU_W), \quad V_t = \mathrm{i}(UV_W - RB_W) + g(R-1), \qquad (66)$$

$$U = \hat{P}\{VR^* + V^*R\}, \quad B = \hat{P}\{VV^*\}, \quad \hat{P} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\hat{H}),$$

$$R = \frac{1}{Z_W}, \quad V = \mathrm{i}\,\frac{1}{Z_W}\,\frac{\partial}{\partial W}\left(\Phi + \mathrm{i}\hat{H}\{\Phi\}\right). \qquad (67)$$

Здесь Φ — потенциал скорости на поверхности, как и ранее. Численная схема уравнений для $R(W,t)$ и $V(W,t)$ (66) (уравнения Дьяченко–Захарова) обладает высокой скоростью и устойчивостью. В работе [187] показана исключительно высокая точность расчёта эволюции очень крутых волн в течение 1000 периодов для формулировки уравнений в конформных переменных $Z(W,t)$ и $\Phi(W,t)$. В литературе приводятся обобщения модели в конформных переменных для случаев конечной глубины, подвижного дна, слабонепараллельных волн [188, 189]. В недавних публикациях [190, 191] предлагаются новые аналитические подходы на основе конформных отображений для более эффективного описания очень крутых волн.

Предложенный независимо в работах [192, 193] псевдоспектральный метод высокого порядка (High Order Spectral Method, HOSM) для решения исходных потенциальных уравнений гидродинамики (5)–(8) обладает большей производительностью, чем уравнения Захарова аналогичного порядка по нелинейности. В HOSM для вычисления входящих в (7), (8) вертикальных компонент скорости на каждом шаге по времени используется точное решение уравнения Лапласа (5) в постоянной области, ограниченной сверху уровнем невозмущённой поверхности $z = 0$. Потенциал скорости $\varphi(\mathbf{x}, z, t)$ представляется в виде асимптотического ряда $\varphi^{(m)}$ по малому параметру крутизны волн ε, а пересчёт поверхностного потенциала $\Phi(\mathbf{x}, t)$ на уровень $z = 0$ происходит с помощью обращения разложения потенциала $\varphi(\mathbf{x}, z, t)$ в ряд Тейлора вблизи $z = 0$ до произвольного порядка M:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{M} \varphi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t),$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\eta^n}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial z^n}\,\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, z=0, t), \qquad (68)$$

$$\varphi^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(m)}(t)\,\frac{\cosh\left(|\mathbf{k}_n|(z+h)\right)}{\cosh\left(|\mathbf{k}_n|h\right)}\,\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}_n\mathbf{x}\right).$$

Параметр M определяет степень нелинейности модели. Схема HOSM в формулировке [193] эквивалентна 4-волновым гамильтоновым уравнениям Захарова при выборе $M = 3$ [194]. В [195, 196] предложены модификации HOSM для описания волн на неоднородных батиметрии и течениях, улучшена сходимость метода для описания очень крутых волн.

Ввиду ограниченных возможностей HOSM по описанию крутых волн разных длин (см. [37, 38]) в [197] был предложен новый быстрый метод решения уравнений (5)–(8) с высокой точностью в сопровождающей криволинейной системе координат, использующий в качестве первого приближения аналитическое решение уравнения Лапласа.

Отметим ряд новых моделей, являющихся модификациями уравнений Захарова для случая однонаправленных волн: так называемые компактные и суперкомпактные уравнения [189–200]. Для их вывода используются новое каноническое преобразование от $b_k(t)$ (см. (16)) к переменным $c_k(t)$ и ряд упрощений, основанных на свойствах симметрии четырёхволнового коэффициента взаимодействия $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ и его аппроксимации на резонансных поверхностях. Компактные уравнения имеют простую запись как в спектральном, так и в физическом пространствах, а также допускают так называемую пространственную формулировку, когда эволюционной переменной становится координата, а не время. Существенно, что суперкомпактное уравнение допускает точное решение в виде солитоноподобной короткой группы крутых волн [199], не имеющее формального ограничения на ширину спектра (см. раздел 5.5).

5.3. Стохастическое численное моделирование морских волн

Особую роль в решении проблемы волн-убийц играет прямое фазоразрешающее численное моделирование нерегулярных волн, позволяющее связать спектральные характеристики (являющиеся выходными данными существующих прогностических моделей морского волнения) и вероятностные свойства волн при минимуме предположений. Наиболее часто используется такая постановка задачи, что для заданного в начальный момент $t = 0$ спектра волнения выполняется расчёт эволюции волн в течение некоторого времени $0 < t < T$. Последующая статистическая обработка выполняется для набора реализаций начальных условий со случайными фазами, а также иногда и усреднением по периоду времени T. Выбирая длительность моделирования T не слишком большой, обычно пренебрегают эффектами затухания волн и ветровой накачки. Доминирующая часть стохастического численного моделирования выполнена в рамках перечисленных в разделе 5.2 моделей. Схема лабораторных экспериментов выглядит аналогичным образом с тем отличием, что волнопродуктором создаётся не начальное, а граничное условие на одной стороне лотка и исследуется эволюция волн по мере движения вдоль бассейна.

Для расчётов обычно используют спектры модельных форм, включая спектр JONSWAP, определённый по результатам длительных измерений в Северном море [96]:

$$S(\omega) = \frac{\alpha_{\mathrm{P}} g^2}{\omega^5}\,\exp\left[-\frac{5}{4}\,\frac{\omega_{\mathrm{p}}^4}{\omega^4}\right]\gamma^{\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\omega-\omega_{\mathrm{p}})^2}{\sigma^2\omega_{\mathrm{p}}^2}\right]}. \qquad (69)$$

Здесь ω_{p} — частота пика спектра, α_{P} — параметр Филипса, определяющий интенсивность волн; параметры $\sigma = 0{,}07$ и $\sigma = 0{,}09$ для $\omega \leqslant \omega_{\mathrm{p}}$ и $\omega \geqslant \omega_{\mathrm{p}}$ соответственно. При выборе параметра пиковатости γ равным единице выражение (69) совпадает по форме с классическим спектром Пирсона–Московица [23]. Для больших значе-

ний пиковатости спектр становится эффективно более узким.

Принципиальная трудность моделирования больших волн заключается в учёте обрушений [201]. Решения исходных уравнений (5)–(8) должны быть однозначными функциями координат. В конформных переменных поверхность описывается параметрически и может быть неоднозначной функцией горизонтальной координаты, но без самопересечений. При возникновении больших уклонов поверхности (даже в одной точке пространства) ряды Фурье начинают плохо сходиться, что ведёт к неустойчивости коротких волн в рамках спектральных численных кодов. Поскольку для стохастического моделирования требуются быстрые модели, используют параметризацию эффектов обрушения с применением спектральных фильтров или с добавлением искусственной вязкости в области коротких волн [94, 187, 202]. Для компенсации потерь энергии иногда добавляют накачку [203, 204]. Другая стратегия заключается в расчёте уравнений без параметризации эффектов обрушения до момента первого опрокидывания волны (не обязательно самой высокой), когда численная схема останавливается из-за неустойчивости [205, 206]. Все перечисленные подходы имеют свои недостатки, способные приводить к систематическим ошибкам в описании распределений вероятностей высот волн.

В большом числе проведённых вычислительных и лабораторных экспериментов (например, [92, 114, 115, 179, 207, 208]) показано, что если спектр начальных условий при фиксированной интенсивности достаточно узкий, то происходит его быстрое уширение, сопровождающееся ростом эксцесса (см. рис. 13), при этом возрастает и вероятность высоких волн. Неустойчивые состояния хорошо определяются индексом модуляционной неустойчивости BFI (23). На рисунке 14 построены графики динамики моментальных значений BFI по результатам расчёта однонаправленных волн с гауссовым спектром в рамках НУШ и конформных уравнений Дьяченко–Захарова, а также по данным измерений волн в 300-метровом гидродинамическом лотке [207, 209]. Начальные условия из области BFI < 1 оказываются устойчивыми и на рассмотренных временах не демонстрируют заметного изменения статистических свойств волн. При BFI > 1 происходит возврат системы в устойчивое состояние за характерное время, соответствующее динамическому масштабу $T_{\rm nl} = \omega_0^{-1}\varepsilon^{-2}$. В этот интервал времени значительно возрастает вероятность возникновения очень высоких волн, которая отражается и в кратковременном возрастании эксцесса смещений поверхности, как показано на рис. 15а.

