Математические заметки

Том 113 выпуск 2 февраль 2023

УДК 517.95

Конечномерная редукция систем нелинейных диффузионных уравнений

А. В. Романов

Мы предъявляем класс одномерных систем нелинейных параболических уравнений, для которых фазовая динамика при большом времени может быть описана ОДУ с липшицевым векторным полем в $\mathbb{R}^n$. В рассматриваемом случае краевой задачи Дирихле достаточные условия конечномерной редукции оказываются существенно шире известных условий такого рода для периодической ситуации.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения, конечномерная динамика на аттракторе, инерциальное многообразие.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13616

1. Введение. Одна из главных задач при изучении эволюционных уравнений связана с описанием финального (при большом времени) поведения их решений. Мы рассматриваем системы диффузионных уравнений с краевым условием Дирихле

$$\partial_t u = D\,\partial_{xx} u + f(x,u)\,\partial_x u + g(x,u), \qquad u(0)=u(1)=0 \tag{1.1}$$

на промежутке $J=[0,1]$. Здесь $u=(u_1,\dots,u_m)$, а f и g – достаточно регулярные матрица-функция и вектор-функция соответственно. Числовую матрицу коэффициентов D предполагаем подобной диагональной с положительными собственными значениями. В случае $D=\operatorname{diag}\{d_1,\dots,d_m\}$ с $d_j>0$ речь идет об уравнениях рекции-диффузии-конвекции. При подходящих условиях на f, g система (1.1) индуцирует гладкий диссипативный полупоток $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ в фазовом пространстве $X^\alpha \subset C^1(J,\mathbb{R}^m)$ с подходящим $\alpha>0$, где $\{X^\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ – гильбертова полушкала [1], порожденная линейным секториальным оператором $u\to -Du_{xx}$ в $X=L^2(J,\mathbb{R}^m)$. В этой ситуации существует глобальный аттрактор [2]–[4] (далее, просто аттрактор) – связное, компактное, инвариантное множество $\mathscr{A}\subset X^\alpha$ конечной размерности Хаусдорфа, равномерно притягивающее ограниченные подмножества X^α при $t\to+\infty$.

Наша цель – найти условия, при которых динамика на аттракторе (финальная динамика) параболической системы (1.1) конечномерна в смысле [5]. Это означает, что для некоторого ОДУ $\partial_t\xi = h(\xi)$ в $\mathbb{R}^N$ с липшицевым векторным полем h, разрешающим потоком $\{\Theta_t\}$ и инвариантным компактом $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}^N$ фазовые полупотоки $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ на $\mathscr{A}$ и $\{\Theta_t\}_{t\geqslant 0}$ на $\mathscr{K}$ липшиц-сопряжены. В данной связи можно говорить [6] о конечномерной редукции эволюционной задачи (1.1).

Главный результат статьи (теорема 4.3) обеспечивает конечномерность финальной фазовой динамики системы (1.1) при *условии согласования*

$$Df(x,u) = f(x,u)D, \qquad (x,u) \in J \times \operatorname{co}\mathscr{A}, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{co}\mathscr{A}$ – выпуклая оболочка $\mathscr{A}$.

Известно [7], что в случае скалярной диффузии ($D = dE$ с единичной матрицей E) и достаточно регулярных $f = f(u)$, $g = g(u)$ существует инерциальное многообразие (ИМ) – конечномерная инвариантная C^1-поверхность в фазовом пространстве, содержащая аттрактор и экспоненциально притягивающая (с асимптотической фазой) все траектории системы при $t \to +\infty$. Наличие ИМ влечет конечномерность финальной динамики; вопросам существования таких многообразий посвящена обширная литература (см., например, [3], [4], [6], [8]). Оригинальный подход к данной тематике представлен в недавних работах Аникушина (см. [9] и ссылки там).

Для периодического случая (J – окружность длины 1) условия, обеспечивающие конечномерность финальной динамики систем (1.1) с $D = \operatorname{diag}$ получены в работе автора [10; с. 13409]. Отметим, что в классе периодических систем (1.1) со скалярной диффузией построен [11; теорема 1.2] первый пример полулинейного параболического уравнения математической физики, не демонстрирующего подобную динамику.

