В. З. Гринес, Л. М. Лерман, Неавтономная динамика: классификация, инварианты, реализация, *СМФН*, 2022, том 68, выпуск 4, 596–620

DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 4 (2022). С. 596–620
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620
УДК 517.9

НЕАВТОНОМНАЯ ДИНАМИКА: КЛАССИФИКАЦИЯ, ИНВАРИАНТЫ, РЕАЛИЗАЦИЯ

В. З. Гринес, Л. М. Лерман

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

Работа является кратким обзором результатов, полученных в неавтономной динамике, опираясь на понятие равномерной эквивалентности неавтономных систем. Этот подход к изучению неавтономных систем был предложен в работе [10] и развит далее в работах второго автора, а недавно — совместно обоими авторами. Такой подход видится плодотворным и перспективным, поскольку он позволяет развить неавтономный аналог теории динамических систем для указанных классов систем и дать классификацию некоторых естественных классов неавтономных систем, используя инварианты комбинаторного типа. Мы показываем это для классов неавтономных градиентно-подобных векторных полей на замкнутых многообразиях размерности один, два и три. В последнем случае появляется новый инвариант эквивалентности, тип дикого вложения устойчивых и неустойчивых многообразий [14, 17], как было показано в недавней работе авторов [5].

Ключевые слова: неавтономная динамика, неавтономное векторное поле, градиентно-подобное векторное поле, равномерная эквивалентность, дикое вложение

Для цитирования: *В. З. Гринес, Л. М. Лерман.* Неавтономная динамика: классификация, инварианты, реализация// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **68**, № 4. С. 596–620. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620

1. Введение

При изучении неавтономных векторных полей (НВП) на C^∞-гладком замкнутом многообразии M одним из первых является вопрос о том, что классифицировать? Изучение автономных систем начинается с изучения множества простейших траекторий — состояний равновесия, замкнутых траекторий. Классифицируются их типы, исследуется количество таких траекторий, а также поведение траекторий, которые проходят вблизи простейших. После этого делается попытка изучения глобальной структуры фазового пространства динамической системы на траектории с помощью разработанных методов теории динамических систем.

Такой подход неприменим для исследования неавтономных систем, так как сразу не представляется возможным выделение множества простейших решений и, как следствие, отсутствует объект классификации. На самом деле, существует подход к исследованию неавтономных систем, восходящий к Бебутову [1], позволяющий, в определенном смысле, свести задачу изучения неавтономной системы к изучению некоторой автономной системы, тесно связанной с неавтономной. В настоящее время такая автономная система называется *косым произведением*, или *расширением* [38, 39]. Недостатком такого подхода является топологическая сложность фазового пространства полученной автономной системы и сложность ее динамики даже в самых простейших случаях. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом подходе, см., например, [38, 39].

Мы опишем подход к изучению неавтономных систем, начатый в [10] и продолженный в серии работ [5,9,28]. Под *неавтономным векторным полем* (НВП) на M понимается равномерно непрерывное отображение $v : \mathbb{R} \to V^k(M)$, где $V^k(M)$ — банахово пространство C^k-гладких векторных полей на M, наделенное C^k-нормой. Такое НВП имеет решения, графики которых в расширенном фазовом пространстве $M \times \mathbb{R}$, т. е. интегральные кривые (ИК), определяют ориентированное слоение $\mathcal{F}_v$. Снабдим M некоторой римановой метрикой и определим в $M \times \mathbb{R}$ метрику, являющуюся прямым произведением двух метрик: римановой метрики в M и стандартной метрики в $\mathbb{R}$. Так как M замкнуто, то любое решение поля v определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Напомним, что *эквиморфизмом* двух сепарабельных метрических пространств $(X, d), (Y, \rho)$ с метриками d, ρ называется такой гомеоморфизм $h : X \to Y$, для которого h, h^{-1} являются равномерно непрерывными отображениями.

Определение 1.1. Два НВП на M называются *равномерно эквивалентными*, если существует эквиморфизм расширенного фазового пространства, переводящий каждую интегральную кривую первого НВП в интегральную кривую второго НВП с сохранением направления времени (другими словами, переводящий первое ориентированное слоение во второе с сохранением ориентации на слоях).

Ясно, что такое отношение эквивалентности различает НВП, в которых асимптотическое поведение интегральных кривых различно. Это соотношение позволяет ввести понятие структурно устойчивого НВП.

Определение 1.2. НВП v называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность $\mathcal{U}$ поля v в пространстве НВП на M такая, что все НВП из этой окрестности равномерно эквивалентны.

Развитие современной теории автономных динамических систем показало, что отношение топологической эквивалентности, введенное для таких систем, слишком жестко, чтобы получить классификацию произвольных многомерных динамические систем, так как структура таких систем слишком сложна, в частности, из-за явления Ньюхауса [25]. Тем не менее, возможна классификация систем с «простой» динамикой. Таким образом, если мы хотим получить классификацию автономных и неавтономных систем с помощью некоторого инварианта комбинаторного типа, то следует ограничить разумным образом рассматриваемый класс систем.

В неавтономном случае первое ограничение, которое мы введем, звучит следующим образом: каждая интегральная кривая векторного НВП поля v обладает экспоненциальной дихотомией как на $\mathbb{R}_+$, так и на $\mathbb{R}_-$, причем типы этих дихотомий могут быть различными. Заметим, что экспоненциальная дихотомия данной интегральной кривой является требованием к поведению решений линейной системы, полученной линеаризацией исходной системы на данной интегральной кривой.

2. Экспоненциальная дихотомия и теорема Адамара—Перрона

В дальнейшем одним из основных предположений относительно НВП изучаемого класса будет наличие экспоненциальной дихотомии их решений. Более точно это касается линеаризации векторного поля на рассматриваемом решении. Для удобства читателя напомним соответствующие понятия и результаты. Более подробно этот материал можно найти в [6, 7, 15, 21, 31].

В стандартном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} ||A(t)|| \leqslant K, \tag{2.1}$$

с непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$. Все решения такой системы определены на всей оси $\mathbb{R}$. Пусть $t, \tau \in \mathbb{R}$. Обозначим через $G(t, \tau) = G(t)G^{-1}(\tau)$ нормированную фундаментальную матрицу системы уравнений (2.1), где $G(t)$ — произвольная фундаментальная матрица системы: $G'(t) \equiv A(t)G(t)$, $\det G(t) \neq 0$.

Определение 2.1. Говорят, что уравнение (2.1) обладает *экспоненциальной дихотомией решений* на полуоси $\mathbb{R}_+$, если существует непрерывное семейство проекционных операторов $P(t)$,

$P^2(t) = P(t)$, инвариантное относительно G: $G(t,\tau)P(\tau) \equiv P(t)G(t,\tau)$, и такие положительные постоянные C, λ, ν, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &||G(t,\tau)P(\tau)|| \leqslant C\exp[-\lambda(t-\tau)] \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau \geqslant 0, \\ &||G(t,\tau)(E-P(\tau))|| \leqslant C\exp[\nu(t-\tau)] \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Геометрически это условие означает, что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ линейное пространство $\mathbb{R}^n_t = \mathbb{R}^n \times \{t\}$ распадается на два взаимно дополнительных линейных подпространства $\mathcal{S}(t) = P(t)\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{U}(t) = (E-P(t))\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно оператора $G(t,\tau)$ и таких, что любой вектор из подпространства $\mathcal{S}(\tau)$ экспоненциально быстро сжимается равномерно относительно разности $t-\tau$ при увеличении $t \geqslant \tau$, а любой вектор в $\mathcal{U}(\tau)$ при этом экспоненциально сжимается при уменьшении $t \leqslant \tau$, пока $t \geqslant 0$.

Важно отметить, что подпространство $\mathcal{S}(0)$ (а поэтому и все $\mathcal{S}(t)$) определяется однозначно, так как оно в точности состоит из начальных условий тех решений, которые ограничены при $t \in \mathbb{R}_+$. Подпространство $\mathcal{U}(0)$ не определяется однозначно: можно выбрать любое дополнительное подпространство $U_1(0)$ к $\mathcal{S}(0)$ и продолжить его вперед оператором $G(t,0)$. Тогда вторая оценка в (2.2) остается верной при, может быть, другой положительной константе C'. Если взять другое дополнительное подпространство $U_2(0)$, то два подпространства $G(t,0)U_1(0)$ и $G(t,0)U_2(0)$ будут изменяться во времени под действием $G(t,0)$, асимптотически приближаясь друг к другу при $t \to +\infty$.

Если объединить все подпространства $\mathcal{S}(t)$, $t \geqslant 0$, в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, то мы получаем при $t \in \mathbb{R}_+$ инвариантное относительно $G(t,\tau)$ множество, состоящее из интегральных кривых. Это множество можно назвать *линейным устойчивым многообразием* для интегральной кривой $x = 0$ системы (2.1). Ввиду первой оценки в (2.2), все интегральные кривые на этом линейном устойчивом многообразии асимптотически стремятся друг к другу при $t \to +\infty$.

Аналогичные понятия существуют для экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}_-$ и на всем $\mathbb{R}$. Например, для случая $\mathbb{R}_-$ и любых $t, \tau \in \mathbb{R}_-$ экспоненциальная дихотомия означает существование непрерывного семейства проекционных операторов $Q(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Q^2(t) = Q(t)$, инвариантных относительно G, и таких положительных постоянных C, λ, ν, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &||G(t,\tau)Q(\tau)|| \leqslant C\exp[\nu(t-\tau)] \quad \text{при} \quad t \leqslant \tau \leqslant 0, \\ &||G(t,\tau)(E-Q(\tau))|| \leqslant C\exp[-\lambda(t-\tau)] \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В этом случае однозначно определяются неустойчивые подпространства $\mathcal{U}(t) = G(t,0)Q(0)\mathbb{R}^n$, $t \leqslant 0$, т. к. они соответствуют начальным условиям тех решений системы (2.1), которые ограничены при $t \leqslant 0$, а устойчивые многообразия $\mathcal{S}(t) = G(t,0)(E-Q(0))\mathbb{R}^n$ не определены однозначно. Для экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$, где $t, \tau \in \mathbb{R}$ произвольны, оба подпространства $\mathcal{S}, \mathcal{U}$ определены однозначно. Аналогично, как для $\mathbb{R}_+$, можно объединить все подпространства $\mathcal{U}(t)$, $t \leqslant 0$, в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-$ и получить инвариантное относительно $G(t,\tau)$ множество, состоящее из интегральных кривых при $t \in \mathbb{R}_-$. Это множество можно назвать *линейным неустойчивым многообразием*. В силу первой оценки в (2.3) все интегральные кривые на линейном неустойчивом многообразии асимптотически стремятся друг к другу при $t \to -\infty$.

Теперь обсудим, как эти понятия можно применить к НВП на многообразии. Здесь единой системы координат, вообще говоря, не существует, поэтому следует уточнить что подразумевается под линеаризацией векторного поля на данном решении. Пусть v — НВП на гладком замкнутом многообразии M и $x(t)$ — его единственное решение, такое что $x(\tau) = x_0$. Тогда для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$ определен диффеоморфизм $\Phi^t_\tau : M_\tau \to M_t$. Его дифференциал $D\Phi^t_\tau$ при применении к $T_{x_0}M$ является линейным отображением из $T_{x_0}M_\tau$ в $T_{x(t)}M_t$. Используя риманову метрику на M, мы получаем средства для измерения норм векторов и углов между двумя векторами в касательном пространстве к любой точке на M. Говорят, что решение $x(t) = x(t;\tau,x_0) = \Phi^t_\tau(x_0)$ обладает *экспоненциальной дихотомией* типа $(p, n-p)$ на полуоси $t \geqslant 0$, если существует непрерывное семейство проекционных операторов $P(t) : T_{x(t)}M_t \to T_{x(t)}M_t$, $P^2(t) = P(t)$, $\dim Ker P(t) = n-p$, инвариантное относительно $D\Phi^t_\tau$, т. е. $D\Phi^t_\tau P(\tau) = P(t)D\Phi^t_\tau$, нормы которых отделены от нуля и бесконечности, и положительные константы C, λ такие, что выполняются неравенства

$$||D\Phi_\tau^t P(\tau)|| \leqslant C \exp[-\lambda(t-\tau)] \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$
$$||D\Phi_t^\tau (E - P(t))|| \leqslant C \exp[\lambda(\tau - t)] \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Геометрическая картина опять та же: $P(t)$ определяет непрерывное по t разложение каждого $T_{x(t)}M_t$ в прямое произведение двух его линейных дополнительных подпространств $P(t)T_{x(t)}M$ и $(E-P(t))T_{x(t)}M$, это разложение инвариантно относительно семейства операторов $D\Phi_\tau^t$, и необходимые экспоненциальные оценки имеют место. Ясно, что на замкнутом гладком многообразии из существования таких оценок относительно данной метрики следует их существование относительно другой римановой метрики (с другими значениями постоянных).

