АЛЕКСЕЕВА Е. С., РАССАДИН А. Э.

НОВЫЕ ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ПОЛНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Аннотация. В работе доказаны две теоремы, в которых установлены оценки снизу и сверху для полных эллиптических интегралов первого и второго рода, выражающиеся через элементарные функции. Эти теоремы применены к модельному геометрическому примеру. Кроме того, в статье представлены графики зависимостей от модуля этих интегралов как полученных оценок, так и их относительных погрешностей. Применимость найденных аппроксимаций для технических приложений также обсуждена.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера, гипергеометрическая функция, круговой цилиндр, объём, инженерная точность.

ALEKSEEVA E. S., RASSADIN A. E.

NEW DOUBLE-SIDED BOUNDS FOR COMPLETE ELLIPTIC INTEGRALS OF THE FIRST AND THE SECOND KINDS

Abstract. Two theorems are proved in this paper, in which lower and upper bounds are established for complete elliptic integrals of the first and second kind, expressed in terms of elementary functions. These theorems are applied to a model geometric example. In addition, the article presents graphs of dependencies on the modulus of these integrals of both the estimates obtained and their relative errors. The applicability of the approximations found for technical applications is also discussed.

Keywords: Hölder inequality, hypergeometric function, circular cylinder, volume, engineering precision.

Необходимость в вычислении значений полных эллиптических интегралов первого:

$$\mathrm{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{1}$$

и второго рода:

$$\mathrm{E}(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi \tag{2}$$

часто возникает в самых разнообразных задачах (см., например, [1, 2]).

При фиксированном $k\in(0,1)$ существует целый ряд алгоритмов для определения величин интегралов (1) и (2). Например, полный эллиптический интеграл первого рода можно вычислять методом арифметико-геометрического среднего, который предложил ещё К.Ф. Гаусс [3, с. 160], а полный эллиптический интеграл второго рода можно найти способом, описанным в [4]. Однако для теоретического исследований выражений, содержащих функции (1) и (2), эти методы неудобны. Более эффективными в такой ситуации являются двусторонние оценки интегралов (1) и (2). Примеры таких оценок дают следующие теоремы.

Теорема 1. При $k \in [0,1]$ полный эллиптический интеграл второго рода удовлетворяет неравенствам:

$$\mathrm{E}^{-}(k) \le \mathrm{E}(k) \le \mathrm{E}^{+}(k), \tag{3}$$

где

$$\mathrm{E}^{-}(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1-(1-k^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{6}} \tag{4}$$

и

$$\mathrm{E}^{+}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot k^2}{\pi^2}}. \tag{5}$$

Доказательство. При $k \in [0,1)$ производная от функции (2) по модулю k имеет вид:

$$\frac{d\mathrm{E}(k)}{dk} = -k \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

Представим подинтегральное выражение в правой части формулы (6) как произведение двух функций: $f(\varphi) = \sin^2\varphi$ и $g(\varphi) = (1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}$, и применим к этому интегралу как прямое, так и обратное неравенство Гёльдера [5, с. 11].

Сначала выберем следующие значения показателей Гёльдера: $p = q = 2$, тогда прямое неравенство Гёльдера есть не что иное, как неравенство Коши-Буняковского, а равенство (6) при $k \in (0,1)$ даёт:

$$-\frac{1}{k}\frac{d\mathrm{E}(k)}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \le \sqrt{\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi \cdot d\varphi} \cdot \sqrt{\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{7}$$

Интегралы в правой части этого неравенства вычисляются элементарно. Таким образом, неравенство (7) сводится к следующей оценке для производной от функции (2):

$$-\frac{d\mathrm{E}(k)}{dk} \le \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt[4]{1-k^2}}, \qquad k \in (0,1). \tag{8}$$

Интегрируя неравенство (8) по модулю эллиптического интеграла от 0 до k, используя свойства интеграла Римана и учитывая, что $\mathrm{E}(0) = \pi/2$, получим, что при $k \in (0,1)$ $\mathrm{E}^{-}(k) \le \mathrm{E}(k)$ с функцией (4) в левой части этого неравенства. Справедливость неравенства при $k = 0$ и $k = 1$ проверяется непосредственно.