Значительный рост эксцесса смещений поверхности на временах динамического масштаба за счёт его динамической части $\lambda^{\rm dyn}$ при резком изменении ветра продемонстрирован в численном моделировании уравнений Захарова [116]. В работе [210], где динамическая часть эксцесса выделялась из данных прямого численного моделирования уравнений Эйлера, показано, что роль динамического эксцесса важна в неравновесных ситуациях интенсивного волнения с относительно узким угловым спектром, как видно из рис. 15а. В противном случае широкого спектра основной вклад в эксцесс (и связанное с ним отклонение от гауссовой статистики) дают связанные волны (рис. 15б). При таких условиях статистические моменты определяются формой спектра (фазовые соотношения волн не важны), и с использованием численных методов для расчёта шестикратного сингулярного интеграла (21) они могут быть представлены в виде параметризаций реалистичных спектров (таких как JONSWAP) [211], что даёт практический инструмент для вероятностного описания волн в стационарных условиях.

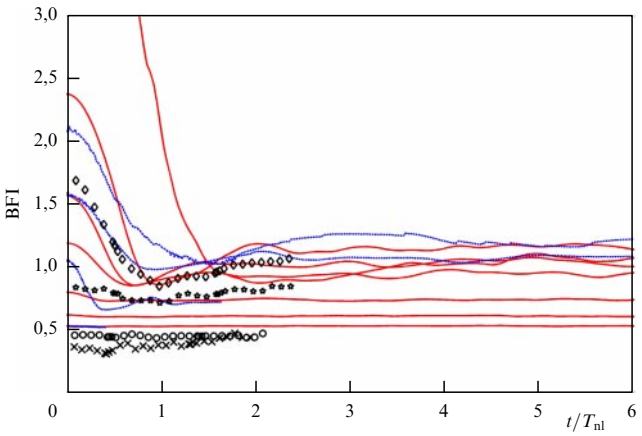

Рис. 14. Эволюция моментального индекса BFI по данным численного моделирования однонаправленных волн в рамках НУШ (красные сплошные кривые), полных уравнений Эйлера (синие пунктирные кривые) и лабораторных измерений (символы) [209].

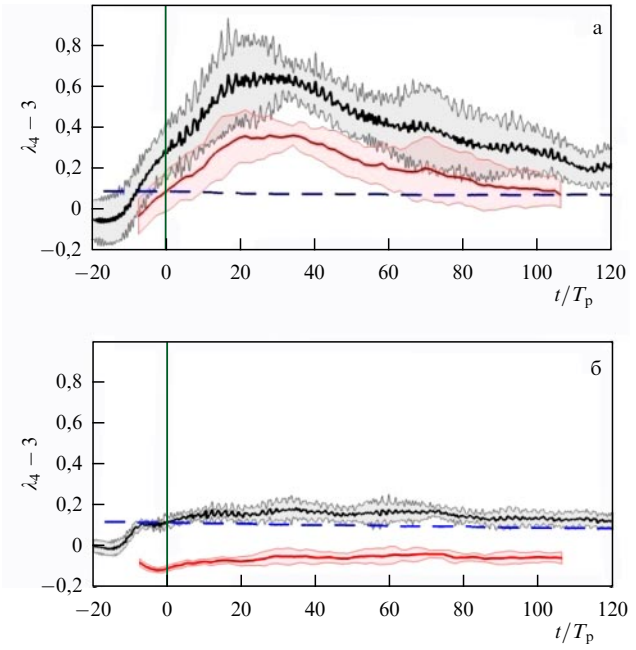

Рис. 15. Эволюция полного ($\lambda_4 - 3$) (чёрные кривые) и динамического $\lambda_4^{\rm dyn}$ (красные кривые) эксцесса смещений поверхности по результатам численного моделирования уравнений Эйлера методом HOSM ($M = 3$) для условий $T_{\rm p} = 10$ с, $H_{\rm s} = 6-7$ м и полуширины углового спектра JONSWAP 6° (а) и 30° (б). Горизонтальная штриховая прямая — оценка эксцесса связанных волн $\lambda_4^{\rm bound}$ (24). Интервал времени $t < 0$ соответствует подготовительной стадии инициализации вычислений [210].

Распределения вероятностей высот волн, построенные на основе численного моделирования однонаправленных волн со спектром JONSWAP при $\gamma = 3$ и умеренной нелинейности $k_{\rm p}\sigma \approx 0{,}035$ (обрушений практически не возникает) в рамках HOSM ($M = 6$), приведены на рис. 16. Они демонстрируют совпадение с распределе-

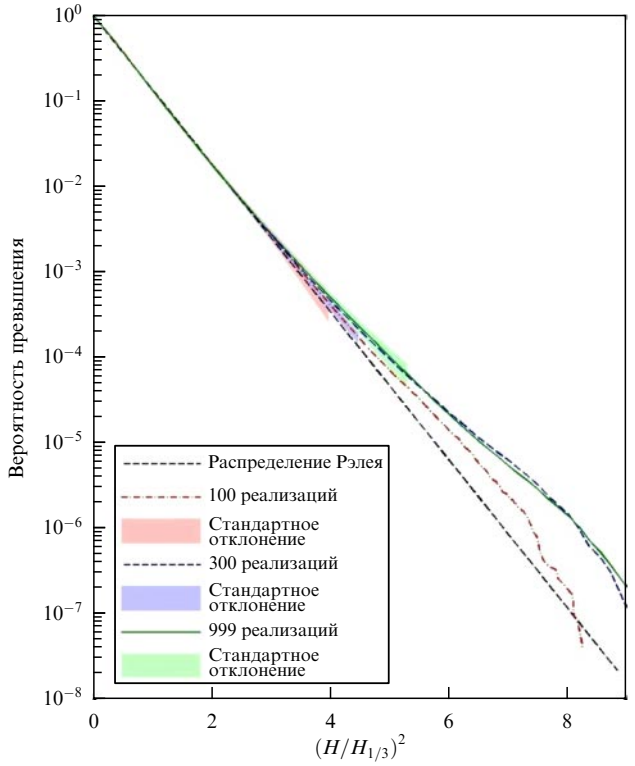

Рис. 16. Распределения вероятностей высот однонаправленных волн по результатам численного моделирования (спектр JONSWAP, $T_p = 10$ с, $H_s = 3{,}5$ м, $\gamma = 3$) в сравнении с распределением Рэлея (2). Три линии соответствуют ансамблям из 100, 300 и 999 случайных реализаций, заливка цветом — оценка доверительного интервала [250].

нием Рэлея в интервале волн относительно небольшой высоты и значимое различие для высоких волн, $H > 2H_{1/3}$.

Представляется, что большинство морских спектров соответствует равновесным условиям достаточно широкого спектра. В частности, в [212] на основе моделирования обобщения уравнения Альбера для случая широкого спектра сделан вывод об устойчивости состояний волнения с $\gamma \leqslant 1$ при любых реалистичных высотах волн. Этим обстоятельством может быть объяснён тот парадокс, что после усреднения по большим ансамблям натурных измерений отклонение распределения вероятностей высот волн от рэлеевского оказывается незаметным [52, 213, 214]. Для оценки опасности волн-убийц и возможности их прогноза необходимо исследовать механизмы возникновения в море неравновесных условий, в частности спектров с узким интенсивным пиком.

5.4. Характерный портрет волны-убийцы

Вследствие дисперсии, наиболее сильной на большой глубине, группы волн движутся медленнее индивидуальных волн. Наибольшие смещения поверхности в группах наблюдаются в те моменты, когда пик волны совпадает с максимумом огибающей группы. Из-за нелинейных поправок высота гребней больше глубины ложбин. Из этих простых рассуждений следует, что волн-убийц следует ожидать в виде очень высоких гребней, окружённых волнами меньшей амплитуды. Расчётные конфигурации волновых последовательностей, содержащих максимальные волны, могут получаться в рамках линейной теории (так называемой *New Wave theory*) или её слабонелинейного обобщения (см. [65, 215, 216]) либо по результатам прямого численного моделирования уравнений гидродинамики [90, 94, 217 – 225].

