Содержание

Обозначения и терминология

В пособии используются следующие обозначения:

- $A \times B$ — прямое произведение множеств A, B: $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$;
- $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ — *n-мерное евклидово пространство* с заданной на нем *стандартной нормой* $\| x \| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ и метрикой $d(x,y) = \| x - y \|$.
- $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \| x \| \leqslant 1\}$ — единичный *n-шар (или n-диск)* в $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \| x \| = 1\}$ — единичная $(n-1)$-*сфера* .
- $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$ — *n-мерное комплексное пространство* , являющееся n-кратным декартовым произведением n комплексных плоскостей, с заданной на нем *стандартной нормой* $\| z \| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}}$ и метрикой $d(z, \tilde{z}) = \| z - \tilde{z} \|$.
- $\mathbb{R}P^2$ — вещественная проективная плоскость;
- $\mathbb{C}P^2$ — комплексная проективная плоскость.

Введение

Пусть M^n – связное замкнутое C^r-гладкое многообразие размерности $n \geq 1$, $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — C^r-гладкая функция, $r \geq 2$. Напомним, что точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* функции φ, если

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\Big|_p = \cdots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big|_p = 0$$

в локальных координатах в окрестности точки p. Точка $q \in M^n$, не являющаяся критической, называется *регулярной точкой* функции φ.

Критическая точка p функции φ называется *невырожденной*, если *матрица Гессе* $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ в этой точке невырождена. В силу симметричности матрица Гессе имеет только действительные собственные значения и является вырожденной тогда и только тогда, когда имеет нулевые собственные значения.

Функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

В силу леммы Морса (см. утверждение 6) в некоторой окрестности невырожденной критической точки p функции Морса существуют локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых эта функция имеет вид

$$f = f(p) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2,$$

где все коэффициенты $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ по модулю равны единице, а число отрицательных элементов из этого множества совпадает с числом отрицательных собственных значений матрицы Гессе. Это число называется *индексом критической точки p*. Заметим, что индекс точки максимума равен n, а индекс точки минимума равен 0.

Структура множества критических точек функции Морса тесно связана с топологией многообразия, на котором она задана. Так, из компактности многообразия M^n и теоремы Вейерштрасса (см. [1, Теорема 10, §13, Глава 2]) следует, что любая функция Морса $f : M^n \to \mathbb{R}$ имеет по крайней мере две критические точки, одна из которых является точкой минимума, а другая — точкой максимума. Если множество критических точек функции Морса f на многообразии M^n исчерпывается двумя точками, то это многообразие гомеоморфно сфере для любого натурального n (доказательство этого факта приводится в предложении 3). Для случая произвольной функции Морса Марстоном Морсом в работе [8] получены неравенства, соотносящие число критических точек этой функции различных индексов с числами Бетти. В частности, в этой работе доказано следующее соотношение:

$$c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^n c_n = \chi(M^n) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \cdots + (-1)^n \beta_n, \quad (1)$$

где c_i — число критических точек функции φ, имеющих индекс $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n. β_i — i-е число Бетти, равное количеству i-мерных клеток в клеточном разбиении M^n (см. определение 15).

В случае $n = 2$ из равенства (1) непосредственно вытекают следующие необходимые и достаточные условия существования функции Морса на двумерном многообразии.

Предложение 1. *Функция Морса f, множество критических точек которой состоит из m точек минимума и максимума и l седел, существует на ориентируемой (неориентируемой) поверхности M^2 рода g тогда и только тогда, когда $m - l = 2 - 2g$ $(m - l = 2 - g)$.*

Поскольку проективная плоскость является единственной (с точностью до диффеоморфизма) поверхностью, эйлерова характеристика которой равна единице, то из предложения 1 вытекает следующий факт: поверхность допускает функцию Морса, множество критических точек которой состоит в точности из трех точек тогда и только тогда, когда эта поверхность является вещественной проективной плоскостью. Многообразия более высокой размерности, допускающие такую функцию Морса, изучались Илсом и Кёйпером в [5]. Позднее такие многообразия стали называться *многообразиями Илса-Кёйпера.* В работе [5] доказаны следующие свойства таких многообразий и функций Морса.

Утверждение 1. *Пусть M^n — связное замкнутое многообразие размерности n, допускающее функцию Морса $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ ровно с тремя критическими точками. Тогда:*

1) $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;

2) критические точки функции φ имеют индексы $0, \frac{n}{2}, n$;

3) M^n является объединением непересекающихся открытого n-мерного шара и сферы размерности $\frac{n}{2}$;

4) M^2 диффеоморфно вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$;

5) в случае $n \geq 4$ многообразие M^n односвязно и ориентируемо, при этом M^4 имеет гомотопический тип комплексной проективной плоскости. При $n = 8$ (16) существует шесть (шестьдесят) гомотопических типов таких многообразий.

Из результатов работ [6], [7] следует, что при $n = 4$, как и в случае $n = 2$, существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) многообразие Илса-Кёйпера. Поскольку имеется пример функции Морса, заданной на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, и имеющей ровно три критические точки (мы приводим этот пример в разделе 3), то четырехмерное многообразие Илса-Кёйпера гомеоморфно $\mathbb{C}P^2$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть на многообразии M^4 существует функция Морса ровно с тремя критическими точками. Тогда M^4 гомеоморфно комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.*

Отметим, что единственость четырехмерного многообразия Илса-Кёйпера получена в работах [6], [7] как следствие доказанной в этих работах теоремы о единственности класса топологической эквивалентности градиентно-подобных потоков с замкнутым четырехмерным фазовым пространством, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состяний равновесия (к этом классу относится и градиентный поток функции Морса, имеющей ровно три критические точки). Настоящее пособие посвящено независимому топологическому доказательству этой теоремы.

1. Вспомогательные определения и факты

1.1. Гладкие многообразия и гладкие отображения

Напомним, что отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ может быть представлено набором координатных функций

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n).$$

Определение 1. *Отображение f называется гладким или дифференцируемым класса C^r, $r \geq 1$, в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если каждая функция f_k, $k = 1, \dots, m$ имеет все непрерывные частные производные до порядка r включительно. В этом случае пишут $f \in C^r$.*

Если каждая функция f_k, $k = 1, \dots, m$ непрерывна, то отображение f называют C^0-*отображением* в точке x_0 и пишут $f \in C^0$.

Для гладкого в точке x_0 отображения f матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

первых производных отображения f, вычисленных в точке x_0, называется *матрицей Якоби* отображения f в точке x_0 и обозначается $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{x_0}$. Ранг матрицы Якоби называется *рангом отображения f в точке x_0*. Если ранг отображения равен $\min\{n, m\}$, то отображение f называется *регулярным* в точке x_0. Если $m = n$, то можно вычислить определитель матрицы Якоби, который в этом случае называется *якобианом.*

Определение 2. *Пусть n — неотрицательное целое число. Хаусдорфово* *топологическое пространство X со счетной базой топологии называется топологическим многообразием размерности n, если каждая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому n-мерному шару*

$$int\ \mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}.$$

Заметим, что множество $int\ \mathbb{B}^n$ гомеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, так что с равным успехом можно потребовать, чтобы каждая точка имела окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. Число n называется размерностью многообразия и, очевидно, не зависит от выбора гомеоморфизмов. Пишут $\dim X = n$.

Все компактные связные нульмерные многообразия гомеоморфны точке. Окружность является единственным компактным связным одномерным многообразием. Замкнутые связные двумерные многообразия называются *поверхностями.*

Определение 3.

