Д. И. Гуревич, П. А. Сапонов, Детерминанты в квантовых матричных алгебрах и интегрируемые системы, *ТМФ*, 2021, том 207, номер 2, 261–276

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10043

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 207, № 2
май, 2021

Д. И. Гуревич[*][†], П. А. Сапонов[‡][§]

ДЕТЕРМИНАНТЫ В КВАНТОВЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАХ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Определены квантовые детерминанты в квантовых матричных алгебрах, связанных с парами совместных брейдингов. Установлены соотношения между этими детерминантами и так называемыми столбцовыми и строчными детерминантами, которые часто используются в теории интегрируемых систем. Кроме того, с помощью обобщенных янгианов, связанных с парами совместных брейдингов, построены общения квантовых интегрируемых спиновых систем. Показано, что такие системы не определяются однозначно “квантовым координатным кольцом” базового пространства V. Например, “квантовая плоскость” $xy = qyx$ порождает две различные интегрируемые системы: рациональную и тригонометрическую.

Ключевые слова: совместные брейдинги, квантовые матричные алгебры, полуквантовые алгебры, обобщенные янгианы, квантовые симметрические многочлены, квантовый детерминант.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10043

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовый (или q-) детерминант был введен в работах школы Л. Д. Фаддеева (см., например, [1]) в связи с квантовым методом обратной задачи рассеяния. Изначально эти детерминанты вводились в RTT-алгебрах, которые связаны с $U_q(sl(N))$-симметричными R-матрицами или с некоторыми токовыми (т. е. зависящими от спектральных параметров) R-матрицами.

Работа П. Сапонова частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 19-01-00726_а).

[*]Université Polytechnique Hauts-de-France, LMI, Valenciennes, France.
E-mail: gurevich@ihes.fr

[†]Междисциплинарный научный центр им. Ж.-В. Понселе, Москва, Россия

[‡]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

[§]Институт физики высоких энергий, НИЦ “Курчатовский институт”, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru

В работе [2] было построено большое семейство других инволютивных симметрий и симметрий Гекке и определены квантовые детерминанты в RTT-алгебрах, ассоциированных с *четными*[1)] симметриями. Напомним, что эти симметрии являются частными случаями брейдинга, т. е. их операторы $R\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ удовлетворяют так называемому *соотношению кос*

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R).$$

Здесь и далее V – конечномерное векторное пространство (называемое базовым), а I обозначает единичный оператор или матрицу[2)].

Брейдинг R называется симметрией Гекке (инволютивной симметрией), если для него выполнено дополнительное условие

$$(R - qI)(R + q^{-1}I) = 0, \quad q \neq \pm 1 \qquad (\text{соответственно} \quad R^2 = I).$$

Ненулевой параметр $q \in \mathbb{C}$ находится в общем положении, т. е.

$$k_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0 \qquad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В настоящей статье мы преследуем три цели. Во-первых, используя схему из работы [2], мы определяем квантовые детерминанты в квантовых матричных алгебрах (КМА), связанных с парами совместных брейдингов [3], в полуквантовых алгебрах (ПКА) [4] и обобщенных янгианах [5], [6]. Кроме того, мы показываем, что в некоторых RTT-алгебрах (в том числе связанных с квантовой группой $U_q(sl(N))$) квантовые детерминанты можно привести к виду столбцовых (или строчных) детерминантов, которые очень популярны в литературе по интегрируемым системам.

Во-вторых, используя квантовые элементарные симметрические многочлены, тесно связанные с квантовыми детерминантами, мы представляем подалгебры Бете во всех рассматриваемых обобщенных янгианах. В результате получаются квантовые интегрируемые системы, представляющие собой далеко идущее обобщение спиновых систем из [7] и их рациональных аналогов. Также мы обсуждаем различные виды соответствующих детерминантов.

В-третьих, мы хотели бы обратить внимание читателя на то, что, вопреки распространенному мнению, “квантовое координатное кольцо” базового пространства V не определяет однозначно соответствующую квантовую алгебру и квантовый детерминант. Например, так называемая “квантовая плоскость”, задающаяся уравнением $xy - qyx = 0$, порождает две совершенно разные RTT-алгебры и разные обобщенные янгианы и, следовательно, приводит к двум различным интегрируемым системам.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе 2, используя метод из работы [2], мы определяем квантовые детерминанты в КМА, связанные с парами (R, F) совместных брейдингов, где R – четная инволютивная симметрия или симметрия Гекке. В разделе 3 мы описываем некоторые свойства квантовых

[1)] Термин *четная* означает, что R-кососимметричная алгебра $\Lambda_R(V)$ имеет конечное число нетривиальных однородных компонент и высшая нетривиальная компонента $\Lambda_R^m(V)$ одномерная. В этом случае мы говорим, что R имеет ранг m.

[2)] Заметим, что операторы PR, где P – флип, удовлетворяют так называемому квантовому уравнению Янга–Бакстера и обычно называются R-матрицами.

детерминантов в различных алгебрах. В частности, мы представляем симметрии, которые позволяют ввести столбцовые (или строчные) детерминанты. Кроме того, мы рассматриваем квантовые детерминанты в правой и левой ПКА. В разделе 4 мы определяем квантовый детерминант в рациональном и тригонометрическом обобщенных янгианах и представляем интегрируемые системы, связанные с такими янгианами.

2. КВАНТОВЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ В КМА

С любой симметрией Гекке[3)] R мы ассоциируем R-симметричные и R-кососимметричные алгебры пространства V, которые определяются соответственно как следующие факторы свободной тензорной алгебры $T(V)$ пространства V:

$$\mathrm{Sym}_R(V) = T(V)/\langle \mathrm{Im}(qI - R)\rangle, \qquad \Lambda_R(V) = T(V)/\langle \mathrm{Im}(q^{-1}I + R)\rangle.$$

Здесь через $\langle J\rangle$ обозначен двусторонний идеал, порожденный множеством $J \subset T(V)$. Основным полем является $\mathbb{C}$.

Каждая однородная компонента $\mathrm{Sym}_R^{(k)}(V)$ (компонента $\Lambda_R^{(k)}(V)$) отождествляется с образом R-симметричного симметризатора $S^{(k)}(R)$ (соответственно с образом R-кососимметричного симметризатора $A^{(k)}(R)$), действующего на пространстве $V^{\otimes k}$. Эти проекторы определяются следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= I, \qquad S^{(k)} = \frac{1}{k_q} S^{(k-1)}(q^{-(k-1)}I + (k-1)_q R_{k-1\,k})S^{(k-1)}, \\ A^{(1)} &= I, \qquad A^{(k)} = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}(q^{k-1}I - (k-1)_q R_{k-1\,k})A^{(k-1)}, \end{aligned} \qquad k \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Как обычно, нижние индексы указывают позиции, на которых стоят матрицы или операторы. Если симметрия R инволютивная, эти формулы можно вывести из теории представлений симметрической группы, а если R является симметрией Гекке, то они получаются из теории представлений алгебры Гекке (см. работу [8]).