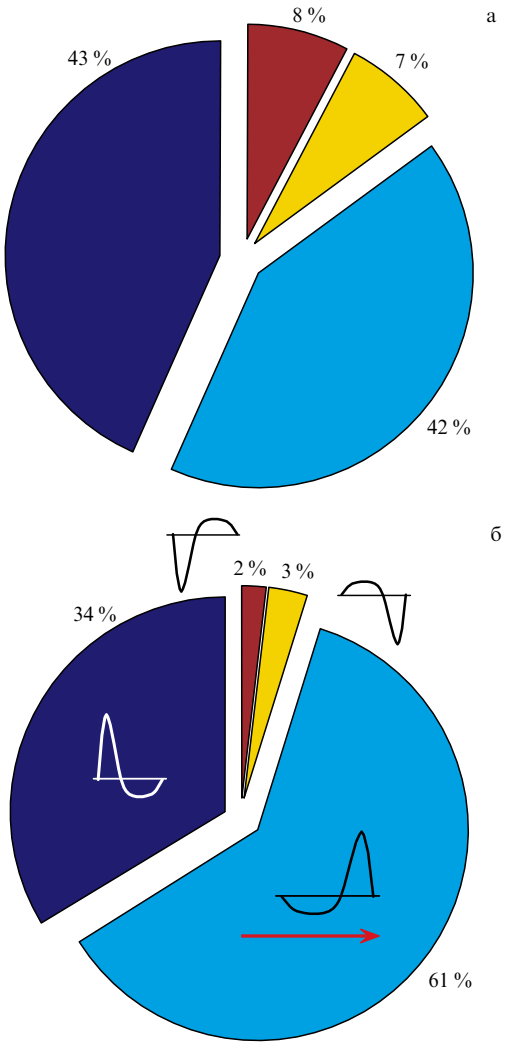

Рис. 17. Характерное распределение форм волн с AI > 2 по данным прямого численного моделирования нерегулярных волн с умеренной (а) и сильной (б) нелинейностью [225]. Стрелкой показано направление движения волн.

Действительно, для экстремальных волн характерны более высокие острые гребни, такие профили доминируют среди рассчитанных волн с AI > 2. Волны большой амплитуды, возникающие в результате модуляционной неустойчивости, в процессе фокусировки собирают в себе много бóльшую энергию, чем соседние волны; с возрастанием крутизны волн концентрация волновой энергии ещё более увеличивается [218, 220]. По форме эти волны близки к примерам натурных измерений на рис. 1, 5. Но возникают и волны других форм, приведённых на рис. 3, 4 [219]. По результатам численного моделирования отмечено, что у доминирующей части волн-убийц более высоким является задний склон (ложбина сзади глубже, чем спереди) [94, 219, 224, 225] (рис. 17), что согласуется с натурными измерениями в [58]. Такая асимметрия проявляется только в условиях интенсивного волнения и усиливается с возрастанием ширины углового спектра [225], что не соотносится с механизмом модуляционной неустойчивости и ещё требует объяснения.

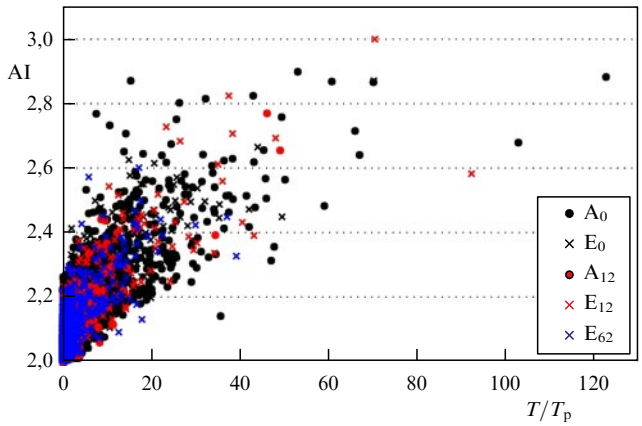

Рис. 18. Коэффициенты усиления AI в зависимости от продолжительности экстремальных событий AI > 2 в периодах волн $T_p = 10$ с по данным прямого численного моделирования [227]. Случаи A и E относятся к умеренной ($H_s = 3{,}5$ м) и сильной ($H_s = 6-7$ м) нелинейности соответственно. Нижние индексы указывают характерную ширину углового спектра в градусах.

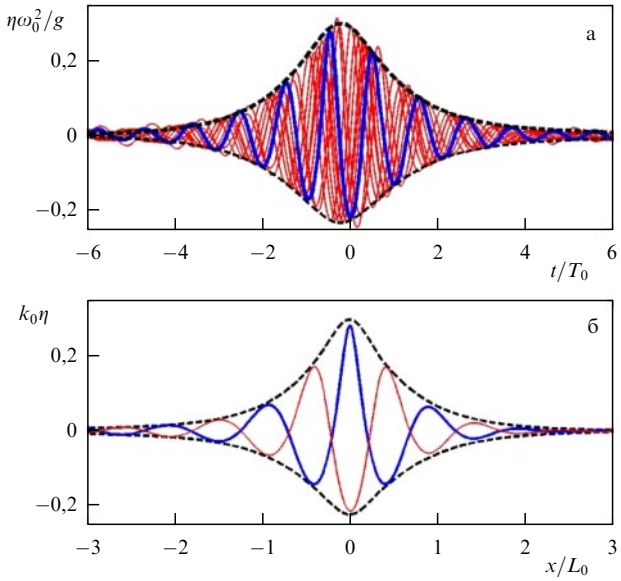

Рис. 19. Стационарная волновая группа максимальной крутизны на глубокой воде по результатам лабораторных экспериментов [231]. (а) Записи смещения поверхности на разных датчиках (сплошные кривые) и огибающая по результатам моделирования уравнений Эйлера (штриховая кривая). (б) Два моментальных профиля и эффективная огибающая по результатам численного моделирования.

Более скудным оказывается представление об объёмном портрете, получающемся в трёхмерных численных симуляциях [94, 223]. В [217, 226] отмечалось, что типичным является возникновение аномально высоких волн на зигзагообразных и распространяющихся под оптимальным углом к волновым фронтам паттернах поверхностных волн. Более разнообразная картина волн-убийц в полях волн с широким спектром наблюдалась в [227].

Очевидцы обычно отмечают скоротечность событий волн-убийц, что может быть следствием большой скорости движения волн (за один период 10-секундные волны на глубокой воде пробегают около 80 м). Посредством отслеживания эволюции интенсивных волн в вычислительных экспериментах оценивались характерные "времена жизни" волн-убийц. В целом, большее усиление волн наблюдается в более длительных событиях, как показано на рис. 18; можно отметить неожиданно большую длительность экстремальных событий. В работах [225, 227, 228] построены распределения вероятностей для продолжительностей волн-убийц. Если ширина углового спектра не слишком велика, то волны на фоне интенсивного волнения могут превышать порог AI = 2 в течение нескольких десятков периодов. Волны-убийцы в условиях широкого углового спектра и слабой нелинейности живут намного меньше, даже в сравнении с линейным решением.

5.5. Сильно нелинейные солитоны и бризеры на поверхности воды

В работе [229] в рамках численного решения исходных уравнений гидродинамики на глубокой воде в конформных переменных были обнаружены солитоноподобные волновые группы с крутизной, приближающейся к порогу обрушения. Из-за большой изменчивости формы (группа содержит всего пару волн, которые бегут вдвое быстрее группы) эти решения иногда называют бризерами. В [230] показано, что такие группы удовлетворительно описываются в рамках слабонелинейной теории модулированных волн (64) при значениях крутизны до величин порядка $k_0|A| \approx 0{,}2$, где $|A|$ — максимальная амплитуда, k_0 — характерное волновое число.