- *n-мерным многообразием с краем называется топологическое пространство X, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^n$, либо множеству $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\}$.*
- *Множество всех точек X, имеющих окрестности, гомеоморфные $\mathbb{R}^n_+$, но не имеющих окрестностей, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, называется краем многообразия X.*
- *Компактное многообразие без края называется замкнутым многообразием.*

Край n-многообразия X с краем является $(n-1)$-многообразием без края и обозначается ∂X.

Замечание 1. *Рассматриваемые в дальнейшем понятия, связанные с многообразиями, определяются для многообразий без края. Однако их без труда можно расширить на многообразия с краем.*

Из определения n-многообразия X следует, что у X есть открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ такое, что при каждом $j \in J$ существует отображение $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, гомеоморфно отображающее U_j на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Пара (U_j, ψ_j) называется *картой или локальной системой координат* с областью определения U_j; при этом координаты $x_1, \dots, x_n \in \psi_j(U_j)$ называются *локальными координатами.* Множество $\Phi = \{(U_j, \psi_j), j \in J\}$ всех карт называется *атласом.*

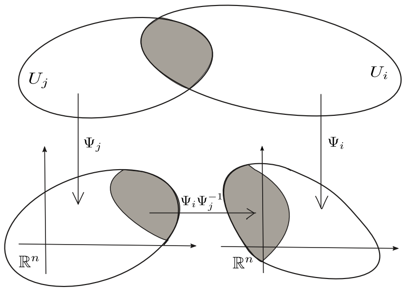

Рис. 1. Отображение перехода

Говорят, что две карты (U_j, ψ_j) и (U_i, ψ_i) многообразия X, для которых $U_j \cap U_i \neq \emptyset$, являются C^r*-согласованными* ($r \geq 0$), если *отображение перехода* $\psi_i\psi_j^{-1} : \psi_j(U_j \cap U_i) \to \psi_i(U_j \cap U_i)$ от одних координат к другим обладает гладкостью класса C^r и если $\psi_j\psi_i^{-1}$ также принадлежит классу C^r (см. рисунок 1).

Атлас Φ многообразия X называется C^r-гладким, $r \geq 0$, если любые две его карты имеют отображения перехода класса C^r. Для атласа Φ существует единственный максимальный C^r-атлас Ψ, содержащий Φ: он состоит из всех карт, C^r-согласованных с каждой картой атласа Φ.

Определение 4. *Максимальный C^r-атлас Ψ на многообразии X называется C^r-структурой. При $r \geq 1$ пара (X, Ψ) называется гладким многообразием класса C^r или C^r-многообразием.*

Чтобы задать дифференцируемую структуру класса C^r, достаточно указать любой C^r-атлас, который в ней содержится. Например, пространство $\mathbb{R}^n$ обладает единственной дифференцируемой структурой класса C^r, содержащей карту $(\mathbb{R}^n, id)$. Эту гладкую структуру будем называть стандартной гладкостью.

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение многообразий X, Y размерностей n, m, соответственно. Если $x \in U$ и $f(U) \subset V$ для карты (U, ψ) многообразия X и карты (V, φ) многообразия Y, то определено отображение $f_x = \varphi f \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(V)$, которое называется *локальным представлением f в точке x.*

Определение 5. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение C^r-многообразий*

- *f называется C^r-отображением ($f \in C^r(X, Y)$), если его локальное представление является таковым в каждой точке $x \in X$.*

- *f называется C^r-диффеоморфизмом, если f является гомеоморфизмом и $f \in C^r(X, Y)$, $f^{-1} \in C^r(Y, X)$. В этом случае X и Y называются C^r-диффеоморфными.*

Определение 6. *Гладкое многообразие X называется ориентируемым, если оно обладает атласом, в котором отображения переходов от одних координат к другим имеют положительные якобианы. В противном случае многообразие называется неориентируемым.*

Определение 7. *Диффеоморфизм $f : X \to Y$ гладких ориентируемых многообразий X и Y называется сохраняющим ориентацию, если f имеет положительный якобиан хотя бы в одной точке. В противном случае диффеоморфизм называется меняющим ориентацию.*

1.2. Примеры гладких и топологических многообразий

1.2.1. Каноническая гладкая структура на сфере $\mathbb{S}^n$

Рассмотрим важный пример задания гладкой структуры на сфере

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$

Обозначим через N, S точки в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами $N(0,\ldots,0,1)$, $S(0,\ldots,0,-1)$ и будем называть эти точки (*северным и южным полюсом сферы* $\mathbb{S}^n$ *соответственно*. Определим *стереографическую проекцию* $\vartheta_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом. Пусть $x \in (\mathbb{S}^n \setminus \{N\})$. Проведем в $\mathbb{R}^{n+1}$ прямую Nx через точки N и x до пересечения с плоскостью $Ox_1 \ldots x_n$. Точку пересечения будем считать образом $\vartheta_+(x)$ точки x (см. рисунок 2).

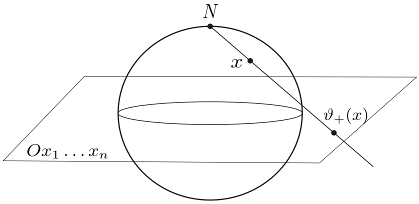

Рис. 2. Стереографическая проекция

Составив уравнение прямой Nx и найдя ее точку пересечения с плоскостью $Ox_1 \ldots x_n$, нетрудно получить для ϑ_+ точную формулу:

$$\vartheta_+(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\ldots,\frac{x_{n-1}}{1-x_{n+1}},\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right). \tag{2}$$

Сделав аналогичные построения относительно *южного полюса* S, мы получим еще одну стереографическую проекцию $\vartheta_- : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$, заданную формулой:

$$\vartheta_-(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\ldots,\frac{x_{n-1}}{1+x_{n+1}},\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right) \tag{3}$$

Тогда обратные отображения $\vartheta_+^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, $\vartheta_-^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\vartheta_+^{-1}(x_1,\ldots,x_n) &= \left(\tfrac{2x_1}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1},\ldots,\tfrac{2x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1},\tfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2-1}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1}\right),\\
\vartheta_-^{-1}(x_1,\ldots,x_n) &= \left(\tfrac{2x_1}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1},\ldots,\tfrac{2x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1},\tfrac{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}{x_1^2+\cdots+x_n^2+1}\right).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что стереографические проекции и обратные к ним отображения являются гомеоморфизмами, следовательно, сфера $\mathbb{S}^n$ является n-мерным многообразием. Более того, стереографические проекции задают на сфере $\mathbb{S}^n$ атлас с двумя картами

$$(U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \vartheta_+),\ (U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \vartheta_-),$$

для которых отображения перехода

$$\vartheta_+\vartheta_-^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{O\},\ \vartheta_-\vartheta_+^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{O\},$$

имеющие вид

$$\vartheta_+\vartheta_-^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta_-\vartheta_+^{-1}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right),$$

являются гладкими. Таким образом, этот атлас задает гладкую структуру на сфере $\mathbb{S}^n$, которую мы также будем называть *стандартной.*

1.3. Прямые произведения

Еще один важный вид гладких многообразий получается как прямое произведение двух многообразий. Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности m, n соответственно. Тогда произведение $X \times Y$ представляет собой $(m+n)$-мерное многообразие. Действительно, топологическое произведение хаусдорфовых пространств со счетной базой топологии является хаусдорфовым пространством со счетной базой топологии (топологическим произведением счетных баз многообразий X и Y), а произведение открытых шаров $int\ \mathbb{B}^m \times int\ \mathbb{B}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, что в свою очередь диффеоморфно $\mathbb{R}^{m+n}$ и $int\ \mathbb{B}^{m+n}$. Отсюда, в частности, следует, что тор

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$$

является n-мерным многообразием.