Пусть R и F – брейдинги. Следуя работе [3], мы говорим, что упорядоченная пара (R, F) совместна (или брейдинги R и F совместны), если имеют место следующие соотношения:

$$R_{12}F_{23}F_{12} = F_{23}F_{12}R_{23}, \qquad R_{23}F_{12}F_{23} = F_{12}F_{23}R_{12}.$$

Ниже мы всегда полагаем, что R – инволютивная симметрия или симметрия Гекке.

Пусть $L = \|l_j^i\|_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ есть $(N\times N)$-матрица и $L_1 = L\otimes I_{2\ldots p}$, $p \geqslant 2$ (следовательно, L_1 есть $(N^p \times N^p)$-матрица.) Введем обозначения

$$L_{\overline{1}} = L_1, \qquad L_{\overline{k+1}} = F_{k\,k+1}L_{\overline{k}}F^{-1}_{k\,k+1}, \qquad k \leqslant p-1. \tag{2.2}$$

В случае $F = P$, где P – обычный флип, мы восстанавливаем стандартное обозначение $L_{k+1} = P_{k\,k+1}L_kP_{k\,k+1}$.

[3)] В этом разделе мы в основном имеем дело с симметриями Гекке. Соответствующие результаты и формулы для инволютивных симметрий можно получить, положив $q = 1$.

Вслед за авторами работы [3] (см. также ссылки в этой работе) определим КМА $\mathcal{L}(R,F)$ как унитальную ассоциативную алгебру, порожденную элементами матрицы $L=\|l_i^j\|$, со следующей системой коммутационных соотношений:

$$R_{12}L_{\bar 1}L_{\bar 2}=L_{\bar 1}L_{\bar 2}R_{12}. \tag{2.3}$$

Матрица L называется *производящей* для алгебры $\mathcal{L}(R,F)$. Отметим, что из совместности брейдингов R и F вытекает, что определяющие соотношения алгебры $\mathcal{L}(R,F)$ можно распространить на более высокие позиции в следующем смысле:

$$R_{k\,k+1}L_{\bar k}L_{\overline{k+1}}=L_{\bar k}L_{\overline{k+1}}R_{k\,k+1},\qquad k<p.$$

Заметим, что любая из пар (R,P) и (R,R), очевидно, совместна. Соответствующие алгебры $\mathcal{L}(R,P)$ и $\mathcal{L}(R,R)$ представляют собой RTT-алгебру и алгебру уравнения отражений (RE-алгебру)[4]. Определяющие соотношения первой из этих алгебр $\mathcal{L}(R,P)$ имеют вид

$$R_{12}L_1L_2=L_1L_2R_{12}.$$

Определяющие соотношения RE-алгебры $\mathcal{L}(R,R)$ можно представить как

$$R_{12}L_1R_{12}L_1=L_1R_{12}L_1R_{12}.$$

Замечание. Следует подчеркнуть, что если симметрия R – деформация обычного флипа, то соответствующие RTT- и RE-алгебры являются деформациями коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(N))$, т. е. размерности однородных компонент этих КМА являются классическими (если R – симметрия Гекке, то параметр q должен быть в общем положении). Однако если R – брейдинг, происходящий из квантовых групп серий B_n, C_n, D_n, то это свойство не имеет места. Таким образом, не существует подобной деформации алгебры $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, принадлежащая одной из этих серий. Напротив, существуют квантовые деформации алгебры функций $Fun(G)$, где G – соответствующая группа Ли. Соответствующие факторы RTT-алгебр были представлены в [10].

Теперь предположим, что симметрия R четная. Пусть $\Lambda_R^{(m)}(V)$, $m\geqslant 2$, есть старшая нетривиальная компонента[5] алгебры $\Lambda_R(V)$. Поскольку по определению размерность этой компоненты равна единице, существуют два тензора $\mathrm{u}=\|u_{i_1\dots i_m}\|$ и $\mathrm{v}=\|v^{j_1\dots j_m}\|$, такие что

$$A^{(m)}(x_{i_1}\otimes\dots\otimes x_{i_m})=u_{i_1\dots i_m}\,v^{j_1\dots j_m}x_{j_1}\otimes\dots\otimes x_{j_m},$$
$$\langle \mathrm{v},\mathrm{u}\rangle:=v^{i_1\dots i_m}\,u_{i_1\dots i_m}=1.$$

Всюду далее $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ есть базис пространства V и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Таким образом, элемент $v^{j_1\dots j_m}x_{j_1}\otimes\dots\otimes x_{j_m}$ является генератором подпространства $\mathrm{Im}\,A^{(m)}$. Заметим, что тензоры u и v определяются с точностью до масштабирования[6]

$$\mathrm{u}\mapsto a\mathrm{u},\qquad \mathrm{v}\mapsto a^{-1}\mathrm{v},\qquad a\in\mathbb{C},\quad a\neq 0. \tag{2.4}$$

[4] Еще один пример совместных брейдингов (R,F) дается брейдингами из (2.6), где вторая матрица играет роль R. Пример таких пар также можно найти в [9].

[5] Вообще говоря, m может отличаться от $N=\dim V$ (см. работы [2], [11]).

[6] Если ранг симметрии R равен двум, то можно восстановить R, зная u и v. Классификация всех пар (u,v), порождающих такие симметрии, была проведена в [2].

По аналогии со статьей [2] введем следующее определение.

Определение. *Квантовым детерминантом* производящей матрицы L называется следующий элемент КМА $\mathcal{L}(R,F)$:

$$\det_{\mathcal{L}(R,F)}(L) := \langle \mathrm{v}|L_{\overline{1}}\dots L_{\overline{m}}|\mathrm{u}\rangle := v^{i_1\dots i_m}(L_{\overline{1}}\dots L_{\overline{m}})^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_m}\,u_{j_1\dots j_m}. \tag{2.5}$$

Разумеется, квантовый детерминант $\det_{\mathcal{L}(R,F)}(L)$ можно представить в других явных видах в зависимости от определяющих соотношений КМА $\mathcal{L}(R,F)$. Некоторые из них выписаны ниже. Вид квантового детерминанта, заданный в (2.5), мы будем называть *каноническим*.

Теперь рассмотрим два примера. Зафиксируем базис $\{x=x_1, y=x_2\}$ в базовом пространстве V, $N=\dim V=2$, и введем две симметрии, которые в этом базисе задаются матрицами

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&q&0\\0&q^{-1}&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}q&0&0&0\\0&q-q^{-1}&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&q\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Каждая из этих симметрий представляет собой деформацию обычного флипа P. Первая из них инволютивная, вторая является симметией Гекке, возникающей из квантовой группы $U_q(sl(2))$.