Если задано решение векторного поля v и γ его интегральная кривая в многообразии $M \times \mathbb{R}$ (аналогично, можно работать на многообразии с краем $M \times \mathbb{R}_+$ или $M \times \mathbb{R}_-$), то с помощью экспоненциального отображения римановой метрики можно построить локальную систему координат (x, t) в *равномерной окрестности*[1] кривой γ, где x являются некоторыми координатами в $\mathbb{R}^n$. Эти координаты можно выбрать таким образом, что для любого $t \in \mathbb{R}$ (или $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_-$) след γ на M_t (т. е. $\gamma \cap M_t$) в этих координатах является началом координат $x = 0$. В таких координатах система дифференциальных уравнений, соответствующая v, записывается в виде

$$\dot{x} = F(t, x) = A(t)x + f(t, x). \tag{2.4}$$

Здесь матрица $A(t)$ (равномерно) непрерывна, ограничена, а f — вектор-функция, представляющая члены более высокого порядка по координате x равномерно относительно t в начале координат. Такие свойства правой части системы (2.4) следуют из равномерной непрерывности отображения $v : \mathbb{R} \to V^k(M)$.

Если фиксированное решение системы неавтономных дифференциальных уравнений обладает экспоненциальной дихотомией[2], то при некоторых дополнительных условиях в некоторой равномерной окрестности $U \subset M \times \mathbb{R}$ соответствующей интегральной кривой γ существует гладкое локальное устойчивое многообразие. Это составляет содержание известной теоремы Адамара—Перрона [2, 15, 35]. Такое устойчивое многообразие содержит все интегральные кривые, проходящие через U и приближающиеся к γ при $t \to +\infty$. Термин «содержать» здесь означает, что для любой такой интегральной кривой существует такой момент времени t_0, что для всех $t \geqslant t_0$ связная часть интегральной кривой действительно принадлежит окрестности U. Время t_0 зависит, конечно, от выбора интегральной кривой.

Напомним формулировку теоремы Адамара—Перрона для интегральной кривой с экспоненциальной дихотомией. Пусть задана система (2.4), где $A(t)$ — непрерывная ограниченная матрица, а $f(x, t)$ — вектор-функция второго порядка малости при $x = 0$, заданная в некоторой равномерной окрестности прямой $x = 0$ в $D^n \times \mathbb{R}_+$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, и все ее производные по x до порядка $k \geqslant 1$ являются равномерно непрерывными функциями при $t \geqslant 0$. Предположим, что решение $x = 0$ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_+$ типа $(p, n-p)$. Тогда существует линейная замена переменных $x = B(t)y$ с непрерывно дифференцируемой ограниченной обратимой матрицей B такой, что после замены переменных система $x = 0$ принимает вид

$$\dot{y}_1 = C(t)y_1 + F_1(y_1, y_2, t),\ \dot{y}_2 = D(t)y_2 + F_2(y_1, y_2, t), \tag{2.5}$$

где линейная система $\dot{y}_1 = C(t)y_1$ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_+$ типа $(p, 0)$ и система $\dot{y}_2 = D(t)y_2$ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_+$ типа $(0, n-p)$ с вектор-функциями F_1, F_2 со свойствами, аналогичными свойствам вектор-функции f. Для системы (2.5) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 (Адамар—Перрон)**.** *Существует равномерная окрестность $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ решения $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ и C^1-гладкая функция $y_2 = G(y_1, t)$, $G(0, t) \equiv 0$, $G_{y_1}(0, t) \equiv 0$, такие, что*

[1]Под равномерной окрестностью интегральной кривой $\gamma \subset M \times \mathbb{R}$ понимается содержащее γ открытое множество $V \subset M \times \mathbb{R}$, эквиморфное множеству $D^n \times \mathbb{R}$, граница которого $\partial V = \partial D^n \times \mathbb{R}$ равномерно удалена на конечное расстояние от точек кривой γ.

[2]Здесь требование экспоненциальной дихотомии может быть ослаблено до неравномерной экспоненциальной дихотомии, при сохранении существования локального устойчивого многообразия [15].

подмногообразие в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, *являющееся графиком* $(y_1, G(y_1,t), t)$ *этой функции, инвариантно относительно системы* (2.5):

$$D(t)G(y_1,t) + F_2(y_1, G(y_1,t), t) \equiv G_{y_1}[C(t)y_1 + F_1(y_1, G(y_1,t), t)].$$

Это подмногообразие содержит все ИК $(y_1(t), y_2(t), t)$, *ограниченные в* U, *и для этих решений справедлива следующая оценка*: $||y_1(t)|| + ||y_2(t)|| \leqslant L\exp[-\kappa t]$. *Все остальные решения, не принадлежащие этому подмногообразию, покидают окрестность* U *в момент времени* t_1, *зависящий от решения.*

Локальное устойчивое многообразие для γ в $M \times \mathbb{R}_+$ можно расширить с помощью диффеоморфизмов Φ_τ^t для всех $t \in \mathbb{R}$, что дает для γ единственное *глобальное устойчивое многообразие* $W^s(\gamma)$ на $M \times \mathbb{R}$. Все интегральные кривые, принадлежащие этому многообразию, асимптотичны друг к другу при $t \to +\infty$ и обладают экспоненциальной дихотомией одного и того же типа на $\mathbb{R}_+$, возможно, с другими константами C, λ, ν. Точное утверждение о глобальном устойчивом многообразии выглядит следующим образом.

Теорема 2.2. *Пусть задана НВП* v *и* γ *— его интегральная кривая. Предположим, что* γ *обладает экспоненциальной дихотомией на* $\mathbb{R}_+$ *типа* $(p, n-p)$. *Тогда существует* C^1*-гладкое вложение* $J : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ *такое, что для любого* $t \in \mathbb{R}$ *ограничение на* $\mathbb{R}^p \times \{t\}$ *отображения* J, $J_t : \mathbb{R}^p \to M_t$, *также является* C^1*-гладким вложением равномерно зависящим от* t *в* C^1*-топологии на компактных множествах в* $\mathbb{R}^p$ *и образ* J *является инвариантным подмногообразием для* v, *т. е. состоит из целых интегральных кривых.*

Аналогично, если интегральная кривая γ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_-$ типа $(p, n-p)$, то теорема Адамара—Перрона, примененная к системе с обращенным временем $t \to -t$, дает единственное неустойчивое инвариантное многообразие размерности $n-p$ в некоторой равномерной окрестности γ в $M \times \mathbb{R}_-$. Это многообразие можно продолжить по времени диффеоморфизмами Φ_τ^t до глобального неустойчивого многообразия интегральной кривой γ. Для случая, когда интегральная кривая γ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}$ типа $(p, n-p)$, то как устойчивые, так и неустойчивые многообразия γ определены однозначно, они пересекают друг друга трансверсально вдоль γ. В случае, когда интегральная кривая γ обладает экспоненциальной дихотомией решений на всей оси $\mathbb{R}$, будем называть ее *h-кривой* (гиперболической кривой).

Пересечения устойчивых или неустойчивых многообразий интегральных кривых с сечением M_0 будем называть *слоями*, устойчивыми или неустойчивыми.

Что можно сказать о неустойчивом многообразии для ИК, обладающей экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_+$? В случае, когда образ оператора $P(t)$ равен нулю, эта интегральная кривая является вполне неустойчивой на $\mathbb{R}_+$, а ее локальное неустойчивое многообразие на $\mathbb{R}_+$ является равномерной окрестностью ИК γ.

Предположим, что ядро оператора $P(t)$ нетривиально и имеет размерность $0 < p < n = \dim M$. Пусть $\mathcal{S}(t) = P(t)T_{\gamma(t)}M$ — устойчивое подпространство. Выберем любое дополнительное линейное подпространство $U(0)$ для $\mathcal{S}(0)$ в $T_{\gamma(0)}M$ и продолжим его дифференциалами $D\Phi_0^t$. Обозначим $\mathcal{U}(t) = D\Phi_0^t(\mathcal{U}(0))$. Разложим вектор $\xi \in U(t)$ в прямую сумму $\xi = \xi_+ + \xi_-$, $\xi_+ \in L_+(t)$, $\xi_- \in (E - P(t))T_{\gamma(t)}M$. В силу оценок в (2.2) векторы $D\Phi_0^t(\xi_+)$ экспоненциально сжимаются при $t \to +\infty$, а векторы $D\Phi_0^t(\xi_-)$ экспоненциально сжимаются в обратном направлении. Это приводит к тому свойству, что любые два таких дополнительных подпространства асимптотически приближаются друг к другу под действием $D\Phi_0^t$ при $t \to +\infty$. В этом смысле можно говорить о неустойчивом направлении для γ. Для нелинейной системы это приводит к понятию гладкого неустойчивого многообразия в равномерной окрестности γ. Именно, продолжения под действием диффеоморфизмов Φ_0^t двух любых гладких локальных дисков размерности $n-p$, трансверсальных к $W^s(\gamma)$ при $t = 0$, стремятся друг к другу в C^1-топологии при $t \to +\infty$. Это является неавтономным аналогом λ-леммы Смейла, см. [40].

Замечание 2.1. Наиболее знакомый случай экспоненциальной дихотомии для неавтономной линейной системы — это случай действительной периодической системы, когда матрица $A(t)$ является непрерывной T-периодической. Тогда справедливо представление Флоке для ее вещественной фундаментальной матрицы $\Phi(t) = S(t)\exp[tB]$ с T-периодической (или $2T$-периодической) дифференцируемой невырожденной матрицей $S(t)$. Это представление означает, что система обладает экспоненциальной дихотомией тогда и только тогда, когда матрица B не имеет собственных значений на мнимой оси. Это эквивалентно условию, что линейная периодическая система не имеет мультипликаторов на единичной окружности. Например, если $n = 2$, то вещественная матрица монодромии $\Phi(T)$ может иметь:

1) оба собственных значения (мультипликатора) внутри единичного круга комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (устойчивый случай);
2) одно собственное значение внутри круга и одно — вне круга, тогда оба они вещественны (седловой случай);
3) оба собственных значения вне единичного круга в плоскости $\mathbb{C}$ (вполне неустойчивый случай).

Тогда соответствующими подпространствами $\mathcal{S}(t)$ являются: $\mathbb{R}^2$ — для первого случая; l_s — для второго случая, где l_s — собственная прямая матрицы $\Phi(T)$, соответствующая единственному вещественному мультипликатору внутри единичного круга $\mathbb{C}$; и начало координат — для третьего случая. Аналогично строятся подпространства $\mathcal{U}(t)$.

Примером непериодического случая с экспоненциальной дихотомией является система с матрицей $A(t) = A_0 + \varepsilon B(t)$, при условии, что спектр матрицы A_0 не пересекает мнимую ось, с вещественной непрерывной равномерно ограниченной матрицей $B(t)$ и достаточно малым ε (см. [7]).

3. Градиентно-подобные НВП

Для того чтобы выделить системы с простой структурой, наложим следующие ограничения на класс изучаемых неавтономных векторных полей. Пусть v — НВП рассматриваемого класса.

Предположение 3.1. *Каждая интегральная кривая γ поля v обладает экспоненциальной дихотомией как на $\mathbb{R}_+$ так и на $\mathbb{R}_-$, и типы этих дихотомий для данной γ могут быть различными.*

Из предположения 3.1 и теоремы 2.2 следует, что многообразие $M\times\mathbb{R}$ разбивается на глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия, что позволяет сделать следующее предположение.

Предположение 3.2. *Множество глобальных устойчивых и неустойчивых многообразий поля v конечно.*

Напомним, что пересечение любого глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия поля v с $M_0 = M \times \{0\}$ является вложенным гладким подмногообразием, названным выше устойчивым (неустойчивым) слоем.

Предположение 3.3. *Любой устойчивый слой пересекается с любым неустойчивым слоем в M_0 трансверсально. При этом, если сумма их размерностей совпадает с размерностью многообразия M_0, то пересечение состоит из конечного числа точек, а если сумма их размерностей больше размерности M_0, то пересечение состоит из конечного числа связных компактных многообразий.*

Весьма существенной для возможной классификации рассматриваемых векторных полей является информация о том, как разные устойчивые (соответственно — неустойчивые) слои примыкают друг к другу на M_0, т. е. информация о взаимном расположении устойчивых (неустойчивых) слоев разных размерностей. Ключевым понятием здесь является введенное Смейлом понятие границы глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий автономных векторных полей. Мы сформулируем это понятие для НВП v рассматриваемого класса.