1.4. Проективные пространства

Пусть на некотором топологическом пространстве (X, τ) задано отношение эквивалентности S и определено отображение $\pi : X \to X/S$ такое, что $\forall x \in X$ $\pi(x) = [x]$. Тогда пара $(X/S, \Delta)$, где $\Delta = \{V \in X/S | \pi^{-1}(V) \in \tau\}$, называется *фактор пространством* над X по отношению эквивалентности S. Δ называется *фактор-топологией*, а π – *фактор-отображением.*

Введем в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ отношение эквивалентности $\sim$, положив

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1})$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 8. *Пространство $\mathbb{R}P^n$ классов эквивалентности по введенному отношению с фактор-топологией называется вещественным проективным пространством.*

Предложение 2. *Вещественное проективное пространство является гладким замкнутым многообразием размерности n.*

Доказательство. Класс эквивалентности точки $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ представляет собой множество точек из $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$, лежащих на прямой, проходящей через x и начало координат O. Обозначим через $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$ естественную проекцию и положим $[x] = \pi(x), x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ положим

$$\widetilde{U}_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} |\ x_i \neq 0\},\ U_i = \pi(\widetilde{U}_i).$$

Определим отображение $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$\psi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i+1}}{x_i}\right).$$

Отображение ψ_i корректно определено и непрерывно, так как непрерывным является отображение $\psi_i \pi$. Непосредственно проверяется, что отображение $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}P^n$, определяемое формулой

$$\phi_i(u_1, \ldots, u_n) = [u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n],$$

является обратным к ψ_i, поэтому ψ_i — гомеоморфизм. Так как множества $U_1, \ldots, U_{n+1}$ покрывают $\mathbb{R}P^n$, то пространство $\mathbb{R}P^n$ является многообразием размерности n.

Для любых U_i, U_j(для определенности возьмем $j < i$) из указанной совокупности функции пересчета координат вычисляются по следующим формулам:

$$(\psi_j \circ \phi_i)(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right);$$

$$(\psi_i \circ \phi_j)(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_n}{y_i}\right).$$

Очевидно, что на $U_i \cap U_j$ эти функции принадлежат классу C^r для любых $r \geq 0$. Следовательно, по определению $\mathbb{R}P^n$ — гладкое многообразие размерности n. ■

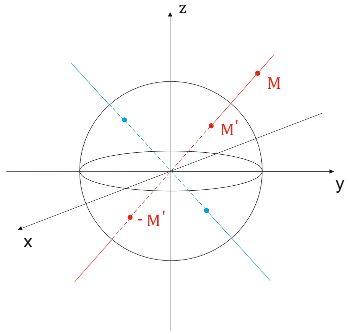

Рис. 3. Классы эквивалентости, определяющие вещественную проективную плоскость

При $n = 2$ пространство $\mathbb{R}P^2$ называется *вещественной проективной плоскостью.* Иногда удобно в качестве модели проективной плоскости рассматривать сферу $\mathbb{S}^2$, считая, что диаметрально противоположные точки сферы, отождествлены (см. рисунок 3).

Определение 9. *Множество* $\mathbb{C}P^2$ *всех классов эквивалентности* $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ *упорядоченных троек комплексных чисел* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus$

$(0,0,0)$ *относительно отношения эквивалентности* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sim^* (\xi_1', \xi_2', \xi_3')$ *если* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda\xi_1', \lambda\xi_2', \lambda\xi_3')$ *для некоторого ненулевого комплексного числа* λ *называется комплексной проективной плоскостью.*

Предложение 3. *Комплексная проективная плоскость является гладким замкнутым многообразием размерности четыре.*

1.5. Приклеивание ручек

Пусть M, N — $n-$мерные замкнутые гладкие многообразия с краем, $n \geq 1$, $X \subset \partial M, Y \subset \partial N$ — замкнутые гомеоморфные подмножества и $g : X \to Y$ — обращающий естественную ориентацию края диффеоморфизм (гомеоморфизм). Введем на дизъюнктном объединении $M \cup N$ следующее отношение эквивалентности: если $x \in M \cup N \setminus (X \cup Y)$, то $x \sim x$, если $x \in X, y \in Y$, то $x \sim g(x), y \sim g^{-1}(y)$. Фактор пространство

$$M \bigcup_g N = (M \cup N)/_{\sim}$$

по этому отношению эквивалентности является гладким (топологическим) многообразием. Будем говорить, что это многообразие получено *склейкой многообразий* M, N *по отображению* $g : X \to Y$. Следующее предложение дает достаточное условие гомеоморфности двух многообразий $M \bigcup_{g_0} N$, $M \bigcup_{g_1} N$, полученных склейкой при помощи гомеоморфизмов $g_0, g_1 : X \to Y$.

Напомним, что *изотопией*, соединяющей гомеоморфизмы $f, g : M^n \to M^n$, называется семейство гомеоморфизмов $f_t : M^n \to M^n$, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$такое, что $f_0 = f, f_1 = g$.

Предложение 4. *Пусть существует изотопия* $h_t : X \to Y$ *такая, что* $h_0 = g_0, h_1 = g_1$. *Тогда многообразия* $M \bigcup_{g_0} N$, $M \bigcup_{g_1} N$ *гомеоморфны.*

Доказательство. Из [2, Theorem 2] следует, что существует топологическое вложение $\psi : X \times [0,1] \to M$ такое, что $\psi(X \times \{0\}) = X \subset \partial M$, $\psi(X \times (0,1]) \subset int\, M$. Положим $C = \psi(X \times [0,1])$. Для любой точки $z \in C$ найдется одна и только одна пара $x \in X \subset \partial\, M, t \in [0,1]$ такая, что

$z = \psi(x \times [0,1]) \cap \psi(X \times \{t\})$. Будем задавать точку $z \in C$ координатами (x, t).

Определим непрерывное отображение $G : M \cup N \to M \cup N$ формулой

$$G(z) = \begin{cases} z, z \in N \cup M \setminus int\, C; \\ (h_1^{-1}(h_t(x)), t), z = (x,t) \in C. \end{cases}$$

Отображение G является тождественным вне множества $int\, \psi(X \times [0,1))$, а для координаты $x \in X$ точки $z = (x, 0) \in X$ выполняются равенства $g_1(G(x)) = g_1(g_1^{-1}(g_0(x))) = g_0(x) = G(g_0(x))$. Следовательно, отображение G переводит классы эквивалентности относительно g_0 в классы эквивалентности относительно g_1 и индуцирует гомеоморфизм многообразий $M \bigcup_{g_0} N$, $M \bigcup_{g_1} N$.

$\blacksquare$

Следующая классическая теорема, иногда называемая трюком Александера в честь американского математика У. Александера, имеет обширную область приложений.

