

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Портной, Характеристики систем модуляции и кодирования с точки зрения каскадных кодов, *Пробл. передачи информ.*, 1985, том 21, выпуск 3, 14–27

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.252.104.224

8 февраля 2023 г., 21:38:20



УДК 621.391.15

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ МОДУЛЯЦИИ И КОДИРОВАНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КАСКАДНЫХ КОДОВ

Портной С. Л.

Рассматривается несколько систем модуляции и кодирования (СМК) для гауссовского канала без памяти. Исследуются асимптотические по размерности зависимости скорости передачи кода от нормированного по средней энергии евклидова расстояния и от отношения сигнал/шум. Для многих систем получено явное выражение для экспоненты неправильного декодирования и обменные соотношения «скорость — энергетика» для конкретных длин и вероятностей ошибки. Приводятся некоторые соображения по сложности реализации декодеров кодов в рассматриваемых системах.

§ 1. Введение

Очень важными характеристиками реальных каналов связи являются их полоса частот и отношение сигнал/шум на выходе канала, зависимость которых друг от друга, как правило, носит обменный характер. Хорошей теоретической моделью некоторых каналов является канал с аддитивным белым гауссовским шумом.

В данной работе под гауссовским каналом без памяти с дискретным временем (далее — гауссовским каналом) будем понимать канал, который задается двумерным пространством входных символов X , двумерным пространством выходных символов Y и для каждого символа $x \in X$ ($x = (x_1, x_2)$), $y \in Y$ ($y = (y_1, y_2)$) плотностью вероятности

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где σ^2 — дисперсия (мощность) аддитивного белого гауссовского шума по одной из двух ортогональных компонент (которая суммируется с соответствующей компонентой входного сигнала).

Если средняя мощность сигнала x на входе канала (сумма мощностей ортогональных сигналов x_1 и x_2) не превышает величину P_{cp} , то в соответствии с работой К. Шеннона [1] пропускная способность на символ равна

$$(1) \quad c = \log_2(1+h),$$

где $h = P_{cp}/2\sigma^2$ — отношение сигнал/шум на символ.

Синтез эффективных систем для каналов с пропускной способностью $c \leq 2$ бит/символ легко осуществить с помощью внешнего каскадирования двух или четырехфазной модуляции двоичным корректирующим кодом практически без специального согласования. При этом оказывается достаточным максимизировать минимальное расстояние кода.

В области же пропускной способности $c > 2$ бит/символ для получения эффективных СМК максимизация расстояния Хемминга одного внешнего кода оказывается недостаточно и требуется согласование параметров модуляции и кода для максимизации минимального евклидова расстояния

СМК. В последнее время наблюдается резкое увеличение работ по синтезу СМК как практического направления [2, 3], так и теоретических, связанных с расстановкой точек в N -мерном шаре [4, 5]. Очень плодотворной для синтеза эффективных СМК оказывается идея обобщенного каскадирования [6, 7], которое за счет использования вложенных систем сигналов на внутренней ступени позволяет хорошо согласовать кодирование и модуляцию при малой сложности реализации.

В § 2 вводятся различные СМК для фазовой и амплитудно-фазовой модуляции (ФМ и АФМ соответственно). В § 3 исследуются асимптотические по размерности зависимости скорости передачи от нормированного по средней мощности минимального евклидова расстояния. В § 4 исследуется экспонента неправильного декодирования некоторых СМК и на основании этого получены зависимости скорости передачи от отношения сигнал/шум при стремящейся к нулю вероятности ошибки. В § 5 получены обменные соотношения «скорость — энергетика» для СМК конечной размерности и производится сравнение с асимптотическими характеристиками, а в § 6 приводятся некоторые соображения о сложности реализации рассматриваемых кодов.

§ 2. Определение систем модуляции и кодирования

Будем рассматривать системы модуляции и кодирования и с ФМ, и с АФМ. Системы с ФМ имеют меньшую скорость, чем системы с АФМ при одинаковом отношении сигнал/шум, но сигналы СМК с ФМ имеют одинаковую энергию, что, во-первых, облегчает их реализацию, а во-вторых, повышает их эффективность в ряде практических каналов, содержащих ограничитель в тракте передачи.

Определение 1. Системой сигналов ФМ кратности μ будем называть 2^μ равноотстоящих друг от друга точек на окружности радиуса a с центром в начале координат. Средняя мощность сигнала есть $P_{cp} = a^2$, квадрат нормированного по средней мощности минимального евклидова расстояния есть

$$(2) \quad \Delta_\mu^2 = d_e^2 / P_{cp} = 4 \sin^2(\pi/2^\mu),$$

где d_e^2 — квадрат минимального евклидова расстояния системы ФМ сигналов.

Система сигналов ФМ проиллюстрирована на рис. 1 для $\mu=3$.

Определение 2. Системой сигналов АФМ кратности μ будем называть 2^μ точек на плоскости.

1) При четном μ точки расположены внутри квадрата во всех узлах регулярной решетки с $2^{\mu/2}$ узлами по горизонтальной и вертикальной оси и началом координат в центре квадрата.

2) При нечетном μ точки расположены внутри квадрата с началом координат в центре квадрата в следующих узлах регулярной решетки с $2^{(\mu+1)/2}$ узлами по горизонтальной и вертикальной оси: в нечетных строках точки расположены в нечетных столбцах; в четных строках точки расположены в четных столбцах (или наоборот).

В [8] показано, что нормированный квадрат минимального евклидова расстояния для АФМ равен

$$(3) \quad \Delta_\mu^2 = \frac{d_e^2}{P_{cp}} = \begin{cases} 6/(2^\mu - 1), & \mu - \text{четно,} \\ 6/(2^\mu - 0,5), & \mu - \text{нечетно,} \end{cases}$$

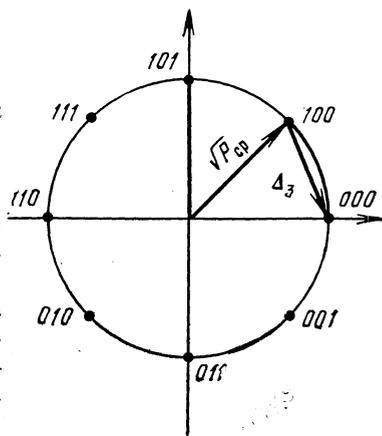


Рис. 1. Система сигналов трехкратной ФМ

где d_e^2 — квадрат минимального евклидова расстояния системы АФМ сигналов.

