

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.42; 517.54

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-7-11

Е.С. Алексеева, А.Э. Рассадин

### О конформных отображениях в теории гамильтоновых систем на плоскости

*Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова; Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, 1; kometarella@mail.ru, brat\_ras@list.ru*

В статье вычисляется приближённое конформное отображение внешней области фазовой плоскости, ограниченной фазовой траекторией осциллятора со слабой нелинейностью, на внешность единичного круга. Целью является прояснение связи гамильтоновых систем на плоскости с открытой в начале нашего столетия процедурой эффективизации теоремы Римана о существовании конформного отображения.

Ключевые слова: *симплектическая структура, голоморфная функция, гармонические моменты Ричардсона, бесконечно удалённая точка, задача Коши, теория возмущений.*

Как хорошо известно, с двумерной плоскостью в математике связаны два гладких объекта с весьма нетривиальными свойствами. Первый из этих объектов – это функции, голоморфные в области  $D$  комплексной плоскости  $S$ :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad z \in D. \quad (1)$$

Требование голоморфности функций (1) в различных математических ситуациях обеспечивает справедливость для них таких утверждений, как теорема Лиувилля, принцип максимума модуля, лемма Шварца и т. д., демонстрирующих резкие отличия поведения голоморфных функций от поведения гладких функций вещественного переменного [1].

Второй объект – это гамильтоновы системы с одной степенью свободы:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x) \quad (2)$$

с различными потенциальными энергиями  $U(x)$ .

С одной стороны, такая система является хрестоматийным примером, давно вошедшим в известные учебники [2, 3], потому что линии уровня функции Гамильтона (2)

$$H(x, y) = h, \quad (3)$$

где постоянная  $h$  является энергией системы, задают слоение её фазовой плоскости  $(x, y)$  [4].

С другой стороны, простота её обманчива, поэтому система (2) до настоящего времени остаётся в фокусе современных исследований [5].

Например, хорошо известно [2, 3], что вблизи минимума потенциальной энергии  $U(x)$  уравнение (3) задаёт на фазовой плоскости  $(x, y)$  однопараметрическое семейство  $\gamma_h$  замкнутых фазовых траекторий. В частности, если такая фазовая траектория  $\gamma_h$  охватывает выпуклую область, то, как доказано в [6], для достаточно широкого класса функций  $U(x)$  справедливо следующее тождество:

$$\int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \frac{|U'^2(x) + 2U''(x)[h - U(x)]|}{U'^2(x) + 2[h - U(x)]} \frac{dx}{\sqrt{2[h - U(x)]}} = \pi, \quad (4)$$

где  $x_{\pm}(h)$  – координаты точек поворота, то есть нули уравнения  $U(x_{\pm}) = h$ .

В качестве другого примера приведём известную формулу [2, с. 43] для определения потенциальной энергии  $U(x)$  по периоду  $T(h)$  колебаний частицы в этой потенциальной яме:

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^U \frac{T(h)dh}{\sqrt{U-h}}, \quad (5)$$

причём при выводе формулы (5) предполагается, что  $U(0) = 0$  и что потенциальная энергия является чётной функцией:  $U(-x) = U(x)$ .

Однако период колебаний  $T(h)$  может быть выражен через переменную действия  $I(h) = \frac{1}{\pi} \int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \sqrt{2[h - U(x)]} dx$  системы (2) следующим образом:

$$T(h) = 2\pi \frac{dI(h)}{dh}. \quad (6)$$

Совместно рассмотрев формулы (5) и (6), мы видим, что форма потенциальной энергии  $U(x)$  однозначно связана со скоростью роста площади, заметаемой за период на фазовой плоскости  $(x, y)$  фазовой траекторией  $\gamma_h$  системы (2) при финитном движении с энергией  $h$ .

Ясно, что описанные выше свойства (4)–(6) системы (2) связаны с симплектической структурой [3, 4], которую вводит на её фазовой плоскости 2-форма  $\omega = dy \wedge dx$ .

Естественным образом возникает вопрос: существует ли связь между комплексной структурой системы (1) и симплектической структурой системы (2)? Ответить на него можно следующим образом: замкнутая фазовая траектория  $\gamma_h$  системы (2), содержащая начало координат, разделяет её фазовую плоскость  $(x, y)$  на две области:  $D_h^+ = \{(x, y) | H(x, y) < h\}$  и  $D_h^- = \{(x, y) | H(x, y) > h\}$ . Однако ничто не мешает нам рассматривать область  $D_h^-$  как часть комплексной плоскости  $C$  и даже включить в неё бесконечно удалённую точку. В этом случае в силу известной теоремы Римана существует конформное отображение области  $D_h^-$  на какую-либо тестовую область  $\tilde{D}$ , задаваемое некоторой голоморфной функцией [1]. Более того, если область  $\tilde{D}$  является внешностью единичного круга  $\tilde{D} = \{w \in C | |w| > 1\}$ , то, согласно результатам работы [7], это отображение задаётся голоморфной функцией вида:

$$\ln f(z, t) = \ln z - \frac{\partial}{\partial t_0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right) F(t), \quad (7)$$

где

$$F(t) = -\frac{1}{\pi^2} \iint \ln |z_1^{-1} - z_2^{-1}| d^2 z_1 d^2 z_2 \quad (8)$$

– функция счётного числа переменных  $t = (t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \dots)$ :

$$t_0 = \frac{1}{\pi} \int d^2 z, \quad t_k = -\frac{1}{\pi k} \int z^{-k} d^2 z, \quad d^2 z \equiv dx dy, \quad (9)$$

которые называются гармоническими моментами Ричардсона области  $D_h^+$  [8] (интегрирование в первой из формул (9) ведётся по области  $D_h^+$ , во второй из формул (9) – по области  $D_h^-$ , а в формуле (8) – по области  $D_h^+ \times D_h^+$ ).