Найденные "предельные" солитоны огибающей воспроизведены в лабораторных экспериментах [231, 232], причём показано, что для их генерации может быть использовано солитонное решение стандартного НУШ (36). Инструментальные записи наиболее интенсивного и короткого лабораторного солитона огибающей приведены на рис. 19а (временны́е последовательности). Соответствующие моментальные профили построены по результатам прямого численного моделирования на рис. 19б. Крутизна солитона огибающей на рис. 19 по максимальному смещению поверхности оценивается как $k_0|A| \approx 0{,}3$ или через высоту волны как $k_0 H/2 \approx 0{,}25$. Таким образом, структурно устойчивые уединённые нелинейные пакеты коллинеарных волн на поверхности глубокой воды существуют практически во всём диапазоне крутизны волн — вплоть до достижения порога локального обрушения. В лабораторных экспериментах [232] показано, что интенсивные солитонные группы могут взаимодействовать почти упруго, подобно солитонам огибающей интегрируемого НУШ. Распространение и множественные взаимодействия интенсивных солитонов огибающей в численном моделировании компактных уравнений и полных уравнений также исследовались и сопоставлялись с результатами интегрируемой теории в работах [199, 233–235].

Предлагающиеся в качестве прототипов волн-убийц бризеры НУШ, включая решения высоких порядков, моделировались в рамках полных уравнений гидродинамики и в лабораторных условиях [236–241] (см. также раздел 4). В качестве общего вывода можно сказать, что слабонелинейные бризерные решения НУШ с удовлетворительной точностью воспроизводятся на конечных временны́х интервалах и демонстрируют возникновение волны большой амплитуды "словно ниоткуда" с последующей (неполной) демодуляцией. В случае конкуренции нескольких неустойчивых мод эволюция волн на больших временах может сильно отличаться от аналитиче-

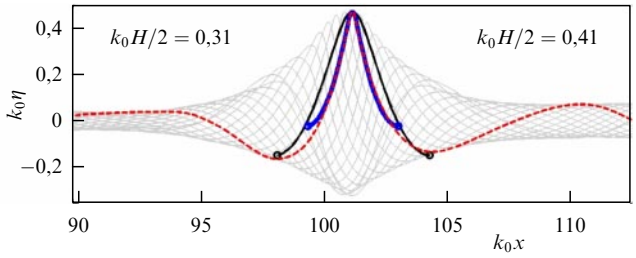

Рис. 20. Пример необрушающейся волны с максимальным усилением амплитуды по результатам численного моделирования модуляционно неустойчивых однонаправленных волн [240]. Красная штриховая кривая — моментальный профиль волны с максимальным смещением, серые кривые — профили волн в соседние моменты времени в сопровождающей системе координат. Тонкой чёрной и жирной синей кривыми показаны профили однородных волн Стокса, подогнанных соответственно по локальным экстремумам (оценка крутизны дана в левой части рисунка) и гребню (оценка крутизны — в правой части рисунка) максимальной волны.

ского решения. Формы волн-убийц, соответствующих максимальному усилению модуляционно неустойчивых цугов волн до порога обрушения, исследовались в [240]. Возникающие экстремальные волны оказались очень похожими по форме для разных затравочных условий [239] с гребнями, более узкими, чем в однородных волнах Стокса (рис. 20).

Волновые группы в полях случайных волн, похожие на солитоны огибающей и бризеры Перегрина, и их связь с экстремальными событиями отмечались во многих публикациях (см., например, [238, 242 – 249]). В недавней работе [250] был выполнен анализ эволюции нерегулярных волн в рамках численного моделирования уравнений Эйлера, где наблюдалось формирование долгоживущей солитоноподобной группы интенсивных волн. Несмотря на сильную нелинейность решения и широкий спектр волн, параметры солитона (скорость, амплитуда) слабо изменялись в течение более чем 200 периодов. Большинство волн большой амплитуды возникало на его фоне.

5.6. Реконструкция морских волн-убийц

Прямое численное моделирование используется для реконструкции аномально высоких волн по данным измерений смещения поверхности в точке, а также для воспроизведения состояний моря, когда такие волны наблюдались. В первом случае задача состоит в нахождении гидродинамических полей вблизи места измерения. По известному временно́му ряду смещения поверхности $\eta(x = x_0, t)$ при предположении однонаправленности волн в рамках приближённых нелинейно-дисперсионных моделей может быть восстановлен поверхностный потенциал $\Phi(x_0, t)$. Для расчёта эволюции волн по движению, $x > x_0$, и против движения, $x < x_0$, используются пространственные версии асимптотических уравнений [184, 251]. Реалистичность получаемой реконструкции инструментально измеренных морских волн-убийц подтверждена в [184] посредством сопоставления с результатами расчёта исходных уравнений гидродинамики.

Принципиальная важность учёта трёхмерной динамики при формировании Новогодней волны (см. рис. 1) утверждалась в работе [252] на основании нетипичного для теории НУШ среднего смещения вверх содержащей Новогоднюю волну группы. Качественное различие во временны́х записях экстремальных волн, возникающих при столкновении попутных и встречных солитонов огибающей, отмечалось в [232]. Таким образом, с использованием результатов нелинейной теории возможно восстановление динамики аномальных волн по непрямым свидетельствам.

Реконструкции измеренных волн-убийц выполнялись и в лабораторных лотках с использованием слабонелинейной теории для расчёта граничного условия на волнопродукторе и его последующего уточнения с помощью итерационной процедуры. Так, Новогодняя волна воссоздавалась в поле однонаправленных волн [253], а при предположении о двухмодовом характере — как результат распространяющихся под углом друг к другу волн [254].

В рамках второго направления опасные состояния моря реконструировались посредством прямого численного моделирования уравнений гидродинамики с начальными условиями в виде нерегулярных волн с заданным частотно-угловым спектром [213, 255 – 259]. Используемые для задания начальных условий спектры волнения определялись по результатам реанализа для соответствующих акваторий и временны́х интервалов. В численных экспериментах возникали волны большой амплитуды, которые, по заключениям авторов, довольно хорошо соответствовали профилям измеренных волн.

6. Заключение

Вопрос о природе аномально высоких волн, обнаруженных в натурных записях морского волнения, мотивировал за последние 20 лет исследования намного более широкого круга задач. "Свои" волны-убийцы появились в оптике и математике; сама проблема часто трактуется более широко как экстремальные события в полях нелинейных волн различной природы.

Насчитывается несколько сотен миллионов инструментально измеренных волн, включая несколько тысяч волн-убийц; абсолютные высоты морских волн могут достигать 30 м. Результаты статистической обработки натурных измерений противоречивы. Помимо технических вопросов (значительное число измерений волн-убийц отбраковывается при формализованной проверке), результаты обработки натурных данных могут подвергаться сомнению по ряду причин: неоднородность данных, изменчивость выборок, относительно небольшие массивы данных и т.д. Регистрация моментальной морской поверхности, в отличие от классических для океанографии измерений в одной точке, даёт намного более богатую информацию, но требует новых подходов.

В результате проведённых исследований идентифицированы механизмы генерации аномально высоких волн, предложены новые физико-математические модели, их учитывающие. Построен и исследован ряд базовых решений интегрируемых уравнений, описывающих взаимодействия солитонных структур, нелинейную стадию модуляционной неустойчивости волн. Солитонные и бризерные решения НУШ предложены в качестве стандартных волновых форм для мореходных тестов [260 – 262].

Пересмотрено представление о роли процессов нелинейной самомодуляции в стохастических полях морских волн и о важности учёта нелинейности высокого порядка в статистических моделях, предложены новые контролирующие параметры, характеризующие поведение волновых систем. В лабораторных экспериментах, проведён-

ных в гидродинамических бассейнах, использовалось высокоточное оборудование, позволившее воссоздать нелинейные аналитические решения, осуществить моделирование волн на больших дистанциях. Разработанные быстрые модели гидродинамики позволили накопить большой объём данных реалистичных расчётов морских волн.

Несмотря на полученные результаты фундаментального и прикладного характера, выход за рамки океанологии на междисциплинарный уровень, проблему морских волн-убийц нельзя считать решённой. В частности, действенность работающего в рамках физического моделирования механизма нелинейной самомодуляции волн остаётся недоказанной для реальных условий, и в ряде публикаций утверждается, что волны-убийцы можно объяснить без модуляционной неустойчивости [213]. Двадцать лет назад норвежцами С. Хавером и О. Андерсеном был сформулирован вопрос о том, являются ли волны-убийцы редкими событиями, порождёнными обычными физическими механизмами, или типичными проявлениями редко реализуемых механизмов [263]. На основании представленных в настоящем обзоре данных ответ в отношении морских волн, скорее, второй. Он способен объяснить несоответствие между выводами теоретического моделирования, включая лабораторные эксперименты, и данными статистического анализа многолетних измерений. Статистический вклад от редкого класса событий, соответствующих "аномальным" состояниям моря с большой вероятностью возникновения очень высоких волн, может быть небольшим. Но возможность прогнозировать такие условия будет иметь большую практическую пользу.