Система сигналов АФМ проиллюстрирована на рис. 2 для $\mu=3$ и $\mu=4$.

Теперь можно перейти к определению систем модуляции и кодирования. Обозначать параметры СМК будем следующим образом: $[N, M, \delta^2]$, где N — размерность СМК; M — число сигналов СМК; δ^2 — нормированный по средней мощности квадрат минимального евклидова расстояния.

Определение 3. СМК 1 образуется из сигналов ФМ или АФМ кратности μ на внутренней ступени и 2^μ -ичного (n, k, d) -кода на внеш-

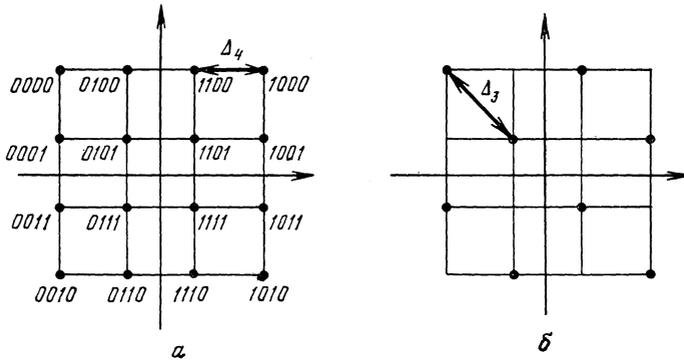


Рис. 2. Системы сигналов четырех- и трехкратной АФМ

ней ступени, где n — длина кода, k — число информационных символов, d — минимальное расстояние по Хеммингу.

Как легко убедиться, СМК 1 имеет параметры $[2n, 2^{\mu k}, \Delta_\mu^2 d/n]$. Нормированная скорость в битах на символ равна $R = \mu k/n$ (скорость в битах на измерение в два раза меньше).

Определение 4. СМК 2 образуется из сигналов ФМ или АФМ кратности μ на внутренней ступени и двоичного $(\mu n, \mu k, d)$ -кода на внешней ступени. Слово кода разбивается на n подблоков по μ двоичных символов, каждому подблоку ставится в соответствие точка на сигнальной плоскости, причем отображение ведется кодом Грея [9].

Будем рассматривать СМК 2 для сигналов ФМ любой кратности и для сигналов АФМ при четном μ , так как при нечетном μ автору неизвестна в общем случае возможность отображения кодом Грея (см. рис. 1 и 2) [10].

Утверждение 1. СМК 2 имеет параметры $[2n, 2^{\mu k}, \Delta_\mu^2 d/n]$. Скорость СМК 2 $R = \mu k/n$ бит/символ.

Приведем схему доказательства. Доказывать необходимо только выражение для нормированного квадрата минимального евклидова расстояния, так как все остальное следует из определения 4.

Рассмотрим два слова СМК 2, слова внешних кодов которых находятся на расстоянии w друг от друга. Квадрат нормированного евклидова расстояния между ними равен

$$\delta^2(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\mu} a_i \delta_i^2,$$

где δ_i^2 — квадрат нормированного евклидова расстояния между двумя сигналами ФМ или АФМ, соответствующие блоки из μ бит которых различаются в i позициях, а a_i — число таких сигналов в каждом слове СМК 2.

Как легко убедиться,

$$\sum_{i=1}^{\mu} i a_i = w, \quad \delta_i^2 \geq i \Delta_\mu^2 \quad (i = \overline{1, \mu})$$

по свойству кода Грея и для ФМ, и для АФМ. Отсюда сразу получаем неравенство $\delta^2(w) \geq (w/n) \Delta_\mu^2$, минимизация которого по w завершает доказательство.

Для определения СМК 3 нам понадобится задать систему вложенных сигналов ФМ и АФМ.

Утверждение 2. Сигналы ФМ кратности μ задают μ вложенных систем модуляции $[2, 2^i, \Delta_i^2]$,

$$(4) \quad \Delta_i^2 = 4 \sin^2(\pi/2^i), \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Так как вложенные системы модуляции являются СМК при $n=1$, обозначения в квадратных скобках аналогичны СМК.

Иллюстрация разбиения на вложенные множества для ФМ 8 ($\mu=3$) показана на рис. 3, а.

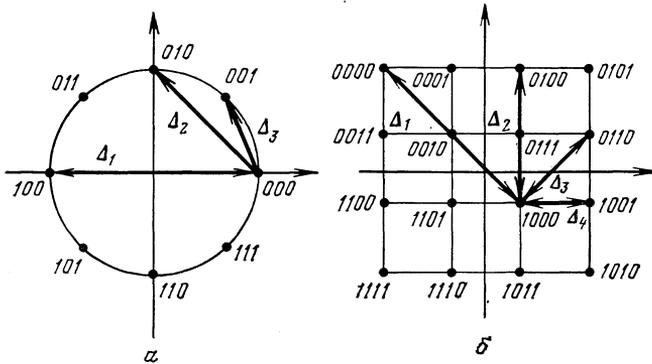


Рис. 3. Разбиение сигналов на вложенные множества

Утверждение 3. Сигналы АФМ кратности μ задают μ вложенных систем модуляции $[2, 2^i, \Delta_i^2]$, $i = \overline{1, \mu}$, где

$$(5) \quad \Delta_i^2 = \begin{cases} 6 \cdot 2^{\mu-i} / (2^\mu - 1), & \mu - \text{четно}, \\ 6 \cdot 2^{\mu-i} / (2^\mu - 0,5), & \mu - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 2 очевидно. Доказательство утверждения 3 основано на задании алгоритма нумерации точек квадрата АФМ кратности μ двоичным вектором $\alpha_\mu \alpha_{\mu-1} \dots \alpha_1$. Алгоритм состоит из $\mu/2$ шагов (при четном μ). На первом шаге квадрат АФМ из 2^μ точек разбивается на четыре квадрата прямыми, проходящими через начало координат, внутри каждого из которых символам $\alpha_\mu \alpha_{\mu-1}$ присваиваются одинаковые значения. Далее для каждого квадрата процедура разбиения повторяется пока не будут пронумерованы все μ символов. В результате система сигналов АФМ разбивается на μ вложенных систем с увеличивающимся на каждом шаге в два раза квадратом нормированного минимального евклидова расстояния, причем значения символа α_i указывают на принадлежность сигнала к одной из двух систем кратности i , вложенных в систему кратности $i+1$.