2. Предварительные сведения. В дальнейшем изложении будем при необходимости использовать технику [10]. Все предварительные построения пп. 2, 3 проводятся для случая $D = \operatorname{diag}$. Запишем систему (1.1) в виде полулинейного параболического уравнения (ППУ)

$$\partial_t u = -Au + F(u) \tag{2.1}$$

в *вещественном* гильбертовом пространстве $X = L^2(J, \mathbb{R}^m)$ с нормой $\|\cdot\|$. Здесь $A\colon u \to -Du_{xx}$ с граничным условием Дирихле и нелинейность $F\colon u \to f(x,u)\,\partial_x u + g(u)$. Для линейного положительно определенного оператора A полагаем $X^\alpha = \mathscr{D}(A^\alpha)$ с $\alpha \geqslant 0$ и $X_0 = X$, тогда $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|$. Скажем, что функция F принадлежит *классу* $W^2(X^\alpha, X)$, если

$$F \in C^2(X^\alpha, X) \cap \operatorname{Lip}(X^\alpha, X) \qquad \text{и} \qquad \|F(u)\| \leqslant M \qquad \text{для } u \in X^\alpha \tag{2.2}$$

при некотором $\alpha \in [0,1)$. В этом случае ППУ (2.1) порождает [1] гладкий компактный разрешающий полупоток $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ в фазовом пространстве X^α. Предположение (2.2) влечет [8; лемма 1.1] X^α-диссипативность (2.1):

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\Phi_t u\|_\alpha \leqslant r$$

для некоторого $r > 0$ равномерно по $u \in$ шарам в X^α. В этих условиях существует [2]–[4] компактный аттрактор $\mathscr{A} \subset X^\alpha$, состоящий из всех ограниченных полных траекторий $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset X^\alpha$. Фактически $\mathscr{A} \subset X^1$ благодаря *сглаживающему действию* параболического уравнения [3]. Простые рассуждения [10; с. 13410] показывают, что во всех построениях, связанных с ППУ (2.1), можно заменять показатель нелинейности α любым значением $\alpha_1 \in (\alpha, 1)$, а если условие (2.2) справедливо в паре пространств $(X^\theta, X^{\theta+\alpha})$ с $\theta > 0$ вместо (X, X^α), то все перечисленные свойства динамики сохраняются для фазового пространства $X^{\theta+\alpha}$. В дальнейшем изложении будут возникать функции $Y_1 \to Y_2$ класса (2.2) для тех или иных пространств Банаха Y_1, Y_2.

Как и в [10], мы будем использовать достаточные условия финальной конечномерности динамики [12]. Пусть $G(u) = F(u) - Au$ векторное поле (2.1), $\mathscr{N} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$ и Y – пространство Банаха.

Определение 2.1 [12]. Непрерывное поле $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$ называем *регулярным*, если для любых $u, v \in \mathscr{A}$ функция $\Pi(\Phi_t u, \Phi_t v)\colon [0, +\infty) \to Y$ – класса C^1 с равномерно ограниченной по $(u, v) \in \mathscr{N}$ производной в нуле $\partial_t \Pi(u, v)$.

Гладкость полупотока $\{\Phi_t\}$ и инвариантность компакта $\mathscr{A} \subset X^\alpha$ влечет регулярность тождественного вложения $\mathscr{N} \to X^\alpha \times X^\alpha$, а значит, и регулярность всякого поля $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$, продолжимого до C^1-отображения в $(X^\alpha \times X^\alpha)$-окрестность множества $\mathscr{N}$. В этой ситуации $\partial_t \Pi(u, v) = \Pi'(u, v)(G(u), G(v))$, где $(\,\cdot\,)'$ – дифференцирование Фреше. При условии (2.2) на нелинейность F функция $u \to G(u)$ на $\mathscr{A}$ непрерывна и даже гёльдерова [5] в X^α-метрике. Регулярные поля $\mathscr{N} \to Y$ образуют линейную структуру, а также и мультипликативную, если Y – банахова алгебра. В последнем случае, если все элементы $\Pi(u, v) \in Y$ обратимы, то регулярным оказывается и поле Π^{-1}.