Далее, применим к выражению (6) обратное неравенство Гёльдера [5, с. 16] с показателями Гёльдера $p = 1/2$ (для функции $f(\varphi)$) и $q = -1$ (для функции $g(\varphi)$):

$$-\frac{1}{k}\frac{d\mathrm{E}(k)}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \geq \left[\int_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi\right]^2 \cdot \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi\right]^{-1}. \qquad (9)$$

Неравенство (9) даёт для производной функции (2) следующую оценку:

$$-\frac{d\mathrm{E}(k)}{dk} \geq \frac{k}{\mathrm{E}(k)}, \qquad k \in (0,1). \qquad (10)$$

Обращаясь с неравенством (10) так же, как и в предыдущем случае, для $k \in (0,1)$ получим неравенство $\mathrm{E}(k) \leq \mathrm{E}^{+}(k)$ с функцией (5) в правой части этого неравенства. Справедливость неравенства при $k = 0$ и $k = 1$ проверяется непосредственной проверкой. Теорема доказана.

Теорема 1 иллюстрируется рис. 1, на котором представлены графики двусторонней оценки (3). Они демонстрируют, что при $k \in (0,1)$ функции (4) и (5) приближают функцию (2) весьма неплохо.

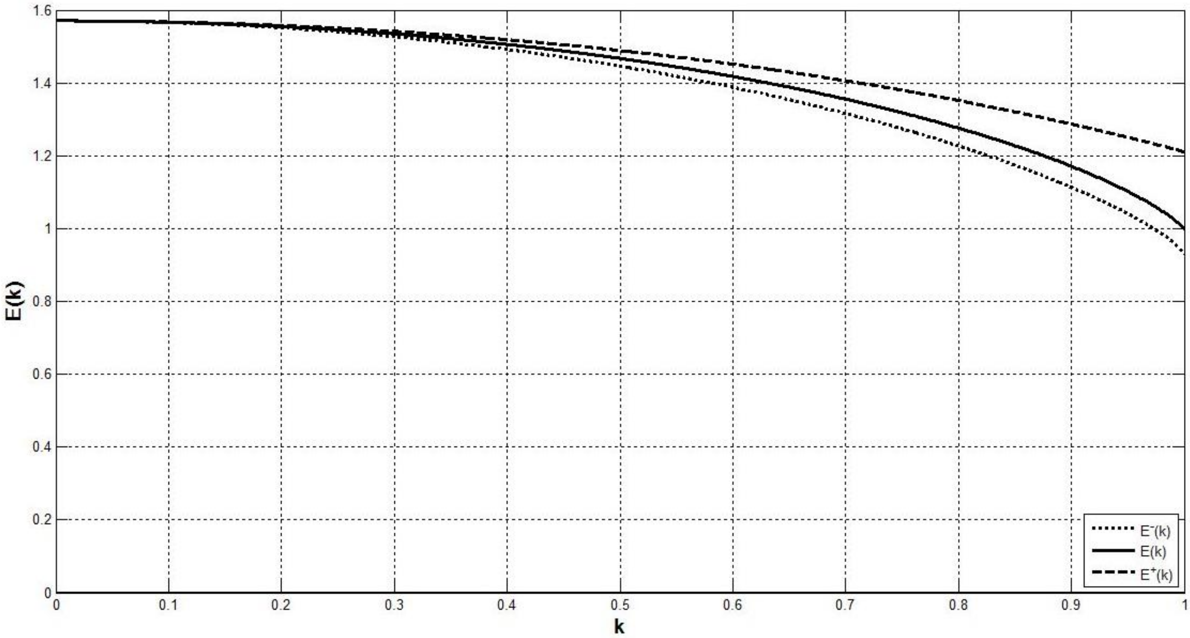

Рис. 1. Оценки полного эллиптического интеграла второго рода.