Иллюстрация разбиения на вложенные множества АФМ 16 показана на рис. 3, б.

Теперь можно определить СМК 3 [11].

Определение 5. СМК 3 является обобщенным каскадным кодом порядка μ , у которого в качестве μ вложенных внутренних кодов используются вложенные системы модуляции $[2, 2^i, \Delta_i^2]$, $i = \overline{1, \mu}$, а в качестве внешних кодов — двоичные корректирующие коды с параметрами (n, k_i, d_i) , $i = \overline{1, \mu}$.

Как следует из результатов работ [6, 7], СМК 3 имеет параметры:

$N=2n$ — размерность СМК 3; $M=2^{\sum_{i=1}^{\mu} k_i}$ — число сигналов СМК 3; $\delta^2=\min_i \{\Delta_i^2 d_i/n\}$ — нормированный квадрат минимального евклидова расстояния; $R=\left(\sum_{i=1}^{\mu} k_i\right)/n$ — скорость СМК 3 в битах на символ.

Для определения СМК 4 понадобится

Утверждение 4. Пусть имеется t ($t=1, 2, \dots$) СМК 3 одинаковой размерности. Если все соответствующие внешние коды у всех СМК 3 вложены один в другой, то эти СМК 3 вложены одна в другую.

Доказательство этого утверждения следует из аналогичного утверждения для двоичных обобщенных каскадных кодов [12].

Определение 6. Пусть имеется t вложенных внутренних СМК 3 с образующими кодами $[2, 2^j, \Delta_j^2]$, $j=1, \mu$ и $(n_i; k_{ij}; d_{ij})$, $i=1, t$, и t внешних кодов Рида — Соломона (n_i, k_i, d_i) , $i=1, t$. Можно построить СМК 4 с параметрами

$$(6) \quad R = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{n_2} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{k_{ij}}{n_1} = \sum_{i=1}^m R_{2i} R_{1i},$$

$$\delta^2 = \min[\min(\Delta_j^2 d_{ij} d_j)] / (n_1 n_2),$$

$$N = 2n_1 n_2,$$

$$M = 2^k = 2^{\sum_{i=1}^m k_i} 2^{\sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}},$$

где R_{1i} — скорость i -й внутренней СМК 3, R_{2i} — относительная скорость i -го внешнего кода Рида — Соломона, $i=1, t$.

Параметры (6) следуют из аналогичных утверждений для двоичных обобщенных каскадных кодов. Далее ради упрощения все коды Рида — Соломона строятся над одним и тем же полем $GF(2^q)$, причем $n_2 \leq 2^q$,

$$iq = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}, \quad i=1, t.$$

§ 3. Асимптотика минимального евклидова расстояния

В данном параграфе рассмотрим асимптотические характеристики скорости СМК от нормированного квадрата минимального евклидова расстояния при условии, что все внешние коды удовлетворяют границе Варшамова — Гилберта. Знание этих характеристик позволит судить о предельных возможностях данных кодов в каналах со слабым шумом.

Утверждение 5. Пусть δ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Тогда при достаточно большом n существует СМК 1 из определения 3 с нормированным минимальным евклидовым расстоянием δ , скорость которой $R_1(\delta)$ удовлетворяет неравенству

$$(7) \quad R_1(\delta) \geq \max_{\mu} \mu H_{\text{ВГ}}(\delta^2/\Delta_{\mu}^2; \mu),$$

где Δ_{μ}^2 — нормированный квадрат минимального евклидова расстояния системы сигналов ФМ или АФМ из (2) или (3), а

$$(8) \quad H_{\text{ВГ}}(\tau; \mu) = 1 + \tau \log_2 \mu \tau + (1 - \tau) \log_2 \mu (1 - \tau) - \tau \log_2 \mu (2^{\mu} - 1).$$

Утверждение 6. Пусть δ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Тогда при достаточно большом n существует СМК 2 из определения 4 с нормированным минимальным евклидовым расстоянием δ , скорость которой $R_2(\delta)$ удовлетворяет неравенству

$$(9) \quad R_2(\delta) \geq \max_{\mu} \mu H_{\text{ВГ}} \left(\frac{\delta^2}{\mu \Delta_{\mu}^2}; 1 \right),$$

где $H_{\text{ВГ}}(\tau; \mu)$ определено в (8), а Δ_{μ}^2 — нормированный квадрат минимального евклидова расстояния системы сигналов ФМ или АФМ из (2) или (3).

Утверждение 7. Пусть δ — произвольное число из интервала $(0, 1)$ и μ удовлетворяет неравенствам $\Delta_{\mu+1}^2 \leq 2\delta^2 \leq \Delta_{\mu}^2$, где $\Delta_i^2 (i=\mu; \mu+1)$ — нормированный квадрат минимального евклидова расстояния системы ФМ или АФМ сигналов из (2) или (3). Тогда при достаточно большом n существует СМК 3 с нормированным минимальным евклидовым расстоянием δ , скорость которой удовлетворяет неравенству

$$(10) \quad R_3(\delta) \geq \sum_{i=1}^{\mu} H_{\text{ВГ}}(\delta^2/\Delta_i^2; 1),$$

где Δ_i^2 — нормированное минимальное евклидово расстояние i -й вложенной (в μ -кратную) системы сигналов ФМ или АФМ, определяемое по (4) или (5).