Исходим из декомпозиции

$$G(u) - G(v) = (T_0(u, v) - T(u, v))(u - v), \qquad (u, v) \in \mathscr{N}, \tag{2.3}$$

где $T_0 \in \mathscr{L}(X^\alpha)$, а $T \in \mathscr{L}(X^1, X)$ – неограниченные линейные операторы в X, подобные положительно определенным. Обозначим через

$$\Sigma_T = \bigcup_{u, v \in \mathscr{A}} \operatorname{spec} T(u, v)$$

совокупный спектр операторов T.

Нам понадобится частный случай [12; теорема 2.8] в ситуации $\Sigma_T \subset \mathbb{R}^+$.

Теорема 2.2. *Допустим, что* $F \in W^2(X^\alpha, X)$ *и*

$$T(u, v) = S^{-1}(u, v) H(u, v) S(u, v) \tag{2.4}$$

на $\mathscr{N}$, *где неограниченные самосопряженные линейные операторы* $H(u, v)$ *положительно определены в* X, *поля* $S, S^{-1}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$ *и* $T_0\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ *регулярны, а поле* $T_0\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha)$ *ограниченно. Если при этом множество* $\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma_T$ *содержит интервалы* $(a_k - \xi_k, a_k + \xi_k)$ *с* $a_k > \xi_k > 0$ *такие, что*

$$\xi_k \to \infty, \qquad a_k^{\alpha/2} = o(\xi_k) \tag{2.5}$$

при $k \to +\infty$, *то финальная* X^α*-динамика* ППУ (2.1) *конечномерна.*

Считаем в дальнейшем, что матрица-функция $f = f(x, u)$ и вектор-функция $g = g(x, u)$ в (1.1) удовлетворяют следующим условиям регулярности.

Условие (H). *Функции* f, g *класса* C^∞ *на* $J \times \mathbb{R}^m$, *финитны по* u *и* $f(x,0) = g(x,0) = 0$ *для* $x = 0,1$.

Обозначаем через $\mathscr{H}^s = \mathscr{H}^s(J)$ обобщенные L^2-пространства Соболева (пространства бесселевых потенциалов [1], [13]) скалярных функций на J с произвольными $s \geqslant 0$. Если $s > 1/2$, то $\mathscr{H}^s \subset C(J)$ и $\mathscr{H}^s$ есть банахова алгебра [13; п. 2.8.3]. Оператор дифференцирования $\partial_x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}^{s+1}, \mathscr{H}^s)$. Фактически X^s – замкнутые подпространства (с эквивалентной нормой) в пространствах вектор-функций $\mathscr{H}^{2s}(J,\mathbb{R}^m)$, причем $X^s = \mathscr{H}^{2s}(J,\mathbb{R}^m)$ для $s \leqslant 1/4$. При $s > 1/4$ пространство X^s состоит из элементов $u \in \mathscr{H}^{2s}(J,\mathbb{R}^m)$ с $u(0) = u(1) = 0$.

Фиксируем теперь произвольное $\alpha \in (3/4, 1)$, тогда $\mathscr{H}^{2\alpha} \hookrightarrow C^1(J)$ и $X^\alpha \hookrightarrow C^1(J,\mathbb{R}^n)$, где символ $\hookrightarrow$ обозначает линейное непрерывное вложение функциональных пространств. Используем необходимые теоремы вложения [1], [13]. Для произвольной C^∞-функции $z\colon J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ отображение $\psi\colon u \to z(x,u)$ есть функция класса W^2 (см. (2.2)) из $C^s(J,\mathbb{R}^m)$ в $C^s(J)$ при всех $s \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\psi \in W^2(\mathscr{H}^{2\alpha}(J,\mathbb{R}^m), C^1(J))$. Используя вложения $\mathscr{H}^{s+1} \hookrightarrow C^s(J) \hookrightarrow \mathscr{H}^s$, можно заключить, что $\psi \in W^2(\mathscr{H}^s(J,\mathbb{R}^m), \mathscr{H}^s(J))$. Как видим, $F \in W^2(X^1, X^{1/2})$ для нелинейной части $F\colon u \to f(x,u)\,\partial_x u + g(u)$ системы (1.1). Кроме того, $X^\alpha \hookrightarrow C^1(J,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow C(J,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow X$, а значит, $F \in W^2(X^\alpha, X)$. Отметим еще, что $X^{3/2} \hookrightarrow C^2(J,\mathbb{R}^m)$.