Для того, чтобы выразить количественно, насколько хорошо приближают полный эллиптический интеграл второго рода его оценки снизу (4) и сверху (5), введём относительные погрешности:

$$\delta\mathrm{E}^{-}(k) = \frac{\mathrm{E}(k) - \mathrm{E}^{-}(k)}{\mathrm{E}(k)}, \qquad \delta\mathrm{E}^{+}(k) = \frac{\mathrm{E}^{+}(k) - \mathrm{E}(k)}{\mathrm{E}(k)}. \qquad (11)$$

Графики функций (11) в зависимости от модуля k полного эллиптического интеграла приведены на рис. 2. Из этого рисунка видно, что $\delta\mathrm{E}^{-}(k) < 0{,}05$ при $k \in [0, \quad 0{,}9]$, а $\delta\mathrm{E}^{+}(k) < 0{,}05$ при $k \in [0, \quad 0{,}76]$, следовательно, при $k \in [0, \quad 0{,}76]$ функции (4) и (5) можно применять при решении прикладных задач для оценки полного эллиптического интеграла второго рода с инженерной точностью.

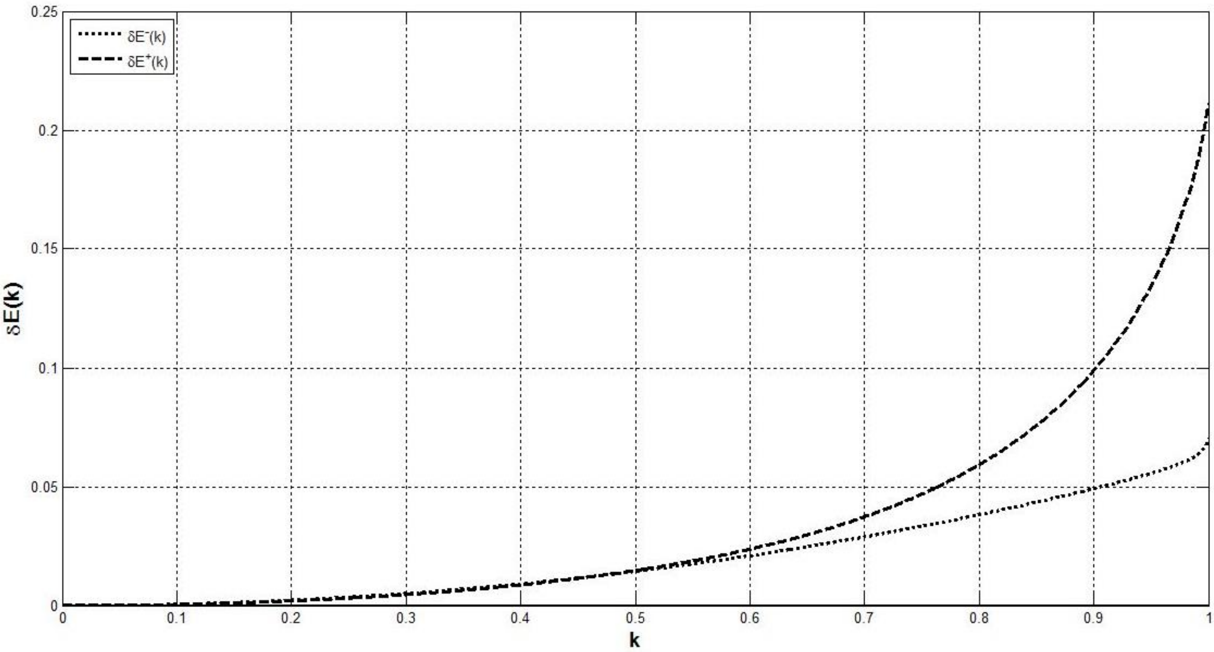

Рис. 2. Относительная погрешность оценок полного эллиптического интеграла второго рода.

Аналогичная теорема может быть доказана и для функции (1).