Для прогноза возникновения аномально высоких волн можно предложить несколько путей. Благодаря появлению быстрых кодов расчёта исходных и приближённых уравнений гидродинамики и росту производительности вычислительных устройств становится возможным прогноз в режиме реального времени. Техническая реализация опережающего расчёта эволюции волн на следующие несколько минут на основе информации с радара волновой обстановки в радиусе нескольких километров кажется вполне возможной [264 – 266]. Учитывая относительно небольшие горизонты прогностического моделирования, для него можно использовать более грубые, но быстрые модели, включая уравнения для огибающей и линейные уравнения [267]. Принципиальная осуществимость детерминистского прогноза следует из хорошего согласия эволюции нелинейных волн в лабораторных лотках и по результатам компьютерного моделирования на временах до $10^1 - 10^2$ периодов волн. Оценка теоретического предела детерминистского прогноза соответствует порядка 10^3 периодам волн для характерных условий в море [268]; прогноз на бóльшие времена возможен только в вероятностном смысле.

Другая группа подходов основывается на числовых индексах, используемых для оценки вероятности возникновения экстремальных волн. Для интеграции с существующими моделями оперативного прогноза индикаторы опасных волновых состояний должны вычисляться по спектральным данным (индекс BFI и его варианты). Поля индексов BFI уже рассчитываются европейским центром прогноза погоды ECMRWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts), они анализировались в [269]. Для неравновесных условий (в том числе на пороге модуляционной неустойчивости) связь между спектральными и статистическими характеристиками не локальна во времени, что пока не учитывается. Другой принципиальной трудностью является короткий временной масштаб опасных явлений (динамический масштаб $T_{\rm nl} = \omega_{\rm p}^{-1}\varepsilon^{-2}$, что составляет несколько десятков минут или менее) и соответственно меньший срок прогноза по сравнению со сроком классического прогноза на основе кинетических моделей (несколько часов и более).

Подходы, основанные на оценке свойств групп волн, можно отнести к промежуточному, третьему, типу прогноза. В [270, 271] предложен и затем протестирован на лабораторных данных способ определения тренда динамики групп волн на основе аппроксимации профилем *sech* (совпадающим с формой солитонов огибающей НУШ). Более последовательный и аккуратный, но и более сложный способ прогноза динамики волновых групп связан с применением метода обратной задачи рассеяния при предположении аппроксимации динамики волн интегрируемой моделью. Нестрого говоря, при этом вычисляется динамический аналог индекса BFI на масштабах отдельных групп. Разными авторами предложено несколько вариаций такого подхода для условий глубокой воды (из наиболее свежих работ: [245, 246, 250, 272, 273]). Солитонный анализ полей волн на мелководье также проводился [274]. Теоретическое описание вероятностных свойств нерегулярных нелинейных волн по данным спектра ассоциированной задачи рассеяния является другой привлекательной целью, к которой пока делаются лишь первые шаги [102, 106].

Имеются единичные примеры использования нейронных сетей для прогноза возникновения опасных волн на побережье, но пока, на наш взгляд, они не слишком убедительны.

Обзор подготовлен при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках научного проекта № 20-15-50112. Исследования А.В.С. и Е.Н.П. поддержаны государственным заданием (тема № 0030-2021-0007) и грантом РФФИ 21-55-15008.

Список литературы

1. Draper L *Oceanus* **10** 13 (1964)
2. Mallory J K *Int. Hydrographic Rev.* **51** (2) 99 (1974)
3. Tørum A, Gudmestad O T (Eds) *Water Wave Kinematics* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
4. Лопатухин Л И и др. *Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства* (26) 65 (2003)
5. Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A *Rogue Waves in the Ocean* (Berlin: Springer, 2009)
6. Григорьева В Г, Гулев С К *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **4** (4) 18 (2011)
7. Дьяченко А И и др. "Волны-убийцы и задачи их исследования", в кн. *Мировой океан* (Под общ. ред. Л И Лобковского) Т. 1 *Геология и тектоника океана. Катастрофические явления в океане* (М.: Научный мир, 2013)
8. Didenkulova E G *Ocean Coastal Management* **188** 105076 (2020)
9. Nikolkina I, Didenkulova I *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11** 2913 (2011)
10. Диденкулова Е Г, Пелиновский Е Н *Докл. РАН* **491** 97 (2020); Didenkulova E G, Pelinovsky E N *Dokl. Earth Sci.* **491** 187 (2020)
11. Куркин А А, Пелиновский Е Н *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование* (Н. Новгород: Нижегор. гос. техн. ун-т, 2004)
12. Доценко С Ф, Иванов В А *Волны-убийцы* (Севастополь: МГИ НАНУ, 2006)