Для инволютивной симметрии имеем

$$\mathrm{u}=(u_{11},u_{12},u_{21},u_{22})=\frac{1}{2}(0,1,-q^{-1},0), \qquad \mathrm{v}=(v^{11},v^{12},v^{21},v^{22})=(0,1,-q,0);$$

для симметрии Гекке

$$\mathrm{u}=\frac{q^{-1}}{2_q}(0,1,-q,0), \qquad \mathrm{v}=(0,1,-q,0).$$

Заметим, что тензоры v, отвечающие этим симметриям, совпадают, следовательно, алгебры

$$\mathrm{Sym}_R(V)=T(V)/\langle \mathrm{v}\rangle = T(V)/\langle xy-qyx\rangle, \tag{2.7}$$

которые называются “квантовая плоскость”, для обеих симметрий, заданных в (2.6), одинаковые. Однако тензоры u для них различаются. Поэтому для всех пар (R,F) различаются и канонические формы соответствующих детерминантов $\det_{\mathcal{L}(R,F)}(L)$.

Вычислим детерминанты в RTT-алгебре $\mathcal{L}(R,P)$ и RE-алгебре $\mathcal{L}(R,R)$. Обозначим элементы производящей матрицы L этих алгебр как $l_1^1=a$, $l_1^2=b$, $l_2^1=c$ и $l_2^2=d$:

$$L=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Определяющие соотношения RTT-алгебры $\mathcal{L}(R,P)$, отвечающей первой (инволютивной) матрице из (2.6),

$$R_{12}L_1L_2=L_1L_2R_{12},$$

приводят к следующей системе уравнений для генераторов:

$$ab = q^{-1}ba, \qquad ac = qca, \qquad ad = da, \qquad bc = q^2cb, \quad bd = qdb, \qquad cd = q^{-1}dc.$$

Согласно нашему определению каноническая форма квантового детерминанта в этой алгебре записывается как

$$\det{}_{\mathcal{L}(R,P)}(L) = \frac{ad + da}{2} - \frac{q^{-1}bc + qcb}{2}.$$

С использованием приведенных выше коммутационных соотношений для генераторов каноническую форму можно преобразовать к виду

$$\det{}_{\mathcal{L}(R,P)}(L) = ad - qcb = ad - q^{-1}bc. \tag{2.8}$$

Определяющие соотношения между образующими алгебры, отвечающей второй матрице из (2.6), таковы [10]:

$$ab = qba, \quad ac = qca, \quad ad - da = (q - q^{-1})bc, \quad bc = cb, \quad bd = qdb, \quad cd = qdc.$$

Соответствующий квантовый детерминант имеет вид

$$\det{}_{\mathcal{L}(R,P)}(L) = \frac{q^{-1}ad + qda}{2_q} - \frac{bc + cb}{2_q} = ad - qcb = ad - qbc. \tag{2.9}$$

Здесь первое выражение – каноническая форма детерминанта, а другие мы обсудим в следующем разделе.

Представим также соответствующие алгебры $\Lambda_R(V)$. Если R – первая симметрия из (2.6), то мы имеем

$$\Lambda_R(V) = T(V)/\langle x^2, y^2, xy + qyx\rangle. \tag{2.10}$$

Если R – вторая симметрия из (2.6), то последним генератором идеала в приведенном выше факторе должен быть $qxy + yx$.

Таким образом, мы видим, что квантовая плоскость (2.7) порождает две различные RTT-алгебры и, следовательно, два детерминанта отличаются, хотя мы можем найти специфическое выражение $ad - qcb$, одинаковое для обоих детерминантов. В следующем разделе мы рассмотрим более подробно многомерные аналоги этих алгебр и детерминантов и объясним это совпадение.

Пример 2. Определяющие соотношения RE-алгебры $\mathcal{L}(R,R)$, отвечающей первой (инволютивной) матрице из (2.6),

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12},$$

в явном виде записываются как

$$ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad ad = da, \qquad bc = cb, \qquad bd = db, \qquad cd = dc.$$

Следовательно, данная алгебра является коммутативной. Это не удивительно, так как инволютивная симметрия R в (2.6) связана с обычным флипом P сопряжением:

$$R_{12} = D_1P_{12}D_1^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица

$$\tilde{L} = D^{-1}LD = \begin{pmatrix} a & b/q \\ qc & d \end{pmatrix}$$

удовлетворяет соотношению

$$P_{12}\tilde{L}_1P_{12}\tilde{L}_1 = \tilde{L}_1P_{12}\tilde{L}_1P_{12} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{L}_2\tilde{L}_1 = \tilde{L}_1\tilde{L}_2,$$

которое означает, что элементы матрицы $\tilde{L}$ порождают коммутативную алгебру. Следовательно, элементы матрицы L также коммутируют друг с другом. В этом случае каноническая форма детерминанта записывается как

$$\det\nolimits_{\mathcal{L}(R,R)}(L) = \frac{ad+da}{2} - \frac{bc+cb}{2},$$

при этом, учитывая коммутативность RE-алгебры $\mathcal{L}(R,R)$, его можно привести к классическому выражению $ad-bc$.

Наконец, если мы возьмем симметрию (Гекке) R из (2.6), то получим следующую систему уравнений для генераторов:

$$\begin{aligned} &q^2ab = ba, && q^2ca = ac, && ad = da,\\ &q(bc-cb) = \lambda a(d-a), && q(cd-dc) = \lambda ca, && q(db-bd) = \lambda ab, \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение $\lambda = q-q^{-1}$. Каноническая форма детерминанта такова:

$$\det\nolimits_{\mathcal{L}(R,R)}(L) = \frac{q(ad+da)}{2_q} - \frac{q(bc+q^2cb)}{2_q} - \frac{\lambda a^2}{2_q}. \tag{2.11}$$

Принимая во внимание отношения между генераторами, мы можем привести канонический детерминант к следующим эквивалентным формам:

$$\det\nolimits_{\mathcal{L}(R,R)}(L) = ad - q^2cb = q^2(ad-bc) - q\lambda a^2. \tag{2.12}$$

Еще один способ ввести квантовые аналоги детерминанта основан на понятии квантовых элементарных симметрических многочленов, которые определяются через *квантовые следы*. Такой квантовый след хорошо известен для случаев, связанных с квантовой группой $U_q(sl(N))$. Однако квантовый след можно связать с любым кособратимым брейдингом R, используя метод Любашенко [12], [13]. Мы говорим, что данный брейдинг $R\colon V\to V$ является *кособратимым*, если существует оператор $\Psi\colon V^{\otimes 2}\to V^{\otimes 2}$, такой что

$$\mathrm{Tr}_{(2)}\, R_{12}\Psi_{23} = P_{13} = \mathrm{Tr}_{(2)}\, \Psi_{12}R_{23} \quad \Longleftrightarrow \quad R_{ij}^{kl}\Psi_{lm}^{jn} = \delta_m^k\delta_i^n = \Psi_{ij}^{kl}R_{lm}^{jn}.$$

Если R – кособратимый брейдинг, соответствующий *R-след* Tr_R задается формулой

$$\mathrm{Tr}_R\, X = \mathrm{Tr}(C^R X), \qquad C^R := \mathrm{Tr}_{(2)}\, \Psi.$$

Здесь X – произвольная $(N\times N)$-матрица (возможно, с некоммутирующими элементами).