Утверждение 8. Пусть δ — произвольное число из интервала $(0, 1)$; $\delta_{11} < \delta$ и $m=1, 2, 3, \dots$. Тогда при достаточно большом n существует СМК 4 с параметрами (6) с нормированным минимальным евклидовым расстоянием δ , скорость которой удовлетворяет неравенству

$$(11) \quad R_4(\delta; m) \geq \max_{\delta_{11}} \left\{ R_3(\delta_{11}) \left[1 - \frac{\delta^2}{m} \sum_{i=1}^m \left(R_3^{-1} \left(\frac{m-i+1}{m} R_3(\delta_{11}) \right) \right)^2 \right] \right\},$$

где $R_3(\delta)$ задается по (10) при замене знака неравенства на знак равенства; $R_3^{-1}(R)$ — функция, обратная $R_3(\delta)$, δ_{11} — нормированное минимальное евклидово расстояние первой внутренней СМК 3.

Утверждения 5 и 6 легко получить, если в соответствующие выражения для скорости СМК подставить значения d/n , получаемые из определения 3 и утверждения 1.

Доказательство утверждения 7. Зафиксируем величину δ и выберем μ таким образом, чтобы удовлетворялись неравенства $1/2 \Delta_{\mu+1}^2 \leq \delta^2 \leq 1/2 \Delta_{\mu}^2$. Рассмотрим СМК 3 с μ вложенными сигналами ФМ или АФМ с расстоянием Δ_i^2 , $i=1, \mu$, и μ внешними кодами с параметрами (n, k_i, d_i) , $i=1, \mu$, которые удовлетворяют границе Варшавова — Гилберта для двоичных кодов. Тогда суммарная скорость СМК 3 ограничена выражением

$$R_3(\delta) = \sum_{i=1}^{\mu} H_{\text{ВГ}} \left(\frac{d_i}{n}; 1 \right), \quad \text{где } 0 \leq d_i/n \leq 1/2.$$

Нормированные хэмминговы расстояния внешних кодов d_i/n , $i=\overline{1, \mu}$, связаны с нормированным минимальным евклидовым расстоянием СМК 3 δ по формуле

$$(12) \quad \delta^2 = \min_i (\Delta_i^2 d_i/n); \quad i=\overline{1, \mu}.$$

Величины δ^2 и Δ_i^2 , $i=\overline{1, \mu}$, являются заданными. По аналогии с обыч-

ными обобщенными каскадными кодами максимизации скорости СМК 3 при фиксированном δ соответствует выбор $d_i/n = \delta^2/\Delta_i^2$, $i = \overline{1, \mu}$, причем $0 \leq \delta^2/\Delta_i^2 \leq 1/2$. Так как системы сигналов образуют вложенные множества, то $\Delta_1^2 > \Delta_2^2 > \dots > \Delta_\mu^2$, и условие $\delta^2 \leq 1/2 \Delta_i^2$ ($i = \overline{1, \mu}$) не нарушает исходного неравенства $1/2 \Delta_{\mu+1}^2 \leq \delta^2 \leq 1/2 \Delta_\mu^2$. Следовательно, справедливо выражение (10).

Доказательство утверждения 8. Пусть имеется код из определения 6. Зафиксируем величину δ и выберем целое положительное m . Возьмем m СМК 3 с внешними кодами на границе Варшавова — Гилберта.

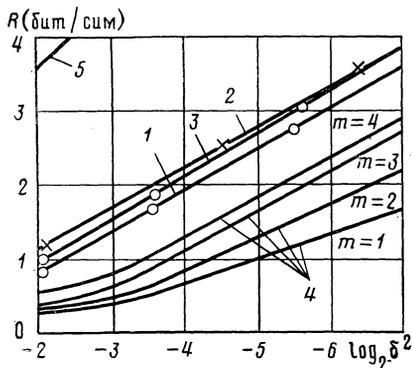


Рис. 4. Асимптотическая зависимость скорости от нормированного квадрата минимального евклидова расстояния для систем ФМ и кодирования

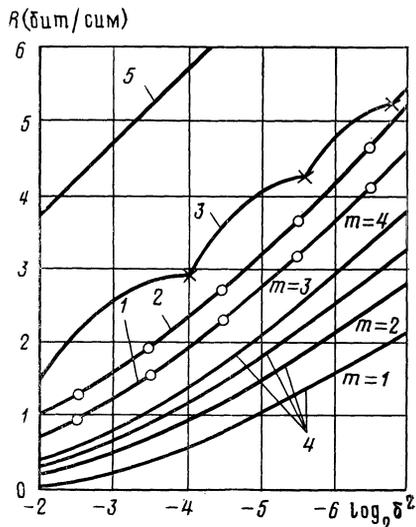


Рис. 5. Асимптотическая зависимость скорости от нормированного квадрата минимального евклидова расстояния для систем АФМ и кодирования

Как следует из [6], можно обеспечить вложенность соответствующих кодов на границе Варшавова — Гилберта, чтобы выполнялось утверждение 4. Тогда имеется m СМК 3, вложенных одна в другую, каждая из которых удовлетворяет утверждению 7. Эти СМК 3 используем в качестве внутренних при построении СМК 4.

Скорость СМК 4 равна

$$(13) \quad R_4(\delta) = \max_{\delta_{11}} \left\{ R_3(\delta_{11}) - \delta^2 \sum_{i=1}^m \frac{R_3(\delta_{1i}) - R_3(\delta_{1i+1})}{[R_3^{-1}(R_{1i})]^2} \right\},$$

где $R_3^{-1}(R)$ — функция, обратная $R_3(\delta)$.

Учтем ограничение, накладываемое на коды с параметрами (6), которое приводит к выражению для внутренних СМК 3

$$(14) \quad R_3(\delta_{1i}) = [(m-i+1)/m] R_3(\delta_{11});$$

после подстановки в (13) получим (11).

На рис. 4 и 5 приведены результаты расчетов асимптотической зависимости скорости от нормированного квадрата минимального евклидова расстояния по формулам (7), (9), (10), (11) для ФМ и АФМ соответственно. Кривой 1 соответствуют характеристики СМК 1, кривой 2 — СМК 2, кривой 3 — СМК 3, кривой 4 — СМК 4 для значений $m=1, 2, 3, 4$, кривой 5 — оптимальные коды [1].