Выбираем X^α в качестве фазового пространства системы (1.1). Действуя подобно [7], можно показать, что фазовая динамика (1.1) в X^α диссипативна и существует глобальный аттрактор $\mathscr{A} \subset X^\alpha$. Так как $F \in W^2(X^1, X^{1/2})$, то система (1.1) порождает гладкий диссипативный фазовый полупоток еще и в пространстве X^1, причем аттрактор $\mathscr{A}$ компактен в $X^{3/2}$. Как и выше, обозначаем $\mathscr{N} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

Замечание 2.3. Фазовая динамика системы (1.1) обладает следующим свойством: если Y – пространство Банаха, то всякое непрерывное в $(X^\alpha \times X^\alpha)$-метрике векторное поле $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$, продолжимое до C^1-отображения $X^1 \times X^1 \to Y$, регулярно в смысле определения 2.1.

Действительно, гладкость полупотока в X^1 означает гладкость отображения

$$(t,u) \to \Phi_t u\colon (0,+\infty) \times X^1 \to X^1.$$

Это обеспечивает регулярность тождественного вложения $\mathscr{N} \to X^1 \times X^1$, а значит, и регулярность поля Π на $\mathscr{N}$.

3. Декомпозиция векторного поля на аттракторе. Мы хотим применить теорему 2.2 к ППУ (1.1) с $D = \mathrm{diag}$ и фазовым пространоством $X^\alpha, \alpha \in (3/4, 1)$. Обозначаем через $\mathbb{M}^m$ алгебру числовых $(m \times m)$-матриц с евклидовой нормой и через $Y(J,\mathbb{M}^m)$ – линейные пространства таких матриц с элементами из того или иного банахова пространства Y скалярных функций на $J = [0,1]$. Действуя аналогично [10; с. 13412–13413], полагаем

$$B_0(x;u,v) = \int_0^1 (f_u(x,w(x))w_x(x) + g_u(x,w(x))\,d\tau, \tag{3.1}$$

$$B(x;u,v) = \int_0^1 f(x,w(x))\,d\tau \tag{3.2}$$

для $u,v \in X^\alpha$, $w(x) = \tau u(x) + (1-\tau)v(x)$, $x \in J$. Элементы матриц B_0, B – это непрерывные функции, а при $u,v \in \mathscr{A}$ – функции класса C^2 на J. Пользуясь C^1-гладкостью отображений $(u,v) \to f_u(x,w)w_x + g_u(x,w)$, $(u,v) \to f(x,w)$, $X^\alpha \times X^\alpha \to C(J,\mathbb{M}^m)$ при фиксированном $\tau \in [0,1]$ и дифференцируя в выражениях для B_0, B под знаком интеграла по параметру (u,v), заключаем, что отображения

$$(u,v) \to B_0(\,\cdot\,;u,v), \qquad (u,v) \to B(\,\cdot\,;u,v) \tag{3.3}$$

принадлежат классу $C^1(X^\alpha \times X^\alpha, C(J,\mathbb{M}^m))$. С помощью интегральной теоремы о среднем для нелинейных операторов запишем декомпозицию векторного поля (1.1) на аттракторе $\mathscr{A} \subset X^\alpha$ в виде

$$\begin{aligned} G(u) - G(v) &= -Ah + \biggl(\int_0^1 F'(\tau u + (1-\tau)v)\,d\tau\biggr)h \\ &= Dh_{xx} + B_0(x;u,v)h + B(x;u,v)h_x, \qquad u,v \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

где $h = u - v$, $\tau u + (1-\tau)v \in \operatorname{co}\mathscr{A}$ и $(\,\cdot\,)'$ – дифференцирование Фреше. Чтобы исключить зависимость от h_x, применим (следуя [14]) преобразование $h = U\eta$, где $(m\times m)$-матрица-функция $U(x) = U(x;u,v)$, $x \in [0,1]$, есть решение линейной задачи Коши

$$U_x = -\frac{1}{2}\,D^{-1}B(x)U, \qquad U(0) = E. \tag{3.4}$$

В результате получим соотношение (2.3) с линейными операторами

$$T_0(u,v)h = \biggl(B_0(x) - \frac{1}{2}\,B_x(x) - \frac{1}{4}\,B(x)D^{-1}B(x)\biggr)h, \tag{3.5}$$

$$T(u,v)h = -DU\,\partial_{xx}U^{-1}h. \tag{3.6}$$

Отметим, что при замене переменной $h = U\eta$ граничные условия Дирихле для линейной части (1.1) сохраняются. Часто опускаем в записях матриц B_0, B, U, U^{-1} зависимость от u, v, а иногда, и от x.