Рассмотрим совместную пару брейдингов (R,F) и предположим, что R кособратим. Теперь определим квантовую версию элементарных симметрических многочленов в алгебре $\mathcal{L}(R,F)$ следующим образом:

$$e_0 = 1, \qquad e_k = \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}\, A^{(k)} L_{\bar 1} L_{\bar 2} \dots L_{\bar k}, \qquad k \geqslant 1. \tag{2.13}$$

Здесь и ниже $\mathrm{Tr}_{(1\dots k)} = \mathrm{Tr}_{(1)} \dots \mathrm{Tr}_{(k)}$. Используя равенство

$$A^{(k)} L_{\bar 1} \dots L_{\bar k} = A^{(k)} L_{\bar 1} \dots L_{\bar k} A^{(k)}, \tag{2.14}$$

выполняющееся в любой КМА, получаем соотношение

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\, A^{(m)} L_{\bar 1} \dots L_{\overline{m}} &= \mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\, A^{(m)} L_{\bar 1} \dots L_{\overline{m}} A^{(m)} = \\ &= (\mathrm{v} \cdot_R \mathrm{u}) \langle \mathrm{v} | L_{\bar 1} \dots L_{\overline{m}} | \mathrm{u} \rangle,\end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$(\mathrm{v} \cdot_R \mathrm{u}) = v^{j_1 \dots j_m} (C^R)^{i_1}_{j_1} (C^R)^{i_2}_{j_2} \dots (C^R)^{i_m}_{j_m} u_{i_1 \dots i_m}. \tag{2.16}$$

Таким образом, высший элементарный симметрический многочлен e_m отличается от квантового детерминанта $\det_{\mathcal{L}(R,F)}(L)$ числовым коэффициентом. В частном случае $F = P$ эти элементы просто равны друг другу, так как в этом случае $(\mathrm{v} \cdot_P \mathrm{u}) = 1$ (заметим, что $C^P = I$).

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ ДЕТЕРМИНАНТОВ

В этом разделе мы рассмотрим два вопроса. Первый из них: какова связь между детерминантом $\det_{\mathcal{L}(R,F)}(L)$ и характеристическим многочленом для матрицы L? Второй вопрос: является ли квантовый детерминант центральным? Далее мы всегда предполагаем, что ранг симметрии R равен m.

Мы говорим, что монический многочлен $ch(t)$ степени m является *характеристическим* для матрицы L, если $ch(L) = 0$. По теореме Кэли–Гамильтона в классическом случае $R = F = P$ (соответствующая алгебра $\mathcal{L}(P,P)$ коммутативна) характеристический многочлен имеет вид

$$ch(t) = \det_{\mathcal{L}(P,P)}(L - tI).$$

Предложение 1. *Если R – симметрия Гекке, то в алгебре $\mathcal{L}(R,R)$ имеет место следующее равенство*:

$$\det_{\mathcal{L}(R,R)}(L - tI) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} (-t)^{m-k} \alpha_k e_k, \tag{3.1}$$

где $\alpha_k = q^{mk} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \frac{k_q!\,(m-k)_q!}{m_q!}$.

Заметим, что аналогичные утверждения можно найти в [14].

Доказательство. Для любой четной симметрии Гекке ранга m формула (2.16) принимает вид

$$(v \cdot_R u) = q^{-m^2}.$$

Это вытекает из равенства (см. работу [6])

$$\mathrm{Tr}_{R(k+1\dots m)}\,A^{(m)}_{1\dots m}=q^{-m(m-k)}\,\frac{k_q!(m-k)_q!}{m_q!}A^{(k)}_{1\dots k}\tag{3.2}$$

при $k=0$. Теперь в разложении элемента

$$q^{m^2}\,\det_{\mathcal{L}(R,R)}(L-tI)=\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\,A^{(m)}_{1\dots m}(L-tI)_{\bar 1}\dots(L-tI)_{\overline{m}}$$

соберем вместе члены, содержащие k стоящих на некоторых местах множителей вида $L_{\bar i}$ и единичные матрицы в остальных позициях. Такие члены равны друг другу, и их количество равно $\frac{m!}{k!\,(m-k)!}$. Это вытекает из того, что[7] для любого упорядоченного подмножества индексов $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant m$

$$\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\,A^{(m)}_{1\dots m}L_{\bar i_1}L_{\bar i_2}\dots L_{\bar i_k}=\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\,A^{(m)}_{1\dots m}L_{\bar 1}L_{\bar 2}\dots L_{\bar k}.$$

Теперь достаточно применить формулу (3.2), и мы окончательно находим, что

$$\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)}\,A^{(m)}_{1\dots m}\,L_{\bar 1}\dots L_{\bar k}=q^{-m(m-k)}\,\frac{k_q!(m-k)_q!}{m_q!}\,e_k(L).$$

Тем самым доказательство завершено.

Если R является инволютивной симметрией, то, положив $q=1$ в (3.1), получим следующее утверждение.

Предложение 2. *Если R – инволютивная симметрия, то* $\det_{\mathcal{L}(R,R)}(L-tI)$ *есть характеристический многочлен.*

Если R – симметриия Гекке, то $\det_{\mathcal{L}(R,R)}(L-tI)$ не является характеристическим многочленом. Однако мы получим характеристический многочлен, если в правой части равенства (3.1) заменим α_k на q^k. Как результат имеем

$$ch(t):=t^m-qe_1t^{m-1}+q^2e_2t^{m-2}+\dots+(-q)^{m-1}e_{m-1}t+(-q)^me_m.$$

Отсюда, подставив в этот многочлен $t=L$, получаем тождество Кэли–Гамильтона для матрицы L:

$$L^m-qe_1L^{m-1}+q^2e_2L^{m-2}+\dots+(-q)^{m-1}e_{m-1}L+(-q)^me_mI=0.$$

Отметим, что первое доказательство этого тождества в алгебрах $\mathcal{L}(R,R)$ было дано в статье [15].