Каждой точке графика соответствует оптимальное значение кратности модуляции μ . Кругами и крестиками обозначены точки перехода с участка, где $\mu=i$, на участок, где $\mu=i+1$.

Расчеты показали, что наилучшими характеристиками при скоростях 2–4 бит/символ обладают СМК 2, далее в убывающем порядке по эффективности расположены СМК 3, СМК 4, СМК 4. При больших скоростях СМК 2 и СМК 3 практически совпадают, что свидетельствует о высокой эффективности конструкции с обобщенными каскадными кодами. Как и следовало ожидать, кривые для АФМ идут параллельно оптимальным кодам, а при ФМ имеют вдвое меньший наклон. Трехмерная СМК 4 при малых значениях параметра m имеет меньший наклон, чем остальные СМК, а при $m \geq 3$ идет параллельно остальным СМК.

Несколько неожиданным оказался проигрыш СМК 1 другим системам. По-видимому, это связано с тем, что оценка не учитывает «тонкой» структуры кода, поэтому в дальнейшем целесообразно рассмотреть внешние коды у СМК в метрике Ли или модульной метрике, которые лучше согласованы с сигналами ФМ или АФМ.

§ 4. Анализ реализуемой экспоненты вероятности неправильного декодирования

В данном параграфе рассмотрим реализуемую экспоненту неправильного декодирования СМК на основе обобщенных каскадных кодов (СМК 3 и СМК 4). Выбор последних связан с тем, что оказывается возможным связать экспоненту неправильного декодирования СМК с экспонентой двоичного канала. Для вывода экспоненты нам понадобится определить алгоритмы кодирования и декодирования СМК. Алгоритмы декодирования и кодирования СМК 3 для ФМ изложены в [13].

Алгоритм кодирования СМК 3 состоит в следующем.

1. Разбиваем $k = \sum_{i=1}^{\mu} k_i$ бит информации на μ подблоков по k_i , $i=1, \overline{\mu}$,

бит в каждом.

2. В каждом подблоке кодируем информацию соответствующим i -м внешним кодом и формируем матрицу слов внешних кодов вида $A = \|\alpha_{ij}\|$, $i=1, \overline{\mu}$, $j=1, \overline{n}$, где $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ — слово i -го внешнего кода. При этом символы α_{ij} , $i=1, \overline{\mu}$, $j=1, \overline{n}$, оказываются закодированными $(\mu+1-i)$ -м внешним кодом.

3. Каждому столбцу α_j , $j=1, \overline{n}$, матрицы A ставится в соответствие двумерный сигнал x_j по правилу отображения, описанному в доказательстве утверждения 2 для ФМ и в доказательстве утверждения 3 для АФМ.

4. В результате отображения столбца α_j в двумерный сигнал x_j , $j=1, \overline{n}$, получаем слово СМК 3 вида (x_1, x_2, \dots, x_n) , где $x_j = (x_{1j}, x_{2j})$. Будем рассматривать алгоритмы с жестким декодированием внешних кодов.

Алгоритм состоит из μ шагов и является аналогом вероятностного декодирования обобщенных каскадных кодов. Исходными являются аналоговые значения j -го ($j=1, \overline{n}$) двумерного сигнала y_j .

На i -м шаге по сигналу y_j определяется символ α_{ij} , $j=1, \overline{n}$ (определяется принадлежность сигнала к одной из двух систем кратности $(\mu-i)$, вложенных в $(\mu+1-i)$ -кратную систему модуляции). Это является аналогом декодирования $(\mu+1-i)$ -м внутренним кодом в обобщенных каскадных кодах. Затем происходит декодирование $(\mu+1-i)$ -м внешним кодом, и соответствующие информационные символы выдаются получателю.

Алгоритмы кодирования и вероятностного декодирования, которые будем рассматривать для СМК 4, являются аналогами алгоритмов из [12], в которых вместо кодирования или декодирования двоичными внутренними кодами кодируется соответствующая внутренняя СМК 3.

Для оценки экспоненты вероятности неправильного декодирования СМК 3 нам понадобится

Утверждение 9. При декодировании СМК 3 по описанному выше алгоритму в гауссовском канале с отношением сигнал/шум h i -й шаг (при декодировании $(\mu+1-i)$ -го кода, $i=1, \mu$) можно аппроксимировать двоичным симметричным каналом с вероятностью ошибки $P_i^{(\mu)} = \varphi(\mu+1-i; h)$, где

$$(15) \quad \varphi(\mu+1-i; h) \leq \begin{cases} 2[1 - \Phi(\sqrt{2}h \sin(\pi/2^{\mu+1-i}))] \\ \text{для ФМ, } \mu=1, i, \\ 4\Phi(\sqrt{3}h/2^{\mu+1-i}) [1 - \Phi(\sqrt{3}h/2^{\mu+1-i})] \\ \text{для АФМ, } \mu=1, i, \end{cases}$$

а $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятности.

Доказательство. Так как на i -м шаге проводится декодирование символов α_{ij} , $i=1, \mu$; $j=1, n$, то для $(\mu-i+1)$ -го кода канал является двоичным. Для сигналов ФМ на i -м шаге имеем систему сигналов $(\mu+1-i)$ -кратной ФМ, причем из-за симметрии вложенных множеств вероятность ошибки $P_i^{(\mu)}$ не зависит от передаваемого символа α_{ij} , $i=1, \mu$; $j=1, n$. Точно также на i -м шаге имеем $(\mu+1-i)$ -кратную систему сигналов АФМ, причем, как следует из алгоритма отображения двоичного вектора $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$ в точку модуляции, точки в $\alpha_i=0$, $i=1, \mu$ и точки с $\alpha_i=1$ симметричны относительно начала координат. Следовательно, вероятность ошибки $P_i^{(\mu)}$ также не зависит от значения передаваемого символа α_{ij} , $i=1, \mu$, $j=1, n$. Таким образом, канал на i -м шаге декодирования можно считать симметричным. Доказательство выражения для вероятности ошибки приведено в [8].

