

Государственный научный центр Российской Федерации  
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»  
Санкт-Петербург

4-6 октября 2022 г.

# 15 МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ (15 МКПУ-2022)



**МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ВКЛЮЧАЕТ В СЕБЯ РЯД КОНФЕРЕНЦИЙ,  
ОБЪЕДИНЕННЫХ ОДНОЙ ИДЕЕЙ:**

XXXIII КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ ВЫДАЮЩЕГОСЯ КОНСТРУКТОРА  
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ Н.Н.ОСТРЯКОВА

«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУИП-2022)

«ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ» (ИТУ-2022)

«УПРАВЛЕНИЕ В АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ИМ. АКАДЕМИКА Е.А.МИКРИНА» (УАКС-2022)

«УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ СИСТЕМАХ» (УМС-2022)

**МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»  
(МТУИП-2022)**

# 15-я МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ



4–6 октября 2022 г.  
ГНЦ РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»  
Санкт-Петербург

МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ВКЛЮЧАЕТ В СЕБЯ РЯД КОНФЕРЕНЦИЙ,  
ОБЪЕДИНЕННЫХ ОБЩЕЙ ИДЕЕЙ:

- XXXIII конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова
- «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2022)
- «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУИП-2022)
- «Управление в аэрокосмических системах» (УАКС-2022) имени академика Е.А. Микрина
- «Управление в морских системах» (УМС-2022)

## **МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУИП-2022)**

**4–6 ОКТЯБРЯ**

Санкт-Петербург  
2022

УДК 681.51

Материалы конференции «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУИП-2022).  
СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. 286 с.

В настоящий сборник вошли тексты расширенных рефератов докладов, состоявшихся на конференции «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУИП-2022).

Тексты публикуются в авторской редакции.

## **ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ**

- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ТЕРРИТОРИАЛЬНАЯ ГРУППА РОССИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ
- ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМЕНИ В.И.УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
- УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ
- ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ РАН
- ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А.ТРАПЕЗНИКОВА РАН
- ВОЕННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР ВМФ «ВОЕННО-МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ АДМИРАЛА ФЛОТА СОВЕТСКОГО СОЮЗА Н.Г.КУЗНЕЦОВА»
- ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВИАЦИОННЫХ СИСТЕМ («ГОСНИИАС»)
- РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ «ЭНЕРГИЯ» ИМЕНИ С.П.КОРОЛЁВА
- АО «НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ»

## **ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:**

- ОТДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИКИ, МАШИНОСТРОЕНИЯ, МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ РАН
- МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ»
- ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ»
- ЖУРНАЛА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

## **ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ПРЕЗИДИУМА**

15-Й МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИИ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ  
НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»  
АКАДЕМИК РАН **В.Г. ПЕШЕХОНОВ**

### **XXXIII КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ Н.Н.ОСТРЯКОВА**

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА  
АКАДЕМИК РАН **В.Г. ПЕШЕХОНОВ**

ЗАМЕСТИТЕЛИ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **О.А. СТЕПАНОВ**  
К.Т.Н. **А.В. СОКОЛОВ**

### **КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ» (МТУиП-2022)**

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:  
АКАДЕМИК РАН **Д.А. НОВИКОВ**  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **Н.В. КУЗНЕЦОВ**

### **КОНФЕРЕНЦИЯ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ» (ИТУ-2022)**

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **В.Н. ВАСИЛЬЕВ**  
Д.Т.Н., ПРОФ. **В.Н. ШЕЛУДЬКО**  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **Р.М. ЮСУПОВ**

### **КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УАКС-2022)**

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:  
АКАДЕМИК РАН **С.Ю. ЖЕЛТОВ**  
АКАДЕМИК РАН **В.А. СОЛОВЬЕВ**  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **М.В. СИЛЬНИКОВ**

### **КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ СИСТЕМАХ» (УМС-2022)**

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:  
АКАДЕМИК РАН **Е.И. ЯКУШЕНКО**  
АКАДЕМИК РАН **С.Н. ВАСИЛЬЕВ**  
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН **А.Ф. ЩЕРБАТЮК**