Теперь перейдем ко второму вопросу. Хорошо известно, что если симметрия Гекке R возникает из квантовой группы $U_q(sl(N))$, то $\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)$ является центральным [10]. Если в данной RTT-алгебре $\mathcal{L}(R,P)$ квантовый детерминант является центральным, то, наложив условие $\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)=1$, в факторалгебре мы можем задать структуру алгебры Хопфа. Однако в общем случае квантовый детерминант не является центральным в алгебрах $\mathcal{L}(R,P)$. Как было показано в работе [2], $\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)$ центральный тогда и только тогда, когда матрица

$$M=\|M_i^j\|,\quad\text{где}\quad M_i^j=u_{ii_2\dots i_m}v^{i_2\dots i_m\,j},$$

скалярна.

[7] Подчеркнем, что если $F\neq R$, то данное свойство не выполняется.

Изучим центральность квантовых детерминантов в алгебрах $\mathcal{L}(R,P)$, соответствующих симметриям (2.6). Путем непосредственных вычислений мы получаем для двух симметрий из (2.6) матрицы M вида

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \qquad -\frac{1}{2_q}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квантовый детерминант не является центральным в алгебре $\mathcal{L}(R,P)$, соответствующей инволютивной симметрии из (2.6), и является центральным в алгебре, соответствующей симметрии Гекке из (2.6). Наоборот, в RE-алгебрах $\mathcal{L}(R,R)$ квантовый детерминант всегда является центральным. Поэтому, наложив условие $\det_{\mathcal{L}(R,R)}(L)=1$, в факторалгебре мы получаем структуру сплетенной алгебры Хопфа (см. работу [11]).

Теперь обсудим способ сведения квантовых детерминантов к так называемым столбцовым и строчным детерминантам, играющим важную роль в теории интегрируемых систем. Положим $F=P$, т. е. рассмотрим RTT-алгебру $\mathcal{L}(R,P)$. Используя соотношение (2.14), получаем следующее равенство:

$$u_{i_1\dots i_m}v^{j_1\dots j_m}l_{j_1}^{k_1}\dots l_{j_m}^{k_m}=u_{i_1\dots i_m}\langle \mathrm{v}|L_1\dots L_m|\mathrm{u}\rangle v^{k_1\dots k_m}.$$

Поскольку тензор $\mathrm{u}\not\equiv 0$, множители $u_{i_1\dots i_m}$ можно сократить. Предположим также, что $m=N$ и $v^{12\dots N}=1$. Это условие можно удовлетворить надлежащей нормировкой тензора v, если $v^{12\dots N}\neq 0$. Отсюда получаем

$$\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)=v^{j_1\dots j_N}l_{j_1}^{1}\dots l_{j_N}^{N}. \tag{3.3}$$

Именно такая форма квантового детерминанта называется *столбцовым детерминантом* матрицы L. Он характеризуется тем свойством, что в каждом из его слагаемых множители l_i^j задаются в том же порядке, что и столбцы матрицы L, пронумерованные верхними индексами в l_i^j. Заметим, что если $m\neq N$, то у нас нет выделенной компоненты тензора v (подобной компоненте $v^{12\dots N}$).

Аналогичным образом, если множители в каждом из слагаемых детерминанта заданы в порядке строк матрицы L, мы называем его *строчным детерминантом*. Если $m=N$ и $u_{12\dots N}\neq 0$, то мы можем преобразовать канонический детерминант $\det_{\mathcal{L}(R,P)}$ к виду строчного детерминанта:

$$\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)=l_1^{i_1}\dots l_N^{i_N}u_{i_1\dots i_N}. \tag{3.4}$$

Заметим, что столбцовый (строчный) детерминант зависит только от тензора v (соответственно от тензора u). Таким образом, если две симметрии имеют одинаковые тензоры v, но разные тензоры u, то мы получаем одинаковый вид столбцовых детерминантов, но разные строчные детерминанты. Это как раз случай симметрий (2.6), рассмотренных выше. Мы видим, что столбцовые детерминанты (средние выражения в (2.8) и (2.9)) равны друг другу, но строчные детерминанты (правые выражения) различаются.

Теперь введем многомерные аналоги симметрий (2.6) и представим соответствующие квантовые детерминанты в алгебрах $\mathcal{L}(R,P)$.

Симметрия Гекке R, возникающая из квантовой группы $U_q(sl(N))$, имеет вид

$$R_{ij}^{kl}=q^{\delta_{k,l}}\delta_j^k\delta_i^l+(q-q^{-1})\theta_{(l>k)}\delta_i^k\delta_j^l,$$

где $\theta_{(l>k)} = 1$ при $l > k$ и $\theta_{(l>k)} = 0$ при $l \leqslant k$. Введем также инволютивную симметрию R, задав ее действие на базисные векторы $x_i \otimes x_j$ в пространстве $V^{\otimes 2}$:

$$R(x_i \otimes x_i) = x_i \otimes x_i, \qquad R(x_i \otimes x_j) = \begin{cases} qx_j \otimes x_i, & \text{если } i < j, \\ q^{-1}x_j \otimes x_i, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Для обеих симметрий компоненты тензоров u и v нетривиальны, если и только если их индексы попарно различаются, и нетривиальные компоненты тензора v можно выбрать как

$$v^{j_1\cdots j_N} = (-q)^{l(\sigma)},$$

где $l(\sigma)$ – длина (т. е. минимальное число транспозиций) перестановки

$$\sigma\colon\ (1\dots N) \mapsto (j_1\dots j_N).$$

Иногда такой v называется q-тензором Леви-Чивиты.

Что касается тензоров u для данных симметрий, то они соответственно равны

$$u_{i_1\dots i_N} = \alpha_1(-q)^{l(\sigma)}, \qquad u_{i_1\dots i_N} = \alpha_2(-q^{-1})^{l(\sigma)},$$

где $\alpha_1^{-1} = q^{N(N-1)/2}N_q!$, $\alpha_2^{-1} = N!$ – нормировочные множители.

Аналогично приведенному выше двумерному примеру мы имеем для обеих симметрий одно и то же “квантовое координатное кольцо”

$$x_ix_j = qx_jx_i, \qquad i < j,$$

часто называемое *квантовым тором* (при дополнительном условии обратимости генераторов).

Формулы для квантовых столбцовых детерминантов в обеих RTT-алгебрах также одинаковы:

$$\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L) = \sum_\sigma (-q)^{l(\sigma)} l^1_{j_1}\dots l^N_{j_N}.$$

В указанном виде квантовый детерминант $\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)$ для RTT-алгебры, связанной с $U_q(sl(N))$-симметрией R, был приведен в работе [10]. Однако тензоры u, соответствующие рассматриваемым симметриям, различны. Следовательно, строчные детерминанты в соответствующих RTT-алгебрах отличаются друг от друга.