Пусть P_e — вероятность ошибки в слове СМК. Тогда для декодирования СМК 3 по описанному выше алгоритму справедливо

Утверждение 10. Пусть h — отношение сигнал/шум в канале, $R_1 = k_1/n_1$ — относительная скорость первого внешнего кода СМК 3, $E_0(R_1, \varphi(1, h))$ — экспонента вероятности ошибочного декодирования линейного блочного кода со скоростью R_1 в двоичном симметричном канале с вероятностью ошибки $\varphi(1, h)$, определяемой по (15) для $i=\mu$, а μ удовлетворяет неравенствам $E_0(0, \varphi(\mu+1, h)) \leq E_0(R_1, \varphi(1, h)) \leq E_0(0, \varphi(\mu, h))$, $\varphi(\mu+1, h)$, $\varphi(\mu, h)$ определены в (15). Тогда существуют СМК 3 с двоичными линейными блочными кодами на внешней ступени и ФМ или АФМ сигналами на внутренней, для которых вероятность ошибки в слове ограничена выражением

$$(16) \quad P_e \leq \mu \exp[-nE_0(R_1; \varphi(1, h))],$$

а скорость СМК 3 задается выражением $R = \sum_{i=1}^{\mu} R_i$, где R_i , $i=2, \mu$,

относительные скорости соответствующих внешних кодов, равные

$$(17) \quad R_i = E_0^{-1}(E_0, \varphi(i, h)), \quad i=2, \mu,$$

$E_0^{-1}(E_0, \varphi)$ — зависимость скорости линейного двоичного блочного кода от экспоненты неправильного декодирования в двоичном симметричном канале (величина, обратная $E_0(R, \varphi)$). Функция $E_0(R, \varphi)$ приведена в [14, 15].

Доказательство. Пусть имеется гауссовский канал с отношением

сигнал/шум h , в котором передается и принимается СМК 3 по алгоритмам кодирования и декодирования, описанным выше. Зафиксируем скорость R_1 первого внешнего кода СМК 3 (этот код декодируется на последнем шаге). Так как на каждом шаге, включая и последний, имеется двоичный симметричный канал, то вероятность ошибки в этом коде P_μ можно ограничить соответствующей экспоненциальной зависимостью

$$(18) \quad P_\mu \leq \exp \{-nE_0(R, \varphi(1, h))\},$$

где $\varphi(1, h)$ определено в (15), а $E_0(R, \varphi)$ — экспонента Галлагера [14, 15]. Выберем μ таким, чтобы удовлетворялось неравенство

$$E_0(0, \varphi(\mu+1, h)) \leq E_0(R_1, \varphi(1, h)) \leq E_0(0, \varphi(\mu, h)).$$

Вероятность ошибки в слове СМК 3 ограничена неравенством

$$(19) \quad P_e \leq \sum_{i=1}^{\mu} P_i; \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Выразим каждый член суммы (19) через экспоненту соответствующего двоичного симметричного канала

$$(20) \quad P_e \leq \sum_{i=1}^{\mu} \exp\{-nE_0(R_i, \varphi(i, h))\}; \quad i = \overline{1, \mu},$$

где $\varphi(i, h)$ определяется по (15).

Неравенство, накладываемое на $E_0(R_i, \varphi(1, h))$, гарантирует, что μ выбрано максимально возможным, и в то же время все скорости внешних кодов R_i , $i = \overline{1, \mu}$, отличны от 0. По аналогии с двоичными обобщенными каскадными кодами выберем $P_i = P_\mu$; $i = \overline{1, \mu-1}$. Тогда из (18) и (20) имеем

$$P_e \leq \mu \exp\{-nE_0(R_1, \varphi(1, h))\},$$

$$E_0(R_i, \varphi(i, h)) = E_0(R_1, \varphi(1, h)), \quad i = \overline{2, \mu}.$$

Отсюда следует выражение для суммарной скорости СМК 3

$$(21) \quad R = R_1 + \sum_{i=2}^{\mu} E_0^{-1}(E_0, \varphi(i, h)),$$

где $E_0^{-1}(E_0, \varphi)$ — функция, обратная экспоненте Галлагера $E_0(R, \varphi)$. Утверждение доказано.

Параметрическая зависимость скорости СМК 3 от экспоненты неправильного декодирования во многом аналогична зависимости скорости от нормированного квадрата минимального евклидова расстояния СМК 3 (утверждение 7). Можно получить также экспоненту вероятности ошибки при мягком декодировании внешних кодов по аналогии с утверждением 10, только в этом случае на каждом шаге алгоритма получается не канал с двоичным входом, а более сложный канал, для которого необходимо знать экспоненту $E_0(R, \varphi)$.

Отметим, что из утверждения 10 получается

Следствие 1. Пусть h — отношение сигнал/шум в канале; $\varphi(1, h)$ — вероятность ошибки в однократной системе модуляции, определенная в (15), $E_0(R, \varphi)$ — экспонента вероятности ошибочного декодирования в двоичном симметричном канале. Тогда существуют СМК 3 с двоичными линейными блочными кодами на внешней ступени и ФМ или АФМ сигналами на внутренней, для которых при размерности $N \rightarrow \infty$ и $P_e \rightarrow 0$ максимально достижимая скорость равна

$$(22) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E_0^{-1}(0, \varphi(i, h)).$$

Следствие 1 получается из утверждения 10 при $E_0(R_1, \varphi(1, h)) = 0$.