Пусть НВП v удовлетворяет предположению 3.1, т. е. через каждую точку многообразия $M\times\mathbb{R}$ проходит устойчивое многообразие. Рассмотрим какое-то из этих многообразий W^s, и пусть w_0^s — его слой на M_0. Выберем некоторую последовательность $x_n \in w_0^s$, которая сходится к точке $x_* \notin w_0^s$. Обозначим через $W^s(x_*)$ глобальное устойчивое многообразие, содержащее интегральную кривую, проходящую через точку x_*. Возникает естественный вопрос о взаимном расположении многообразий W^s и $W^s(x_*)$. Назовем множество предельных точек произвольных последовательностей $x_n \in w_0^s$ с описанным выше свойством *границей Смейла* для w_0^s. Как следует из теоремы 2.2 о глобальном устойчивом многообразии, пересечение W^s с сечением $M_0 = M \times \{0\}$ есть образ иммерсии $i_0 : \mathbb{R}^p \to M_0$, $p = \dim W^s - 1$. Таким образом, граница Смейла для $w_0^s = W^s \cap M_0$ есть множество $\partial w_0^s = \operatorname{clos}(w_0^s) \setminus w_0^s$ ($\operatorname{clos}(A)$ означает замыкание множества A). Будем называть множество $\partial W^s = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \Phi_0^t(\partial w_0^s)$ границей Смейла для многообразия W^s.

Характерной чертой автономных градиентно-подобных систем (потоков и диффеоморфизмов) является уменьшение размерности при переходе к границе Смейла устойчивых (и неустойчивых) многообразий. Мы положим это в основу следующего предположения

Предположение 3.4. *Для любого глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия W^s (W^u) его граница Смейла ∂W^s (∂W^u) состоит из целых устойчивых (неустойчивых) многообразий меньшей размерности.*

Еще одно предположение касается поведения интегральных кривых, которое препятствует возможным бифуркациям из бесконечности. Для иллюстрации возможности такой бифуркации, рассмотрим уравнение

$$\dot{\varphi} = \cos\varphi(\sin^2\varphi + \exp[-t^2] - \mu),$$

зависящее от параметра μ, в котором при переходе через $\mu = 0$ происходит рождение интегральных кривых нового типа (из бесконечности) (см. рис. 1).

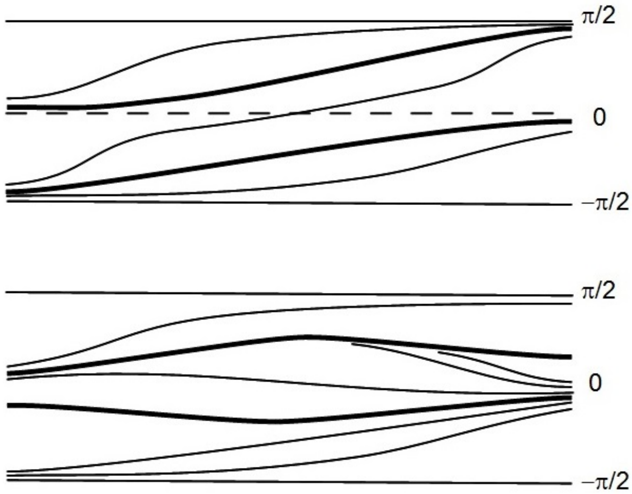

Рис. 1. Бифуркация из бесконечности: $\mu = 0$ и $\mu > 0$
Fig. 1. Bifurcation from infinity: $\mu = 0$ и $\mu > 0$

Рассмотрим разбиение $M \times \mathbb{R}$ на устойчивые многообразия поля v, полагая, что вышеприведенные предположения выполняются для v. Выберем по одной ИК из каждого устойчивого многообразия и обозначим их как $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$. Они разделены в $M \times \mathbb{R}_+$ в том смысле, что можно выбрать некоторые достаточно тонкие равномерные окрестности каждой выбранной ИК, чтобы их замыкания не пересекались друг с другом и были расположены на конечном положительном расстоянии. Стоит отметить, что существенно рассматривать ИК в $M \times \mathbb{R}_+$, поскольку в $M \times \mathbb{R}$ эти кривые могут быть неотделимы, т. е. некоторые из них могут асимптотически приближаться друг к другу при $t \to -\infty$. Такие равномерные окрестности, являющиеся произвольно тонкими, могут быть построены с помощью функций Ляпунова для рассматриваемых интегральных кривых. Конструкция этих окрестностей такова, что векторы на их границе либо все направлены внутрь, либо все наружу, либо, если они касаются границы, то времена, соответствующие отрезкам ИК, принадлежащим границе, равномерно отделены от нуля и бесконечности.

Аналогично выберем по одной интегральной кривой $\Gamma_1^-, \dots, \Gamma_r^-$ на каждом неустойчивом многообразии и рассмотрим их в $M \times \mathbb{R}_-$. Пусть ε — константа, характеризующая минимальную тонкость соответствующих однородных окрестностей. Наше последнее предположение имеет следующий вид.

Предположение 3.5. *Для любого достаточно малого ε существует такое число $T(\varepsilon) > 0$, что для любой интегральной кривой всякий связный интервал времени, при котором точки этой интегральной кривой лежат вне объединения ε-окрестностей кривых $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ и $\Gamma_1^-, \dots, \Gamma_r^-$, меньше $T(\varepsilon)$.*

Определение 3.1. Неавтономное векторное поле v, для которого выполнены предположения 3.1–3.5, будем называть *градиентно-подобным.*

Как упоминалось выше, этот класс НВП в несколько иной форме впервые был выделен в [10] для двумерных замкнутых многообразий M, в настоящей форме это было сделано в [9].

Представляется желательным, чтобы класс рассматриваемых неавтономных векторных полей обладал двумя основными свойствами:

1. системы этого класса являются грубыми (структурно устойчивыми);
2. для случаев малой размерности ($\dim M = 1, 2$) они могут быть классифицированы некоторыми инвариантами комбинаторного типа.

В качестве класса НВП, где эта проблема решена, напомним результаты, полученные для случая наименьшей размерности $\dim M = 1$, т. е. для скалярных неавтономных градиентно-подобных уравнений на окружности S^1, см. [28].

4. Градиентно-подобные НВП на S^1

Введем циклическую координату θ на S^1, $\theta + 2\pi n \equiv \theta \pmod{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда НВП v задается 2π-периодической функцией $f(\theta, t)$, зависящей от t, $f(\theta + 2\pi, t) \equiv f(\theta, t)$, являющейся правой частью скалярного дифференциального уравнения $\dot{\theta} = f(\theta, t)$. Требование на v быть равномерно непрерывным отображением $v : \mathbb{R} \to V^k(S^1)$ означает, что производные от f по θ до порядка k существуют и являются равномерно непрерывными функциями относительно t.

В этом случае экспоненциальная дихотомия любой ИК на $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ может быть только типов $(1, 0)$ или $(0, 1)$, и ее устойчивые (неустойчивые) многообразия могут быть размерности либо два, либо один. При выполнении предположений 3.1–3.5 относительно v комбинаторный инвариант поля v строится следующим образом. Рассмотрим интегральные кривые с экспоненциальной дихотомией типа $(0, 1)$ на $\mathbb{R}_+$. Такие интегральные кривые совпадают с их неустойчивыми одномерными многообразиями, следовательно, их число конечно. Отметим на S_0^1 множество точек $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$, являющихся следами ИК с экспоненциальной дихотомией типа $(0, 1)$ на $\mathbb{R}_+$. Другое множество точек $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$ состоит из следов интегральных кривых с типом экспоненциальной дихотомии $(1, 0)$ на $\mathbb{R}_-$. Эти интегральные кривые также совпадают с их неустойчивыми одномерными многообразиями, поэтому их число конечно. Эти два набора точек не пересекаются в силу предположения 3.3. Каждая точка m_i^+ на S_0^1 принадлежит некоторому интервалу между двумя соседними точками m_j^-, m_{j+1}^- (см. рис. 2), представляющему собой некоторый неустойчивый слой. Не исключено, что несколько точек m_i^+ принадлежат одному и тому же неустойчивому слою. То же может выполняться и для точек m_j^-: они принадлежат интервалам, т. е. 1-слоям, являющимся следами 2-мерных устойчивых многообразий (см. рис. 2).

Очевидно, что равномерно эквивалентные градиентные НВП на S^1 могут приводить к геометрически различным наборам точек m_i^+, m_j^-. Поэтому следует ввести отношение эквивалентности. Два таких набора вызываются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : S_0^1 \to S_0^1$ такой, что h отображает множество точек $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$, $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$ первого набора в аналогичное множество второго набора. Класс эквивалентности таких наборов будем называть D-инвариантом.

Теорема 4.1 (см. [28]). *Два скалярных градиентно-подобных уравнения на S^1 равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый D-инвариант.*

Построение эквиморфизма $H : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$, который осуществляет равномерную эквивалентность градиентно-подобных НВП v_1, v_2, имеющих одинаковый D-инвариант, т. е. переводит

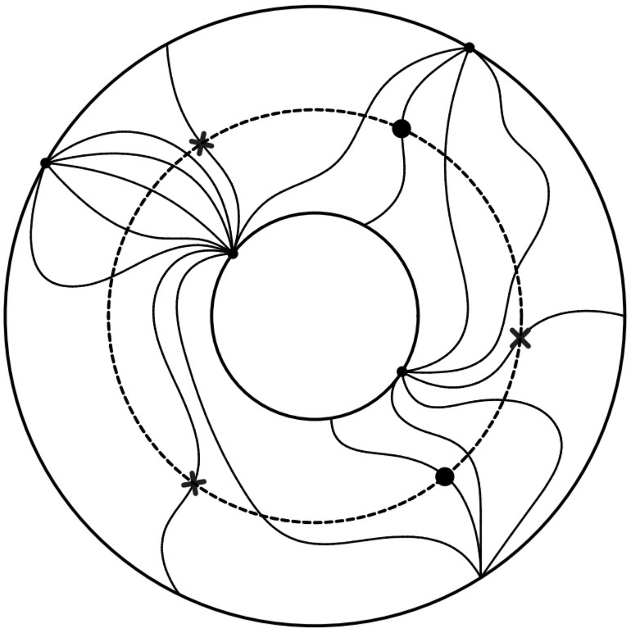

Рис. 2. D-инвариант на S^1, жирные точки — устойчивые слои, крестики — неустойчивые слои.

Fig. 2. D-invariant of S^1, stable layers are indicated with bold dots, unstable layers are indicated with crosses.

слоение на ИК поля v_1 в слоение на ИК поля v_2, строится с помощью локальных функций Ляпунова вблизи ИК, проходящих через точки $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$, $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$ и далее продолжением на множество между ними в $S^1 \times \mathbb{R}$. Аналогичная конструкция применяется для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Любое скалярное НВП градиентно-подобного типа на S^1 структурно устойчиво.*

Примерами градиентно-подобных скалярных дифференциальных уравнений являются, в частности, асимптотически автономные векторные поля на S^1 с (возможно) различными типами предельных систем в $\pm\infty$. Напомним (см. [30]), что НВП v на гладком замкнутом многообразии M называется *асимптотически автономным*, если отображение $v : \mathbb{R} \to V^r(M)$ имеет пределы $v_-, v_+ \in V^r(M)$ при $t \to \mp\infty$, которые являются C^k-гладкими векторными полями на M. Для случая S^1 асимптотическая автономность векторного поля означает, что функция f, определяющая скалярное дифференциальное уравнение, имеет предельные функции f_-, f_+ класса C^r.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение $\dot\theta = f(\theta, t)$ с функцией $f(\theta, t)$, которая при $t \geqslant T$ не зависит от t и совпадает с функцией $f_+(\theta)$, а при $t \leqslant -T$ — совпадает с функцией $f_-(\theta)$. Таким образом, рассматриваемое неавтономное дифференциальное уравнение относится к классу так называемых *переходных* (*transitory*) систем, введенных в [33]. Некоторые свойства таких систем изучались также в [11].