Утверждение 2. *Пусть B_1^n, B_2^n — диски размерности n, $h : \partial B_1^n \to \partial B_2^n$ — произвольный гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $H : B_1^n \to B_2^n$ такой, что $H|_{\partial B_1^n} = h$.*

Доказательство. Пусть $h_1 : B_1^n \to \mathbb{B}^n, h_2 : B_2^n \to \mathbb{B}^n$ — произвольные гомеоморфизмы. Определим гомеоморфизм $\tilde{h} : \partial\mathbb{B}^n \to \partial\mathbb{B}^n$ формулой $\tilde{h} = h_2 h h_1^{-1}|_{\partial\mathbb{B}^n}$ и гомеоморфизм $\widetilde{H} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, положив $\widetilde{H}(rx) = r\tilde{h}(x)$ для каждого радиус-вектора $x \in \partial\mathbb{B}^n$ и $r \in [0,1]$. Тогда искомый гомеоморфизм H определяется формулой $H = h_2^{-1}\widetilde{H}h_1$. $\blacksquare$

Следствие 1. *Пусть B_1^n, B_2^n — два шара размерности $n \geq 1$, $g : \partial B_1^n \to \partial B_2^n$ — обращающий естественную ориентацию края гомеоморфизм и M^n — многообразие, полученное из объединения $B_1^n \cup B_2^n$ склейкой по g. Тогда M^n гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$.*

Доказательство. Пусть $D_1^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n |\ x_{n+1} \geq 0\}$, $D_2^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n |\ x_{n+1} \leq 0\}$, и $h_1 : B_1^n \to D_1^n$ — произвольный гомеоморфизм. Из теоремы 2 следует, что существует гомеоморфизм $h_2 : B_2^n \to$

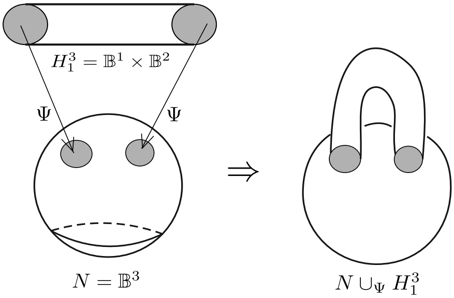

Рис. 4. Приклеивание ручки индекса 1

D_2^n такой, что $h_2|_{\partial B_2^n} = h_1 g^{-1}|_{\partial B_2^n}$. Определим непрерывное отображение $H : B_1^n \cup B_2^n \to \mathbb{S}^n$, формулой

$$H(x) = \begin{cases} h_1(x), x \in B_1^n; \\ h_2(x), x \in B_2^n, \end{cases}$$

H является гомеоморфизмом на множестве $int\, B_1^n \cup int\, B_2^n$, а для точек $x \in \partial B_1^n, g(x) \in \partial B_2^n$ удовлетворяет равенству $H(x) = h_1(x) = h_2(g(x)) = H(g(x))$. Следовательно, H индуцирует гомеоморфизм $B_1^n \bigcup_g B_2^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. ∎

Определение 10. *Ручкой размерности n индекса k называется прямое произведение $H_k^n = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$.*

Определение 11. *Говорят, что n-многообразие M получено из n-многообразия N с краем ∂N приклеиванием ручки $H_k^n = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ индекса k, если существует топологическое вложение $\psi : \partial\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} \to \partial N$ такое, что $M = N \bigcup\limits_{\psi} H_k^n$ (см. рисунок 4).*

1.6. Хирургия Дена

Напомним, что *узлом* называется гладко вложенная простая замкнутая кривая $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}^3$. Два узла $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathbb{S}^3$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ такой, что $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Узел $\mathcal{C}$

называется *тривиальным*, если он эквивалентен узлу $\mathcal{C}_0 = \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$.

Полноторием называется многообразие Π, гомеоморфное прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ окружности и двумерного диска. Пусть $x \in \mathbb{S}^1, y \in \partial\,\mathbb{B}^2$ — произвольные точки, $\varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \Pi$ — гомеоморфизм. Кривые

$$m = \varphi(\{x\} \times \partial\,\mathbb{B}^2), l = \varphi(\mathbb{S}^1 \times \{y\})$$

будем называть *стандартными меридианом и параллелью* полнотория Π соответственно.

Меридианом и параллелью полнотория Π будем называть кривые μ, λ, принадлежащие граничному тору $T = \partial\,\Pi$, и гомотопные кривым m, l соответственно. Так как фундаментальная группа $\pi_1(T)$ тора изоморфна группе $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, то гомотопический класс $[\gamma]$ любой ориентированной замкнутой кривой $\gamma \in T$ определяется парой взаимно-простых целых чисел (p, q). Будем полагать, что $[l] = (1, 0)$, $[m] = (0, 1)$.

В силу [11, Chapter 2, E], справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $\psi : \partial\,\Pi \to \partial\,\Pi$ — гомеоморфизм. Гомеоморфизм $\Psi : \Pi \to \Pi$ такой, что $\Psi|_{\partial\,\Pi} = \psi|_{\partial\,\Pi}$ существует тогда и только тогда, когда ψ сохраняет гомотопический класс меридиана.*

В силу [11, Chapter 2, B, C] гомеоморфизм тора $\psi : T \to T$ индуцирует гомоморфизм $\psi_* : \pi_1(T) \to \pi_1(T)$, однозначно определяемый унимодулярной целочисленной матрицей A_ψ, такой, что если $[\gamma] = (p, q)$, то $[\psi(\gamma)] = (p, q)A_\psi$.

Согласно [11, Chapter 2, C, Theorem 4], справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Гомеоморфизмы $\psi, \psi' : T \to T$ изотопны тогда и только тогда, когда $A_\psi = A_{\psi'}$.*

Следствие 2. *Гомеоморфизм $\psi : T \to T$ изотопен тождественному отображению $id : T \to T$ тогда и только тогда, когда он сохраняет гомотопические классы параллели и меридиана.*

Доказательство. Пусть
$$A_\psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Тогда $[\psi(1,0)] = (1,0)A_\psi = (a,b), [\psi(0,1)] = (0,1)A_\psi = (c,d)$. Поэтому гомеоморфизм ψ сохраняет гомотопические классы параллели и меридиана в том и только том случае, когда матрица A_ψ является единичной. В силу утверждения 4 это означает, что гомеоморфизм ψ изотопен тождественному отображению. ■

Пусть $\mathcal{C} \subset S^3$ — гладко вложенный узел и $\Pi_\mathcal{C} \subset S^3$ — его трубчатая окрестность.

Определение 12. *Хирургией Дэна вдоль узла $\mathcal{C} \subset S^3$ называется операция получения нового многообразия путем склеивания многообразий с краем $S^3 \setminus int\, \Pi_\mathcal{C}$ и $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ по некоторому гомеоморфизму $\varphi : \partial\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2\right) \to \partial \Pi_\mathcal{C}$.*

Известно, что любое трехмерное многообразие может быть получено с помощью хирургии Дэна вдоль некоторого конечного набора узлов на сфере S^3 (теорема Ликориша-Уолиса, см. [12], [13], [**?**]).

Пусть $m \subset \partial\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2\right)$ — стандартный меридиан и $[\phi(m)] = (p,q)$. Отношение p/q называется *коэффициентом хирургии.* Хирургия, коэффициент которой равен нулю, называется тривиальной. Из утверждения 3 следует, что тривиальная хирургия не меняет топологию многообразия.

В силу [4, Theorem 2] справедливо следующее важное утверждение.

Утверждение 5. *Многообразие, полученное нетривиальной хирургией вдоль нетривиального узла, не гомеоморфно сфере.*

Предложение 5. *Пусть $C \subset \mathbb{S}^3$ — тривиальный узел, $\Pi_0 \subset \mathbb{S}^3$ — его трубчатая окрестность и $e, e' : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to int\, \Pi_0$ — топологические вложения такие, что $e(\mathbb{S}^1 \times \{x\}) = e'(\mathbb{S}^1 \times \{x\})$, $x \in \partial \mathbb{B}^2$.*

Тогда существует гомеоморфизм $\theta : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ такой, что:

1) $\theta|_{\mathbb{S}^3 \setminus int\, \Pi_0} = id$;

2) $\theta e = e'$.

