УДК 512.745

Орбиты групп автоморфизмов орисферических многообразий и группа классов дивизоров*

С. А. Гайфуллин[а,б]

Поступило 11.05.2022; после доработки 13.06.2022; принято к публикации 16.06.2022

В 2013 г. Бажов доказал критерий того, что две точки полного торического многообразия лежат в одной орбите связной компоненты единицы группы автоморфизмов. Этот критерий сформулирован в терминах группы классов дивизоров. В том же году Аржанцев и Бажов получили аналогичный критерий для аффинного торического многообразия. В работе доказывается необходимое условие, аналогичное этому критерию, в случаях аффинного и проективного орисферических многообразий.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4292

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, и пусть X — проективное алгебраическое многообразие. Рассмотрим группу регулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ является линейной алгебраической группой. Рассмотрим ее связную компоненту единицы $\mathrm{Aut}(X)^0$. Мы будем изучать орбиты естественного действия этой группы.

Если связная линейная алгебраическая группа G действует на X, то G отображается в $\mathrm{Aut}(X)^0$. Следовательно, $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты — это объединения G-орбит. Таким образом, если нам известно описание G-орбит, мы должны лишь понять, какие пары G-орбит могут быть склеены элементом из $\mathrm{Aut}(X)^0$. Этот подход особенно эффективен, если существует лишь конечное число G-орбит. В этой работе мы изучаем $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на проективных орисферических многообразиях сложности 0. Напомним, что многообразие называется *орисферическим*, если оно допускает такое действие связной линейной алгебраической группы G, что стабилизатор точки общего положения содержит максимальную унипотентную подгруппу. Мы говорим, что орисферическое многообразие имеет *сложность* 0, если действие группы G на X имеет открытую орбиту. Класс орисферических многообразий — это естественное обобщение класса торических многообразий.

В работе [2] описаны все $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на полном торическом многообразии. В [1] получено описание $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбит для аффинного торического многообразия. Заметим, что для аффинного многообразия группа $\mathrm{Aut}(X)$ может быть не алгебраической. Следуя [8], мы определяем связную компоненту единицы $\mathrm{Aut}(X)^0$ как подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную всеми алгебраическими семействами автоморфизмов. Здесь алгебраическое семейство — это множество автоморфизмов $\{\varphi_b \mid b \in B\}$, где B — неприводимое алгебраическое многообразие,

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-71-00109, https://rscf.ru/project/20-71-00109/.

[а]Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия.

[б]Факультет компьютерных наук, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

E-mail: sgayf@yandex.ru

отображение $\varphi\colon B\times X\to X$ является морфизмом и $\varphi_b(x)=\varphi(b,x)$. Заметим, что определенная таким образом компонента $\mathrm{Aut}(X)^0$ совпадает со связной компонентой единицы, если рассматривать группу $\mathrm{Aut}(X)$ как ind-группу (см. [9]).

Пусть X — полное торическое многообразие. Тогда количество T-орбит на нем конечно. Замыкания орбит коразмерности 1 — это в точности все T-инвариантные простые дивизоры на X. Рассмотрим точку $x\in X$. Обозначим через $D(x)$ множество простых T-инвариантных дивизоров D таких, что $x\notin D$. Ясно, что если x и y лежат в одной T-орбите, то $D(x)=D(y)$. Таким образом, мы можем обозначить через $D(\mathcal{O})$ множество $D(x)$ для любого x из T-орбиты $\mathcal{O}$. Теперь рассмотрим подмоноид $\Gamma(\mathcal{O})$ в группе классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$, порожденный классами дивизоров из $D(\mathcal{O})$. В [2] доказано следующее утверждение.

Предложение 1 [2, Theorem 1]**.** *Пусть X — полное торическое многообразие. Две T-орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ лежат в одной* $\mathrm{Aut}(X)^0$*-орбите тогда и только тогда, когда* $\Gamma(\mathcal{O})=\Gamma(\mathcal{O}')$.

Такой же критерий верен для аффинных торических многообразий (см. [1]).