Будем предполагать, что уравнения $\dot\theta = f_+(\theta)$ и $\dot\theta = f_-(\theta)$ являются структурно устойчивыми, т. е. имеют конечное число простых нулей, и класс r гладкости функций f, f_+, f_- по θ равен 1 или выше. Пусть m_i^+, $i = 1, \dots, k$, являются нулями функции f_+, а m_j^-, $j = 1, \dots, n$, являются нулями функции f_-. Тогда рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет при $t \geqslant T$ постоянное решение $\theta(t) = m_i^+$, а при $t \leqslant -T$ — постоянное решение $\theta(t) = m_j^-$. Решения из первого набора обладают экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_+$, а решения из второго набора — на $\mathbb{R}_-$. Действительно, линеаризация дифференциального уравнения на любом из решений первого набора имеет вид: $\dot\xi = \lambda_i \xi$, $\lambda_i = f'_+(m_i^+)$. Поэтому при $\lambda_i < 0$ имеем: в пространстве $\mathbb{R}$ начальных условий (где $t = T$) оператор P есть тождественное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, фундаментальная матрица $G(t)$ есть

$\exp[\lambda_i t]$, постоянные $C = 1$, $\lambda = \lambda_i$, и при $t \geqslant \tau \geqslant T$ справедливо равенство

$$|G(t)PG^{-1}(\tau)| = \xi(t-\tau) = e^{\lambda_i(t-\tau)}.$$

Если $\lambda_i > 0$, то оператор P есть проекция в нуль, постоянные $C = 1$, $\nu = \lambda_i$, и при $T \leqslant t \leqslant \tau$ справедливо равенство

$$|G(t)(E-P)G^{-1}(\tau)| = e^{\lambda_i(t-\tau)}.$$

Если некоторое решение $\theta(t)$ асимптотически стремится при $t \to +\infty$ к одному из решений m_i^+ с $\lambda_i < 0$, то это решение можно записать в виде $\theta(t) = m_i^+ + x(t)$, где $|x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку решение $\theta(t)$ принадлежит устойчивому многообразию решения m_i^+. Линеаризация дифференциального уравнения на решении $\theta(t)$ есть

$$\xi' = f_+'(\theta(t))\xi = [f_+'(m_i^+) + r(t)]\xi, \quad r(t) = f_+'(m_i^+ x(t)) - f_+'(m_i^+).$$

Поскольку $f_+'(m_i^+) = \lambda_i^+ < 0$, то соответствующая оценка имеет вид

$$|\xi(t,\tau)| \leqslant e^{\lambda_i^+(t-\tau) + \int\limits_\tau^t |f_+'(m_i^+ x(s)) - f_+'(m_i^+)|ds}. \tag{4.1}$$

Напомним, что первая производная f_+' является непрерывной функцией на окружности, поэтому она равномерно непрерывна. При достаточно больших $t > T$ функция $|x(t)|$ может быть сделана сколь угодно малой. В частности, выбирая $\kappa < |\lambda_+|/2$, можно при всех $t > T$ считать величину $|f_+'(m_i^+ x(s)) - f_+'(m_i^+)|$ меньшей κ. Тогда неравенство (4.1) можно записать в виде

$$|\xi(t,\tau)| \leqslant e^{\lambda_i^+(t-\tau)+\kappa(t-\tau)} \leqslant e^{\lambda_i^+(t-\tau)/2}.$$

Это означает, что решение $\theta(t)$ также обладает экспоненциальной дихотомией того же типа $(1,0)$, как и решение $\theta = m_i^+$.

Все вышесказанное справедливо также для решений $\theta = m_j^-$ и решений, асимптотически стремящихся к ним при $t \to -\infty$. Таким образом, для НВП $\dot\theta = f(\theta, t)$ все предположения 3.1–3.5 выполнены, кроме предположения 3.3. Для его выполнения нужно наложить некоторые условия на функцию $f(\theta, t)$, $t \in [-T, T]$. Именно, нужно обеспечить, чтобы интегральные кривые с начальными точками $(m_j^-, -T)$, $(m_j^-, -T)$, для которых показатели $\lambda_j^- < 0$, при продолжении на интервал $(-T, T)$ в своей крайней точке при $t = T$ не попадали в те точки (m_i^+, T), для которых соответствующие показатели λ_i^+ положительны. Аналогичное свойство должно выполняться в обратную сторону по времени: интегральные кривые с начальными точками (m_i^+, T), для которых показатели $\lambda_i^+ > 0$, при их продолжении при убывании времени на интервал $(-T, T)$ в своей крайней точке при $t = -T$ не должны попадать в те точки $(m_j^-, -T)$, для которых соответствующие показатели λ_j^- отрицательны (см. рис. 3). Понятно, что эти условия можно выполнить, подбирая подходящую функцию f.

Опишем еще, для более полного понимания, разбиение расширенного фазового пространства $S^1 \times \mathbb{R}$ на устойчивые и неустойчивые многообразия. Каждое устойчивое многообразие состоит из ИК, которые при $t \to +\infty$ асимптотически сближаются друг с другом. Поэтому, ввиду конструкции переходного НВП, при $t \geqslant T$ такие ИК стремятся к одной ИК, задаваемой как $\theta = m_i^+$, у которой показатель $f_+'(m_i^+) < 0$. Ее область притяжения при $t \geqslant T$ есть полуполоса, ограниченная двумя соседними ИК того же вида, но у которых показатели положительны. Ввиду того, что f_+ имеет только простые нули, имеются либо две такие соседние ИК, либо они совпадают, тогда замыкание этой полуполосы есть полуцилиндр $S^1 \times \mathbb{R}_+$ и функция f_+ имеет только два простых нуля.

Для получения полного устойчивого многообразия нужно продолжить полученную полуполосу на полуцилиндр $S^1 \times (-\infty, T)$. Для этого достаточно проследить за границами полуполосы. Этими границами являются интегральные кривые $\theta = m_{i-1}^+$ и $\theta = m_{i-1}^+$, соседние к кривой $\theta = m_i^+$. Продолжение назад по времени этих ИК определяется структурой слоения на ИК в переходном слое $S^1 \times [-T, T]$. Важно то, что продолжение каждой из этих ИК, в силу предположения 3.3, попадает при $t = -T$ строго внутрь одного интервала, крайними точками которого являются соседние простые нули m_{j-1}^-, m_{j+1}^- функции f_-, у которых $f_-'(m_{j-1}^-) < 0$. Теперь продолжение устойчивого многообразия есть полуполоса между двумя полученными продолженными назад

ИК (см. рис. 3). Имеются еще одномерные устойчивые многообразия, которые просто совпадают с ИК, являющимися границами устойчивых многообразий. Аналогично строятся остальные устойчивые многообразия, и подобная конструкция дает неустойчивые многообразия, начиная с ИК, стремящихся к одной ИК вида $\theta = m_j^-$, для которой $f'_-(m_j^-) > 0$.

D-инвариант данного НВП состоит из класса эквивалентности набора точек на S_0^1, состоящего из следов ИК с дихотомией $(0,1)$ на $\mathbb{R}_+$ и следов ИК с дихотомией $(1,0)$ на $\mathbb{R}_-$.

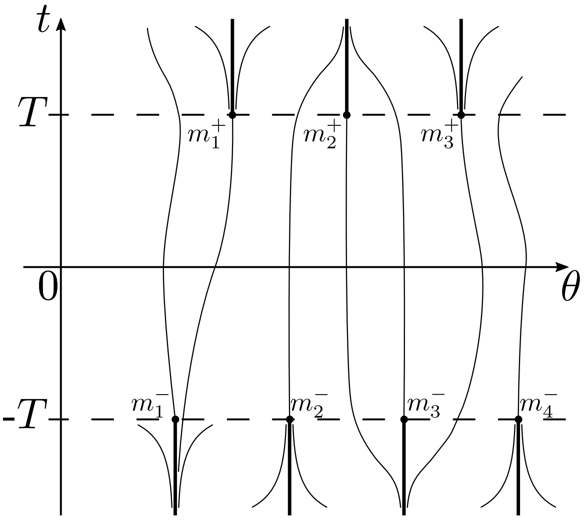

Рис. 3. Правильные переходы ИК в переходном ДУ
Fig. 3. Proper transitions of integral curves in a transitional differential equation

5. Неавтономные векторные поля на поверхностях

Следующей размерностью для исследования является два. Итак, рассмотрим неавтономное градиентно-подобное векторное поле v на гладкой замкнутой поверхности M. Здесь типы экспоненциальной дихотомии интегральных кривых могут быть $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, поэтому устойчивые многообразия могут быть трех размерностей: $\dim W^s = 3$ (все интегральные кривые на таком устойчивом многообразии являются вполне устойчивыми интегральными кривыми), $\dim W^s = 2$ (все интегральные кривые на таком многообразии являются седловыми интегральными кривыми) и $\dim W^s = 1$ (такое многообразие состоит из единственной вполне неустойчивой интегральной кривой). В сечении $M_0 = M \times \{0\}$ получаем конечное множество точек, являющихся следами одномерных устойчивых многообразий. К этим точкам примыкает конечное множество гладких кривых, являющихся следами двумерных устойчивых многообразий. Дополнение к замыканию множества кривых состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску и являющихся следами трехмерных устойчивых многообразий. Такое разбиение M_0 является *клеточным комплексом.* Мы будем называть полученный комплекс *s-комплексом.*

Аналогично, используя неустойчивые многообразия поля v, получаем клеточное разбиение M_0, которое назовем *v-комплексом.*

В силу градиентно-подобности граница Смейла любой устойчивой кривой на M_0 состоит из одной или двух точек. Таким образом, ее замыкание топологически является либо отрезком, либо замкнутой кривой. Итак, мы получаем вложенный в M_0 граф, называемый *s-графом.* Аналогично определяется u-граф, который строится посредством неустойчивых двумерных многообразий.

Построенный выше s-комплекс на M_0 позволяет описать взаимосвязь между топологией многообразия M и количеством и типами слоев устойчивых многообразий неавтономного градиентного векторного поля v.

Теорема 5.1 (см. [9]). *Пусть v — неавтономное градиентно-подобное векторное поле на многообразии M, а L_q — количество устойчивых слоев размерности $q+1$, $q \in \{0,1,2\}$. Тогда выполняются следующие неравенства типа Морса*:

$$L_0 \geqslant b_0, \quad L_1 - L_0 \geqslant b_1 - b_0, \quad L_2 - L_1 + L_0 = b_2 - b_1 + b_0 = \chi(M),$$

где b_0, b_1, b_2 — ранги соответствующих групп гомологий многообразия M (числа Бетти).

Для градиентно-подобного векторного поля на гладком двумерном многообразии M справедливы следующие основные теоремы (см. [9, 10]).

Теорема 5.2. *Любое градиентно-подобное векторное поле на M структурно устойчиво.*

Объединение s- и u-графов дает вложенный граф G на M_0, соответствующий НВП v. Тогда s- и u-графы назовем *s- и u-подграфами* графа G. Два вложенных графа G_1, G_2 называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M_0 \to M_0$ такой, что h переводит s-подграф графа G_1 в s-подграф графа G_2 и u-подграф графа G_1 переводит в u-подграф графа G_2. Класс эквивалентности таких вложенных графов называется *различающим графом* (или *D-графом*) неавтономного векторного поля.

Теорема 5.3. *Два градиентно-подобных неавтономных векторных поля на двумерном многообразии M равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют эквивалентные D-графы.*

На рис. 4 представлены варианты неэквивалентных представителей различающих графов с одинаковыми s- и u-подграфами. В силу теоремы 5.3, НВП, соответствующие этим D-графам, равномерно неэквивалентны. Геометрически это очевидно, т. к. левый D-граф имеет две седловые ИК с дихотомией $(1, 1)$ на $\mathbb{R}$, а правый D-граф имеет 4 таких ИК.

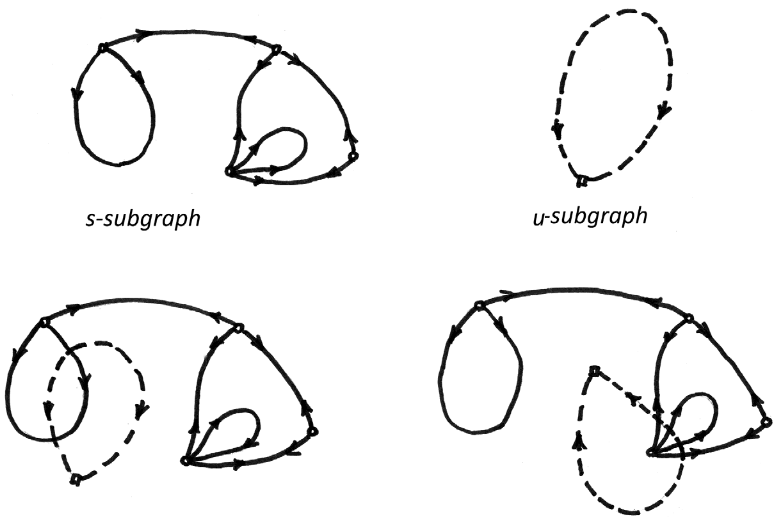

Рис. 4. s-подграф, u-подграф и неэквивалентные D-графы.
Fig. 4. s-subgraph, u-subgraph, and nonequivalent D-graphs.

6. Реализация

Проблема реализации любого заданного D-графа градиентно-подобным НВП на двумерной поверхности M решается следующим образом. D-граф определяет два клеточных комплекса, устойчивый и неустойчивый, заданные s-подграфом и u-подграфом. Согласно неравенствам Морса, связывающим числа Бетти и соответствующие им числа устойчивых слоев, существует функция Морса f_+, для которой число вполне неустойчивых критических точек равно количеству вершин s-подграфа, число седловых критических точек равно числу его ребер, и число устойчивых критических точек равно числу 2-клеток устойчивого комплекса. Определим некоторую риманову метрику на M. Тогда функция f_+ задает автономное градиентное векторное поле v_+ на M, положения равновесия которого совпадают с критическими точками f_+.