По аналогии с двоичными обобщенными каскадными кодами [12] можно получить экспоненту вероятности ошибки для СМК 4, которую мы приведем без доказательства. Будем рассматривать вероятностный

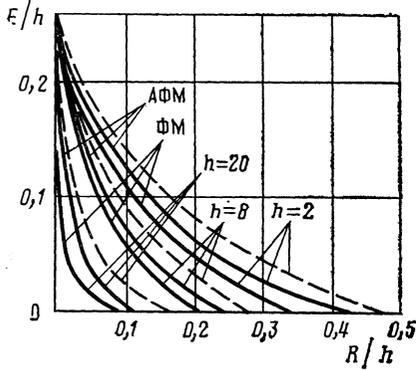


Рис. 6. Показатель экспоненты неправильного декодирования для СМК 3 с ФМ и АФМ

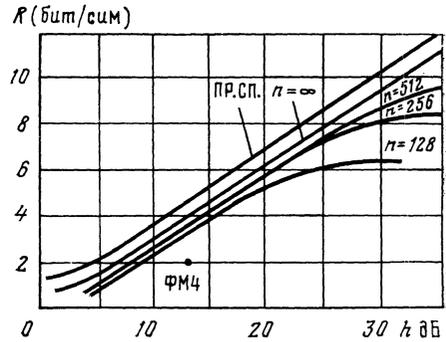


Рис. 7. Обменные соотношения «скорость — энергетика» для СМК 3 с АФМ ($P_{\text{ош}} = 10^{-6}$)

алгоритм декодирования обобщенного каскадного кода порядка m , у которого в качестве внутренних кодов используются СМК 3, а в качестве внешних — коды Рида — Соломона.

Утверждение 11. Пусть h — отношение сигнал/шум в гауссовском канале, $E_3(R, h)$ — параметрическая зависимость показателя экспоненты ошибочного декодирования СМК 3 от скорости этой СМК 3 при фиксированном h , задаваемая утверждением 10. Тогда существует СМК 4 порядка m с параметрами (6), для которых показатель экспоненты неправильного декодирования определяется выражением

$$(23) \quad E_4(R, m, h) = \max_{R_{11}} \left\{ m(R_{11} - R) / \left[R_{11} \sum_{i=1}^m \left(E_3 \left(R_{11} \frac{m-i+1}{m}, h \right) \right)^{-1} \right] \right\},$$

где R_{11} — скорость первой внутренней СМК 3.

Из утверждения 11 может быть получено следствие, аналогичное следствию 1.

На рис. 6 показаны некоторые результаты расчета по формулам (14) — (22) показателя экспоненты неправильного декодирования для СМК 3 с сигналами ФМ и АФМ, а также показатель оптимальной экспоненты для гауссовского канала без ограничения на систему кодирования и модуляции, изображенный пунктирной кривой.

§ 5. Обменные соотношения «скорость — энергетика»

Полученные в предыдущем разделе характеристики показателя экспоненты неправильного декодирования СМК 3 и СМК 4 позволяют получить зависимость скорости R от отношения сигнал/шум h , которую мы будем называть обменным соотношением «скорость — энергетика».

Обменные соотношения при размерности кода $N \rightarrow \infty$ и вероятности ошибки $P_e \rightarrow 0$ получаются с помощью следствия 1 для СМК 3 и аналогичного следствия для СМК 4. Отметим, что максимальная скорость достигается при кратности модуляции $\mu = \infty$, но уже при небольших значениях μ достигается хорошее приближение к пределу.

Интересно получить обменные соотношения для фиксированной размерности и вероятности ошибки. Для СМК 3 определим из (16) значение показателя экспоненты

$$(24) \quad E_3 = (2/N) (\ln \mu - \ln P_e),$$

которое задает обменные соотношения «скорость — энергетика» при фиксированных μ , P_e , N .

Для СМК 4 можно получить выражение, аналогичное (24).

На рис. 7–9 представлены обменные соотношения «скорость — энергетика», рассчитанные по формулам (15)–(24). На рис. 7 представлены

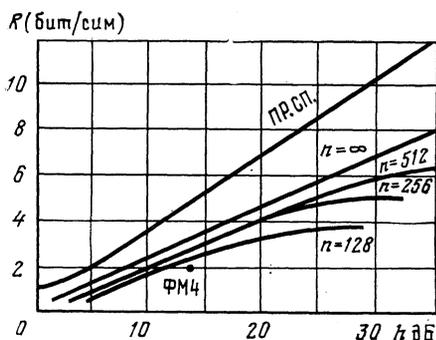


Рис. 8. Обменные соотношения «скорость — энергетика» для СМК 3 с ФМ ($P_{\text{ош}} = 10^{-6}$)

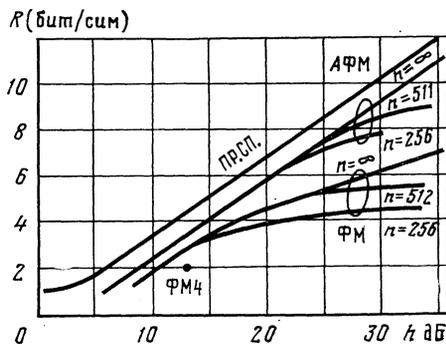


Рис. 9. Обменные соотношения «скорость — энергетика» для СМК 4 ($P_{\text{ош}} = 10^{-6}$)

результаты расчета для СМК 3 с АФМ, на рис. 8 — СМК 3 с ФМ, на рис. 9 — СМК 4 с АФМ и ФМ. Также представлены соотношения для пропускной способности, рассчитанные по (1).

Расчеты показали, что обменные соотношения при $P_e \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ незначительно уступают пропускной способности. В диапазоне отношений сигнал/шум $h = 10-20$ дБ обменные соотношения при $P_e = 10^{-6}$ и $N = 256-1024$ практически совпадают с обменными соотношениями для $P_e \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$.

§ 6. Сложность декодирования систем модуляции и кодирования

При исследовании систем модуляции и кодирования СМК 1 — СМК 4 и обменных соотношений «скорость — расстояние» и «скорость — энергетика», все внешние коды предполагались лежащими на границе Варшавова — Гилберта. Несомненный интерес представляет анализ сложности декодирования составляющих кодов, так как только в этом случае можно сделать окончательный вывод об эффективности СМК (сложностью реализации процедур модуляции и демодуляции будем пренебрегать). Для оценки сложности декодирования внешних кодов воспользуемся известными результатами для линейных кодов.