Наша цель — изучить $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на аффинных и проективных нормальных орисферических многообразиях сложности 0. В случае орисферического многообразия мы определяем $D(x)$ как множество простых G-инвариантных дивизоров D таких, что $x\notin D$. Снова ясно, что $D(x)$ зависит только от G-орбиты, в которой лежит точка x, поэтому мы будем использовать обозначение $D(\mathcal{O})$. Но для орисферических многообразий мы заменяем группу $\mathrm{Cl}(X)$ на ее модификацию $\mathrm{Cl}_G(X)$ (см. определение 2). Определим $\Gamma_G(\mathcal{O})$ аналогично случаю торических многообразий. Мы докажем, что условие из предложения 1 остается необходимым (см. теорему 1).

Но это условие не является достаточным в случае орисферических многообразий (см. пример 1). Мы формулируем гипотезу, что если размерности касательных пространств в точках орбит $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ совпадают, то это условие достаточно (см. гипотезу 1, а также [3, Conjecture 1]).

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Торические многообразия. В этом пункте мы напомним основные факты о торических многообразиях. Более подробную информацию о торических многообразиях можно найти, например, в [4, 6].

Торическое многообразие — это нормальное неприводимое многообразие X с фиксированным действием алгебраического тора $T\cong(\mathbb{K}^\times)^n$ с открытой орбитой. Пусть $N\cong\mathbb{Z}^n$ — решетка однопараметрических подгрупп тора T, а $M\cong\mathbb{Z}^n=N^*$ — двойственная к N решетка характеров тора T. Обозначим через $\chi^m\in\mathbb{K}[T]$ характер, соответствующий элементу $m\in M$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon M\times N\to\mathbb{Z}$ мы обозначаем естественное целочисленное спаривание между этими решетками. Введем рациональные векторные пространства $M_\mathbb{Q}=M\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ и $N_\mathbb{Q}=N\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$, порожденные этими решетками. Каждое торическое многообразие соответствует вееру Δ, состоящему из конусов в $N_\mathbb{Q}$. Для аффинного торического многообразия этот веер состоит из одного конуса и всех его граней. Двойственный конус $\sigma^\vee\subseteq M_\mathbb{Q}$ определяется следующим образом:

$$\sigma^\vee=\bigl\{m\in M\mid\langle m,n\rangle\geq 0\ \forall n\in\sigma\bigr\}.$$

Тогда аффинное торическое многообразие $X(\sigma)$, соответствующее σ, имеет следующую алгебру регулярных функций:

$$\mathbb{K}[X]=\bigoplus_{m\in M\cap\sigma^\vee}\mathbb{K}\chi^m.$$

Существует взаимно однозначное соответствие между гранями конуса σ и гранями конуса $\sigma^\vee$. Грань τ конуса σ соответствует грани $\widehat{\tau}=\sigma^\vee\cap\tau^\perp$. Также есть взаимно однозначное соответствие между гранями конуса $\sigma^\vee$ и T-орбитами на X. Описание этого соответствия будет дано в следующем разделе для более общего случая орисферических многообразий.

Произвольное торическое многообразие может быть получено путем склейки аффинных карт, соответствующих конусам из веера Δ. Многообразие полно, если и только если объединение всех конусов из Δ совпадает с $M_{\mathbb{Q}}$.

2.2. Аффинные орисферические многообразия. Мы напомним некоторые факты об орисферических многообразиях. Все доказательства можно найти в [11] (см. также [10]).

Пусть G — связная линейная алгебраическая группа.

Определение 1. Неприводимое G-многообразие X называется *орисферическим*, если для точки общего положения $x \in X$ стабилизатор точки x содержит максимальную унипотентную подгруппу $U \subseteq G$.

Если X содержит открытую G-орбиту, то X называется орисферическим многообразием *сложности* 0. В работе [11] аффинные орисферические многообразия сложности 0 называются S-многообразиями.

Пусть X — аффинное орисферическое многообразие сложности 0. Легко видеть, что унипотентный радикал группы G действует на X тривиально. Следовательно, мы можем считать, что G редуктивна. Переходя к конечному накрытию, можно считать, что $G = T \times G'$, где T — алгебраический тор, а G' — полупростая группа.