В заключение данного раздела обратимся к ПКА и соответствующим квантовым детерминантам. Вновь рассмотрим совместную пару (R, F), где R – кособратимая симметрия Гекке. Введем две системы соотношений для производящей матрицы $L = \|l^i_j\|_{1\leqslant i,j\leqslant N}$:

$$S^{(2)}L_{\bar 1}L_{\bar 2}A^{(2)} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad L_{\bar 1}L_{\bar 2}A^{(2)} = A^{(2)}L_{\bar 1}L_{\bar 2}A^{(2)}, \tag{3.5}$$

$$A^{(2)}L_{\bar 1}L_{\bar 2}S^{(2)} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad A^{(2)}L_{\bar 1}L_{\bar 2} = A^{(2)}L_{\bar 1}L_{\bar 2}A^{(2)}, \tag{3.6}$$

где R-симметризатор $S^{(2)}$ и R-кососимметризатор $A^{(2)}$ определены в (2.1). Матрицы с индексами с черточкой сверху те же, что и выше (см. соотношение (2.2)).

Следующее утверждение хорошо известно и может быть проверено непосредственно.

Предложение 3. *Система* (2.3) *эквивалентна объединению систем* (3.5), (3.6).

Наложив на генераторы только половину соотношений (только (3.5) или только (3.6)), мы получим алгебру, бо́льшую чем $\mathcal{L}(R,F)$. Тем не менее даже в ней можно ввести некоторые элементы линейной алгебры. Мы отсылаем читателя к статье [4], где эти алгебры вводились и изучались. Некоторые частные случаи таких алгебр также были рассмотрены в [16] и [7], где они назывались матрицами Манина и q-матрицами Манина.

Мы называем правой (левой) ПКА унитальную алгебру, определяющуюся системой (3.5) (соответственно системой (3.6)). Мы обозначаем эти ПКА как $\mathcal{H}_{\mathrm{r}}(R,F)$ и $\mathcal{H}_\ell(R,F)$. Если R – четная симметрия, то мы задаем квантовый детерминант в алгебре $\mathcal{H}_\epsilon(R,F)$, $\epsilon\in\{\mathrm{r},\ell\}$, по формуле (2.5) и обозначаем его как $\det_{\mathcal{H}_\epsilon(R,F)}(L)$.

Квантовые элементарные симметрические многочлены в алгебрах $\mathcal{H}_\epsilon(R,F)$ попрежнему задаются формулами (2.13), где проекторы $A^{(k)}$ могут быть передвинуты в крайнее правое положение или поставлены на любую из двух позиций: справа и слева от цепочки матриц L.

Заметим, что квантовый детерминант в алгебре $\mathcal{H}_\epsilon(R,F)$ опять же отличается от высшего квантового элементарного симметрического многочлена на некий множитель.

Замечание. Впервые алгебры такого типа рассматривались в монографии Манина [17]. Их определение было мотивировано следующим соображением. Наделим пространство V кодействием RTT-алгебры на генераторы, $x_i\to t_i^j\otimes x_j$, и продолжим кодействие на всё пространство V, предположив, что генераторы x_i и t_k^j коммутируют. Тогда соотношения (3.5) (соотношения (3.6)), где мы берем $F=P$, означают, что подпространство $\operatorname{Im}A^{(2)}$ (соответственно подпространство $\operatorname{Im}S^{(2)}$) сохраняется при этом кодействии. Однако если $F\neq P$, то предположение о коммутативности генераторов x_i и t_k^j более не применимо.

Поскольку равенство (2.14) имеет место в любой левой ПКА, квантовый детерминант $\det_{\mathcal{H}_\ell(R,P)}(L)$, где P – одна из симметрий (2.6) или ее более высокоразмерный аналог, может быть приведен к виду столбцового детерминанта. При этом в любой правой ПКА квантовый детерминант можно привести к виду строчного детерминанта. Однако в любой ПКА соотношений между образующими не хватает, чтобы доказать, что элементарные многочлены коммутируют друг с другом.

4. ОБОБЩЕННЫЕ ЯНГИАНЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА СИСТЕМЫ ЧЕРВОВА–ФАЛЬКИ–РУБЦОВА–СИЛАНТЬЕВА

Прежде всего опишем процедуру бакстеризации, которая позволяет построить токовые брейдинги с помощью инволютивных симметрий и симметрий Гекке (см. работы [18], [19]). Уточним, что под токовым брейдингом $R(u,v)$ мы подразумеваем оператор, зависящий от параметров и подчиняющийся соотношению кос следующего вида:

$$R_{12}(u,v)R_{23}(u,w)R_{12}(v,w)=R_{23}(v,w)R_{12}(u,w)R_{23}(u,v). \tag{4.1}$$

Заданной инволютивной симметрии R сопоставим токовый брейдинг по правилу

$$R(u,v)=R-\frac{I}{u-v}; \tag{4.2}$$

для симметрии Гекке R соответствующий токовый брейдинг имеет вид

$$R(u,v) = R - \frac{(q-q^{-1})uI}{u-v}. \tag{4.3}$$

Простым вычислением можно убедиться, что эти операторы удовлетворяют соотношению (4.1). Токовые брейдинги (4.2) и (4.3) (и любые отвечающие им алгебры) будут соответственно называться *рациональными* и *тригонометрическими*.

Введем счетное множество элементов $l^i_j[k]$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $1 \leqslant i,j \leqslant N$, и рассмотрим формальные степенные ряды

$$L(u) = \sum_{k\geqslant 0} L[k]u^{-k}, \quad L[k] = \|\, l^j_i[k] \,\|_{1\leqslant i,j\leqslant N}, \tag{4.4}$$

иначе говоря, $L(u)$ – это $(N\times N)$-матрица, элементы которой представляют собой степенные ряды по u^{-1} с коэффициентами $l^i_j[k]$.

Обобщенный янгиан $\mathbf{Y}(R,F)$ – это ассоциативная унитальная алгебра, порожденная элементами $l^i_j[k]$, подчиняющимися системе соотношений

$$R_{12}(u,v)L_{\bar 1}(u)L_{\bar 2}(v) - L_{\bar 1}(v)L_{\bar 2}(u)R_{12}(u,v) = 0, \tag{4.5}$$

где $L_{\bar 1}(u) = L_1(u)$ и $L_{\bar 2}(u) = F_{12}L_{\bar 1}(u)F_{12}^{-1}$. Заметим, что, разлагая в ряд матрицу $L(u)$ в соответствии с (4.4), мы получаем счетный набор полиномиальных соотношений для генераторов $l^j_i[k]$.