Теорема 2. При $k \in [0,1)$ полный эллиптический интеграл первого рода удовлетворяет неравенствам:

$$\mathrm{K}^{-}(k) \le \mathrm{K}(k) \le \mathrm{K}^{+}(k), \tag{12}$$

где

$$\mathrm{K}^{-}(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1-(1-k^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \ln(1-k^2) \tag{13}$$

и

$$\mathrm{K}^{+}(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}} \cdot \ln(1-k^2) + \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{1-4k^2/\pi^2} + \sqrt{1-4/\pi^2}}{1+\sqrt{1-4/\pi^2}}. \tag{14}$$

Доказательство. В работе [6] выведена следующая нелокальная связь между функциями (1) и (2), справедливая при $k \in [0,1)$:

$$K(k) = E(k) + \int_0^k \frac{q \cdot E(q) \cdot dq}{1-q^2}. \quad (15)$$

Комбинируя соотношение (15) с двусторонней оценкой (3) с функциями (4) и (5) и выполняя элементарное интегрирование, придём к двусторонней оценке (12) с функциями (13) и (14). Теорема доказана.

На рис. 3, который иллюстрирует утверждение теоремы 2, приведены графики двусторонней оценки (12).

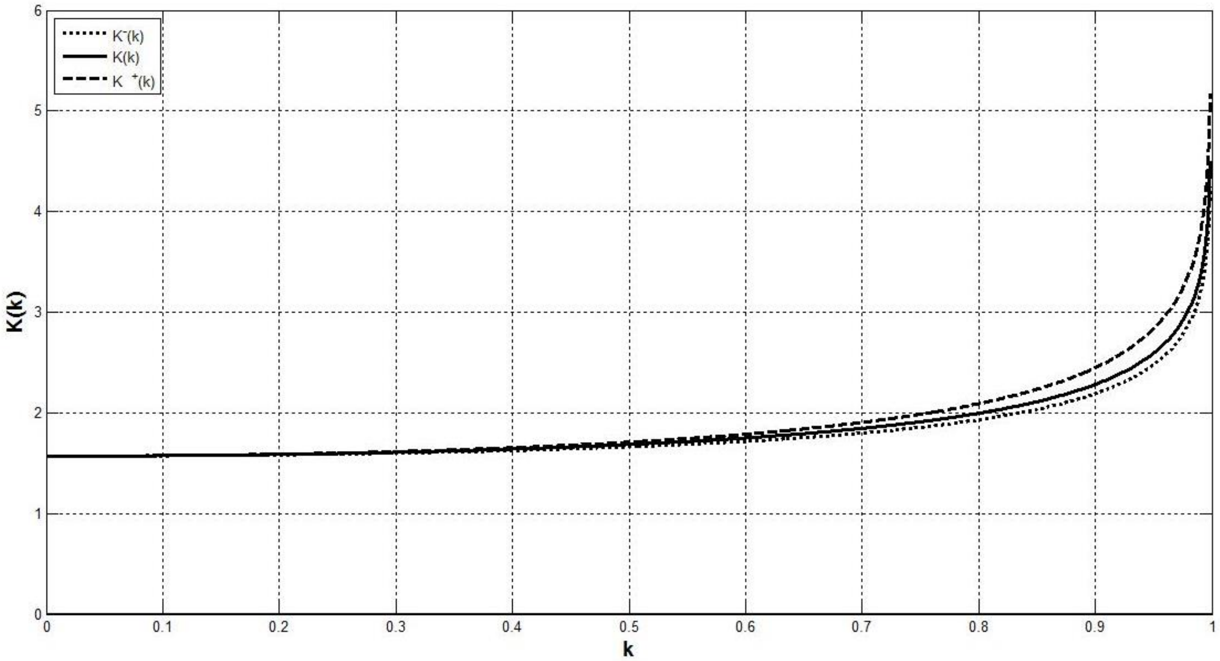

Рис. 3. Оценки полного эллиптического интеграла первого рода.

Из этого рисунка видно, что при $k \in [0,1)$ функции (13) и (14) приближают функцию (1) довольно хорошо.