Пусть O — открытая G-орбита на X. Тогда есть следующая цепочка включений:

$$\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[O] \hookrightarrow \mathbb{K}[G].$$

Рассмотрим борелевскую подгруппу B группы G. Пусть $M = \mathfrak{X}(B)$ — группа характеров подгруппы B. Для $\Lambda \in M$ положим

$$S_\Lambda = \bigl\{ f \in \mathbb{K}[G] \mid f(gb) = \Lambda(b) f(g) \ \forall\, g \in G,\ b \in B \bigr\}.$$

Тогда

$$S_\Lambda S_{\Lambda'} = S_{\Lambda + \Lambda'}.$$

Множество $\mathfrak{X}^+(B)$ доминантных весов состоит из всех Λ таких, что $S_\Lambda \neq \{0\}$. В работе [11] доказано, что для аффинного орисферического G-многообразия X сложности 0 выполнено равенство

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{\Lambda \in P} S_\Lambda$$

для некоторого подмоноида $P \in \mathfrak{X}^+(B)$.

Используя обозначения из предыдущего пункта, введем конус $\sigma^\vee$ в $M_{\mathbb{Q}}$, порожденный моноидом P. Многообразие X нормально тогда и только тогда, когда моноид P насыщенный, т.е. $P = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}(P)$, где $\mathbb{Z}(P)$ — группа, порожденная P. Существует взаимно однозначное соответствие между гранями конуса σ и G-орбитами на X. А именно, если $O_\tau \subseteq X$ — это G-орбита на X, соответствующая грани τ конуса σ, то идеал, состоящий из функций, тождественно равных нулю на O_τ, имеет вид

$$I(O_\tau) = \bigoplus_{\Lambda \in P \setminus \tau} S_\Lambda.$$

Элементы этого идеала равны нулю на замыкании $\overline{O}_\tau$. Тогда

$$O_\tau = \overline{O}_\tau \setminus \bigcup_{\gamma \prec \tau} \overline{O}_\gamma.$$

Если $\widehat{\xi} \preceq \sigma^\vee$ — грань, соответствующая $\xi \preceq \sigma$, мы будем использовать оба обозначения: $O_\xi = O_{\widehat{\xi}}$.

Замечание 1. Конус $\sigma^\vee$ может быть не полной размерности. Но если мы заменим M на группу, порожденную моноидом P, то соответствие между гранями и орбитами сохранится.

Для того чтобы построить многообразие X явно, нужно взять систему порождающих $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ моноида P и рассмотреть сумму неприводимых представлений группы G, контраградиентных к представлениям со старшими весами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$. В каждом $V(\Lambda_i)^*$ нужно выбрать старший вектор v_i. Положим $v = v_1 + \ldots + v_m$. Тогда $X \cong \overline{Gv}$ — замыкание G-орбиты вектора v. Если $m = 1$, то многообразие X является замыканием орбиты старшего вектора неприводимого представления. Такие многообразия называются HV-многообразиями.

2.3. Группа классов дивизоров. Пусть X — нормальное многообразие. *Простым дивизором* мы называем неприводимое замкнутое подмножество коразмерности 1. Рассмотрим *группу дивизоров Вейля*, т.е. группу целочисленных формальных линейных комбинаций простых дивизоров:

$$\mathrm{WDiv}(X) = \bigl\{\lambda_1 D_1 + \ldots + \lambda_k D_k \mid D_i \text{ — простые дивизоры}\bigr\}.$$

Элементы группы $\mathrm{WDiv}(X)$ мы называем *дивизорами Вейля* на X. Для каждой ненулевой рациональной функции $f \in \mathbb{K}(X)$ и простого дивизора D можно определить порядок нуля или полюса $\nu_D(f)$ функции f вдоль D. Определим *главный дивизор* функции f как

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{D \text{ — простой дивизор}} \nu_D(f) D.$$

Все главные дивизоры образуют *подгруппу главных дивизоров* $\mathrm{PDiv}(X) \subseteq \mathrm{WDiv}(X)$. Определим группу классов дивизоров как фактор-группу $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$. Образ дивизора $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ при каноническом гомоморфизме $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$ мы называем *классом* дивизора D и обозначаем через $[D]$.