## СОДЕРЖАНИЕ

**КОНФЕРЕНЦИЯ  
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»  
(МТУиП-2022)**

## Секция 1

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<b>Р.О. Оморов</b> Метод топологической грубости в задачах исследования и управления динамическими системами .....	9
<b>Л.М. Берлин, А.А. Галяев</b> О границах классов управления в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов .....	12
<b>Д.Ю. Князьков, Т.Ю. Фигурин</b> Прямолинейное движение цепочки взаимодействующих тел в вязкой среде .....	15
<b>В.Р. Барсегян</b> Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными скоростями точек в промежуточные моменты времени .....	18
<b>И.М. Ананьевский</b> Гашение колебаний линейной механической системы в условиях фазовых ограничений .....	21
<b>А.А. Замышляева, Е.В. Бычков</b> Оптимальное управление решениями задачи Шоултера–Сидорова для математической модели распространения волн на мелкой воде .....	24
<b>Е.А. Марчук, Я.В. Калинин, А.В. Малолетов</b> О компенсации отклонений рабочего инструмента крупногабаритного параллельного тросового робота .....	27
<b>Б.Ы. Аширбаев, Ж.А. Алтымышова</b> Оптимальное управление в линейной сингулярно-возмущенной дискретной задаче с квадратичным функционалом .....	30
<b>В.Р. Барсегян, С.В. Солодуша</b> Задачи граничного управления колебаниями струны смещением двух концов с условиями на функции прогиба и скоростей точек в промежуточные моменты времени .....	34
<b>К.В. Перевозчикова, Н.А. Манакова</b> Исследование задачи стартового управления для одной модели нелинейной фильтрации .....	37
<b>В.А. Каменецкий</b> Теорема о свертывании: критерий Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями без S-процедуры .....	40
<b>М.В. Яшина, А.Г. Таташев</b> Анализ качественных свойств несимметричной двухконтурной системы с кластерным движением .....	44
<b>И.Б. Фуртат</b> Дивергентный метод исследования устойчивости динамических систем .....	48
<b>Д.В. Шатов, В.А. Александров</b> Синтез ПИД-регуляторов по инженерным критериям качества методом размещения полюсов .....	51

## Секция 2

## ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ, СЕТЕВОЕ, ГРУППОВОЕ И КООПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<b>М.Ю. Кензин, И.В. Бычков, Н.Н. Максимкин</b> Двухуровневый подход к координации группы мобильных роботов с ограниченной коммуникацией при выполнении динамических миссий .....	55
---	----

<b>А.И. Глущенко, П.И. Жуков, А.В. Фомин</b> Адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности на основе метода градиентного спуска .....	59
<b>А.А. Галяев, А.С. Самохин, М.А. Самохина</b> О решении задачи построения траектории управляемого подвижного объекта в конфликтной среде при помощи дискретизации .....	63
<b>М.Э. Бузиков, А.А. Галяев, П.В. Лысенко, А.И. Медведев, И.А. Насонов</b> Нейросетевой подход к задаче оптимального перехвата машиной Дубинса .....	66
<b>Г.К. Тевяшов</b> Стратегия группового управления вида волчья стая надводными аппаратами для решения задачи инспектирования водоемов .....	69
<b>А.А. Толстихин, С.А. Ульянов</b> Стратегия управления децентрализованной группой мобильных роботов при обследовании поля концентрации .....	72
<b>А.М. Попов, В.Ю. Емельянов, Д.Г. Кострыгин, А.А. Шевчик</b> Разработка алгоритма управления беспилотным летательным аппаратом с учетом ограничений на управление .....	76
<b>В.Ф. Филаретов, А.А. Кацурин</b> Согласованная работа двух мобильных роботов в сложной обстановке .....	81