Лемма 3.1. *Поле операторов T_0 на $\mathscr{N}$ регулярно со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha, X)$ и ограничено со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha)$.*

Доказательство. Полагаем $T_0h = Q(x;u,v)h$ в (3.5) с $h \in \mathscr{A} - \mathscr{A} \subset X^\alpha$. Выпуклая оболочка аттрактора $\mathscr{A}$ ограничена в норме $X^{3/2}$ эквивалентной норме $\mathscr{H}^3(J,\mathbb{R}^m)$, следовательно, матрица-функции B, $BD^{-1}B$ и B_0 равномерно по $(u,v) \in \mathscr{N}$ ограничены в $\mathscr{H}^3(J,\mathbb{M}^m)$ и $\mathscr{H}^2(J,\mathbb{M}^m)$ соответственно. Таким образом, матрица-функции B_x и Q ограничены на $\mathscr{N}$ в норме $\mathscr{H}^2(J,\mathbb{M}^m)$ и T_0 – оператор умножения вектор-функций из $X^\alpha \subset \mathscr{H}^{2\alpha}(J,\mathbb{R}^m)$ на матрицу $Q \in \mathscr{H}^{2\alpha}(J,\mathbb{M}^m)$ с $2\alpha \in (3/2,2)$. Поскольку $\mathscr{H}^{2\alpha}(J)$ – банахова алгебра, находим, что $T_0(u,v) \in \mathscr{L}(X^\alpha)$ и $\|T_0(u,v)\|_\alpha \leqslant \mathrm{const}$ на $\mathscr{N}$.

С учетом замечания 2.3 и отмеченной выше гладкости отображений (3.3) регулярность поля операторов $T_0\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ устанавливается точно так же как для случая периодических граничных условий в [10; лемма 3.3].

Матрица-функцию $U(x)$ в задаче Коши (3.4) можно трактовать как ограниченный линейный оператор в X.

Лемма 3.2. *Поля операторов $U, U^{-1}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$ регулярны.*

Доказательство. Для поля U это устанавливается так же, как аналогичное утверждение в периодическом случае [10; лемма 3.4]. В то же время регулярность U влечет регулярность поля обратных операторов U^{-1}.

Пусть теперь $d_- = \min_{1\leqslant j\leqslant m} d_j$ и $d_+ = \max_{1\leqslant j\leqslant m} d_j$ для $D = \operatorname{diag}\{d_j\}$. Пусть еще $\{\lambda_n : \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\}$ – собственные числа линейного оператора $A = -D\,\partial_{xx}$. Поскольку

$$\operatorname{spec}(A) = \{d_j\pi^2\nu^2,\ \nu \in \mathbb{N},\ j \in 1,\dots,,m\}, \tag{3.7}$$

то $\lambda_n \leqslant \pi^2 d_+ n^2$. Используя считающую функцию для $\operatorname{spec}(A)$, находим, что

$$n \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi\sqrt{d_j}} \leqslant \frac{m}{\pi\sqrt{d_-}}\sqrt{\lambda_n}\,,$$

а значит,

$$\frac{\pi^2 d_-}{m^2}\, n^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \pi^2 d_+ n^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Лемма 3.3. *Справедлива оценка*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

Доказательство. Если, напротив, $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \beta_n n$ с $\beta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то

$$\begin{aligned} n^{-2}\lambda_n &= n^{-2}\biggl(\lambda_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\biggr) = n^{-2}\biggl(\lambda_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\beta_k k\biggr) \\ &\leqslant n^{-2}\biggl(\lambda_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\beta_k n\biggr) \leqslant n^{-2}\lambda_1 + n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\beta_k. \end{aligned}$$

Это однако влечет соотношение $\lambda_n = o(n^2)$, противоречащее левому неравенству в (3.8).