Предположим, что на X задано действие связной линейной алгебраической группы G с открытой орбитой. Существует конечное число G-орбит коразмерности 1. В случае торического многообразия эти орбиты соответствуют ребрам $\rho_1, \ldots, \rho_k$ конусов $\sigma \in \Delta$. Обозначим множество всех ребер всех конусов через $\Delta(1)$. Замыкания T-орбит коразмерности 1 являются T-инвариантными простыми дивизорами $D_1, \ldots D_k$ на торическом многообразии. Пусть $v_{\rho_1}, \ldots, v_{\rho_k}$ — примитивные целочисленные векторы на $\rho_1, \ldots, \rho_k$. В случае торического многообразия можно доказать, что $\mathrm{div}(\chi^m) = \sum \langle m, v_{\rho_i}\rangle D_i$ и $\mathrm{Cl}(X)$ порождена классами $[D_1], \ldots, [D_k]$ (см. [6]). В случае аффинного орисферического многообразия G-инвариантные простые дивизоры соответствуют некоторым (возможно, не всем) ребрам $\rho_1, \ldots, \rho_s$ конуса σ. Тогда классы $[D_1], \ldots, [D_s]$ порождают подгруппу, которая может быть собственной подгруппой в $\mathrm{Cl}(X)$.

2.4. Локально нильпотентные дифференцирования и корни Демазюра. Более подробную информацию о локально нильпотентных дифференцированиях можно найти, например, в [5].

Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра над $\mathbb{K}$. Линейный оператор $\partial\colon A \to A$ называется *дифференцированием*, если он удовлетворяет правилу Лейбница $\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$. Дифференцирование называется *локально нильпотентным дифференцированием* (ЛНД), если для любого $a \in A$ существует натуральное число n такое, что $\partial^n(a) = 0$.

Экспоненциальное отображение определяет соответствие между ЛНД и подгруппами в $\mathrm{Aut}(A)$, изоморфными аддитивной группе основного поля $\mathbb{K}$. ЛНД δ соответствует подгруппе $\{\exp(t\delta)\}$. Пусть F — абелева группа, и пусть задана F-градуировка на A:

$$A = \bigoplus_{f \in F} A_f, \qquad A_f A_g \subseteq A_{f+g}.$$

Дифференцирование $\partial\colon A \to A$ называется *F-однородным степени* $f_0 \in F$, если для каждого $a \in A_f$ имеем $\partial(a) \in A_{f+f_0}$.

Рассмотрим конечно порожденный конус σ. Положим

$$\mathfrak{R}_\rho := \bigl\{e \in M \mid \langle e, v_\rho\rangle = -1,\ \langle e, v_{\rho'}\rangle \geq 0\ \forall \rho' \neq \rho \in \sigma(1)\bigr\}.$$

Элементы множества $\mathfrak{R} := \bigsqcup_\rho \mathfrak{R}_\rho$ называются *корнями Демазюра* конуса σ.

Будем называть луч ρ *выделенным лучом* корня Демазюра e, если $e \in \mathfrak{R}_\rho$.

Рассмотрим грань τ конуса $\sigma^\vee$. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_s$ — все лучи, перпендикулярные τ, и $v_1, \ldots, v_s$ — примитивные векторы на них. Предположим, что e — корень Демазюра такой, что $\langle e, v_1\rangle = -1$ и $\langle e, v_i\rangle = 0$ для всех $2 \leq i \leq s$. Тогда будем говорить, что e — это *τ-корень*.

Для аффинного торического многообразия X каждый корень Демазюра соответствует M-однородному ЛНД алгебры $\mathbb{K}[X]$, заданному формулой

$$\partial_e(\chi^m) = \langle m, v_\rho\rangle \chi^{e+m}. \tag{2.1}$$

3. G-ИНВАРИАНТНАЯ ГРУППА КЛАССОВ ДИВИЗОРОВ

В этом разделе мы вводим модификацию группы классов дивизоров на орисферическом многообразии X.