Доказательство. Так как e, e' – вложения полноториев, то в силу утверждения 3 гомеоморфизм ${e'}^{-1}e : \mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2$ переводит меридиан полнотория $\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2$ в гомотопную ему кривую. Из условия предложения следует, что гомеоморфизм $e'^{-1}e$ переводит параллель полнотория $\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2$ в себя. Тогда в силу следствия 2 существует изотопия $h_t : \partial\,(\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2) \to \partial\,(\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2)$ такая, что $h_0 = id, h_1 = {e'}^{-1}e$.

Положим $\mathbf{\Pi} = (\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2)\bigcup\limits_{\varphi}(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times[0,1])$, где $\varphi : \partial\,\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\{0\}$ — тождественный гомеоморфизм.

Определим гомеоморфизм $H : \mathbf{\Pi} \to \mathbf{\Pi}$, действующий тождественно на множестве $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, а для точек (x, t) из множества $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ равный

$$H(x,t) = (h_t(x), t),\ x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, t \in [0,1].$$

Положим $\Pi = e(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $\Pi' = e'(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$. Из [3, Теорема 3.3] следует, что многообразия $\Pi_0 \setminus int\,\Pi, \Pi_0 \setminus int\,\Pi'$ гомеоморфны прямому произведению тора на отрезок. Поэтому на многообразии $\Pi_0 \setminus int\,\Pi$ определены два слоения $\{T_q\}, \{I_p\}$ со слоями, гомеоморфными тору $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ и отрезку $[0, 1]$ соответственно, такие, что компоненты связности края многообразия $\Pi_0 \setminus int\,\Pi$ принадлежат слоению $\{T_q\}$ и каждая пара слоев T_q, I_p пересекается в единственной точке. Будем считать, что слои слоения $\{T_q\}$ параметризованы точками $q \in [0, 1]$, а слои слоения $\{I_p\}$ — точками $p \in \partial\Pi = T_0$. Таким образом, каждая точка из множества $\Pi_0 \setminus int\,\Pi$ определяется двумя координатами (p, q), $p \in \partial\Pi, q \in [0, 1]$.

Определим вложение $\tilde{e} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \to \Pi_0 \setminus int\,\Pi$ формулой

$$\tilde{e}(x,t) = (e(x)|_{\partial\,(\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2)}, t), x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Продолжим вложение $e : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \Pi$ до вложения $E : \mathbf{\Pi} \to \Pi_0$, положив

$$E(z) = \begin{cases} e(z), z \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1; \\ \tilde{e}(z), z \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]. \end{cases}$$

Аналогично продолжим вложение $e' : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \Pi'$ до вложения E' :

$\mathbf{\Pi} \to \Pi_0$.

Наконец, определим искомый гомеоморфизм $\theta : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ следующим образом:

$$\theta(z) = \begin{cases} E'HE^{-1}(x), z \in \Pi_0 \\ x, z \in \mathbb{S}^3 \setminus \Pi_0. \end{cases}$$

■

2. Свойства функций Морса

В силу [9, Лемма 2.2] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6 (Лемма Морса)**.** *В некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые координатами Морса, в которых функция φ имеет вид*

$$\varphi(p) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2,$$

где все коэффициенты $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ по модулю равны единице, а число отрицательных элементов из этого множества совпадает с числом отрицательных собственных чисел матрицы Гессе.

Напомним, что *градиентное векторное поле $grad\,\varphi$* гладкой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определяется в каждой точке $p \in \mathbb{R}^n$ вектором

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{x_1}(p), \dots, \frac{\partial\varphi}{x_n}(p)\right).$$

Для любого векторного поля $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *производная $d\varphi(F)$ функции φ по направлению F* удовлетворяет равенству

$$df(F) = (grad\varphi, F),$$

где $(grad\varphi, F)$ — скалярное произведение векторов $grad\varphi, F$. Это наблюдение лежит в основе следующего определения.

Определение 13. *Пусть M^n — гладкое многообразие, $G_x : T_xM^n \to \mathbb{R}_+, x \in M^n$ — риманова метрика на многообразии M^n, и $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса. Градиентным векторным полем функции φ называется векторное поле $grad\,\varphi$ такое, что для любого гладкого векторного поля F на многообразии M^n справедливо равенство*

$$d\varphi(F) = G_x(grad\varphi(x), F(x)).$$

Определение 14. *Гладкий поток, индуцированный градиентным векторным полем $X = -grad\,\varphi$, называется градиентным потоком функции φ.*

Если φ — функция Морса, то ее градиентный поток не имеет замкнутых траекторий, все состояния равновесия гиперболические и их множество совпадает с множеством критических точек функции φ, а размерность неустойчивого многообразия W^u_p любого состояния равновесия p (*индекс Морса*) равна индексу p как критической точки функции φ.

Следующие утверждения показывают, как структура множества критических точек функции Морса определяет топологическое строение многообразия, на котором эта функция задана.

Пусть M^n — замкнутое многообразие и $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса. Положим

$$M_c = \{x \in M^n | \varphi(x) \leq c\},\ \Sigma_c = \varphi^{-1}(c).$$

Утверждение 7 ([9, Теорема 3.1])**.** *Пусть отрезок $[c_1, c_2]$ не содержит критических значений функции Морса φ. Тогда многообразия M_{c_1}, M_{c_2} диффеоморфны. В частности, поверхности уровня $\Sigma_{c_1}, \Sigma_{c_2}$ диффеоморфны, а многообразие $\varphi^{-1}([c_1, c_2])$ диффеоморфно прямому произведению $\Sigma_{c_1} \times [c_1, c_2]$.*

Утверждение 8 ([9, Теорема 3.2], [10, Theorems 3.2, 3.4])**.** *Пусть множество Σ_c содержит в точности одну критическую точку p функции Морса φ, индекс этой точки равен $i \in \{0, \dots, n\}$, и $\varepsilon > 0$ — такое, что* *множество $\varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ не содержит критических точек, отличных от p. Тогда многообразие $M_{c+\varepsilon}$ диффеоморфно многообразию $M_{c-\varepsilon}$ с приклеенной ручкой индекса i.*

Из утверждения 8, в частности, следует, что любое замкнутое многообразие является CW-комплексом в смысле следующего определения (см. [1, Определение 1, §10, Глава 4]).

Определение 15. *n-мерным CW-комплексом (клеточным пространством) называется такое хаусдорфово пространство X со счетной базой, что $X = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n}\left(\bigsqcup\limits_{i\in I_k} e_i^k\right)$, где e_i^k – такие множества, называемые клетками, что для любых $k \in \{0,\ldots,n\}$ и $i \in I_k$ выполняются условия:*
1) Существует непрерывное отображение $\chi_i^k : \mathbb{B}^k \to \overline{e_i^k}$ такое, что $\chi|_{int\mathbb{B}^k} : int\mathbb{B}^k \to e_i^k$ – гомеоморфизм. χ_i^k называется характеристическим отображением.
2) Множество $\chi|_{\partial\mathbb{B}^k}$ является объединением клеток размерности меньше, чем k.
3) Подмножество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\chi^{-1}(F\cap\overline{e_i^k})$ замкнуто в $\mathbb{B}^k$.