Для того, чтобы выразить количественно, насколько хорошо приближают полный эллиптический интеграл первого рода его оценки снизу (13) и сверху (14), введём относительные погрешности:

$$\delta K^-(k) = \frac{K(k) - K^-(k)}{K(k)}, \qquad \delta K^+(k) = \frac{K^+(k) - K(k)}{K(k)}. \quad (16)$$

Графики зависимостей функций (16) от модуля k полного эллиптического интеграла приведены на рис. 4. По нему можно заметить, что $\delta K^-(k) < 0{,}05$ при $k \in [0,\ 0{,}99]$, а $\delta K^+(k) < 0{,}05$ при $k \in [0,\ 0{,}81]$, значит, при $k \in [0,\ 0{,}81]$ функции (13) и (14) можно применять при решении прикладных задач для оценки полного эллиптического интеграла первого рода с инженерной точностью.

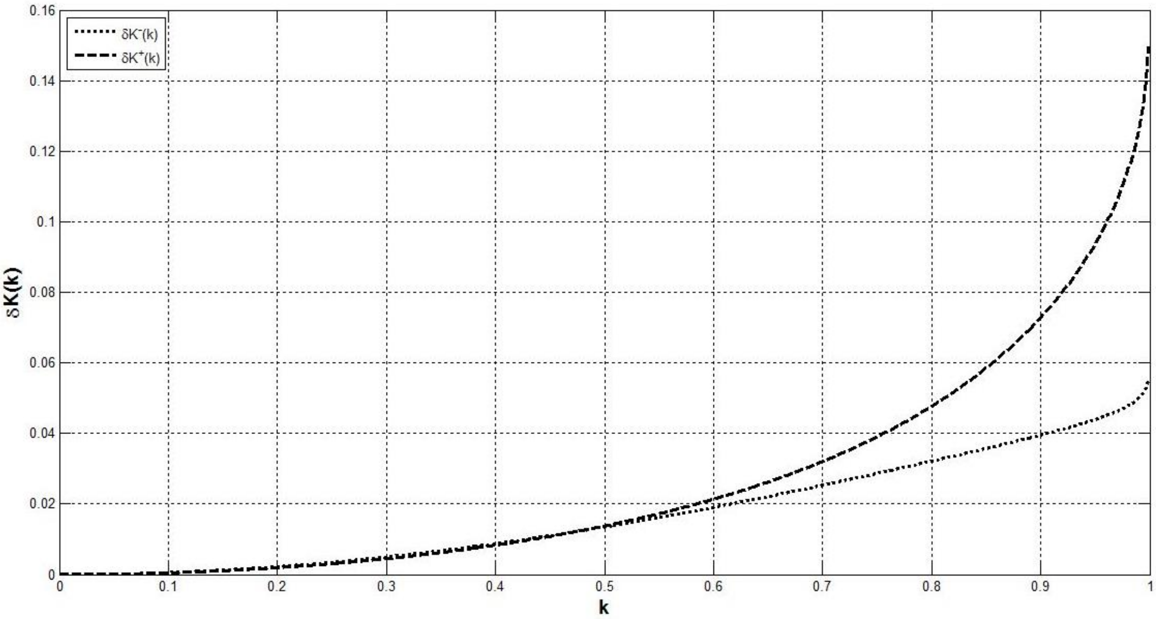

Рис. 4. Относительная погрешность оценок полного эллиптического интеграла первого рода.

Продемонстрируем применение доказанных теорем на следующем примере.

Рассмотрим два круговых цилиндра радиусов 1 и k $(0 < k < 1)$, оси которых пересекаются под прямым углом (см. рис. 5).