Аналогичным образом строится гладкая функция Морса f_- на M и связанное с ней градиентное автономное векторное поле v_-. Определим НВП на M таким образом, что оно совпадает с v_+ для всех $t \geqslant T > 0$, с v_- для всех $t \leqslant -T < 0$ и с некоторым переходным неавтономным векторным полем V_t при $t \in (-T, T)$.

Задание D-графа гарантирует, что два автономных векторных поля v_-, v_+ в $V^r(M)$ можно соединить гладкой кривой V_t так, что получившееся НВП представляет собой неавтономное градиентно-подобное векторное поле v на M, для которого выполняются все предположения 3.1–3.5. В частности, продолженные назад по $t < T$ интегральные полупрямые, соответствующие источникам поля v_+, попадают при $t = -T$ на неустойчивые 2-многообразия поля v_-. Тогда полученные соответствующие интегральные кривые поля v обладают экспоненциальной дихотомией типа $(0, 2)$ на всем $\mathbb{R}$ и, следовательно, совпадают со своими глобальными одномерными устойчивыми многообразиями в $M \times \mathbb{R}$. Аналогичным образом, продолжения вперед по времени для $t > -T$ интегральных полупрямых, соответствующих стокам поля v_-, будут при $t = T$ принадлежать устойчивым 2-многообразиям стоков поля v_+. Тогда соответствующие интегральные кривые поля v обладают экспоненциальной дихотомией типа $(2, 0)$ на всем $\mathbb{R}$ и, следовательно, совпадают со своими одномерными глобальными неустойчивыми многообразиями в $M \times \mathbb{R}$.

Для выполнения предположения 3.3 переходное поле V_t должно обеспечить следующее свойство: действие (назад по времени) диффеоморфизма Φ^0_T, порожденного полем V_t, на любую одномерную устойчивую сепаратрису седла поля v_+ на сечении $t = T$ должно давать гладкую кривую на сечении M_0, которая пересекает трансверсально в конечном числе точек гладкие кривые на M_0, являющиеся образами при диффеоморфизме Φ^0_{-T} (вперед по времени) любой одномерной неустойчивой сепаратрисы седла поля v_- на сечении $t = -T$.

7. Неавтономные градиентно-подобные векторные поля на M^3

Пусть теперь M — гладкое замкнутое трехмерное многообразие, а v — неавтономное градиентно-подобное векторное поле на M. Возможные здесь типы экспоненциальной дихотомии — $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$. Конечный набор различных устойчивых многообразий порождают на M_0 клеточный комплекс (s-комплекс) и, аналогично, двойственный клеточный комплекс, порожденный конечным набором неустойчивых многообразий (u-комплекс). Размерность три является первой, где такой комплекс может содержать дико вложенные в M_0 клетки. Например, замыкание гладкого одномерного слоя в M_0, соответствующего двумерному неустойчивому многообразию, может быть дико вложенным в своей граничной точке (являющейся следом ИК с экспоненциальной дихотомией типа $(3, 0)$), см. [14, 17]. Кроме того, двумерные слои, являющиеся следами трехмерных устойчивых многообразий, также могут быть дико вложены в точках их границы, являющихся следами ИК с дихотомией типа $(0, 3)$. Примеры такого поведения были построены в недавней статье [5]. Поскольку v градиентно-подобно, мы имеем разбиение $M \times \mathbb{R}$ на устойчивые и неустойчивые глобальные многообразия. Следы этих многообразий на M_0 дают слои, составляющие s- и u-комплексы, являющиеся клеточными комплексами. Назовем *s-подграфом* множество на M_0, образованное устойчивыми слоями размерностей $2, 1, 0$. Аналогично определяется *u-подграф.* Объединение s- и u-подграфов будем называть *D-графом* векторного поля v. Заметим, что исследования конкретных примеров показывают, что слои s-подграфа и u-подграфа графа G могут иметь точки дикости.

Два D-графа G_1, G_2 на M_0 неавтономных векторных полей v_1, v_2 называются *эквивалентными,* если существует гомеоморфизм $h : M_0 \to M_0$, переводящий s-подграф графа G_1 в s-подграф графа G_2 и u-подграф графа G_1 в u-подграф графа G_2. Отметим, что гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность D-графов, переводит точки дикости одного графа в точки дикости другого.

Сначала приведем примеры векторных полей, где слои D-графов обладают точками дикости. Это было сделано в [5], и конструкция использует две идеи. Первая идея принадлежит Лерману и Вайнштейну [3, 4] и состоит в конструкции неавтономной надстройки над заданным диффеоморфизмом $f : M \to M$ замкнутого многообразия M. Вторая идея принадлежит Д. Пикстону [36] и была в дальнейшем развита Бонатти, Гринесом, Починкой и др. в [17, 18, 26] (см. раздел 8.2).

7.1. Неавтономные надстройки. Полезная конструкция для поиска неавтономных систем с нужными свойствами была предложена Лерманом и Вайнштейном [3, 4]. Ими введено понятие *неавтономной надстройки* над заданным диффеоморфизмом $f : M \to M$ замкнутого многообразия M. Именно, пусть M_f — многообразие надстройки над f со слоением, состоящим из траекторий соответствующего потока. M_f является гладким расслоением над S^1. Наделим M_f

некоторой римановой метрикой и рассмотрим его накрытие $\tilde{M}_f$, порожденное стандартным накрытием $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$. Обозначим через $p : \tilde{M}_f \to M_f$ естественную проекцию. Поскольку $\mathbb{R}$ стягиваемо, то накрытие $\tilde{M}_f$ диффеоморфно прямому произведению $M \times \mathbb{R}$. Если поднять посредством p метрику на $\tilde{M}_f$ из M_f, то $\tilde{M}_f$ не будет, вообще говоря, эквиморфным $M \times \mathbb{R}$. Слоение на траектории потока в M_f поднимается до слоения на $\tilde{M}_f$, которое обозначим L_f. Возникает естественный вопрос: является ли слоение L_f эквиморфным слоению на интегральные кривые некоторого неавтономного векторного поля на M?

Определение 7.1. Говорят, что диффеоморфизм $f : M \to M$ *воспроизводится* неавтономным векторным полем v на M, если существует эквиморфизм $\Phi : M \times \mathbb{R} \to \tilde{M}_f$, переводящий интегральные кривые поля v в слои слоения L_f. Здесь $M \times \mathbb{R}$ рассматривается с равномерной структурой прямого произведения.

В связи с этим представляют интерес следующие утверждения.

Утверждение 7.1. *Пусть $f : \mathbb{T}^n \to T^n$ — гиперболический автоморфизмом тора $\mathbb{T}^n$. Тогда пространство $\widetilde{\mathbb{T}^n_f}$ не эквиморфно $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$.*

Более того, это же утверждение справедливо для любого диффеоморфизма Аносова. С другой стороны, справедливо такое утверждение.

Утверждение 7.2. *Диффеоморфизм Плыкина на S^2 воспроизводится периодическим векторным полем на S^2.*

Замечание 7.1. Как известно, существуют такие диффеоморфизмы $f : M \to M$, что надстройка M_f над таким диффеоморфизмом не диффеоморфна прямому произведению $M \times S^1$, но для некоторой его итерации f^n соответствующая надстройка M_{f^n} диффеоморфна $M \times S^1$. Фактически многообразие M_{f^n} является k-кратным накрытием M_f. В качестве примера такой ситуации можно взять $M = S^1$ с координатой $\varphi \pmod{2\pi}$ и диффеоморфизм $f(\varphi) = -\varphi \pmod{2\pi}$. Тогда S^1_f гомеоморфно бутылке Клейна, но $f^2(\varphi) = \varphi$ и, следовательно, $S^1_{f^2} = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$ (т. е. двумерный тор, являющийся двулистным накрытием бутылки Клейна). Таким образом, многообразие $\tilde{S}^1_f$ эквиморфно $S^1 \times \mathbb{R}$.

Обозначим через $\pi_M : M \times \mathbb{R} \to M$ стандартную проекцию на первый сомножитель. Для любого неавтономного векторного поля v на многообразии M отображение $\Phi^t_0 : M_0 \to M_t$ из сечения $M_0 = M \times \{0\}$ в многообразие $M_t = M \times \{t\}$, порожденное решениями v с начальными точками на M_0, $\pi_M(M_t) = M$, *диффеотопно*[1] тождественному отображению id_M для всех $t \in \mathbb{R}$. В частности, если v — периодическое векторное поле на многообразии M, то его отображение Пуанкаре за период диффеотопно тождественному отображению id_M .

Приведем теорему из работы [5], которая дает достаточное условие на диффеоморфизм f, чтобы он воспроизводился потоком, порожденным неавтономным периодическим векторным полем v. Сначала сформулируем техническую лемму.

Лемма 7.1. *Если f диффеотопно id_M, то существует диффеотопия $F_t : M \to M$, $t \in [0, 1]$, соединяющая id_M и f и такая, что диффеоморфизмы F_t гладко зависят от t и для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняются условия $F_t \equiv \mathrm{id}_M$, когда $t \in [0, \varepsilon]$, и $f_t \equiv f$, когда $t \in [1 - \varepsilon, 1]$.*

Теорема 7.1. *Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ диффеоморфизм $f^n : M \to M$ диффеотопен id_M . Тогда справедливы утверждения*:

1. *M_f послойно*[2] *диффеоморфно $M \times S^1$;*
2. *существует периодическое векторное поле v на M, которое воспроизводит диффеоморфизм f.*

[1]Два диффеоморфизма f, g гладкого многообразия M диффеотопны, если их можно соединить непрерывной дугой F_t, $F_0 = f$, $F_1 = g$ такой, что каждая F_t является диффеоморфизмом M.

[2]Термин «послойно» означает существование диффеоморфизма $\Psi : M_f \to M \times S^1$, действующего как $(x, s) \to (\psi(x, s), s)$.

Это теорема позволяет по данному диффеоморфизму, обладающему дико вложенными сепаратрисными многообразиями, строить соответствующие неавтономные периодические потоки, устойчивые и неустойчивые многообразия которых также обладают точками дикости.

8. Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

Этот раздел содержит некоторые определения и результаты, которые можно найти в книге [26]; некоторые из них мы приведем для удобства читателя.

8.1. Дикое вложение.

Определение 8.1. Топологическое вложение $\lambda : X \to Y$ m-мерного многообразия X в n-мерное многообразие Y ($m \leqslant n$) называется *локально плоским в точке* $\lambda(x) \in Y$, если существует такая карта (U, ψ), $\lambda(x) \in U$, $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ в многообразии Y, что $\psi(\lambda(X) \cap U) = D^m \subset \mathbb{R}^m$. Здесь $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ есть подпространство точек из $\mathbb{R}^n$, у которых последние $n-m$ координат равны нулю, или $\psi(\lambda(X) \cap U) = \mathbb{R}^m_+$ ($\mathbb{R}^m_+ \subset \mathbb{R}^m$ есть множество точек в $\mathbb{R}^n$, у которых последние координаты неотрицательны).

Вложение λ называется *ручным* (или *локально плоским*), а многообразие X — *ручно вложенным*, если λ является локально плоским в каждой точке $\lambda(x) \in Y$. В противном случае, вложение λ называется *диким*, а многообразие X называется *дико вложенным*. Если вложение λ не является локально плоским в точке $\lambda(x)$, то эта точка называется *точкой дикости*. Стоит отметить, что определение ручно вложенного многообразия совпадает с определением топологического подмногообразия.

Каждое топологическое вложение в пространство $\mathbb{R}^2$ (соответственно, S^2) является ручным, см. [34]. В пространстве $\mathbb{R}^3$ (соответственно, S^3) уже есть дикие дуги и дикие 2-сферы. Один из первых примеров дикой дуги был построен Артином и Фоксом [14]. Соответствующая дуга является гладкой везде, за исключением ее граничной точки (см. рис. 5). Дикость полученной дуги также следует из приведенного ниже критерия, доказанного в [27].