Разобьем множество всех простых дивизоров на X на два непересекающихся подмножества A и B, где A — множество всех G-инвариантных простых дивизоров, т.е. замыканий G-орбит коразмерности 1. Тогда

$$\mathrm{WDiv}(X) = \mathrm{WDiv}_A(X) \oplus \mathrm{WDiv}_B(X),$$

где

$$\mathrm{WDiv}_A(X) = \left\{\sum_{D_i \in A} \lambda_i D_i\right\} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{WDiv}_B(X) = \left\{\sum_{D_i \in B} \lambda_i D_i\right\}.$$

Обозначим через π_A и π_B проекции на $\mathrm{WDiv}_A(X)$ и $\mathrm{WDiv}_B(X)$.

Рассмотрим группу

$$\mathrm{HPDiv}(X) = \bigl\{\mathrm{div}(f) \mid f \in \mathbb{K}(X) \text{ является } M\text{-однородным}\bigr\}.$$

Определение 2. Назовем *G-инвариантной группой классов дивизоров* многообразия X фактор-группу

$$\mathrm{Cl}_G(X) = \mathrm{WDiv}_A(X)/\pi_A(\mathrm{HPDiv}(X)).$$

Для $D \in \mathrm{WDiv}_A(X)$ мы можем рассмотреть его класс $[D]_G \in \mathrm{Cl}_G(X)$.

Замечание 2. В случае торического многообразия X группа классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ порождена классами T-инвариантных простых дивизоров. Рассмотрим M-однородную функцию $f \in \mathbb{K}(X)$. Тогда $\mathrm{div}(f)$ является T-инвариантным. Следовательно, $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{WDiv}_A(X)$. Наоборот, если $\mathrm{div}(f)$ содержится в $\mathrm{WDiv}_A(X)$, то f является M-однородным. Значит,

$$\mathrm{Cl}_G(X) = \mathrm{WDiv}_A(X)/(\mathrm{PDiv}(X) \cap \mathrm{WDiv}_A(X)) \cong \mathrm{Cl}(X).$$

Замечание 3. Пусть X — нормальное аффинное орисферическое многообразие. Рассмотрим M-однородную функцию $f \in \mathbb{K}[X]_m$. Ее порядок на $\overline{O}_{\rho_i}$ равен $\langle m, v_i\rangle$. Значит, $\pi_A(\mathrm{div}(f)) = \sum_{i=1}^s \langle m, v_i\rangle D_i$. Если все ребра $\rho_1, \ldots, \rho_k$ соответствуют G-инвариантным дивизорам, то группа $\mathrm{Cl}_G(X)$ зависит только от конуса σ и изоморфна $\mathrm{Cl}(Y)$, где Y — торическое многообразие, соответствующее конусу σ. В общем случае у нас есть алгоритм вычисления $\mathrm{Cl}_G(X)$, так как все соотношения заданы как $\pi_A(\mathrm{div}(f))$, $f \in \mathbb{K}[X]_m$, и зависят только от m.

Завершим этот раздел введением G-инвариантного аналога моноида $\Gamma(\mathcal{O})$.

Определение 3. Пусть X — орисферическое многообразие и $\mathcal{O}$ — это G-орбита на X. Обозначим через $\Gamma_G(\mathcal{O})$ подмоноид в $\mathrm{Cl}_G(X)$ порожденный классами $[D_i]_G$ всех G-инвариантных простых дивизоров D_i таких, что $\mathcal{O} \not\subseteq D_i$.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть X — аффинное или проективное неприводимое нормальное орисферическое многообразие сложности 0. Если две G-орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите, то $\Gamma_G(\mathcal{O}) = \Gamma_G(\mathcal{O}')$.*

В работе [3] были изучены $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на аффинном орисферическом многообразии сложности 0.

Предложение 2 [3, Corollary 4]. *Предположим, что X — аффинное орисферическое многообразие сложности 0. Пусть H — подгруппа, порожденная группой G и всеми экспонентами M-однородных ЛНД. Тогда $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на X совпадают с H-орбитами.*