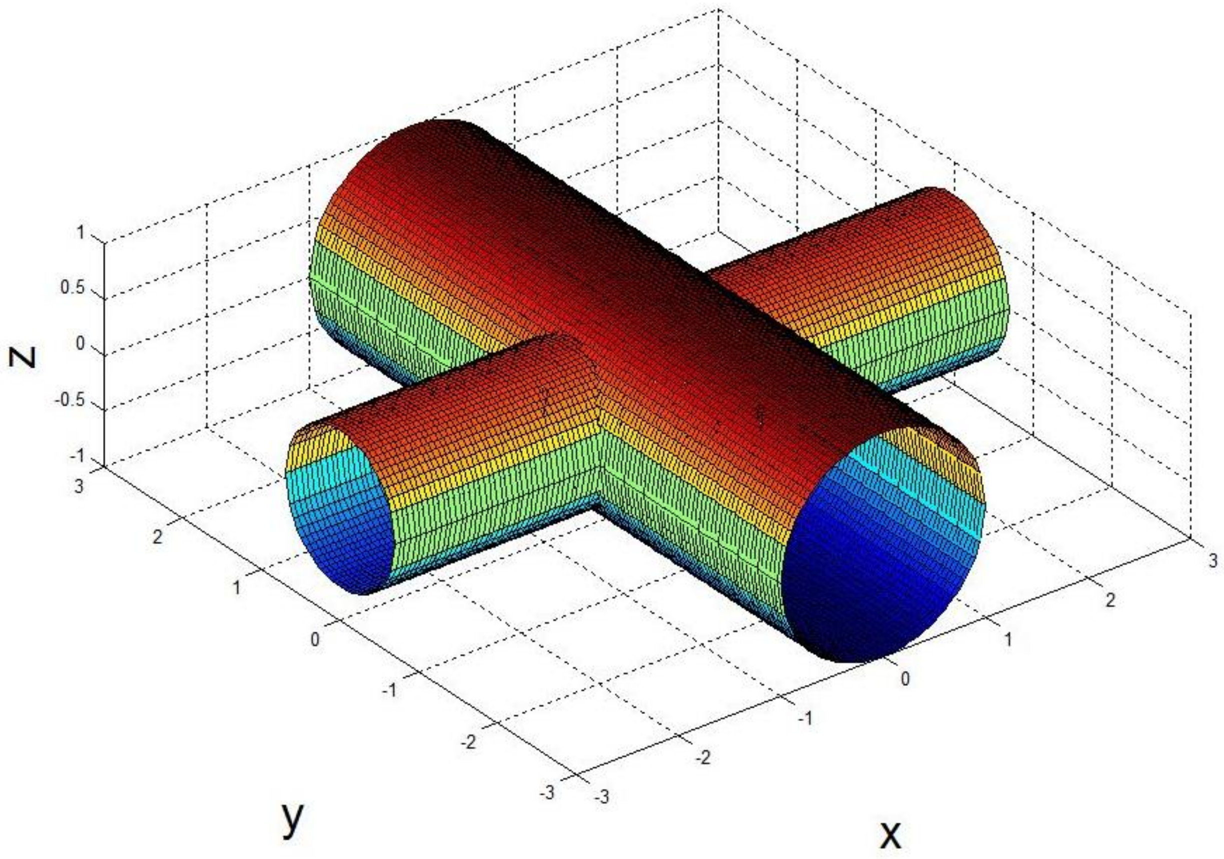

Рис. 5. Круговые цилиндры разных радиусов с осями, пересекающимися под прямым углом.

Объём тела, ограниченного ими, равен [7, с. 214]:

$$V(k)=\frac{8}{3}\cdot[(1+k^2)\cdot \mathrm{E}(k)-(1-k^2)\cdot \mathrm{K}(k)]. \tag{17}$$

Комбинируя неравенства (3) и (12), для величины (17) легко получить следующую двустороннюю оценку:

$$V^-(k)\le V(k)\le V^+(k)\,, \tag{18}$$

где

$$V^-(k)=\frac{8}{3}\cdot[(1+k^2)\cdot \mathrm{E}^-(k)-(1-k^2)\cdot \mathrm{K}^+(k)] \tag{19}$$

и

$$V^+(k)=\frac{8}{3}\cdot[(1+k^2)\cdot \mathrm{E}^+(k)-(1-k^2)\cdot \mathrm{K}^-(k)]. \tag{20}$$

Графики функций (17), (19) и (20) в зависимости от модуля k полного эллиптического интеграла приведены на рис. 6.