Утверждение 8.1. *Пусть ℓ — компактная дуга в $\mathbb{R}^3$, гладкая всюду, кроме граничной точки O. Тогда ℓ является локально плоской в точке O тогда и только тогда, когда для каждого ε-шара $B_\varepsilon(O)$ с центром в O существует подмножество $U \subset B_\varepsilon(O)$, диффеоморфное замкнутому 3-шару такому, что O является внутренней точкой U, и пересечение $\partial U \cap \ell$ состоит из единственной точки.*

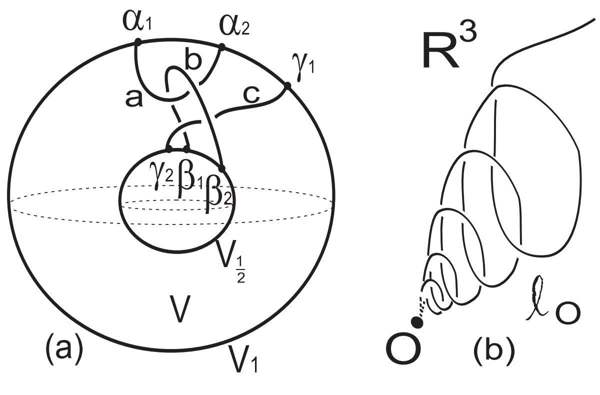

Рис. 5. Конструкция дикой кривой в $\mathbb{R}^3$
Fig. 5. Construction of a wild curve in $\mathbb{R}^3$

8.2. Диффеоморфизмы типа Пикстона на S^3.

Примеры неавтономных потоков с точками дикости устойчивых и неустойчивых многообразий строятся как неавтономные надстройки над диффеоморфизмами, введенными Пикстоном [36]. Перейдем к их конструкции. Пусть V — гладкое замкнутое ориентируемое 3-многообразие, фундаментальная группа которого допускает нетривиальный гомоморфизм $\eta_V : \pi_1(V) \to \mathbb{Z}$. Обозначим через (V, η_V) многообразие V, снабженное гомоморфизмом η_V.

Определение 8.2. Многообразия (V, η_V) и $(V', \eta_{V'})$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : V \to V'$ такой, что $\eta_{V'}\varphi_* = \eta_V$.

Определение 8.3. Два гладких подмногообразия $a \subset V$ и $a' \subset V'$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : V \to V'$ такой, что $\eta_{V'}\varphi_* = \eta_V$ и $\varphi(a) = a'$.

Определение 8.4. Гладкое подмногообразие $a \subset V$ называется *η_V-существенным*, если $\eta_V(i_{a*}(\pi_1(a))) \neq 0$, где $i_a : a \to V$ есть отображения включения.

Проиллюстрируем эти определения для многообразия $S^2 \times S^1$. Представим многообразие $S^2 \times S^1$ как пространство орбит $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})/a^s$, где a^s — гомотетия, заданная формулой $a^s(x) = 0{,}5x$ $(x = (x_1, x_2, x_3))$. Легко проверить[1], что естественная проекция $p : \mathbb{R}^3 \setminus O \to S^2 \times S^1$ является накрывающим отображением, которое индуцирует эпиморфизм $\eta_{S^2\times S^1} : \pi_1(S^2 \times S^1) \to \mathbb{Z}$.

Обозначим $\hat{\gamma}_0 = p(Ox_1^+)$, $\hat{\lambda}_0 = p(Ox_2x_3 \setminus O)$, где Ox_1^+ — положительная полуось, а Ox_2x_3 — координатная плоскость $x_1 = 0$. На рис. 6 показан сферический слой, ограниченный сферами радиусов 1 и 0,5. Если мы отождествим точки, которые лежат на границе сферического слоя и принадлежат одному и тому же радиусу, проходящему через точку O, мы получим многообразие $S^2 \times S^1$. Более того, если мы отождествим крайние точки отрезка с одинаковыми номерами (1), то мы получим узел $\hat{\gamma}_0$, и если мы отождествим крайние точки, лежащие на одном и том же луче, принадлежащие окружностям с одинаковыми числами (2) и ограничивающие 2-кольцо, то мы получим тор $\hat{\lambda}_0$ ($\hat{\gamma}_0$ и $\hat{\lambda}_0$ вложены в $S^2 \times S^1$).

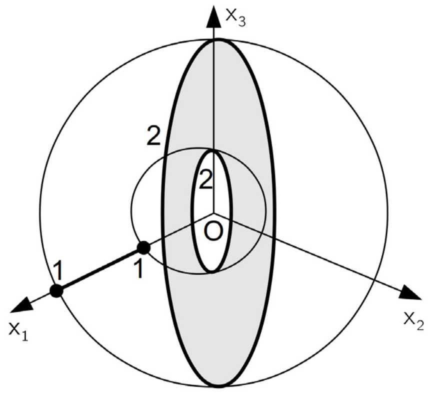

Рис. 6. Конструкция существенных узла и тора, вложенных в $S^2 \times S^1$
Fig. 6. Construction of essential node and torus embedded in $S^2 \times S^1$

Легко проверить, что $\hat{\gamma}_0$ (соответственно, $\hat{\lambda}_0$) является $\eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}$-существенным узлом (соответственно, тором) в многообразии $(S^2 \times S^1, \eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1})$.

Определение 8.5. Узел (тор) $\hat{\gamma}$ $(\hat{\lambda})$ в многообразии $(S^2\times S^1, \eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1})$ называется *тривиальным*, если он эквивалентен узлу (тору) $\hat{\gamma}_0$ $(\hat{\lambda}_0)$.

Утверждение 8.2. *Каждый $\eta^s_{S^2\times S^1}$-существенный тор $\hat{\lambda} \subset (S^2 \times S^1, \eta^s_{S^2\times S^1})$ ограничивает заполненный тор $S^2 \times S^1$.*

Утверждение 8.3. *Узел $\hat{\gamma}$ (соответственно, тор $\hat{\lambda}$) в многообразии $(S^2 \times S^1, \eta^s_{S^2\times S^1})$ является тривиальным тогда и только тогда, когда существует его трубчатая окрестность $N(\hat{\gamma})$ (соответственно, $N(\hat{\lambda})$) в многообразии $S^2 \times S^1$ такая, что многообразие $(S^2 \times S^1) \setminus N(\hat{\gamma})$ (соответственно, $(S^2 \times S^1) \setminus N(\hat{\lambda})$) гомеоморфно заполненному тору (паре заполненных торов).*

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс диффеоморфизмов Морса—Смейла, у которых неблуждающее множество состоит из источника α_f, седла σ_f и стоков ω_f^1, ω_f^2. Фазовый портрет диффеоморфизма

[1]Рассмотрим гомотопический класс $[c] \in \pi_1(S^2 \times S^1)$ петли $c\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^2 \times S^1$). Тогда петля $c\colon [0,1] \to S^2 \times S^1$ подымается в кривую $\bar{c}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, соединяющую точку x с точкой $(a^s)^n(x)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, где n не зависит от поднятия. Тогда мы определяем $\eta^s_{S^2\times S^1}([c]) = n$.

из класса $\mathcal{P}$ показан на рис. 7. Пикстон построил пример из класса $\mathcal{P}$, упомянутого выше, поэтому мы называем класс $\mathcal{P}$ *классом Пикстона.* Мы опускаем ниже индекс f в обозначениях неподвижных точек.

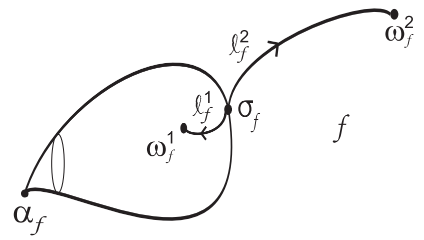

Рис. 7. Фазовый портрет диффеоморфизма из класса $\mathcal{P}$
Fig. 7. Phase portrait of a diffeomorphism from the class $\mathcal{P}$

Удивительным фактом является существование счетного множества несопряженных диффеоморфизмов в классе $\mathcal{P}$. Чтобы понять это, мы опишем ниже узловой топологический инвариант, предложенный в [17]. Более того, этот инвариант объясняет существование в классе $\mathcal{P}$ диффеоморфизмов, для которых седловая неподвижная точка обладает дико вложенными одномерными и двумерными сепаратрисами.

Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 неустойчивые 1-мерные сепаратрисы точки σ. Согласно Смейлу [40], замыкание $\mathrm{cl}(\ell_i)$ $(i = 1, 2)$ гомеоморфно простой компактной дуге, состоящей из самой сепаратрисы и двух ее граничных точек: σ и стока. Более того, замыкания сепаратрис ℓ_1 и ℓ_2 содержат разные стоки (см. [26, следствие 2.2]). Для определенности, пусть ω_i принадлежит $\mathrm{cl}(\ell_i)$ (см. рис. 7). При $i = 1, 2$ обозначим $V_i = W^s(\omega_i) \setminus \{\omega_i\}$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i/f$ соответствующее пространство орбит, и пусть $p_{_i} : V_i \to \hat{V}_i$ — естественная проекция, которая является накрытием, индуцирующим эпиморфизм $\eta_{_i} : \pi_1(\hat{V}_i) \to \mathbb{Z}$. Так как для рассматриваемого стока ω_i ограничение $f|_{V_i}$ топологически сопряжено с $a : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, то многообразие $(\hat{V}_i, \eta_{_i})$ эквивалентно многообразию $(S^2 \times S^1, \eta^s_{_{S^2\times S^1}})$ и множество $\hat{\ell}_i = p_{_i}(\ell_i)$ является $\eta_{_i}$-существенным узлом в многообразии $\hat{V}_i$ таким, что $\eta_{_i}(i_{\hat{\ell}_i *}(\pi_1(\hat{\ell}_i))) = \mathbb{Z}$ (см. [26, теорема 2.3]).

В [17, теорема 1] было доказано, что по крайней мере один из узлов $\hat{\ell}_1$, $\hat{\ell}_2$ тривиален (см. также [26, предложение 4.3]). Для определенности мы предположим ниже, что узел $\hat{\ell}_1$ тривиален.

Следующий результат был доказан в [17, теорема 3] (см. также [26, теорема 4.3]).

Утверждение 8.4. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathcal{P}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда узлы $\hat{\ell}_2(f)$ и $\hat{\ell}_2(f')$ эквивалентны.*

Следовательно, класс эквивалентности узла $\hat{\ell}_2(f)$ является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов класса Пикстона. Более того, справедлива следующая теорема о реализации (см. [17, теорема 2] и [26, теорема 4.4]).

Утверждение 8.5. *Для каждого узла $\hat{\ell} \subset (S^2 \times S^1, \eta^s_{_{S^2\times S^1}})$ такого, что $\eta^s_{_{S^2\times S^1}}(i_{\hat{\ell}*}(\pi_1(\hat{\ell}))) = \mathbb{Z}$, существует диффеоморфизм $f : S^3 \to S^3$ из класса $\mathcal{P}$ такой, что узлы $\hat{\ell}$ и $\hat{\ell}^2(f)$ являются эквивалентными.*

Мазур построил пример существенного и нетривиального узла, вложенного в $S^2 \times S^1$, см. [32]. Согласно предложению 8.5, существует диффеоморфизм f из класса Пикстона такой, что в точности одна неустойчивая одномерная сепаратриса и устойчивая двумерная сепаратриса седловой точки σ являются дико вложенными.

На рис. 8 показан узел Мазура $\hat{l}^u_\sigma$, который появляется в фактор-пространстве $\hat{W}^s(\omega_2)$, и существенный тор $\hat{l}^s_\sigma$, вложенный $\hat{W}^u(\alpha)$, который является трубчатой окрестностью узла Мазура.

Существует счетное множество попарно не эквивалентных существенных узлов в $S^2 \times S^1$ (серия таких узлов была построена недавно в работе [12]). Таким образом, из утверждений 8.4 и 8.5 следует существование счетного множества топологически не сопряженных диффеоморфизмов из класса Пикстона.

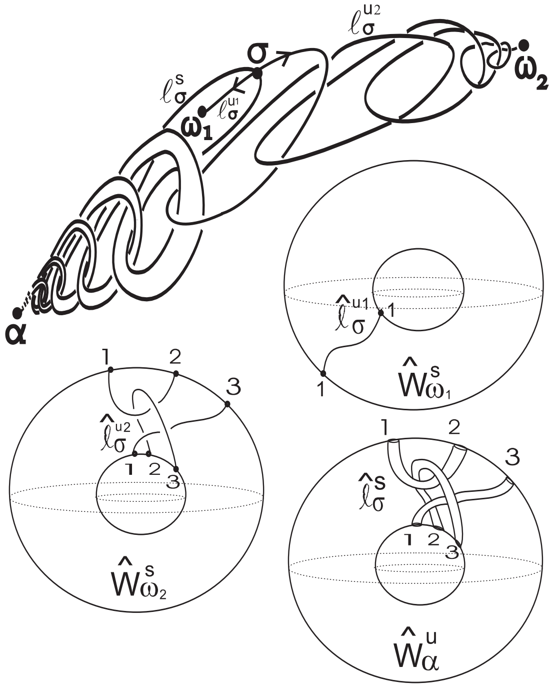

Рис. 8. Фазовый портрет диффеоморфизма из класса $\mathcal{P}$ и проекция седловых сепаратрис в фактор пространствах

Fig. 8. Phase portrait of a diffeomorphism from the class $\mathcal{P}$ and the projection of saddle separatrices in factor spaces

9. Периодические векторные поля на S^3 с дико вложенными сепаратрисными множествами

Теперь мы построим периодическое векторное поле на S^3 с диким вложением замыкания 2-мерного неустойчивого многообразия и замыкания 3-мерного устойчивого многообразия для седловой ИК с экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}$ типа $(2, 1)$.