В случае $F=R$ алгебра $\mathbf{Y}(R,R)$ с дополнительным условием $L[0]=I$ называется *сплетенным или обобщенным янгианом RE-типа* (детали см. в [5]). Условие $L[0]=I$ обусловлено оценочным морфизмом аналогично случаю янгиана Дринфельда $\mathbf{Y}(gl(N))$. Заметим, что янгиан Дринфельда является частным случаем рациональных янгианов, соответствующим симметрии $R=F=P$.

Заметим, что для выделенного значения отношения $u/v=q^2$ в тригонометрическом случае систему (4.5) можно рассматривать в терминах ПКА. Аналогичное рассмотрение мжно применить в рациональном случае, если $u-v=1$. Точнее, при указанной связи между параметрами u и v токовый брейдинг $R(u,v)$ становится равным (с точностью до числового множителя) R-кососимметризатору $A^{(2)}$. Таким образом, в рациональном и тригонометрическом случаях мы приходим соответственно к соотношениям

$$\begin{aligned} A^{(2)}L_{\bar 1}(u)L_{\bar 2}(u-1) &= L_{\bar 1}(u-1)L_{\bar 2}(u)A^{(2)},\\ A^{(2)}L_{\bar 1}(u)L_{\bar 2}(q^{-2}\,u) &= L_{\bar 1}(q^{-2}\,u)L_{\bar 2}(u)A^{(2)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Следовательно, в рациональном и тригонометрическом случаях мы имеем соответственно

$$\begin{aligned} &A^{(2)}L_{\bar 1}(u)L_{\bar 2}(u-1)S^{(2)} = 0, \qquad S^{(2)}L_{\bar 1}(u-1)L_{\bar 2}(u)A^{(2)} = 0,\\ &A^{(2)}L_{\bar 1}(u)L_{\bar 2}(q^{-2}\,u)S^{(2)} = 0, \qquad S^{(2)}L_{\bar 1}(q^{-2}\,u)L_{\bar 2}(u)A^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя формальные разложения в ряд Тейлора

$$L(u-1) = e^{-\partial_u}L(u)e^{\partial_u}, \qquad L(q^{-2}u) = q^{-2u\partial_u}L(u)q^{2u\partial_u},$$

где $\partial_u = d/du$, можно переписать (4.7) для рационального и тригонометрического случаев соответственно как

$$A^{(2)}(e^{-\partial_u}L_{\bar 1}(u))(e^{-\partial_u}L_{\bar 2}(u))S^{(2)}=0, \qquad S^{(2)}(e^{\partial_u}L_{\bar 1}(u))(e^{\partial_u}L_{\bar 2}(u))A^{(2)}=0,$$
$$A^{(2)}(q^{-2u\partial_u}L_{\bar 1}(u))(q^{-2u\partial_u}L_{\bar 2}(u))S^{(2)}=0, \qquad S^{(2)}(q^{2u\partial_u}L_{\bar 1}(u))(q^{2u\partial_u}L_{\bar 2}(u))A^{(2)}=0.$$

Таким образом, оператор $e^{-\partial_u}L(u)$ (оператор $q^{-2u\partial_u}\,L(u)$) играет роль производящей матрицы левой ПКА, а оператор $e^{\partial_u}L(u)$ (соответственно оператор $q^{2u\partial_u}L(u)$) играет роль производящей матрицы правой ПКА.

Теперь определим квантовые элементарные симметрические многочлены в рациональном и тригонометрическом случаях следующим образом:

$$\begin{aligned} &e_0(u)=1, \quad e_k(u)=\mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}\,A^{(k)}\,L_{\bar 1}(u)\,L_{\bar 2}(u-1)\dots L_{\bar k}(u-k+1),\\ &e_0(u)=1, \quad e_k(u)=\mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}\,A^{(k)}\,L_{\bar 1}(u)\,L_{\bar 2}(q^{-2}u)\dots L_{\bar k}(q^{-2(k-1)}u),\end{aligned} \qquad k\geqslant 1.$$

Мы видим, что в этих формулах проекторы $A^{(k)}$ могут быть поставлены после цепочки матриц L или на двух местах: справа и слева от цепочки матриц L. Кроме того, параметры матриц могут быть записаны в обратном порядке. Все эти преобразования приводят к одинаковым результатам.

Пусть R – четная симметрия ранга m. Зададим квантовые детерминанты в обобщенных рациональных и тригонометрических янгианах соответственно как

$$\det{}_{\mathbf{Y}(R,F)}(L(u)) = \langle \mathrm{v}|L_{\bar 1}(u)\,L_{\bar 2}(u-1)\dots L_{\overline{m}}(u-m+1)|\mathrm{u}\rangle,$$
$$\det{}_{\mathbf{Y}(R,F)}(L(u)) = \langle \mathrm{v}|L_{\bar 1}(u)\,L_{\bar 2}(q^{-2}u)\dots L_{\overline{m}}(q^{-2(m-1)}u)|\mathrm{u}\rangle.$$

Заметим, что квантовый детерминант с точностью до множителя равен высшему элементарному симметрическому многочлену $e_m(u)$ в полной аналогии с (2.15). Если $F=P$, то это равенство является точным.

Рассмотрим случай $F=P$ более подробно. Предположив, что $m=N$ и компоненты $v^{1\dots N}$, $u_{1\dots N}$ не являются тривиальными, можно привести квантовый детерминант к виду строчного или столбцового детерминанта: в рациональном случае

$$\det{}_{\mathbf{Y}(R,P)}(L) = v^{j_1\dots j_N} l^1_{j_1}(u)\dots l^N_{j_N}(u-N+1) = u_{i_1\dots i_N} l^{i_1}_1(u-N+1)\dots l^{i_N}_N(u),$$

а в тригонометрическом

$$\det{}_{\mathbf{Y}(R,P)}(L) = v^{j_1\dots j_N} l^1_{j_1}(u)\dots l^N_{j_N}(q^{-2(N-1)}u) = u_{i_1\dots i_N} l^{i_1}_1(q^{-2(N-1)}u)\dots l^{i_N}_N(u).$$

Теперь выберем R как первую (инволютивную) симметрию из (2.6) или как ее многомерный аналог. Поскольку в этом случае обобщенный янгиан рациональный, мы можем записать квантовый детерминант следующим образом:

$$\begin{aligned}\det{}_{\mathbf{Y}(R,P)}(L) &= \sum_\sigma (-q)^{l(\sigma)} l^1_{\sigma(1)}(u)\dots l^N_{\sigma(N)}(u-N+1) =\\ &= \sum_\sigma (-q^{-1})^{l(\sigma)} l^{\sigma(1)}_1(u-N+1)\dots l^{\sigma(N)}_N(u).\end{aligned}$$