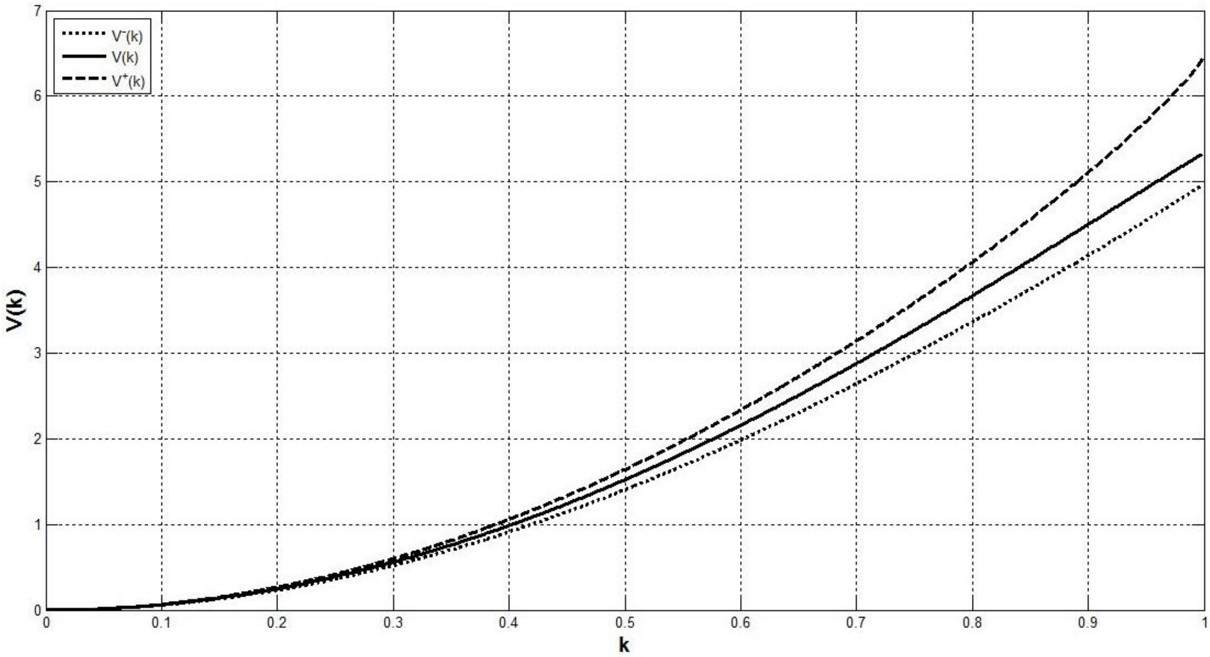

Рис. 6. Оценки объёма пересечения двух круговых цилиндров разных радиусов с осями, пересекающимися под прямым углом.

Для количественной характеризации качества приближения объёма (17) величинами (19) и (20), построенными с помощью функций (4), (5), (13), (14), как и ранее, введём относительные погрешности:

$$\delta V^-(k)=\frac{V(k)-V^-(k)}{V(k)}\,,\qquad \delta V^+(k)=\frac{V^+(k)-V(k)}{V(k)}\,. \tag{21}$$

Графики зависимостей функций (21) от модуля k полного эллиптического интеграла приведены на рис. 7.