Чтобы воспользоваться формулой (7), необходимо вычислить функцию (8). В работе [9] для неё дан ряд Тейлора по переменным (9):

$$F(t) = \sum N(j|j_1, \dots, j_k | \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_k) t_0^j \cdot t_{j_1} \cdot \dots \cdot t_{j_1} \cdot \bar{t}_{\bar{j}_1} \cdot \dots \cdot \bar{t}_{\bar{j}_k}. \quad (10)$$

Однако коэффициенты  $N(j|j_1, \dots, j_k | \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_k)$  ряда (10) вычисляются с помощью слишком громоздких формул [9], гармонические моменты Ричардсона (9) для произвольной области тоже определить весьма сложно, поэтому зачастую в каждой конкретной ситуации целесообразно применять стратегию *ad hoc*, а не обращаться к общим формулам (7)–(10).

Например, пусть в функции Гамильтона (2) выбран следующий потенциал  $U(x)$ :

$$U(x) = \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^3}{3}, \quad (11)$$

причём параметр  $\varepsilon$  считается малым параметром:  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Гамильтоновы уравнения движения системы (2) с потенциалом (11) сводятся к уравнению осциллятора со слабой нелинейностью вида:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0. \quad (12)$$

Как обычно, точки над буквой обозначают дифференцирование по времени.

Далее, поставим для уравнения (12) задачу Коши:

$$x(0) = a_0, \dot{x}(0) = 0. \quad (13)$$

Применяя к уравнению (12) теорию возмущений, изложенную в [2], найдём его асимптотическое решение с точностью до второго порядка по  $\varepsilon$ :

$$x(t) = a_0 \cos t + \frac{\varepsilon a_0^2}{6} (-3 + 2 \cos t + \cos 2t) + O(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Дифференцируя эту формулу по времени, получим приближённое выражение для импульса системы:

$$y(t) = -a_0 \sin t - \frac{\varepsilon a_0^2}{3} (\sin t + \sin 2t) + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

Подчеркнём, что в выражениях (14) и (15) начальные условия (13) удовлетворяются.

Формулы (14) и (15) дают приближённое параметрическое представление фазовой траектории уравнения (12). График этой кривой при  $a_0 = 2$  и  $\varepsilon = 0,09$  представлен на рис. 1. Из рис. 1 видно, что эта фазовая траектория близка и по положению, и по кривизне к окружности радиуса  $a_0$ , соответствующей фазовой траектории гармонического осциллятора с единичной циклической частотой. Значит, применяя технику отображения близких областей, изложенную в монографии [10, гл. 4], можно построить приближённое конформное отображение внешности области с границей  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , задаваемой функциями (14) и (15), на внешность единичного круга  $\tilde{D}$ .

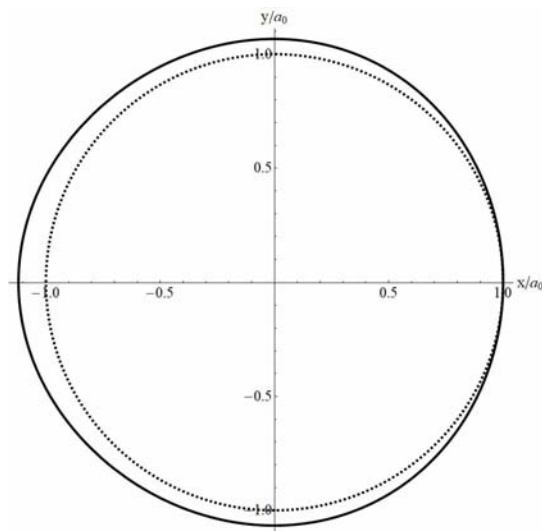


Рис. 1. Фазовые траектории нелинейного (сплошная линия) и линейного (пунктирная линия) осцилляторов с одинаковыми начальными условиями

Для такого отображения имеется следующая общая формула (см. [10] и ссылки там):

$$w = \frac{z}{a_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [r(t) - 1] \frac{e^{it+z/a_0}}{e^{it-z/a_0}} dt \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (16)$$

где  $r(t)$  – полярный радиус границы отображаемой области.