4. Основные результаты. Согласно предположеням теоремы 2.2 нужно установить для операторов $T(u,v)$ из соотношения (3.6) “равномерное” подобие положительно определенным вида (2.4), а также необходимую разреженность (2.5) их совокупного спектра Σ_T. Предполагаем выполнеными условия регулярности (H) для функций f, g в (1.1).

Теорема 4.1. *Если матрица $D = \operatorname{diag}\{d_j\}$ с $d_j > 0$ и справедливо условие согласования (1.2), то фазовая динамика на аттракторе конечномерна.*

Доказательство. Оператор $A = -D\,\partial_{xx}$ с условием Дирихле самосопряжен и положительно определен в X. Предположение (1.2) влечет (при любых $x \in J$ и $u, v \in \mathscr{A}$) равенство $DB(x) = B(x)D$ для матриц $B(x) = B(x; u, v)$ в (3.2). Таким образом, матрицы $B(x)$ и $D^{-1}B(x)$ наследуют блочную (относительно одинаковых d_j) структуру матрицы диффузии $D = \operatorname{diag}\{d_1,\dots,d_m\}$. Следовательно, это же верно и для решений $U(x)$ задачи Коши (3.4), а значит, $DU(x) = U(x)D$, $x \in J$, и

$$T(u,v) = U(u,v)(-D\,\partial_{xx})U^{-1}(u,v)$$

в (3.6). Тем самым, для $T(u,v)$ справедливо представление (2.4) с $S(u,v) = U^{-1}(u,v)$ и $H(u,v) \equiv A$. Совокупный спектр Σ_T совпадает со $\operatorname{spec}(A)$ в (3.7). По лемме 3.3 найдутся $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность индексов $n(k)$ такие, что $\lambda_{n(k)+1} - \lambda_{n(k)} > \varepsilon n(k)$ при $k \geqslant k_0$. Положим

$$a_k = \frac{\lambda_{n(k)+1} + \lambda_{n(k)}}{2}, \qquad \xi_k = \frac{\lambda_{n(k)+1} - \lambda_{n(k)}}{3}, \qquad M = \pi^2 d_+.$$

Из правого неравенства в (3.8) находим

$$a_k \leqslant M\left(n^2(k) + n(k) + \frac{1}{2}\right) \leqslant 3Mn^2(k) \leqslant \frac{3M}{\varepsilon^2}(\lambda_{n(k)+1} - \lambda_{n(k)})^2 \leqslant \frac{27M}{\varepsilon^2}\,\xi_k^2$$

при $k \geqslant k_0$, т.е. $a_k = O(\xi_k^2)$ при $k \to \infty$. Так как $a_k^{\alpha/2} = o(\xi_k)$ при $\alpha \in (3/4, 1)$ и $k \to \infty$, то искомое утверждение следует из лемм 3.1, 3.2 и теоремы 2.2.

Замечание 4.2. Параболические системы (1.1) с $D = \operatorname{diag}$ демонстрируют конечномерную динамику на аттракторе при любых допустимых нелинейностях f, g в случае скалярной диффузии, и при условии $f = \operatorname{diag}$ в случае m различных коэффициентов диффузии d_j. В случае s различных коффициентов диффузии с $1 < s < m$ динамика на аттракторе конечномерна при условии, что матрица-функция f наследует блочную (относительно одинаковых d_j) структуру матрицы $D = \operatorname{diag}\{d_j\}$.

Перейдем к формулировке главного результата. Считаем, что в системе (1.1) матрица $D = C\overline{D}C^{-1}$, где матрица C невырождена и $\overline{D} = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_m\}$ с $d_j > 0$. Линейный оператор $-D\,\partial_{xx} = -C(\overline{D}\,\partial_{xx})C^{-1}$ секториален в $X = L^2(J, \mathbb{R}^m)$. Линейная замена переменной $u = Cv$ сводит (1.1) к системе уравнений