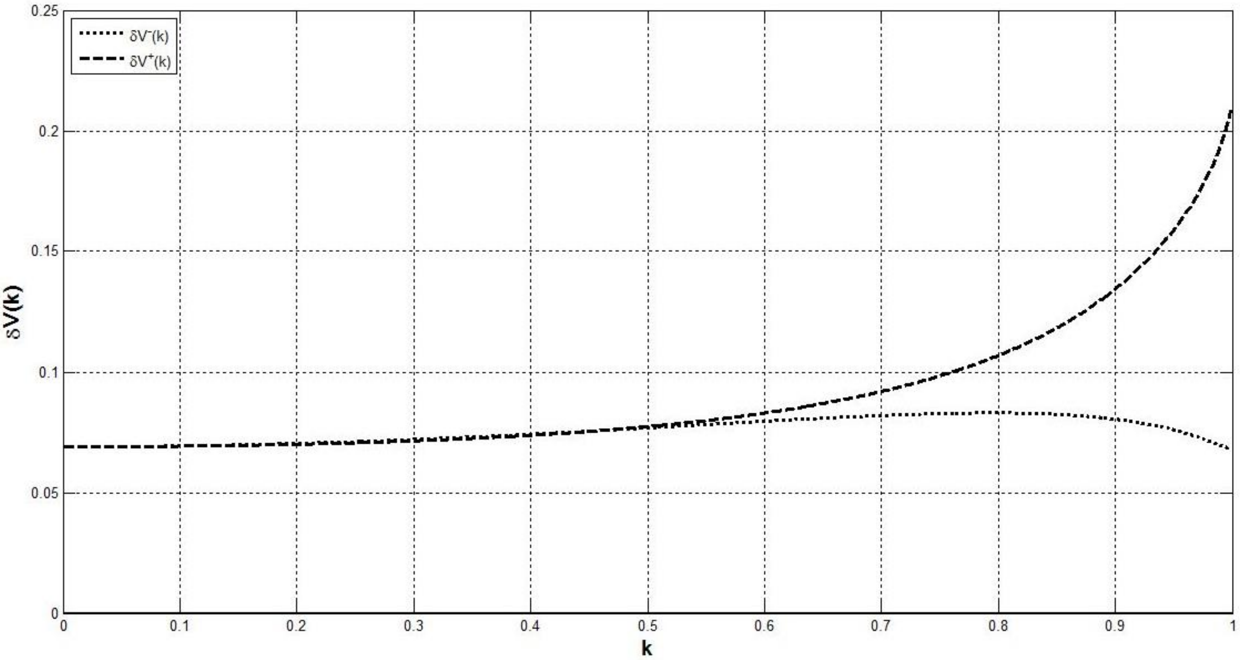

Рис. 7. Относительная погрешность оценок объёма пересечения двух круговых цилиндров разных радиусов с осями, пересекающимися под прямым углом.

Из этого графика видно, что $\delta V^{\pm}(k) > 0{,}05$ при всех $k \in (0{,}1)$, при этом кривая $\delta V^{+}(k)$ уходит вверх до заметных значений. Однако кривая $\delta V^{-}(k)$ остаётся ограниченной и снизу, и сверху: $0{,}068 < \delta V^{-}(k) < 0{,}084$, следовательно, формула (19) вполне пригодна для определения по заданному k значения объёма (17) с инженерной точностью.

Таким образом, теоремы 1 и 2, доказанные в этой работе, применимы для оценки величин как полных эллиптических интегралов первого и второго рода, так и их линейных комбинаций, с инженерной точностью.

В заключение отметим следующее обстоятельство: как хорошо известно, полные эллиптические интегралы первого и второго рода выражаются через гипергеометрические функции [3, с. 151]:

$$\mathrm{E}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right), \qquad \mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right), \tag{22}$$

следовательно, утверждения теорем 1 и 2 означают, что специальные функции (22), являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, могут быть эффективно приближены с помощью элементарных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпухин М. А. Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 2. – С. 31-48.
2. Rassadin A. E., Agalarov A. M.-Z. The modified Whitham modulation theory for transmission line with ferroelectric capacitors // Ferroelectrics. – 2021. – vol. 576, No. 1. – pp. 40-49.
3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
4. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Новый метод вычисления полного эллиптического интеграла второго рода // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. С. 249-251.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
6. Алексеева Е. С. Двусторонняя оценка полного эллиптического интеграла первого рода // Международный научно-практический журнал «Глобальная наука и инновация 2020: Центральная Азия». Серия «Физико-математические науки». – 2020. – № 5 (10). – С. 63-66.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. – М.: Наука, 1966. – 800 с.