В случае $U_q(sl(N))$-симметрий R обобщенный янгиан является тригонометрическим. Следовательно,

$$\begin{aligned}\det_{\mathbf{Y}(R,P)}(L) &= \sum_{\sigma}(-q)^{l(\sigma)} l^1_{\sigma(1)}(u)\ldots l^N_{\sigma(N)}(q^{-2(N-1)}u) = \\ &= \sum_{\sigma}(-q)^{l(\sigma)} l_1^{\sigma(1)}(q^{-2(N-1)}u)\ldots l_N^{\sigma(N)}(u).\end{aligned}$$

Отметим, что аргументы матриц в выражениях для столбцового детерминанта стоят в обратном порядке по сравнению с выражением для строчного детерминанта. Кроме того, следует обратить внимание, что аналогично случаю алгебр $\mathcal{L}(R,F)$ квантовый детерминант всегда является центральным в обобщенных янгианах $\mathbf{Y}(R,R)$ RE-типа, но это не так в янгианах $\mathbf{Y}(R,P)$ RTT-типа. Точнее, квантовый детерминант $\det_{\mathbf{Y}(R,P)}(L)$ является центральным, если и только если таковым является квантовый детерминант $\det_{\mathcal{L}(R,P)}(L)$. Это свойство было доказано в [5].

Можно также определить квантовые версии степенных сумм в любых обобщенных янгианах, и в них во всех имеют место некоторые квантовые версии тождества Кэли–Гамильтона. Подалгебра в обобщенном янгиане $\mathbf{Y}(R,F)$, порожденная квантовыми элементарными многочленами, называется подалгеброй Бете и обозначается как $\mathcal{B}(R,F)$.

Предложение 4 [20]. *Для любой совместной пары брейдингов (R,F), в которой R – кософбратимая инволютивная симметрия или симметрия Гекке, подалгебра $\mathcal{B}(R,F)\subset \mathbf{Y}(R,F)$ является коммутативной.*

Частный случай этого утверждения, соответствующий $F=P$ и симметрии R, происходящей из квантовой группы $U_q(sl(N))$, был доказан в работе [7] (отметим, что при этом формулу для проекторов $A^{(k)}$ следует взять в виде (2.1)).

Обобщенные янгианы RE-типа обладают очень важным свойством: они допускают оценочные морфизмы. Такие морфизмы были построены в работе [5]. И в рациональном, и в тригонометрическом случаях они имеют вид, аналогичный оценочному отображению в янгиане Дринфельда $\mathbf{Y}(P,P)$:

$$L(u)\mapsto 1+\frac{M}{u}.$$

Однако алгебры, порождающиеся элементами матрицы M, различны: для рациональных обобщенных янгианов это модифицированная RE-алгебра, соответствующая симметрии R, а в тригонометрическом случае – немодифицированная RE-алгебра.

В заключение сделаем небольшое замечание. Как мы уже говорили, невозможно доказать коммутативность квантовых элементарных многочленов в ПКА. Однако в обобщенных янгианах соотношения (4.6) позволяют установить это свойство, поскольку на них наложены более ограничительные условия по сравнению с определяющими соотношениями в ПКА.

Благодарности. Авторы признательны Владимиру Рубцову за проясняющие обсуждения.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, "Quantum spectral transform method. Recent developments", *Integrable Quantum Field Theories*, Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, New York, 1982, 61–119.

[2] Д. И. Гуревич, "Алгебраические аспекты квантового уравнения Янга–Бакстера", *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 119–148.

[3] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, "On quantum matrix algebras satisfying the Cayley–Hamilton–Newton identities", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:9 (1999), L115–L121.

[4] A. Isaev, O. Ogievetsky, "Half-quantum linear algebra", *Symmetries and Groups in Contemporary Physics* (Tianjin, China, 20–26 August, 2012), Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, **11**, eds. C. Bai, J.-P. Gazeau, M.-L. Ge, World Sci., Singapore, 2013, 479–486.

[5] D. Gurevich, P. Saponov, "Braided Yangians", *J. Geom. Phys.*, **138** (2019), 124–143.

[6] D. Gurevich, P. Saponov, "From reflection equation algebra to braided yangians", *Recent Developements in Integrable Systems and Related Topics of Mathematical Physics* (Kezenoi-Am, Russia, 2016), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **273**, eds. V. M. Buchstaber, S. Konstantinou-Rizos, A. V. Mikhailov, Springer, Cham, 2018, 3–23.

[7] A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov, A. Silantyev, "Algebraic properties of Manin matrices II: q-analogues and integrable systems", *Adv. Appl. Math.*, **60** (2014), 25–89.

[8] A. Gyoja, "A q-analogue of Young symmetrizers", *Osaka J. Math.*, **23**:4 (1986), 841–852.

[9] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, "q-Multilinear algebra", *Lie Theory and its Applications in Physics III* (Clausthal, Germany, 11–14 July, 1999), eds. H.-D. Doebner, V. K. Dobrev, J. Hilgert, World Sci., Singapore, 2000, 268–279.

[10] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, "Квантование групп Ли и алгебр Ли", *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.

[11] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, "Теория представлений алгебры (модифицированного) уравнения отражений $GL(m|n)$ типа", *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 70–133.

[12] В. В. Любашенко, "Алгебры Хопфа и вектор-симметрии", *УМН*, **41**:5(251) (1986), 185–186.

[13] В. В. Любашенко, *Суперанализ и решение уравнений треугольников*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1986.

[14] А. П. Исаев, "R-матричный подход к дифференциальному исчислению на квантовых группах", *ЭЧАЯ*, **28**:3 (1997), 685–752; A. P. Isaev, *Quantum groups and Yang–Baxter equations*, preprint MPI-04 132, Max-Plank-Institut für Matematik, Bonn, Germany, 2004, http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/mpi_mathematik/2004/132.pdf.

[15] D. I. Gurevich, P. N. Pyatov, P. A. Saponov, "Hecke symmetries and characteristic relations on reflection equation algebras", *Lett. Math. Phys.*, **41**:3 (1997), 255–264.

[16] A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov, "Algebraic properties of Manin matrices. I", *Adv. Appl. Math.*, **43**:3 (2009), 239–315.

[17] Yu. I. Manin, *Quantum Groups and Noncommutative Geometry*, Springer, Cham, 2018.

[18] M. Jimbo, "A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang–Baxter equation", *Lett. Math. Phys.*, **10**:1 (1985), 63–69.

[19] V. Jones, "Baxterization", *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:12 (1991), 2035–2043.

[20] D. Gurevich, P. Saponov, A. Slinkin, "Bethe subalgebras in braided Yangians and Gaudin-type models", *Commun. Math. Physics*, **374** (2020), 689–704.

Поступила в редакцию 24.12.2020,
после доработки 13.01.2021,
принята к публикации 14.01.2021