$$\begin{gathered}\partial_t v = \overline{D}\,\partial_{xx}v + \overline{f}(x,v)\partial_x v + \overline{g}(x,v), \qquad v(0) = v(1) = 0,\\ \overline{f}(x,v) = C^{-1}f(x,Cv)C, \qquad \overline{g}(x,v) = C^{-1}g(x,Cv).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Матрица-функция $\overline{f}$ и вектор-функция $\overline{g}$ наследуют свойства регулярности (H) исходных функций f и g. Фазовые полупотоки систем (4.1) и (1.1) линейно сопряжены. Система уравнений (4.1) диссипативна в X^α, следовательно, это верно и для системы (1.1). Аттракторы $\mathscr{A}$ системы (1.1) и $\overline{\mathscr{A}}$ системы (4.1) связаны соотношением $\mathscr{A} = C\overline{\mathscr{A}}$. Согласно определению конечномерности финальной фазовой динамики (п. 1), системы (4.1) и (1.1) демонстрируют данное свойство одновременно.

Теорема 4.3 (основная). *Если матрица D подобна* $\operatorname{diag}\{d_j\}$ *с $d_j > 0$ и справедливо условие согласования* (1.2), *то финальная динамика системы* (1.1) *конечномерна.*

Доказательство. Так как $Df(x,u) = f(x,u)D$ на $J \times \operatorname{co}\mathscr{A}$, то

$$\begin{aligned}\overline{Df}(x,v) &= C^{-1}DC\cdot C^{-1}f(x,Cv)C = C^{-1}Df(x,u)C\\ &= C^{-1}f(x,u)DC = C^{-1}f(x,Cv)C\overline{D} = \overline{f}(x,v)\overline{D}\end{aligned}$$

на $J \times \operatorname{co}\overline{\mathscr{A}}$. Здесь $u \in \operatorname{co}\mathscr{A}$ и $v \in \overline{\mathscr{A}}$. Как видим, для матрица-функции $\overline{f}$ справедливо условие (1.2) и по теореме 4.1 динамика системы (4.1) на аттракторе $\overline{\mathscr{A}} \subset X^\alpha$ конечномерна. Отсюда следует и конечномерность динамики системы (1.1) на аттракторе $\mathscr{A} \subset X^\alpha$.

Замечание 4.4. При условии согласования (1.2) финальная динамика системы (1.1) конечномерна, если все собственные значения матрицы D различны и положительны. Условие (1.2) справедливо, в частности, для $f = D_1\varphi$, где числовая матрица D_1 коммутирует с D и $\varphi = \varphi(x, u)$ – гладкая финитная по u скалярная функция.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.

[2] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.

[3] R. Temam, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer, New York, 1997.

[4] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001.

[5] А. В. Романов, “Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 99–112.

[6] S. Zelik, “Inertial manifolds and finite-dimensional reduction for dissipative PDEs”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A*, **144**:6 (2014), 1245–1327.

[7] A. Kostianko, S. Zelik, “Inertial manifolds for 1D reaction-diffusion-advection systems. I. Dirichlet and Neumann boundary conditions”, *Comm. Pure Appl. Anal.*, **16**:6 (2017), 2357–2376.

[8] А. В. Романов, “Параболическое уравнение с нелокальной диффузией без гладкого инерциального многообразия”, *Матем. заметки*, **96**:4 (2014), 578–587.

[9] M. Anikushin, “Frequency theorem for parabolic equations and its relation to inertial manifolds theory”, *J. Math. Anal. Appl.*, **505**:1 (2022), Paper No. 125454.

[10] A. V. Romanov, “Final dynamics of systems of nonlinear parabolic equations on the circle”, *AIMS Math.*, **6**:12 (2021), 13407–13422.

[11] A. Kostianko, S. Zelik, “Inertial manifolds for 1D reaction-diffusion-advection systems. II. Periodic boundary conditions”, *Comm. Pure Appl. Anal.*, **17**:1 (2018), 285–317.

[12] А. В. Романов, “Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 129–152.

[13] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.

[14] Д. А. Камаев, “Семейства устойчивых многообразий инвариантных множеств систем параболических уравнений”, *УМН*, **47**:5 (287) (1992), 179–180.

А. В. Романов
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва;
Московский институт электроники и математики
им. А. Н. Тихонова
E-mail: av.romanov@hse.ru

Поступило
10.06.2022
Принято к публикации
10.09.2022