Начнем с некоторого диффеоморфизма f класса Пикстона на S^3, который имеет один гиперболический источник α, одно седло σ типа $(2, 1)$ (2-мерное устойчивое и 1-мерное неустойчивое многообразия) и два гиперболических стока ω_1, ω_2. Устойчивое 2-мерное многообразие неподвижной точки σ содержит в своем замыкании неподвижную точку α, т. е. все траектории диффеоморфизма f с начальными точками на $W^s(\sigma)$, за исключением самой σ, имеют единственную α-предельную точку α и единственную ω-предельную точку σ. Замыкание множества $W^s(\sigma)$ есть топологически вложенная сфера Σ в S^3, она является границей двух открытых 3-шаров D_1 и D_2. Неподвижная точка ω_1 (сток) лежит внутри шара D_1, другой сток ω_2 лежит внутри другого шара D_2. Мы предполагаем, что одномерная сепаратриса точки σ, которая входит в D_2, является дико вложенной. Отсюда следует, что устойчивое многообразие $W^s(\sigma)$ также является дико вложенным в точке α (см. рис. 8).

Теперь рассмотрим надстройку над f. Как следует из результатов Серфа [20], любые два сохраняющие ориентацию диффеоморфизма в S^3 могут быть соединены гладкой дугой. Отсюда следует, что f диффеотопен id_{S^3} и многообразие M_f гомеоморфно $S^3 \times S^1$, более того, структура прямого произведения может быть получена с помощью некоторого диффеоморфизма. Фиксируем эту структуру и рассмотрим далее многообразие надстройки как стандартное $S^3 \times S^1$. Таким образом, поток надстройки имеет одну вполне неустойчивую периодическую траекторию, одну седловую периодическую траекторию типа $(3, 2)$ и две вполне устойчивые периодические траектории, все они являются гиперболическими периодическими траекториями. Проекция любой из этих периодических траекторий на базу является гомеоморфизмом.

Напомним, что поток надстройки является потоком Морса—Смейла. Все его периодические траектории гиперболические, а любая другая траектория стремится к одной из этих периодических при $t \to \pm\infty$. Конструкция неавтономной надстройки (см. пункт 7.1) дает периодическое векторное поле на S^3, которое обозначим v_P. Это поле имеет в точности четыре периодические интегральные кривые, обладающие экспоненциальной дихотомией решений на $\mathbb{R}$ (т. е. они являются h-кривыми). Типы их дихотомии различны: две вполне устойчивые периодические траектории дают две вполне устойчивые ИК, тип их дихотомии $(3, 0)$ (при этом размерность устойчивого многообразия соответствующей интегральной кривой равна 4). Седловая периодическая траектория в S^3_f приводит к седловой ИК поля v_P с дихотомией типа $(2, 1)$, а вполне неустойчивая периодическая траектория дает вполне неустойчивую ИК с дихотомией типа $(0, 3)$. Все остальные ИК стремятся к этим четырем ИК при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. Таким образом, любая такая интегральная кривая обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ в зависимости от типа той периодической ИК, к которой она стремится. В силу конструкции очевидно, что предположения 3.1–3.4, характеризующие градиентно-подобность неавтономного векторного поля, выполняются для поля v_P автоматически. Выполнение предположения 3.5 следует из существования равномерных непересекающихся окрестностей U_j четырех h-кривых, $j = \overline{1, 4}$ таких, чтобы время перехода с одной компоненты границы множества $M \times \mathbb{R} \setminus \cup_j U_j$ на ее другую компоненту было ограничено сверху и снизу положительными постоянными, не зависящими от выбора ИК.

Теперь напомним, что диффеоморфизм f имеет одномерное неустойчивое многообразие $W^u(\sigma)$ седловой неподвижной точки σ. Для потока надстройки в $S^3 \times S^1$ мы получаем двумерное гладкое неустойчивое многообразие $W^u(\gamma_\sigma)$ седловой периодической траектории γ_σ. Многообразие $W^u(\gamma_\sigma)$ есть прямое произведение $W^u(\sigma) \times S^1$, это следует из конструкции надстройки. Если замыкание одной из двух неустойчивых сепаратрис точки σ дико вложено в S^3 (см. выше), то замыкание одной из связных компонент $W^u(\gamma_\sigma) \setminus \gamma_\sigma$ есть дико вложенная поверхность $S^3 \times S^1$. Предположим для определенности, что сток ω_2 является ω-предельным множеством для всех траекторий на дико вложенной сепаратрисе седла σ. Следующее пояснение характеризует это дикое вложение. Выберем гладкий 3-диск D, трансверсальный периодической траектории γ_{ω_2} в некоторой ее точке. Тогда дико вложенная компонента пересекает этот диск вдоль гладкого луча с граничной точкой $D \cap \gamma_{\omega_2}$, являющейся точкой дикости. Структура прямого произведения дает периодическую траекторию γ_{ω_2} с примыкающим к ней дико вложенным неустойчивым многообразием. Аналогично, выбирая трехмерный гладкий открытый диск D, трансверсальный вполне неустойчивой периодической траектории γ_α, получаем в D пересечение $D \cap W^s(\gamma_\sigma)$, т. е. открытое кольцо, замыкание одной из границ которого является диким в точке $D \cap \gamma_\alpha$ (см. выше). Структура прямого произведения дает вполне неустойчивую периодическую траекторию γ_α и примыкающую к нему устойчивое многообразие $W^s(\gamma_\sigma)$ с диким вложением вдоль γ_α. Более подробно аналогичный факт доказан в [37] с привлечением результатов из [23]. Теперь, применяя конструкцию неавтономной надстройки, получаем следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Существует гладкое периодическое векторное поле v_P на S^3, которое является градиентно-подобным, имеет в точности четыре периодические h-кривые, обладающие экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}$: вполне неустойчивую (типа $(0, 3)$), одну седловую типа $(2, 1)$ и две вполне устойчивые типа $(3, 0)$. Остальные интегральные кривые стремятся к этим h-кривым при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. Кроме того, замыкания 2-мерного неустойчивого и 3-мерного устойчивого многообразия седловой периодической ИК являются дико вложенными.*

Как упоминалось выше, существует счетное множество топологически не сопряженных диффеоморфизмов из класса Пикстона. Из конструкции неавтономной надстройки следует, что существует счетное множество топологически не эквивалентных периодических векторных полей на S^3. Тем не менее, описанная выше простая структура слоения F_{v_P} позволяет сформулировать гипотезу.

Теорема 9.2. *Векторное поле v_P структурно устойчиво в смысле определения* 1.2.

В силу теоремы 9.2 при достаточно малом возмущении поля v_P его равномерная структура сохраняется, но, в зависимости от выбранного возмущения, возмущенное векторное поле может стать почти периодическим или даже не рекуррентным по времени.

10. Вариации на тему Пикстона

Покажем здесь, как, используя близкие идеи, можно строить другие неавтономные непериодические градиентно-подобные векторные поля на S^3. Сначала представим явным образом оба комплекса (s- и u-) для периодического поля Пикстона v_P. Его s-комплекс состоит из двух 3-клеток, одной 2-клетки и одной 0-клетки, причем замыкание 2-клетки имеет точку дикости в 0-клетке. Его u-комплекс состоит из одной 3-клетки, одной 1-клетки и двух 0-клеток, причем замыкание 1-клетки имеет точку дикости в одной из 0-клеток.

Для построения других (не периодических) неавтономных векторных полей, используя периодическое поле Пикстона, мы рассмотрим сначала поле v_P для $t \geqslant T > 0$. Тогда на сечении $t = T$ слои его устойчивых многообразий образуют s-комплекс поля Пикстона. При $t \leqslant -T$ мы рассмотрим векторное поле $-v_P$, тогда на сечении $t = -T$ мы получим разбиение на следы неустойчивых многообразий — неустойчивые слои, т. е. u-комплекс, совпадающий с s-комплексом поля Пикстона. Теперь два векторных поля $v_P(T)$ и $-v_P(-T)$ нужно соединить гладкой кривой в пространстве $V^1(S^3)$ так, чтобы склеенное неавтономное векторное поле v_1 было градиентно-подобно. Поскольку $V^1(S^3)$ — банахово пространство, две его любые точки можно соединить кривой (например, отрезком). Однако нужно обеспечить, чтобы полученное поле v_1 было градиентно-подобным. В частности, двумерная клетка s-комплекса при продолжении назад по времени до $t = 0$ и двумерная клетка u-комплекса при продолжении вперед по времени до $t = 0$ должны пересекаться трансверсально (например, по замкнутой кривой), а предельная точка устойчивого двумерного слоя (через которую проходит вполне неустойчивая ИК) должна лежать в одном из двух неустойчивых 3-мерных слоев. Также, продолжение вперед по времени до $t = 0$ интегральной кривой, соответствующей нульмерному неустойчивому слою, должно принадлежать трехмерному устойчивому слою. Построение кривой, соединяющей $v_P(T)$ и $-v_P(-T)$, с нужными свойствами можно осуществить с помощью построения соответствующего семейства диффеоморфизмов сферы S^3, осуществляющих нужный сдвиг двумерных слоев.

Другое неавтономное градиентно-подобное векторное поле v_2, использующее периодическое поле Пикстона, можно построить на основе его u-комплекса. Для этого нужно взять при $t \leqslant -T$ поле v_P, а при $t \geqslant T$ — поле $-v_P$, и соединить их между сечениями $t = -T$, $t = T$ нужным семейством векторных полей так, чтобы получилось неавтономное векторное поле v_2, у которого не пересекаются 1-мерный устойчивый слой поля $-v_P$ при его продолжении назад по времени в силу склеенного поля с $t = T$ до $t = 0$ и продолжение вперед по времени в силу склеенного поля с $t = -T$ до $t = 0$ неустойчивого 1-мерного слоя поля v_P.

Структуры построенных неавтономных векторных полей v_1, v_2 в силу их конструкции таковы, что они являются градиентно-подобными, а их D-графы различны, т. е. они не являются равномерно эквивалентными. Также они являются структурно-устойчивыми, хотя это утверждение также пока следует рассматривать как гипотезу.

11. Структура слоения $\mathcal{F}_v$ для почти периодических градиентно-подобных векторных полей v

В этом разделе мы уточним структуру слоения $\mathcal{F}_v$ для классического случая неавтономных векторных полей v, почти периодически зависящих от времени [8, 22]. В этом случае, кроме исследования структуры слоения $\mathcal{F}_v$ векторного поля v, удается показать существование почти периодических решений поля v, как в классических теоремах Америо, Фавара и др. [13, 24], но используя другие идеи.

Почти периодичность такого НВП определяется стандартным образом как почти периодичность отображения $v : \mathbb{R} \to V^k(M)$, см. [22]. Решение $x : \mathbb{R} \to M$ векторного поля v называется *почти периодическим* (по Бохнеру [16]), если множество сдвигов $\{x(t+s)\}$, $s \in \mathbb{R}$, предкомпактно в топологии равномерной сходимости таких отображений на всем $\mathbb{R}$. Замыкание $\overline{\{x(t)\}_{t\in\mathbb{R}}}$ почти периодического решения может быть нетривиально гомотопически вложенным множеством в M.

Сформулируем соответствующие результаты для слоения $\mathcal{F}_v$ для случаев, когда размерность многообразия M равна 1 и 2.

Рассмотрим неавтономное скалярное градиентно-подобное дифференциальное уравнение на окружности $M = S^1$, равномерно почти периодически зависящее от времени. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 11.1. *Если градиентно-подобное скалярное уравнение на S^1 равномерно почти периодично, то число вполне устойчивых ИК равно числу вполне неустойчивых ИК. Более того, каждое устойчивое (неустойчивое) многообразие содержит единственную почти периодическую ИК, являющуюся h-кривой. При обходе окружности S^1_0 следы устойчивых и неустойчивых почти периодических интегральных кривых чередуются. Любая другая интегральная кривая стремится при $t \to +\infty$ к устойчивой почти периодической интегральной кривой, а при $t \to -\infty$ — к соседней неустойчивой почти периодической интегральной кривой.*

Замечание 11.1. Как следует из предыдущей теоремы, слоение $\mathcal{F}_v$ скалярного почти периодического градиентно-подобного векторного поля имеет такой же D-инвариант, как D-инвариант некоторого скалярного периодического градиентно-подобного поля. В силу теоремы 4.1, почти периодическое градиентно-подобное векторное поле равномерно эквивалентно периодическому градиентно-подобному векторному полю.