13. Шамин Р В *Математические вопросы волн-убийц* (Синергетика: от прошлого к будущему, № 76) (М.: ЛЕНАНД, 2016)
14. Guo B et al. *Rogue Waves*: *Mathematical Theory and Applications in Physics* (Berlin: Walter de Gruyter GmbH, Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2017) https://doi.org/10.1515/9783110470574
15. Dysthe K, Krogstad H E, Müller P *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40** 287 (2008)
16. Slunyaev A, Didenkulova I, Pelinovsky E *Contemp. Phys.* **52** 571 (2011)
17. Onorato M et al. *Phys. Rep.* **528** 47 (2013)
18. Adcock T A A, Taylor P H *Rep. Prog. Phys.* **77** 105901 (2014)
19. Слюняев А В *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* (3) 33 (2017); Slunyaev A V *Moscow Univ. Phys. Bull.* **72** 236 (2017)
20. Akhmediev N, Pelinovsky E *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 1 (2010)
21. Dudley J M et al. *Nat. Photon.* **8** 755 (2014)
22. Dudley J M et al. *Nat. Rev. Phys.* **1** 675 (2019)
23. Holthuijsen L H *Waves in Oceanic and Coastal Waters* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007)
24. Haver S, in *Rogue Waves 2004, Proc. of a Workshop, Brest, France, 20–22 October 2004* (Eds M Olagnon, M Prevosto) (Brest: Ifremer, 2005)
25. Massel S R *Ocean Surface Waves*: *Their Physics and Prediction* (Singapore: World Scientifc, 1996)
26. Захаров В Е *Прикладная механика и техническая физика* (2) 86 (1968); Zakharov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** 190 (1968)
27. Zakharov V E, Ostrovsky L A *Physica D* **238** 540 (2009)
28. Osborne A R *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform* (New York: Academic Press, 2010)
29. Henderson K L, Peregrine D H, Dold J W *Wave Motion* **29** 341 (1999)
30. Dysthe K B, Trulsen K *Phys. Scr.* (T82) 48 (1999)
31. Кузнецов Е А *ДАН СССР* **236** 575 (1977); Kuznetsov E A *Sov. Phys. Dokl.* **22** 507 (1977)
32. Peregrine D H *J. Austral. Math. Soc. B* **25** 16 (1983)
33. Ахмедиев Н Н и др. *ЖЭТФ* **89** 1542 (1985); Akhmediev N N et al. *Sov. Phys. JETP* **62** 894 (1985)
34. Ахмедиев Н Н, Елеонский В М, Кулагин Н Е *ТМФ* **72** 183 (1987); Akhmediev N N, Eleonskii V M, Kulagin N E *Theor. Math. Phys.* **72** 809 (1987)
35. Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M *Phys. Lett. A* **373** 675 (2009)
36. Cavaleri L et al. (The WISE Group) *Prog. Oceanogr.* **75** 603 (2007)
37. Chalikov D V *Numerical Modeling of Sea Waves* (Cham: Springer, 2016)
38. Чаликов Д В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **56** 360 (2020); Chalikov D V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **56** 312 (2020)
39. "Cargo ship breaks in half off Turkey", Scuttlebutt Sailing News, Published on February 2, 2021, https://www.sailingscuttlebutt.com/2021/02/02/cargo-ship-breaks-in-half-off-turkey/
40. "Father dies trying to rescue 2 kids swept off beach by wave", U.S. News. The Associated Press, January 5, 2021, https://apnews.com/article/ca-state-wire-1e313a82fc90be476f4061bccd94cbaf
41. Didenkulova I I et al. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **6** 1007 (2006)
42. Liu P C *Geofizika* **24** (1) 57 (2007)
43. Liu P C *Nat. Hazards Earth Syst. Sci. Discuss.* **2** 7017 (2014)
44. Baschek B, Imai J *Oceanography* **24** 158 (2011)
45. Candella R N *Nat. Hazards* **83** 211 (2016)
46. O'Brien L et al. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **18** 729 (2018)
47. Garcia-Medina G et al. *Nat. Hazards* **94** 583 (2018)
48. Didenkulova I I, Nikolkina I F, Pelinovsky E N *Письма в ЖЭТФ* **97** 221 (2013); *JETP Lett.* **97** 194 (2013)
49. Turton J, Fenna P *Weather* **63** 352 (2008)
50. Barbario F et al. *Prog. Oceanogr.* **175** 139 (2019)
51. Cardone V J et al. *Int. J. Climatol.* **35** 69 (2015)
52. Christou M, Ewans K *J. Phys. Oceanogr.* **44** 2317 (2014)
53. Orzech M D, Wang D *J. Mar. Sci. Eng.* **8** 890 (2020)
54. Cattrell A D et al. *J. Geophys. Res. Oceans* **123** 5624 (2018)
55. Cattrell A D et al. *Sci. Rep.* **9** 4461 (2019)
56. Teutsch I et al. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **20** 2665 (2020)
57. Mori N *Ocean Eng.* **31** 165 (2004)
58. Pinho U F, Liu P C, Ribeiro C E P *Geofizika* **21** 53 (2004)
59. Stansell P *Appl. Ocean Res.* **26** 35 (2004)
60. Lavrenov I *Nat. Hazards* **17** 117 (1998)
61. Glejin J et al. *Indian J. Geo-Marine Sci.* **43** 1339 (2014)
62. Didenkulova I *Borel Env. Res.* **16** 138 (2011)
63. Кузнецов К И и др. *Экологические системы и приборы* (2) 33 (2014)
64. Дивинский Б В и др. *Докл. РАН* **395** 690 (2004); Divinsky B V et al. *Dokl. Earth Sci.* **395** 438 (2004)
65. Karmpadakis I, Swan C *J. Phys. Oceanogr.* **50** 1023 (2020)
66. Benetazzo A et al. *Sci. Rep.* **7** 8276 (2017)
67. Bergamasco F, Benetazzo A *J. Mar. Sci. Eng.* **9** 238 (2021)
68. Cavaleri L et al. *Sci. Data* **8** 37 (2021)
69. Mei C C, Stiassnie M, Yue D K P *Theory and Applications of Ocean Surface Waves* Pt. 1 *Linear Aspects* (Singapore: World Scientific, 2005)
70. Krasitskii V P *J. Fluid Mech.* **272** 1 (1994)
71. Zakharov V *Eur. J. Mech. B* **18** 327 (1999)
72. Zakharov V E *Procedia IUTAM* **26** 43 (2018)
73. Pelinovsky E, Talipova T, Kharif C *Physica D* **147** 83 (2000)
74. White B S, Fornberg B *J. Fluid Mech.* **255** 113 (1998)
75. Johannessen T B, Swan C *Appl. Ocean Res.* **19** 293 (1997)
76. Clauss G *Appl. Ocean Res.* **24** 147 (2002)
77. Ducrozet G, Fink M, Chabchoub A *Phys. Rev. Fluids* **1** 054302 (2016)
78. Tobisch E, Pelinovsky E *J. Phys. A* **53** 345703 (2020)
79. Slunyaev A et al. *Physica D* **173** 77 (2002)
80. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **97** 788 (2013); Ruban V P *JETP Lett.* **97** 686 (2013)
81. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **100** 853 (2014); Ruban V P *JETP Lett.* **100** 751 (2014)
82. Stiassnie M, Shemer L *Wave Motion* **41** 307 (2005)
83. Annenkov S Y, Shrira V I *J. Fluid Mech.* **561** 181 (2006)
84. Janssen P A E M *J. Phys. Oceanogr.* **33** 863 (2003)
85. Mori N, Janssen P A E M *J. Phys. Oceanogr.* **36** 1471 (2006)
86. Onorato M et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 5831 (2001)
87. Onorato M et al. *Eur. J. Mech. B* **25** 586 (2006)
88. McLean J W *J. Fluid Mech.* **114** 315 (1982)
89. Alber I E *Proc. R. Soc. Lond. A* **363** 525 (1978)
90. Dyachenko A I, Zakharov V E *Письма в ЖЭТФ* **81** 318 (2005); *JETP Lett.* **81** 255 (2005)
91. Бадулин С И, Ивонин Д В *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **5** (1) 37 (2012)
92. Mori N, Onorato M, Janssen P A E M *J. Phys. Oceanogr.* **41** 1484 (2011)
93. Waseda T, Kinoshita T, Tamura H *J. Phys. Oceanogr.* **39** 621 (2009)
94. Xiao W et al. *J. Fluid Mech.* **720** 357 (2013)
95. Ribal et al. *J. Fluid Mech.* **719** 314 (2013)
96. Janssen P *The Interaction of Surface Waves and Wind* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
97. Pelinovsky E, Sergeeva A *Eur. J. Mech. B* **25** 425 (2006)
98. Mussot A et al. *Opt. Express* **17** 17010 (2009)
99. Slunyaev A V, Pelinovsky E N *Phys. Rev. Lett.* **117** 214501 (2016)
100. Sun Y-H *Phys. Rev. E* **93** 052222 (2016)
101. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **102** 739 (2015); Ruban V P *JETP Lett.* **102** 650 (2015)
102. Soto-Crespo J M, Devine N, Akhmediev N *Phys. Rev. Lett.* **116** 103901 (2016)
103. Пелиновский Е Н, Шургалина Е Г, Слюняев А В, в сб. *Нелинейные волны'2016* (Отв. ред. А М Сергеев, А В Слюняев) (Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2017) с. 279
104. Gelash A A, Agafontsev D S *Phys. Rev. E* **98** 042210 (2018)
105. El G, Tovbis A *Phys. Rev. E* **101** 052207 (2020)
106. Mullyadzhanov R, Gelash A *Phys. Rev. Lett.* **126** 234101 (2021)
107. El G A *J. Stat. Mech.* **2021** 114001 (2021)
108. Agafontsev D S, Zakharov V E *Nonlinearity* **28** 2791 (2015)
109. Agafontsev D S, Zakharov V E *Nonlinearity* **29** 3551 (2016)
110. Kachulin D, Dyachenko A, Zakharov V *Fluids* **5** (2) 67 (2020)
111. Onorato M et al. *Phys. Lett. A* **380** 3173 (2016)
112. Fedele F *J. Fluid Mech.* **782** 25 (2015)
113. Janssen P A E M, Janssen A J E M *J. Fluid Mech.* **859** 790 (2019)
114. Onorato M et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 114502 (2009)
115. Tang T et al. *J. Fluid Mech.* **908** A3 (2021)
116. Annenkov S Y, Shrira V I *Geophys. Res. Lett.* **36** L13603 (2009)
117. Annenkov S Y, Shrira V I *Phys. Rev. Lett.* **102** 024502 (2009)
118. Slunyaev A, Sergeeva A, Pelinovsky E *Physica D* **303** 18 (2015)