В качестве следствия из трюка Александера и утверждения 8 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть многообразие M^n допускает функцию Морса $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ ровно с двумя критическими точками, $n \in \mathbb{N}$. Тогда M^n гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$.*

Доказательство. Пусть p – точка минимума функции φ, q – точка максимума и $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$. В силу леммы Морса существует окрестность U_p с локальными координатами $(y_1,\ldots,y_n)$, в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1,\ldots,y_n) = a + y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что множество $M_\varepsilon = \{x \in M^n | \varphi(x) \in [a, a+\varepsilon]\}$ лежит в окрестности U_p. Тогда $M_\varepsilon = \{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n |\ y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant$

$\varepsilon\}$, следовательно, M_ε диффеоморфно замкнутому n-шару, а его граница $\Sigma_\varepsilon = \{x \in M^n |\ \varphi(x) = a + \varepsilon\}$ диффеоморфна $(n-1)$-сфере.

Многообразие $\varphi^{-1}[\varepsilon, b]$ содержит в точности одну критическую точку индекса n. Тогда из теоремы 8 следует, что многообразие $M_b = M^n$ диффеоморфно многообразию $M_\varepsilon \cong \mathbb{B}^n$ с приклеенной по границе $\Sigma_\varepsilon \cong \mathbb{S}^{n-1}$ ручкой $H^n_n = \mathbb{B}^n$. В силу следствия 1 M^n гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$. ■

3. Примеры функций Морса на сфере и проективных пространствах

Пример 1. *Функция $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ является функцией Морса на сфере $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ с двумя критическими точками $N(0, \dots, 0, 1), S(0, \dots, 0, -1)$ индексов $n, 0$ соответственно.*

Доказательство. Сферу $\mathbb{S}^n$ можно покрыть $2(n+1)$ картами, каждая из которых определяется неравенством $x_i > 0$ или $x_i < 0$, а локальными координатами в этой карте служат координаты $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. Если $i \neq n+1$, то в соответствующей карте функция φ гладкая и не имеет критических точек. На карте $x_{n+1} > 0$ функция φ имеет вид $\varphi = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$. Непосредственно вычисляется, что $\frac{\partial \varphi}{x_1} = \dots = \frac{\partial \varphi}{x_n} = 0$ только в точке N, а матрица Гессе в этой точке равна $-E$. Таким образом, точка N является критической точкой функции φ индекса n. Аналогично показывается, что точка S является критической точкой функции φ индекса 0. ■

Пример 2. *Пусть $c_1, \dots, c_{n+1}$ — действительные числа. Функция $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i x_i^2$ является функцией Морса на сфере $\mathbb{S}^n$ тогда и только тогда, когда числа $\{c_i\}$ попарно различны. Эта функция имеет по две критические точки каждого из индексов $0, 1, \dots, n$.*

Доказательство. Будем использовать те же карты на сфере $\mathbb{S}^n$, что и в примере 1. В картах $x_{n+1} > 0, x_{n+1} < 0$ функция φ имеет вид

$$\varphi = (c_1 - c_{n+1})x_1^2 + \dots + (c_n - c_{n+1})x_n^2 + c_{n+1}.$$

Такая функция имеет единственную критическую точку в каждой из карт, ее координаты равны $x_1 = \dots = x_n = 0$, $x_{n+1} = \pm 1$. Эта критическая точка невырождена тогда и только тогда, когда все числа $c_1, \dots, c_n$ отличны от c_{n+1}. Индекс этой точки равен количеству чисел из набора $c_1, \dots, c_n$, меньших c_{n+1}.

Аналогичные вычисления можно провести для остальных карт карт $x_i > 0, x_i < 0$. Все критические точки будут невырожденными тогда и только тогда, когда все числа $\{c_i\}$ будут попарно различными. Не уменьшая общности можно считать, что $c_i < c_{i+1}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для каждого $k \in \{0, \dots, n\}$ найдется ровно один номер $i = k + 1$ для которого ровно k чисел из набора $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}$ будут меньше c_i.
■

Пример 3. *Пусть $c_1, \dots, c_{n+1}$ — действительные числа. Функция $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i x_i^2$ является функцией Морса на вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ тогда и только тогда, когда числа $\{c_i\}$ попарно различны. Эта функция имеет по одной критической точке каждого из индексов $0, 1, \dots, n$.*

Доказательство. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ будем рассматривать как многообразие, которое получается из сферы $\mathbb{S}^n$ отождествлением точек $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ и $-x = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$. Тогда функция Морса ψ на сфере, обладающая свойством $\psi(x) = \psi(-x)$, является также функцией Морса на $\mathbb{R}P^n$. Функция $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i x_i^2$ обладает этим свойством, поэтому она является функцией Морса на $\mathbb{R}P^n$, остальные утверждения следуют из примера 2. ■

Пример 4. *Пусть $\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_{n+1}$ — однородные комплексные координаты в $\mathbb{C}^{n+1}$, $c_1, \dots, c_{n+1}$ — попарно различные действительные числа. Функция*

$$\varphi(z_1 : z_2 : \dots : z_{n+1}) = \frac{c_1|z_1|^2 + \dots + c_{n+1}|z_{n+1}|^2}{|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2}$$

является функцией Морса на комплексном проективном пространстве

$\mathbb{C}P^n$. *Эта функция имеет по одной критической точке каждого из индексов* $0, 2, \ldots, 2n$.

Доказательство. Пространство $\mathbb{C}P^n$ можно покрыть набором из $(n+1)$ карт, каждая из которых задается условием $z_k \neq 0, k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Для карты $z_{n+1} \neq 0$ в качестве локальных координат возьмем координаты $w_k = \frac{z_k}{z_{n+1}}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. В этих локальных координатах функция φ имеет вид

$$\varphi(w_1, \ldots, w_n) = \frac{c_1|w_1|^2 + \cdots + c_n|w_n|^2 + c_{n+1}}{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 + 1}.$$

Перейдем к координатам $u_k = \frac{w_k}{\sqrt{||w||^2+1}}$, где $||w||^2 = |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2$.

Так как $\frac{1}{||w||^2+1} = 1 - \frac{||w||^2}{||w||^2+1} = 1 - |u_1|^2 - \cdots - |u_n|^2$, то

$$f(u_1, \ldots, u_n) = (c_1 - c_{n+1})|u_1|^2 + \cdots + (c_n - c_{n+1})|u_n|^2 + c_{n+1}.$$

Рассуждения завершаются точно так же, как в примерах 2, 3. В комплексном случае индексы критических точек удваиваются по сравнению с вещественным случаем, поскольку $u_k = x_k + iy_k$, $|u_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$. ∎

Пример 5. *Функция* $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$, *определенная по правилу*

$$\varphi\left([x, y, z]\right) = (x^2 - 1)(x^2 + 2) + 2y^2 + 3z^2,$$

является функцией Морса с пятью критическими точками: максимум, два минимума и два седла.

Доказательство. Рассмотрим вещественную проективную плоскость, как фактор пространство, полученное из сферы отождествлением диаметрально противоположных точек, с гладким атласом A, как в предыдущих примерах. В локальных координатах карты (U_1, ψ_1) функция φ имеет вид:

$$\varphi = y^4 + z^4 + 2y^2z^2 - y^2.$$

Множество критических точек (y, z) функции Морса в этих координатах равно

$$\{(0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\}$$

. Определитель матрицы Гессе в этих точках не равен нулю и позволяет установить их тип экстремума. В карте (U_1, ψ_1): $(0,0)$ — седловая точка, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — две точки минимума. Тогда на самом многообразии $\mathbb{R}P^2$: $[1,0,0]$ — седло (индекса 1), $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ и $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ — точки минимума (индекса 0). Точка максимума $[0,0,1]$ находится тем же способом из карты (U_3, ψ_3). Таким образом функция Морса $\varphi([x,y,z]) = (x^2-1)(x^2+2) + 2y^2 + 3z^2$ имеет пять критических точек на вещественной проективной плоскости. ■

Линии уровня функции f изображены на сфере $\mathbb{S}^2$ (см. рисунок 5).