Теперь рассмотрим градиентно-подобное почти периодическое неавтономное векторное поле v на двумерной замкнутой поверхности M. Структурная устойчивость такого v и его почти периодичность по времени позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 11.2. *Пусть v — неавтономное почти периодическое градиентно-подобное векторное поле на замкнутой поверхности M. Тогда интегральные кривые, соответствующие вершинам D-графа, являются почти периодическими вполне устойчивыми или вполне неустойчивыми h-кривыми, в зависимости от типа соответствующей вершины D-графа. Более того, s-подграф и u-подграф графа D-графа двойственны друг другу: каждая двумерная клетка s-комплекса содержит ровно одну неустойчивую вершину u-комплекса и наоборот. Каждое ребро s-подграфа может пересекаться не более чем с одним ребром u-подграфа. Если такое пересечение двух ребер существует, то интегральная кривая, соответствующая этому пересечению, является почти периодической (седловой) h-кривой с типом дихотомии $(1, 1)$. D-граф почти периодического градиентно-подобного векторного поля эквивалентен D-графу некоторого периодического градиентного векторного поля на M, т. е. почти периодическое градиентно-подобное векторное поле на M равномерно эквивалентно некоторому периодическому градиентно-подобному векторному полю.*

В случае периодического векторного поля v класса Пикстона на трехмерной сфере оно, по теореме 1.2, структурно устойчиво относительно малых равномерных возмущений вида $v + \varepsilon v_1$, задаваемых ограниченным равномерно непрерывным отображением $v_1 : \mathbb{R} \to V^r(S^3)$ в банахово пространство $V^r(S^3)$, $r \geqslant 1$. В частности, такое возмущение может быть выбрано почти периодическим. В этом случае, поскольку любая из четырех периодических ИК обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}$ (различных типов), возмущенное почти периодическое векторное поле будет иметь в малой равномерной окрестности каждой ИК почти периодическую ИК того же типа дихотомии. Более того, возмущенное векторное поле будет градиентно-подобным, и любая из его ИК будет стремиться к одной из четырех почти периодических ИК и обладать экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}_{\pm}$. Выбрав возмущение малым, но не рекуррентным по времени, мы получим векторное поле с такой же структурой слоения, но особые ИК будут не рекуррентны.

Благодарности. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 22-11-00027), кроме раздела 11, поддержанного Министерством науки и высшего образования (грант 0729-2020-0036), и раздела 7, выполненного в лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ Министерства науки высшего образования РФ (соглашение 075-15-2022-1101).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М., Фомин С. В.* Михаил Валерьевич Бебутов// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 3. — С. 237–239.

2. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*. — С. 3–210.
3. *Вайнштейн А. Г., Лерман Л. М.* Неавтономные надстройки над диффеоморфизмами и геометрия близости// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*, № 5. — С. 231–232.
4. *Вайнштейн А. Г., Лерман Л. М.* Равномерные структуры и эквивалентность диффеоморфизмов// Мат. заметки. — 1978. — *23*, № 5. — С. 739–752.
5. *Гринес В. З., Лерман Л. М.* Неавтономные векторные поля на S^3: простая динамика и дикое вложение сепаратрис// Теор. мат. физ. — 2022. — *212*, № 1. — С. 15–32.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференицальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
8. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
9. *Лерман Л. М.* О неавтономных динамических системах типа Морса—Смейла// Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Горький: Горьк. гос. ун-т, 1975.
10. *Лерман Л. М., Шильников Л. П.* О классификации грубых неавтономных систем с конечным числом ячеек// Докл. АН СССР. — 1973. — *209*, № 3. — С. 544–547.
11. *Морозов А. Д., Морозов К. Е.* Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере// Нелин. динамика. — 2015. — *11*, № 3. — С. 447–457.
12. *Akhmet'ev P. M., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2021. — *20*. — 76.
13. *Amerio L.* Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati// Ann. Mat. Pura Appl. — 1955. — *39*. — С. 97–119.
14. *Artin E., Fox R.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — С. 979–990.
15. *Barreira L., Valls C.* Stability of nonautonomous differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2008.
16. *Bochner S.* Sur les fonctions presque périodiques de Bohr// C. R. — 1925. — *180*. — С. 1156–1158.
17. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*, № 4. — С. 579–602.
18. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — *43*. — С. 369–391.
19. *Bonatti C., Grines V. Z., Pochinka O.* Topological classification of Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Duke Math. J. — 2019. — *168*, № 13. — С. 2507–2558.
20. *Cerf J.* Sur les difféomorphismes de la sphére de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$). — Berlin: Springer, 1968.
21. *Coppel W. A.* Stability and asymptotic behavior of differential equations. — Boston: D.C. Heath and Company, 1965.
22. *Corduneanu C.* Almost periodic oscillations and waves. — New York: Springer, 2009.
23. *Daverman R. J., Venema G. A.* Embedding in manifolds. — Providence: AMS, 2009.
24. *Favard J.* Sur les eq́uations differentielles á coefficients presqu-periodiques// Acta Math. — 1927. — *51*. — С. 31–81.
25. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions// Nonlinearity. — 2008. — *21*, № 5. — С. 923–972.
26. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2-and 3-manifolds. — Cham: Springer, 2016.
27. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — *79*. — С. 12–34.
28. *Lerman L. M., Gubina E. V.* Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2020. — *13*, № 4. — С. 1341–1367.
29. *Lerman L. M., Shilnikov L. P.* Homoclinical structures in nonautonomous systems: nonautonomous chaos// Chaos. — 1992. — *2*, № 3. — С. 447–454.
30. *Marcus L.* Asymptotically autonomous differential equations// В сб.: «Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. III». — Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. — С. 17–29.
31. *Massera J. L., Schäffer J. J.* Linear differential equations and function spaces. — New York—London: Academic Press, 1966.
32. *Mazur B.* A note on some contractible 4-manifolds// Ann. Math. — 1961. — *73*, № 1. — С. 221–228.
33. *Mosovsky B. A., Meiss J. D.* Transport in transitory dynamical systems// SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2011. — *10*, № 1. — С. 35–65.

34. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964.
35. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen// Math. Z. — 1930. — *32.* — C. 703–728.
36. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*, № 2. — C. 167–172.
37. *Pochinka O., Shubin D.* On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit// Appl. Math. Nonlinear Sci. Ser. — 2020. — *5*, № 2. — C. 261–266.
38. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1967. — *127.* — C. 241–262.
39. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1967. — *127.* — C. 263–283.
40. *Smale S.* Morse inequality for a dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66.* — C. 43–49.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород, Россия
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Л. М. Лерман
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород, Россия
E-mail: `lermanl@mm.unn.ru`

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620
UDC 517.9

Nonautonomous dynamics: classification, invariants, and implementation

V. Z. Grines and L. M. Lerman

National Research University "Higher School of Economics," Nizhniy Novgorod, Russia

The work is a brief review of the results obtained in nonautonomous dynamics based on the concept of uniform equivalence of nonautonomous systems. This approach to the study of nonautonomous systems was proposed in [10] and further developed in the works of the second author, and recently — jointly by both authors. Such an approach seems to be fruitful and promising, since it allows one to develop a nonautonomous analogue of the theory of dynamical systems for the indicated classes of systems and give a classification of some natural classes of nonautonomous systems using combinatorial type invariants. We show this for classes of nonautonomous gradient-like vector fields on closed manifolds of dimensions one, two, and three. In the latter case, a new equivalence invariant appears, the wild embedding type for stable and unstable manifolds [14,17], as shown in a recent paper by the authors [5].

Keywords: nonautonomous dynamics, nonautonomous vector field, gradient-like vector field, uniform equivalence, wild embedding

For citation: V. Z. Grines, L. M. Lerman, "Nonautonomous dynamics: classification, invariants, and implementation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 596–620. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620`

REFERENCES

1. V. M. Alekseev and S. V. Fomin, "Mikhail Valer'evich Bebutov" [Mikhail Valerievich Bebutov], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, № 3, 237–239 (in Russian).
2. D. V. Anosov, "Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Moscow Inst. Phys. Tech.], 1967, **90**, 3–210 (in Russian).
3. A. G. Vainshtein and L. M. Lerman, "Neavtonomnye nadstroyki nad diffeomorfizmami i geometriya blizosti" [Nonautonomous extensions over diffeomorphisms and proximity geometry], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1976, **31**, № 5, 231–232 (in Russian).
4. A. G. Vainshtein and L. M. Lerman, "Ravnomernye struktury i ekvivalentnost' diffeomorfizmov" [Uniform structures and equivalence of diffeomorphisms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1978, **23**, № 5, 739–752 (in Russian).
5. V. Z. Grines and L. M. Lerman, "Neavtonomnye vektornye polya na S^3: prostaya dinamika i dikoe vlozhenie separatris" [Nonautonomous vector fields on S^3: simple dynamics and wild separatrix embedding], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **212**, № 1, 15–32 (in Russian).
6. Yu. L. Daletskiy and M. G. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differenitsal'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. B. P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
8. B. M. Levitan and V. V. Zhikov, *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost Periodic Functions and Differential Equations], MSU, Moscow, 1978 (in Russian).
9. L. M. Lerman, *O neavtonomnykh dinamicheskikh sistemakh tipa Morsa—Smeyla* [On Nonautonomous Dynamical Systems of the Morse–Smale Type], Thesis, Gor'k. Gos. Univ., Gor'kiy, 1975.
10. L. M. Lerman and L. P. Shil'nikov, "O klassifikatsii grubykh neavtonomnykh sistem s konechnym chislom yacheek" [On the classification of rough nonautonomous systems with a finite number of cells], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1973, **209**, № 3, 544–547 (in Russian).
11. A. D. Morozov and K. E. Morozov, "Tranzitornyy sdvig v zadache o flattere" [Transitory shift in the flutter problem], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2015, **11**, № 3, 447–457 (in Russian).
12. P. M. Akhmet'ev, T. V. Medvedev, and O. V. Pochinka, "On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms," *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2021, **20**, 76.
13. L. Amerio, "Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati," *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1955, **39**, 97–119.
14. E. Artin and R. Fox, "Some wild cells and spheres in three-dimensional space," *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
15. L. Barreira and C. Valls, *Stability of Nonautonomous Differential Equations*, Springer, Berlin—Heidelberg, 2008.
16. S. Bochner, "Sur les fonctions presque périodiques de Bohr," *C. R.*, 1925, **180**, 1156–1158.
17. Ch. Bonatti and V. Grines, "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3," *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, № 4, 579–602.
18. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds," *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
19. C. Bonatti, V. Z. Grines, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds," *Duke Math. J.*, 2019, **168**, № 13, 2507–2558.
20. J. Cerf, *Sur les Difféomorphismes de la Sphére de Dimension Trois ($\Gamma_4 = 0$)*, Springer, Berlin, 1968.
21. W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Company, Boston, 1965.
22. C. Corduneanu, *Almost Periodic Oscillations and Waves*, Springer, New York, 2009.
23. R. J. Daverman and G. A. Venema, *Embedding in Manifolds*, AMS, Providence, 2009.
24. J. Favard, "Sur les eq́uations differentielles á coefficients presqu-periodiques," *Acta Math.*, 1927, **51**, 31–81.
25. S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, and D. V. Turaev, "On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions," *Nonlinearity*, 2008, **21**, № 5, 923–972.
26. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2-and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
27. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, "A characterization of tame curves in three-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
28. L. M. Lerman and E. V. Gubina, "Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.*, 2020, **13**, № 4, 1341–1367.

29. L. M. Lerman and L. P. Shilnikov, “Homoclinical structures in nonautonomous systems: nonautonomous chaos,” *Chaos*, 1992, **2**, № 3, 447–454.
30. L. Marcus, “Asymptotically autonomous differential equations,” In: *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. III*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956, pp. 17–29.
31. J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York—London, 1966.
32. B. Mazur, “A note on some contractible 4-manifolds,” *Ann. Math.*, 1961, **73**, № 1, 221–228.
33. B. A. Mosovsky and J. D. Meiss, “Transport in transitory dynamical systems,” *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2011, **10**, № 1, 35–65.
34. M. H. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
35. O. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen,” *Math. Z.*, 1930, **32**, 703–728.
36. D. Pixton, “Wild unstable manifolds,” *Topology.* , 1977, **16**, № 2, 167–172.
37. O. Pochinka and D. Shubin, “On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit,” *Appl. Math. Nonlinear Sci. Ser.*, 2020, **5**, № 2, 261–266.
38. G. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **127**, 241–262.
39. G. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **127**, 263–283.
40. S. Smale, “Morse inequality for a dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.

V. Z. Grines
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

L. M. Lerman
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: `lermanl@mm.unn.ru`