## Секция 3

## ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ПРИРОДЫ

<b>В.В. Цыганов</b> Механизм дихотомической оценки политики самообучающимся гражданином .....	85
<b>М.И. Гераськин</b> Оптимум агента олигополии при выпуклых функциях издержек .....	89
<b>Э.И. Джафаров, В.В. Цыганов</b> Противозатратный механизм функционирования трехуровневой активной системы .....	93
<b>Г.А. Угольницкий</b> Сравнительный анализ эффективности методов управления в статических моделях олигополии Курно .....	97
<b>Г.Л. Утенков, Т.И. Утенкова, Э.О. Рапопорт</b> Адаптивные подходы при управлении продуктовыми комплексами .....	101
<b>О.А. Кузнецова, Е.П. Ростова</b> Анализ влияния уровня конкуренции в банковской сфере на процесс согласования интересов в сильносвязанной интегрированной системе на рынке продаж крупной бытовой техники .....	105
<b>Е.П. Ростова, А.А. Зиновьева</b> Математические модели оптимизации затрат на снижение риска на предприятиях нефтегазового комплекса .....	108
<b>В.А. Ерофеева, С.Э. Парсегов</b> Распределенный подход к решению задачи согласования данных .....	111
<b>Е.Г. Мусатова, А.А. Лазарев</b> Задача минимизации суммарной стоимости подпроектов, выполняемых на одном приборе .....	115
<b>Н.Ю. Морозов, Е.М. Гришин, Н.А. Правдивец</b> Модели в задаче мультимодальных перевозок на примере перевалочного пункта с морского на железнодорожный транспорт .....	118
<b>В.В. Цыганов</b> Обучение дихотомическому ранжированию и управлению в двухуровневой активной системе с советником .....	121

## Секция 4

## ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

<b>А.В. Елизарова, Г.А. Саитова, И.А. Яковлев</b> Гибридный метод оценки состояния заряда аккумуляторной батареи в системах автоматического управления .....	125
<b>С.А. Кочетков</b> Рекуперация энергии в электротранспортном средстве .....	128
<b>Р.Ю. Порцев, А.В. Макаренко</b> Сравнительный анализ функциональных характеристик элементарных двухслойных сверточных нейросетей в задаче распознавания шумовых сигналов .....	132
<b>А.Ю. Исхаков</b> Выявление отклонений в поведении субъекта доступа промышленной системы автоматизации .....	136
<b>А.С. Губанков, Д.Ю. Юхимец</b> Разработка метода идентификации кинематических и эластостатических параметров промышленных роботов без использования внешних измерительных устройств .....	139
<b>Е.М. Гришин, А.А. Лазарев, Е.Г. Мусатова</b> Радиус устойчивости в задаче движения поезда через границу двух полигонов железной дороги .....	143
<b>А.А. Лазарев</b> Метрики в задачах теории расписаний .....	146
<b>А.В. Давыдов, А.А. Ларионов, Н.В. Нагул</b> Проверка наблюдаемости регулярного языка с помощью автоматического доказательства теорем .....	149
<b>Д.Г. Арсеньев, В.П. Шкодырев</b> Эволюция кибернетики: системы управления, основанные на знаниях .....	153
<b>А.Д. Кулакова, В.А. Галкин, А.В. Макаренко</b> Нейросетевой метод цветовой калибровки изображений в задачах интеллектуального машинного зрения .....	157
<b>О.А. Милосердов, А.В. Макаренко</b> Разработка нейросетевой модели для решения задачи мультиклассовой классификации с множественными метками (на примере заболеваний и патологий томатов) .....	161

## Секция 5

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

<b>Д.Н. Федянин</b> Игровая модель конкуренции между перевозчиками, выбирающими расписание отправления .....	165
<b>А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов</b> Динамическое программирование в задаче маршрутизации: двухэтапный вариант .....	168
<b>Е.Е. Васильева, Ш.А. Закариялов, А.В. Леонидов</b> Стратегическое охлаждение / связывание в бинарной игре Изинга .....	171
<b>О.В. Руссков, С.Э. Сараджишвили</b> Теория игр в энергетике. Настройка прогнозной модели .....	175