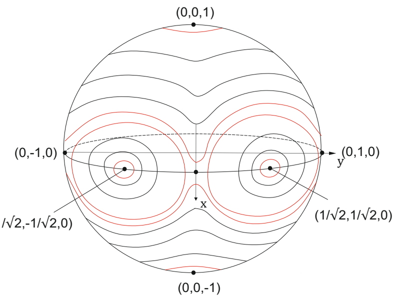

Рис. 5. Линии уровня функции $\varphi([x,y,z]) = (x^2-1)(x^2+2) + 2y^2 + 3z^2$

4. Доказательство теоремы 1

Покажем, что если на многообразии M^4 существует функция Морса φ ровно с тремя критическими точками, то оно гомеоморфно комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

В силу утверждения 1 множество критических точек функции φ состоит из точки минимума, точки максимума и седла индекса 2. Не ограничивая общности, допустим, что $\varphi(M^4) = [0,4]$ и $\varphi(\sigma) = 2$, где σ — седловая критическая точка функции φ.

Для $c \in [0,4]$ обозначим $M_c = \varphi^{-1}[0,c]$, $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$. Для функции

$\varphi_0 : \mathbb{C}P^2 \to [0,4]$, определенной по правилу

$$\varphi(z_1 : z_2 : z_3) = 2\left(\frac{|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 3|z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} - 1\right),$$

обозначим $M'_c = \varphi_0^{-1}[0,c]$, $\Sigma'_c = \varphi_0^{-1}(c)$.

Пусть $U_\sigma \subset M^4$ — окрестность точки σ, в которой функция φ представляется в виде $\varphi = 2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Для $\varepsilon > 0$ положим $B_{1,\varepsilon} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in U_\sigma : x_1^2 + x_2^2 \le \varepsilon, x_3 = x_4 = 0\}$, $B_{2,\varepsilon} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in U_\sigma : x_3^2 + x_4^2 \le \varepsilon, x_1 = x_2 = 0\}$. Выберем ε такое, что $V_\sigma = B_{1,\varepsilon} \times B_{2,\varepsilon}$ целиком лежит в окрестности U_σ. Граница $\partial(B_{1,\varepsilon} \times B_{2,\varepsilon})$ естессвенным образом представляется в виде объединения двух полноториев $\Pi_{1,\varepsilon} = \partial B_{1,\varepsilon} \times B_{2,\varepsilon}$ и $\Pi_{2,\varepsilon} = B_{1,\varepsilon} \times \partial B_{2,\varepsilon}$, пересекающихся по тору $\partial B_{1,\varepsilon} \times \partial B_{2,\varepsilon}$. Отметим, что меридиан $m_{1,\varepsilon} = \partial B_{2,\varepsilon}$ полнотория $\Pi_{1,\varepsilon}$ является параллелью полнотория $\Pi_{2,\varepsilon}$, а траектории градиентного потока функции φ (определенного векторным полем $F = (2x_1, 2x_2, -2x_3, -2x_4)$) пересекают каждый полноторий трансверсально. Положим $m_{2,\varepsilon} = \partial B_{1,\varepsilon}$, $k_{1,\varepsilon} = \partial B_{1,\varepsilon} \times \{O\}$ и $k_{2,\varepsilon} = \{O\} \times \partial B_{2,\varepsilon}$, где О — начало координат (центр дисков $B_{1,\varepsilon}$, $B_{2,\varepsilon}$).

Из каждой точки полнотория $\Pi_{1,\varepsilon}(\Pi_{2,\varepsilon})$ проведем отрезок траектории градиентного потока до пересечения с поверхностью $\Sigma_{2-2\varepsilon}(\Sigma_{2+2\varepsilon})$. Объединение этих отрезков обозначим за $T_1(T_2)$, за $\Pi_{1,2\varepsilon}(\Pi_{2,2\varepsilon})$ полноторий, принадлежащий множеству $\Sigma_{2-2\varepsilon}(\Sigma_{2+2\varepsilon})$, являющийся геометрическим местом концов отрезков из $T_1(T_2)$ (см. рисунок 7), за $m_{1,2\varepsilon}(m_{2,2\varepsilon})$ меридиан полнотория $\Pi_{1,2\varepsilon}(\Pi_{2,2\varepsilon})$, являющийся геометрическим местом точек пересечения траекторий, выходящих из меридиана $m_{1,\varepsilon}(m_{2,\varepsilon})$ и за $k_{1,2\varepsilon}(k_{2,2\varepsilon})$ среднюю линию полнотория $\Pi_{1,2\varepsilon}(\Pi_{2,2\varepsilon})$, являющуюся геометрическим местом концов отрезков множества $T_1(T_2)$, выходящих из $k_{1,\varepsilon}(k_{2,\varepsilon})$.

Из леммы Морса и утверждения 7 следует, что множества $\Sigma_{2-2\varepsilon}$, $\Sigma_{2+2\varepsilon}$ диффеоморфны трехмерной сфере. Градиентный поток функции Морса индуцирует гомеоморфизм $\theta : \Sigma_{2-2\varepsilon} \setminus int\Pi_{1,2\varepsilon} \to \Sigma_{2+2\varepsilon} \setminus int\Pi_{2,2\varepsilon}$, переводящий меридиан $m_{1,2\varepsilon}$ в параллель полнотория $\Pi_{2,2\varepsilon}$. Таким образом сфера $S_{2+2\varepsilon}$ получена из сферы $S_{2-2\varepsilon}$ при помощи хирургической операции Дена

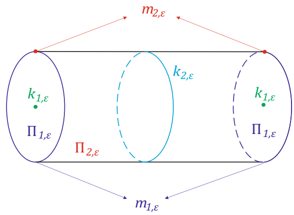

Рис. 6. Граница ∂V_σ

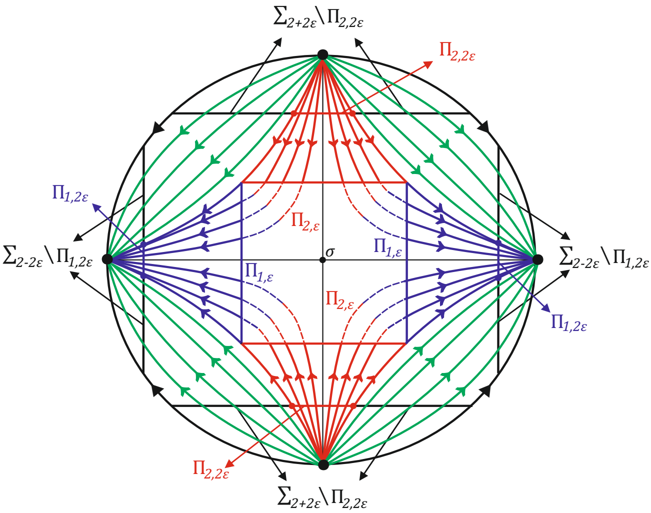

Рис. 7. Граница ∂V_σ

вдоль узла $k_{1,2\varepsilon}$, и эта операция нетривиальна. В силу утверждения 5, узел $k_{1,2\varepsilon}$ тривиален, а множество $\Sigma_{2-2\varepsilon} \setminus int\Pi_{1,2\varepsilon}$ является полноторием (следовательно, и множество $\Sigma_{2+2\varepsilon} \setminus int\Pi_{2,2\varepsilon}$ так же является полноторием).