119. Janssen T T, Herbers T H C *J. Phys. Oceanogr.* **39** 1948 (2009)
120. Onorato M, Proment D, Toffoli A *Phys. Rev. Lett.* **107** 184502 (2011)
121. Sergeeva A, Pelinovsky E, Talipova T *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11** 323 (2011)
122. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **95** 550 (2012); Ruban V P *JETP Lett.* **95** 486 (2012)
123. Zeng H, Trulsen K *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **12** 631 (2012)
124. Adcock T A A, Taylor P H *Int. J. Offshore Polar Eng.* **21** 8 (2011)
125. Ducrozet G, Slunyaev A V, Stepanyants Y A *Phys. Fluids* **33** 066606 (2021)
126. Trulsen K et al. *J. Fluid Mech.* **882** R2 (2020)
127. Zheng Y K et al. *Phys. Rev. Fluids* **5** 064804 (2020)
128. Zhang J, Benoit M *J. Fluid Mech.* **912** A28 (2021)
129. Li Y et al. *J. Fluid Mech.* **915** A71 (2021)
130. Peregrine D H *Adv. Appl. Math.* **16** 9 (1976)
131. Басович А Я, Таланов В И *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **13** 766 (1977)
132. Moreira R M, Peregrine D H *J. Fluid Mech.* **691** 1 (2012)
133. Shrira V I, Slunyaev A V *J. Fluid Mech.* **738** 65 (2014)
134. Pelinovsky E, Polukhina O, Kurkin A *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 35 (2010)
135. Shrira V I, Slunyaev A V *Phys. Rev. E* **89** 041002 (2014)
136. Deconinck B, Segal B L *Physica D* **346** 1 (2017)
137. Chen J, Pelinovsky D E, White R E *Physica D* **405** 132378 (2020)
138. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **61** 118 (1971); Zakharov V E, Shabat A B *Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)
139. Ablowitz M J et al. *Stud. Appl. Math.* **53** 249 (1974)
140. Biondini G, Mantzavinos D *Commun. Pure Appl. Math.* **70** 2300 (2017)
141. Grinevich P G, Santini P M *Nonlinearity* **31** 5258 (2018)
142. Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N *Phys. Rev. E* **88** 013207 (2013)
143. Matveev V B, Smirnov A O *J. Math. Phys.* **59** 091419 (2018)
144. Chen J, Pelinovsky D E, White R *Phys. Rev. E* **100** 052219 (2019)
145. Tajiri M, Watanabe Y *Phys. Rev. E* **57** 3510 (1998)
146. Slunyaev A *Eur. J. Mech. B* **25** 621 (2006)
147. Zakharov V E, Gelash A A *Phys. Rev. Lett.* **111** 054101 (2013)
148. Garnier J, Kalimeris K *J. Phys. A* **45** 035202 (2012)
149. Biondini G, Kovacic G *J. Math. Phys.* **55** 031506 (2014)
150. Bilman D, Miller P D *Commun. Pure Appl. Math.* **72** 1722 (2019)
151. Klaus M, Pelinovsky D E, Rothos V M *J. Nonlin. Sci.* **16** 1 (2006)
152. Klein C, Haragus M *Ann. Math. Sci. Appl.* **2** 217 (2017)
153. Calini A, Schober C M, Strawn M *Appl. Numer. Math.* **141** 36 (2019)
154. Cuevas-Maraver J et al. *Phys. Rev. E* **96** 012202 (2017)
155. Calini A, Schober C M *Nonlinearity* **25** R99 (2012)
156. Grinevich P G, Santini P M *Nonlinearity* **34** 8331 (2021); Haragus M, Pelinovsky D E *J. Nonlinear. Sci.* **32** 66 (2022)
157. Alejo M A, Fanelli L, Munoz C *Front. Phys.* **8** 591995 (2020)
158. Pelinovsky D E *Front. Phys.* **9** 599146 (2021)
159. Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **223** 43 (2014)
160. Chen J, Pelinovsky D E *Proc. R. Soc. Lond. A* **474** 20170814 (2018)
161. Feng B F, Ling L, Takahashi D A *Stud. Appl. Math.* **144** 46 (2020)
162. Xu G et al. *Phys. Rev. Res.* **2** 033528 (2020)
163. Baronio F et al. *Phys. Rev. Lett.* **113** 034101 (2014)
164. Baronio F *Phys. Rev. A* **91** 033804 (2015)
165. Mancic A et al. *Phys. Rev. E* **98** 012209 (2018)
166. Pelinovsky D E, White R E *Proc. R. Soc. Lond. A* **476** 20200490 (2020)
167. Marangell R, Miller P D *Physica D* **308** 87 (2015)
168. Deconinck B, McGill P, Segal B L *Physica D* **360** 17 (2017)
169. Chen J, Pelinovsky D E *Nonlinearity* **31** 1955 (2018)
170. Bertola M, El G A, Tovbis A *Proc. R. Soc. Lod. A* **472** 20160340 (2016)
171. Wright O C *Physica D* **321** 16 (2016)
172. Bertola M, Tovbis A *Commun. Math. Phys.* **354** 525 (2017)
173. Wright O C *Nonlinearity* **32** 1929 (2019)
174. Soto-Crespo J M, Denive N, Akhmediev N *Phys. Rev. A* **96** 023825 (2017)
175. Kimmoun O et al. *Sci. Rep.* **6** 28516 (2016)
176. Vanderhaegen G et al. *Opt. Lett.* **45** 3757 (2020)
177. Conforti M et al. *Phys. Rev. A* **101** 023843 (2020)
178. Gramstad O, Stiassnie M *J. Fluid Mech.* **718** 280 (2013)
179. Annenkov S Y, Shrira V I *J. Fluid Mech.* **844** 766 (2018)
180. Слюняев А В *ЖЭТФ* **128** 1061 (2005); Slunyaev A V *J. Exp. Theor. Phys.* **101** 926 (2005)
181. Sedletsky Yu V *Ukr. J. Phys.* **66** 41 (2021)
182. Trulsen K et al. *Phys. Fluids* **12** 2432 (2000)
183. Gramstad O, Trulsen K *J. Fluid Mech.* **670** 404 (2011)
184. Slunyaev A, Pelinovsky E, Guedes Soares C *J. OMAE* **136** 011302 (2014)
185. Дьяченко А И *Докл. РАН* **376** 27 (2001); Dyachenko A I *Dokl. Math.* **63** 115 (2001)
186. Zakharov V E, Dyachenko A I, Vasilyev O A *Eur. J. Mech. B* **21** 283 (2002)
187. Chalikov D *Nonlin. Proc. Geophys.* **12** 671 (2005)
188. Ruban V P *Phys. Rev. E* **71** 055303 (2005)
189. Ruban V P *Phys. Rev. E* **81** 056303 (2010)
190. Lushnikov P M, Dyachenko S A, Silantyev D A *Proc. R. Soc. Lod. A* **473** 20170198 (2017)
191. Dyachenko et al. *Proc. R. Soc. Lon. A* **476** 20200811 (2021)
192. Dommermuth D, Yue D K P *J. Fluid Mech.* **184** 267 (1987)
193. West et al. *J. Geophys. Res.* **92** 11803 (1987)
194. Onorato M, Osborne A R, Serio M *Eur. J. Mech. B* **26** 43 (2007)
195. Ducrozet G et al. *Comput. Phys. Commun.* **203** 245 (2016)
196. Gouin M, Ducrozet G, Ferrant P *Eur. J. Mech. B* **57** 115 (2016)
197. Chalikov D V, Babanin A V, Sanina E *Ocean Dyn.* **64** 1469 (2014)
198. Dyachenko A I, Zakharov V E *Письма в ЖЭТФ* **93** 782 (2011); *JETP Lett.* **93** 701 (2011)
199. Dyachenko A I, Kachulin D I, Zakharov V E *J. Fluid Mech.* **828** 661 (2017)
200. Dyachenko A I *Stud. Appl. Math.* **144** 493 (2020)
201. Babanin A *Breaking and Dissipation of Ocean Surface Waves* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011)
202. Slunyaev A, Kokorina A *Water Waves* **2** 243 (2020)
203. Захаров В Е, Шамин Р В *Письма в ЖЭТФ* **96** 68 (2012); Zakharov V E, Shamin R V *JETP Lett.* **96** 66 (2012)
204. Шамин Р В, Юдин А В *Матем. моделирование* **28** (9) 31 (2016); Shamin R V, Yudin A V *Math. Models Comput. Simul.* **9** (2) 176 (2017)
205. Захаров В Е, Шамин Р В *Письма в ЖЭТФ* **91** 68 (2010); Zakharov V E, Shamin R V *JETP Lett.* **91** 62 (2010)
206. Kirezci C, Babanin A V, Chalikov D V *Ocean Eng.* **231** 108715 (2021)
207. Shemer L, Sergeeva A, Slunyaev A *Phys. Fluids* **22** 016601 (2010)
208. Shemer L, Sergeeva A, Liberzon D *J. Geophys. Res.* **115** 12039 (2010)
209. Слюняев А В, Сергеева А В *Письма в ЖЭТФ* **94** 850 (2011); Slunyaev A V, Sergeeva A V *JETP Lett.* **94** 779 (2011)
210. Slunyaev A V *Phys. Rev. E* **101** 062214 (2020)
211. Annenkov S Y, Shrira V I *J. Phys. Oceanogr.* **44** 1582 (2014)
212. Andrade D, Stiassnie M *Wave Motion* **97** 102581 (2020)
213. Fedele F et al. *Sci. Rep.* **6** 27715 (2016)
214. Chalikov D, Bulgakov K *J. Ocean Eng. Mar. Energy* **3** 417 (2017)
215. Arena F *Ocean Eng.* **32** 1311 (2005)
216. Petrova P, Arena F, Guedes Soares C *Ocean Eng.* **38** 1640 (2011)
217. Ruban V P *Phys. Rev. Lett.* **99** 044502 (2007)
218. Чаликов Д В *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **5** (1) 5 (2012)
219. Sergeeva A, Slunyaev A *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **13** 1759 (2013)
220. Захаров В Е, Шамин Р В, Юдин А В *Письма в ЖЭТФ* **99** 597 (2014); Zakharov V E, Shamin R V, Yudin A V *JETP Lett.* **99** 514 (2014)
221. Захаров В Е, Шамин Р В, Юдин А В *Докл. РАН* **462** 100 (2015); Zakharov V E, Shamin R V, Yudin A V *Dokl. Earth Sci.* **462** 484 (2015)
222. Adcock T A A, Taylor P H, Draper S *Proc. R. Soc. Lond. A* **471** 20150660 (2015)
223. Adcock T A A, Taylor P H, Draper S *Phys. Fluids* **28** 106601 (2016)
224. Slunyaev A, Sergeeva A, Didenkulova I *Nat. Hazards* **84** 549 (2016)
225. Слюняев А В, Кокорина А В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **56** 210 (2020); Slunyaev A V, Kokorina A V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **56** 179 (2020)