Более того, пусть τ — грань конуса σ. Тогда согласно [3, Theorem 1] замыкание G-орбиты $\overline{O}_\tau$ не является $\mathrm{Aut}(X)^0$-инвариантным, если и только если существует ненулевое M-однородное ЛНД, степень которого является $\widehat{\tau}$-корнем. Легко видеть, что экспонента M-однородного ЛНД ∂ степени $e \in \mathfrak{R}_\rho$, где e является $\widehat{\tau}$-корнем, отображает точки из O_τ в точки из O_ζ, где $\zeta = \mathrm{cone}(\tau, \rho)$. Будем говорить, что такая пара граней является ρ-связной. Таким образом, мы получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть X — аффинное орисферическое многообразие сложности 0. Две G-орбиты O_τ и $O_{\tau'}$ лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите тогда и только тогда, когда существует цепочка граней $\tau = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m = \tau'$ таких, что τ_i и τ_j являются ξ_i-связными для некоторого $\xi_i \in \sigma(1)$.*

Докажем следующую лемму об аффинных орисферических многообразиях. Она аналогична [2, Lemma 3.3].

Лемма 2. *Пусть X — аффинное орисферическое многообразие сложности 0. Предположим, что две G-орбиты O_τ и $O_{\tau'}$ являются ρ_j-связными для некоторого $\rho_j \in \sigma(1)$. Тогда $\Gamma(O_\tau) = \Gamma(O_{\tau'})$.*

Доказательство. Мы можем считать, что τ больше τ'. Тогда возможны два случая. Если ρ_j не соответствует дивизору, то $D(O_{\tau'}) = D(O_\tau)$ и утверждение леммы доказано. В противном случае получаем

$$D(O_{\tau'}) = D(O_\tau) \cup \{\overline{O}_{\rho_j}\}.$$

Пусть ∂ — ЛНД степени $e \in \mathfrak{R}_\rho$, где e — это τ-корень. Возьмем однородную функцию $f \in \mathbb{K}[X]_\alpha$ такую, что $\partial(f) \neq 0$. Рассмотрим рациональную функцию $F = \partial(f)/f$. Эта функция M-однородна степени e. Следовательно,

$$\pi_A(\mathrm{div}(F)) = \sum_{i=1}^{s} \langle e, v_i \rangle \overline{O}_{\rho_i} = -\overline{O}_{\rho_j} + \sum_{i \neq j} \langle e, v_i \rangle \overline{O}_{\rho_i}.$$

Значит, в $\mathrm{Cl}_G(X)$ выполнено равенство

$$0 = -[\overline{O}_{\rho_j}]_G + \sum_{i \neq j} \langle e, v_i \rangle [\overline{O}_{\rho_i}]_G.$$

Но все $\langle e, v_i \rangle$ неотрицательны при $i \neq j$. Следовательно, $[\overline{O}_{\rho_j}]_G \in \Gamma_G(O_\tau)$. Отсюда получаем $\Gamma_G(O_{\tau'}) = \Gamma_G(O_\tau)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Для аффинных многообразий утверждение теоремы 1 следует из лемм 1 и 2.

В случае, когда X проективно, рассмотрим аффинный конус $\widehat{X}$. С помощью G-линеаризации расслоения (см. [7]) мы можем поднять G-действие и $\mathrm{Aut}(X)^0$-действие на $\widehat{X}$. Аффинное многообразие $\widehat{X}$ орисферическое относительно поднятого G-действия. Для того чтобы орисферическое многообразие стало многообразием сложности 0, мы можем добавить $\mathbb{K}^\times$-действие гомотетиями. Каждая G-орбита $\mathcal{O}$ на X является проективизацией $(G\times\mathbb{K}^\times)$-орбиты $\widehat{\mathcal{O}}$ на $\widehat{X}$. Имеем $\Gamma_G(\mathcal{O}) = \Gamma_{G\times\mathbb{K}^\times}(\widehat{\mathcal{O}})$. Таким образом, если $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ можно склеить при помощи $\mathrm{Aut}(X)^0$, то $\widehat{\mathcal{O}}$ и $\widehat{\mathcal{O}}'$ можно склеить при помощи поднятия группы $\mathrm{Aut}(X)^0$, которое содержится в $\mathrm{Aut}(\widehat{X})^0$. Значит, $\Gamma_{G\times\mathbb{K}^\times}(\widehat{\mathcal{O}}) = \Gamma_{G\times\mathbb{K}^\times}(\widehat{\mathcal{O}}')$. Следовательно, $\Gamma_G(\mathcal{O}) = \Gamma_G(\mathcal{O}')$. □