Воспользуемся формальным определением сложности декодирования по [12], в соответствии с которым сложность декодирования q -ичного (n, k) -кода, лежащего на границе Варшавова — Гилберта, равна

$$(25) \quad \kappa \leq gnq^{\min(k, n-k)},$$

**Сравнительные оценки сложности декодирования систем кодирования
и модуляции**

Тип	Параметры внешних кодов	Сложность κ	Удельная сложность κ_y
СМК 1	2^μ -ичный код (n, k) $N=2n$ -размерность	$(N/2) 2^{\mu \frac{N}{2} \min\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)}$	$(n/k\mu) 2^{\mu \frac{N}{2} \min\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)}$
СМК 2	двоичный код $(\mu n, \mu k), N=2n$	$(\mu N/2) 2^{\mu \frac{N}{2} \min\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)}$	$(n/k) 2^{\mu \frac{N}{2} \min\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)}$
СМК 3	μ двоичных кодов (n_i, k_i, d_i) , $k_{\text{ср}} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} k_i$, $N = 2n$	$(\mu N/2) 2^{\frac{N}{2} \max_i \left\{ \min\left(\frac{k_i}{n}, 1 - \frac{k_i}{n}\right) \right\}}$	$(n/k_{\text{ср}}) 2^{\frac{N}{2} \max_i \left\{ \min\left(\frac{k_i}{n}, 1 - \frac{k_i}{n}\right) \right\}}$
СМК 4	$m\mu$ двоичных кодов (n_1, k_{ij}, d_{ij}) , m кодов Рида — Соломона (n_2, k_i, d_i) , $k_{\text{ср}} = \frac{1}{\mu m} \sum_{i=1}^m k_i \times$ $\times \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}$, $N = 2n_1 2^{\frac{\mu}{m} n_1}$	$\mu m n_1 2^{n_1 \max_{ij} \left\{ \min\left(\frac{k_{ij}}{n_1}, 1 - \frac{k_{ij}}{n_1}\right) \right\}}$	$(n/k_{\text{ср}}) 2^{n_1 \max_{ij} \left\{ \min\left(\frac{k_{ij}}{n_1}, 1 - \frac{k_{ij}}{n_1}\right) \right\}}$

где g — некоторая постоянная, которую в дальнейшем для простоты опустим, так как основную роль в (25) играет показатель экспоненты. Несущественность множителя перед экспонентой становится еще более очевидной, если вместо сложности κ ввести удельную сложность на бит: $\kappa_y = \kappa/k \log_2 q$. Удельная сложность хорошо аппроксимирует требования к количеству или быстродействию оборудования декодера, работающего в реальном времени.

В таблице приводятся оценки сложности и удельной сложности СМК, относящиеся как к жесткому, так и мягкому декодированию внешних кодов. При оценке сложности СМК 3 вместо суммы μ членов взята максимальная сложность, умноженная на μ . При оценке сложности СМК 4 вклад кодов Рида — Соломона не учитывался, так как при выбранных в работе ограничениях на соотношение длин внутренних и внешних кодов он имеет неэкспоненциальный характер.

Для приближения к пропускной способности при больших R размерность кода $N \rightarrow \infty$. С ростом R также должна расти кратность модуляции μ . При этом показатель экспоненты сложности декодирования СМК 1 и СМК 2 растет быстрее всего: пропорционально размерности N и пропорционально кратности модуляции μ . Показатель экспоненты СМК 3 растет пропорционально размерности N , но не зависит от кратности модуляции μ . Показатель экспоненты СМК 4 от μ также не зависит, а с ростом размерности растет не быстрее, чем $\log_2 N$.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о высокой эффективности СМК 3 и СМК 4-систем кодирования и модуляции на основе обобщенных каскадных кодов, которые наряду с хорошим приближением к пропуск-

ной способности имеют простое декодирование, при этом СМК 4 за счет незначительного проигрыша по помехоустойчивости СМК 3 имеет показатель экспоненты, растущий медленнее, чем логарифм размерности.

На основе приведенных рассуждений можно рассмотреть и сложность декодирования при конечной размерности и других алгоритмах декодирования.

В заключение хотелось бы выразить благодарность В. В. Зяблову, Э. Э. Немировскому, а также всем участникам семинара ИППИ АН СССР по кодированию, принимавшим участие в обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Ungerboeck G. Channel Coding with Multilevel/Phase Signals.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1982, v. 28, № 1, p. 55–66.
3. Гинзбург В. В. Многомерные сигналы для непрерывного канала.— Пробл. передачи информ., 1984, т. 20, № 1, с. 28–46.
4. Bos A. Sphere packings in high-dimensional space. Technological University Eindhoven. Netherlands. TH Report. 80-WSK-03.
5. Sloane N. J. A. Tables of Sphere Packing and Spherical Codes.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1981, v. 27, № 3, p. 327–338.
6. Блох Э. Л., Зяблов В. В. Обобщенные каскадные коды. М.: Связь, 1976.
7. Зиновьев В. А. Обобщенные каскадные коды.— Пробл. передачи информ., 1976, т. 12, № 1, с. 5–15.
8. Портной С. Л. Методы синтеза и расчета параметров сигнально-кодовых конструкций на основе каскадных кодов.— Тр. НИИР, 1983, № 1, с. 89–99.
9. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
10. Smith I. G. Odd-Bit Quadrature Amplitude Shift Keying.— IEEE Trans. Commun., 1975, v. 23, № 3, 374–384.
11. Портной С. Л., Немировский Э. Э. Асимптотика евклидова расстояния каскадных сигнально-кодовых конструкций.— В кн.: Тр. VIII Всесоюз. симпоз. по проблеме избыточности в информационных системах. Ч. 5. Тез. докл. Л., 1983, с. 115–119.
12. Блох Э. Л., Зяблов В. В. Линейные каскадные коды. М.: Наука, 1982.
13. Imai H., Hirakawa S. A New Multilevel Coding Method Using Error Correcting Codes.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1977, v. 23, № 3, p. 371–377.
14. Витерби А. Д., Омура Дж. К. Принципы цифровой связи и кодирования. М.: Радио и связь, 1982.
15. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974.

Поступила в редакцию
31.VIII.1983
После переработки
3.VII.1984