Используя выражения (14 и 15), находим эту величину в рассматриваемом случае:

$$r(t) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a_0^2}} = 1 + \frac{\varepsilon a_0}{12} (4 - 3 \cos t - \cos 3t) + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в формулу (16) и проведя интегрирование, получим искомое отображение:

$$w = \frac{z}{a_0} + \frac{\varepsilon a_0}{12} \frac{z}{a_0} \left( 4 - 3 \frac{z}{a_0} - \frac{z^3}{a_0^3} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (18)$$

Асимптотическая формула (18) представляет собой существенное упрощение общих формул (7)–(9) для данного конкретного случая – внешности области  $D_h^-$ , ограниченной фазовой траекторией:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon \frac{x^3}{3} = \frac{a_0^2}{2} + \varepsilon \frac{a_0^3}{3} \equiv h \quad (19)$$

при малых  $\varepsilon$ .

Ясно также, что хотя структура выражения (18) не совпадает с каноническим видом [1, гл. 9]

$$f(z, t) = p_0(t)z + \sum_{j=0}^{\infty} p_{j+1}(t)z^{-j} \quad (20)$$

конформного отображения внешности области  $D_h^-$  на внешность единичного круга с переводом бесконечно удалённой точки в бесконечно удалённую точку, тем не менее, при вычислении всё большего числа членов асимптотического ряда (18) его аналитическое продолжение должно приобрести форму разложения (20), потому что канонический вид (20) соответствует применению формул (7)–(9) для области  $D_h^-$ , границей которой является точная кривая (19), в отличие от её асимптотического представления (14)–(15), лежащего на кривой (19) с точностью до членов второго порядка по  $\varepsilon$ .

Таким образом, связь между голоморфными функциями (1), структура функционального пространства которых жёстко фиксируется условиями Коши–Римана [1, 10], и симплектической структурой гамильтоновой системы (2) показана на конкретном примере потенциала (11).

В общем случае эта связь может быть описана в терминах гармонических моментов Ричардсона (9), а именно: слоению фазовой плоскости гамильтоновой системы (2) фазовыми траекториями (3) при изменении энергии  $h$  этой системы ставится в соответствие кривая  $\tau_h = \{t_k(h)\}_{k=0}^{\infty}$  в счётномерном пространстве  $\mathfrak{L}$  [8] всех содержащих бесконечно удалённую точку односвязных областей с аналитической границей на сфере Римана, замыкание которых не содержит нуля, причём нулевой момент Ричардсона выражается через переменную действия системы (2):  $t_0(h) = 2I(h)$ . А уже эта бесконечномерная кривая по формулам (7)–(10) определяет кривую в пространстве голоморфных функций. Тем самым построено отображение из пространства гамильтоновых систем (2) в пространство голоморфных функций (1). Свойства этого отображения могут быть исследованы методами теории гомотопий (см. [4] и ссылки там). Также правомерна постановка вопроса о колмогоровских поперечниках [11] пространства  $\mathfrak{L}$  для того, чтобы работать с конечномерными аппроксимациями кривой  $\tau_h \in \mathfrak{L}$  и ограничениями ряда Тейлора (10) на конечномерное подпространство пространства  $\mathfrak{L}$ .

### Литература

1. Натанзон С.М. Комплексный анализ, римановы поверхности и интегрируемые системы. – М.: МЦНМО, 2018. – 139 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. – М.: Наука, 1988. – Т. 1. Механика. – 216 с.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 478 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 760 с.

5. Калякин Л.А. О частоте нелинейного осциллятора // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 163. – С. 15–24.
6. *Alekseeva E.S., Rassadin A.E.* Convexity and its Applications in the Theory of Two-dimensional Dynamical Systems // The 1<sup>st</sup> International conference “Topological methods in dynamics and related topics” (Russia). – Nizhny Novgorod, Higher School of Economics, January 3–6, 2019). Book of abstracts. – P. 9–10.
7. *Wiegmann P.B., Zabrodin A.* Conformal maps and integrable hierarchies // Communications in Mathematical Physics. – 2000. – Vol. 213, № 3. – P. 523–538.
8. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // Journal of Fluid Mechanics. – 1972. – Vol. 56, № 4. – P. 609–618.
9. Натанзон С.М. Формальный ряд для  $\tau$ -функции, реализующей теорему Римана об областях комплексной плоскости // Успехи математических наук. – 2001. – Т. 56, вып. 4 (340). – С. 155–156.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
11. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3 (93). – С. 81–120.

Поступила в редакцию 2 марта 2020 г.

UDC 517.925.42; 517.54

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-7-11

## On Conformal Mappings in the Theory of Hamiltonian Systems on Plane

*E.S. Alekseeva, A.E. Rassadin*

*Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, Faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University; Russia, 119991, Moscow, Lenin Hills, 1; kometarella@mail.ru, brat\_ras@list.ru*

Approximate conformal mapping of the exterior of the domain on phase plane restricted by phase trajectory of the weakly nonlinear oscillator on the exterior of the unit disk is calculated in the paper. The aim of this consideration is to clarify the interrelation of Hamiltonian systems on plane with discovered at the beginning of our century procedure of effectivisation of the Riemann theorem of conformal mapping existence.

Keywords: *symplectic structure, holomorphic function, harmonic moments, point at infinity, the Cauchy problem, perturbation theory.*

Received 2 March 2020