Пример 1. Покажем, что необходимое условие из теоремы 1 не является критерием. Пусть $G = \mathrm{SL}_3$ и $P = \mathfrak{X}^+(B)$. Тогда возьмем конус $\sigma^\vee$, равный $\mathrm{cone}(e_1, e_2)$ в базисе из фундаментальных весов. Легко вычислить, что аффинное орисферическое многообразие, соответствующее данному конусу, имеет вид

$$X \cong \{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0\} \subset \mathbb{K}^6.$$

Орбита, соответствующая вершине конуса, — это точка $q = (0,0,0,0,0,0)$. Легко видеть, что точка q является $\mathrm{Aut}(X)$-неподвижной, так как это единственная особая точка на X. У конуса $\mathrm{cone}(e_1, e_2)$ четыре грани: вершина, два ребра и весь конус. Следовательно, на X есть четыре G-орбиты. В координатах эти орбиты выглядят следующим образом: $q = (0,0,0,0,0,0)$, $O_1 = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \setminus q$, $O_2 = \{y_1 = y_2 = y_3 = 0\} \setminus q$ и открытая орбита $O = X \setminus (O_1 \cup O_2 \cup q)$. Рассмотрим автоморфизм

$$\alpha\colon\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \to (x_1 + y_2, x_2 - y_1, x_3, y_1, y_2, y_3).$$

Автоморфизм α можно включить в алгебраическую подгруппу, состоящую из автоморфизмов

$$\alpha_t\colon\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \to (x_1 + ty_2, x_2 - ty_1, x_3, y_1, y_2, y_3), \qquad t \in \mathbb{K}.$$

Он переводит точку $(0,0,0,1,1,1) \in O_1$ в точку $(1,-1,0,1,1,1) \in O$. Значит, O_1 и O лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите. Аналогично O_2 лежит в той же $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите. Таким образом, есть две $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на X. Но каждая собственная грань соответствует орбите коразмерности ≥ 2. Следовательно, группа $\mathrm{Cl}_G(X)$ тривиальна. Значит, $\Gamma(\mathcal{O})$ не различает точки многообразия.

Сформулируем следующую гипотезу (см. также [3, Conjecture 1]).

Гипотеза 1. *Пусть X — аффинное или проективное неприводимое нормальное орисферическое многообразие сложности 0. Две G-орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите тогда и только тогда, когда $\Gamma_G(\mathcal{O}) = \Gamma_G(\mathcal{O}')$ и размерности касательных пространств в точках этих орбит совпадают.*

Благодарности. Автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность жюри и спонсорам этого конкурса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arzhantsev I., Bazhov I.* On orbits of the automorphism group on an affine toric variety // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, N 10. P. 1713–1724.
2. *Bazhov I.* On orbits of the automorphism group on a complete toric variety // Beitr. Algebra Geom. 2013. V. 54, N 2. P. 471–481.
3. *Borovik V., Gaifullin S., Shafarevich A.* On orbits of automorphism groups on horospherical varieties: E-print, 2021. arXiv: 2105.05897 [math.AG].
4. *Cox D.A., Little J.B., Schenck H.K.* Toric varieties. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. (Grad. Stud. Math.; V. 124).

5. *Freudenburg G.* Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Berlin: Springer, 2006. (Encycl. Math. Sci.; V. 136).
6. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993. (Ann. Math. Stud.; V. 131).
7. *Knop F., Kraft H., Luna D., Vust T.* Local properties of algebraic group actions // Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie. Basel: Birkhäuser, 1989. P. 63–75. (DMV Semin.; V. 13).
8. *Ramanujam C.P.* A note on automorphism groups of algebraic varieties // Math. Ann. 1964. Bd. 156. S. 25–33.
9. *Шафаревич И.Р.* О некоторых бесконечномерных группах. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 214–226.
10. *Timashev D.A.* Homogeneous spaces and equivariant embeddings. Berlin: Springer, 2011. (Encycl. Math. Sci.; V. 138).
11. *Винберг Э.Б., Попов В.Л.* Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 4. С. 749–764.