Обозначим через σ' — критическую седловую точку функции $\varphi_0 : \mathbb{C}P^2 \to [0,4]$, (x_1', x_2', x_3', x_4') — координаты Морса в окрестности этой точки и через $B_{i,\varepsilon}'$, $V_{\sigma'}'$, T_i', $\Pi_{i,\varepsilon}'$, $\Pi_{i,2\varepsilon}'$ и т.д. множества построенные при помощи функции φ_0 аналогично множетсвам $B_{i,\varepsilon}$, V_σ, T_i, $\Pi_{i,\varepsilon}$, $\Pi_{i,2\varepsilon}$ и т.д., $i \in \{1,2\}$.

Построим гомеоморфизм $h : M^4 \to \mathbb{C}P^2$ по шагам:

1) Определим гомеоморфизм $h_\sigma : V_\sigma \to V'_{\sigma'}$, поставив в соответствие точке $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_\sigma$ точку $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in V'_{\sigma'}$. По определению $h_\sigma(\Pi_{i,\varepsilon}) = \Pi'_{i,\varepsilon}$, $h_\sigma(m_{i,\varepsilon}) = m'_{i,\varepsilon}$, $h_\sigma(\Pi_{i,\varepsilon}) = \Pi'_{i,\varepsilon}$, $h_\sigma(k_{i,\varepsilon}) = k'_{i,\varepsilon}$.

2) Построим гомеоморфизм $h_T : T_1 \cup T_2 \to T'_1 \cup T'_2$. Пусть p_i — точка, лежащая на полнотории $\Pi_{i,\varepsilon}$, l_{p_i} — траектория градиентного потока функции φ, проходящая через точки p_i, $q_i = l_{p_i} \cap \Pi_{i,2\varepsilon}$, r_i — произвольная точка, принадлежащая отрезку траектории l_{p_i} от точки p_i до q_i и $\lambda(p_i, r_i)$ — длина отрезка траектории от точки p_i до q_i. Положим $p'_i = h_\sigma(p_i)$ и снабдим штрихами обозначения аналогичных объектов для функции φ_0. Положим $h_T(r_i) = r'_i$, где r'_i такая точка, что $\dfrac{\lambda(p_i, r_i)}{\lambda(p_i, q_i)} = \dfrac{\lambda(p'_i, r'_i)}{\lambda(p'_i, q'_i)}$. По построению $h_T(\Pi_{i,2\varepsilon}) = \Pi'_{2,\varepsilon}$, $h_T(m_{i,2\varepsilon}) = m'_{2,\varepsilon}$, $h_T(k_{i,2\varepsilon}) = k'_{2,\varepsilon}$, $i \in \{1, 2\}$

3) Покажем, что существует гомеоморфизм $h_\Sigma : \Sigma_{2-2\varepsilon} \cup \Sigma_{2+2\varepsilon} \to \Sigma'_{2-2\varepsilon} \cup \Sigma'_{2+2\varepsilon}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_T на множестве $\Pi_{i,2\varepsilon}$, следующим образом. Так как гомеоморфизм $h_T|_{\partial\Pi_{1,2\varepsilon}}$ переводит меридиан и параллель тора $\partial\Pi_{1,2\varepsilon}$ в меридиан и параллель тора $\partial\Pi'_{1,2\varepsilon}$, то в силу предложения 5 он изотопен тождественному и продолжается на полноторий $\Sigma_{2-2\varepsilon} \setminus int\Pi_{1,2\varepsilon}$. Для полнотория $\Sigma_{2+2\varepsilon}$ рассуждения аналогичны.

4) Существует гомеоморфизм $H_\Sigma : M_{2-2\varepsilon} \cup (M^4 \setminus intM_{2+2\varepsilon}) \to M'_{2-2\varepsilon} \cup (\mathbb{C}P^2 \setminus intM'_{2+2\varepsilon})$, совпадающий с гомеоморфизмом h_Σ на $\Sigma_{2-2\varepsilon} \cup \Sigma_{2+2\varepsilon}$ в силу теоремы 2.

5) Построим гомеоморфизм $G : M_{2+2\varepsilon} \setminus int(M_{2-2\varepsilon} \cup T_1 \cup T_2 \cup V_\sigma) \to M'_{2+2\varepsilon} \setminus int(M'_{2-2\varepsilon} \cup T'_1 \cup T'_2 \cup V'_{\sigma'})$, сужения которого совпадает с гомеоморфизмами, построенными на шагах 1)-4), на общей области определения. G строится по отрезкам траекторий градиентных потоков функций φ, φ_0 аналогично тому, как был построен гомеоморфизм h_T на шаге 2).

Наконец, определим отображение $h : M^4 \to \mathbb{C}P^2$ следущими условиями:

$$h(x) = \begin{cases} h_\sigma(x), x \in V_\sigma, \\ h_{\scriptscriptstyle T}(x), x \in T_1 \cup T_2, \\ H_{\scriptscriptstyle\Sigma}(x), x \in M_{2-2\varepsilon} \cup (M^4 \setminus intM_{2+2\varepsilon}), \\ G(x), x \in M_{2+2\varepsilon} \setminus int(M_{2-2\varepsilon} \cup T_1 \cup T_2 \cup V_\sigma) \end{cases}$$

Отметим, что ключевым моментом в доказательстве существования гомеоморфизма h является доказательство тривиальности узла $k_{1,2\varepsilon} \subset \Sigma_{2-2\varepsilon}$, опирающееся на утверждение 5.

Список литературы

[1] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. *Введение в топологию*. Наука. Физматлит, 1995. 416с.

[2] Brown M. Locally flat embeddings of topological manifolds// Ann. of Math. 1962. V. 75, № 2, 331-341.

[3] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев. Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами// Мат. Сборник. 2003. Т. 194, 979-1007.

[4] C. McA. Gordon, J. Luecke *Knots are determined by their complements.*// Journal of the American Mathematical Society (1989), 2, 371-415.

[5] J.Eels and N.H.Kuiper *Closed manifolds which admit nondegenerate functions with three critical points*// Proc. Amsterdam, *Indagationes Math, 23* (1961), 109-114

[6] Жужома Е. В., Медведев В. С. *Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия*// Математический сборник. 2016. Т. 207. № 5. С. 69-92

[7] Zhuzhoma E. V., Medvedev V. *Morse-Smale systems with few non-wandering points*// Topology and its Applications. 2013. Vol. 160. No. 3. P. 498-507.

[8] M. Morse *The calculus of variations in the large*. Colloquium Publications Volume: 18; 1934.

[9] Дж. Милнор. Теория Морса. Издательство “Платон”. 1969.

[10] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory.* Oxford University Press, 2001.

[11] Rolfsen D. Knots and links. University of British Columbia. Math. 1990. Lecture Series 7.

[12] Lickorish, W. B. R. (1962), A representation of orientable combinatorial 3-manifolds// Ann. of Math., 76 (3): 531–540.

[13] Lickorish, W. B. R. (1963), "Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds"//Proc. Cambridge Philos. Soc., 59 (2): 307–317.

[14] Wallace, A. H. (1960) *Modifcations and cobounding manifolds*// Can. J. Math., 12: 503-528.