226. Ruban V P *Письма в ЖЭТФ* **94** 194 (2011); *JETP Lett.* **94** 177 (2011)
227. Kokorina A, Slunyaev A *Fluids* **4** 70 (2019)
228. Fujimoto W, Waseda T, Webb A *Ocean Dyn.* **69** 101 (2019)
229. Dyachenko A I, Zakharov V E *Письма в ЖЭТФ* **88** 356 (2008); *JETP Lett.* **88** 307 (2008)
230. Слюняев А В *ЖЭТФ* **136** 785 (2009); Slunyaev A V *J. Exp. Theor. Phys.* **109** 676 (2009)
231. Slunyaev A et al. *Phys. Fluids* **25** 067105 (2013)
232. Slunyaev A, Klein M, Clauss G F *Phys. Fluids* **29** 047103 (2017)
233. Dyachenko A I, Kachulin D I, Zakharov V E *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **13** 3205 (2013)
234. Kachulin D, Dyachenko A, Gelash A *Fluids* **4** 83 (2019)
235. Kachulin D, Dyachenko A, Dremov S *Fluids* **5** 65 (2020)
236. Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N *Phys. Rev. Lett.* **106** 204502 (2011)
237. Chabchoub A et al. *Phys. Rev. X* **2** 011015 (2012)
238. Chabchoub A et al. *Phys. Fluids* **25** 101704 (2013)
239. Slunyaev A et al. *Phys. Rev. E* **88** 012909 (2013)
240. Slunyaev A V, Shrira V I *J. Fluid Mech.* **735** 203 (2013)
241. Shemer L, Alperovich L *Phys. Fluids* **25** 051701 (2013)
242. Viotti C et al. *Phys. Rev. E* **87** 063001 (2013)
243. Slunyaev A V, Kokorina A V *J. Ocean Eng. Mar. Energy* **3** 395 (2017)
244. Cazaubiel A et al. *Phys. Rev. Fluids* **3** 114802 (2018)
245. Osborne A et al. *Ocean Dyn.* **69** 187 (2019)
246. Suret P et al. *Phys. Rev. Lett.* **125** 264101 (2020)
247. Tikan A *Phys. Rev. E* **101** 012209 (2020)
248. Wang A et al. *Phys. Fluids* **32** 087109 (2020)
249. Agafontsev D S, Gelash A A *Front. Phys.* **9** 610896 (2021)
250. Slunyaev A V *Phys. Fluids* **33** 036606 (2021)
251. Sergeeva A et al. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **14** 861 (2014)
252. Adcock T A A et al. *Proc. R. Soc. Lond. A* **467** 3004 (2011)
253. Clauss G F, Klein M *J. Offshore Mech. Arct. Eng.* **131** 041001 (2009)
254. McAllister M L et al. *J. Fluid Mech.* **860** 767 (2019)
255. Bitner-Gregersen E M et al. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **14** 1407 (2014)
256. Fedele F, Lugni C, Chawla A *Sci. Rep.* **7** 11188 (2017)
257. Donelan M A, Magnusson A K *Sci. Rep.* **7** 44124 (2017)
258. Kokina T, Dias F *J. Mar. Sci. Eng.* **8** 1023 (2020)
259. Innocenti A, Onorato M, Brandini C *J. Mar. Sci. Eng.* **9** 422 (2021)
260. Onorato M et al. *PLOS One* **8** e54629 (2013)
261. Klein M et al. *Ocean Eng.* **128** 199 (2016)
262. Klein M, Clauss G F, Hoffmann N *Ocean Eng.* **234** 109271 (2021)
263. Haver S, Andersen O J, in *Proc. of the Tenth* (*2000*) *Intern. Offshore and Polar Engineering Conf. ISOPE-2000, Seattle, USA, May 27 – June 2 2000* (Cupertino, CA: The International Society of Offshore and Polar Engineers, 2000) p. 123
264. van Groesen E, Turnip P, Kurnia R *J. Ocean Eng. Mar. Energy* **3** 233 (2017)
265. Köllisch N et al. *Ocean Eng.* **157** 387 (2018)
266. Klein M et al. *Fluids* **5** (1) 9 (2020)
267. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **103** 647 (2016); Ruban V P *JETP Lett.* **103** 568 (2016)
268. Annenkov S Yu, Shrira V I *J. Fluid Mech.* **449** 341 (2001)
269. Ponce de León S, Guedes Soares C *Ocean Modelling* **81** 78 (2014)
270. Cousins W, Sapsis T P *J. Fluid Mech.* **790** 368 (2016)
271. Cousins W et al. *Phys. Rev. E* **99** 032201 (2019)
272. Randoux S, Suret P, El G *Sci. Rep.* **6** 29238 (2016)
273. Calini A, Schober C M *Wave Motion* **71** 5 (2017)
274. Brühl M, Oumeraci H *Appl. Ocean Res.* **61** 81 (2016)

Rogue waves in the sea: observations, physics and mathematics

A.V. Slunyaev [(1,2,a)], **D.E. Pelinovsky** [(1,3,b)], **E.N. Pelinovsky** [(1,2,c)]

[(1)] *Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation*

[(2)] *National Research University Higher School of Economics, ul. Bol'shaya Pecherskaya 25/12, 603155 Nizhny Novgorod, Russian Federation*

[(3)] *Department of Mathematics, McMaster University, 1280 Main Street West, Hamilton, Ontario L8S 4K1, Canada*

E-mail: [(a)] *slunyaev@ipfran.ru*, [(b)] *dmpeli@math.mcmaster.ca*, [(c)] *pelinovsky@ipfran.ru*

Rogue waves are anomalously high waves that may suddenly form on the sea surface. At the dawn of the 21st century, they attracted the interest of researchers, from oceanographers to mathematicians. The review discusses the results of their research: physical mechanisms leading to the generation of anomalously high waves and respective mathematical models, observational data, results of direct numerical simulations and laboratory experiments, and new approaches to modeling and forecasting extreme sea waves.

Keywords: rogue waves, freak waves, sea wind waves, nonlinear waves

PACS numbers: **05.45. – a**, 92.10.Hm

Bibliography — 274 references

Received 24 July 2021, revised 6 August 2021

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **193** (2) 155 – 181 (2023)

Physics – Uspekhi **66** (2) (2023)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.08.039038

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.08.039038