## Секция 6

## НАБЛЮДАТЕЛИ И ФИЛЬТРЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

<b>А.Н. Жирабок, Ким Чхун Ир, А.В. Зуев</b> Метод построения интервальных наблюдателей для дискретных линейных систем .....	178
<b>И.Р. Белов</b> О связи предельного случая анизотропийного оценщика с фильтром Калмана .....	182



<b>Д.В. Краснов, А.В. Уткин</b> Физически реализуемые наблюдатели состояния для одноканальных нелинейных систем с возмущениями .....	186
<b>В.А. Уткин</b> Слежение в неминимально фазовых линейных системах при функциональной неопределенности генератора задания.....	190
<b>А.А. Кабанов, В.Ф. Филаретов, А.В. Зуев, А.Н. Жирабок</b> Разработка подхода к синтезу наблюдателей для оценки возмущений в линейных системах основе методов оптимального управления.....	193

## Секция 7

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ СПбГУ:  
ОТ КИБЕРНЕТИКИ К ИСКУССТВЕННОМУ ИНТЕЛЛЕКТУ

<b>М.М. Аникушин, А.О. Романов</b> Инерциальные многообразия, мультиустойчивость и скрытые колебания в системах с запаздыванием нейтрального типа .....	197
<b>А.Л. Фрадков</b> Роль математиков в развитии кибернетики и искусственного интеллекта в Ленинграде – Санкт- Петербурге: от Л.В. Канторовича и В.А. Якубовича до наших дней .....	200
<b>И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович</b> Машинное обучение и сжатие цифровых потоков .....	202
<b>М.М. Липкович</b> Метод рекуррентных целевых неравенств Якубовича в современном машинном обучении .....	205
<b>М.В. Благоев, В.Д. Коробейников</b> Генеративно-состязательные сети в управлении нагрузочным тестированием программных комплексов .....	209
<b>М.В. Благоев, М.Ю. Лобачев, М.В. Юлдашев, Р.В. Юлдашев, Н.В. Кузнецов, Б.И. Шахтарин</b> Нелинейный анализ и синтез системы фазовой автоподстройки частоты: гипотеза Капранова и скрытые колебания .....	212
<b>М.М. Шумафов</b> Стабилизация по Пирагасу неустойчивых состояний равновесия динамических систем периодической обратной связью с запаздыванием.....	214
<b>Т.Н. Мокаев, Ф.Х. Райтманн</b> Условия устойчивости в терминах символов операторов для псевдодифференциальных уравнений на сетях .....	218
<b>Е.В. Кудряшова, Ф.Х. Райтманн</b> Использование интегральных уравнений Вольтерра при моделировании нейронных сетей.....	221
<b>Т.А. Алексеева, А.Ю. Беляев, Н.В. Кузнецов, Т.Н. Мокаев</b> Прогнозирование и управление в модели цен на сетевых рынках: нелинейный анализ и технологии искусственного интеллекта .....	225
<b>Т.А. Алексеева, Т.Н. Мокаев</b> Управление механизмом нерегулярной динамики в модели потребления/сбережения с фискальной политикой на основе технологий искусственного интеллекта .....	229
<b>Н.В. Кузнецов, Е.Д. Акимова</b> Задача Андронова-Вышнеградского и ее влияние на развитие теории управления .....	232
<b>А.Ю. Беляев</b> Технологии глубокого обучения с подкреплением в задачах управления системами отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха .....	236
<b>Н.И. Наумова, Р.Н. Мокаев</b> О расстоянии Брэгмана в задачах оптимизации и машинном обучении.....	239

**В. Разван**

Ранние работы Г.А. Леонова и их влияние на румынскую школу теоретической автоматки..... 242

## Секция 8

## УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**А.С. Антипов, С.А. Краснова**

Управление ходовой тележкой с учетом динамики исполнительного устройства в условиях неопределенности..... 245

**А.И. Глущенко, К.А. Ласточкин**

Прямое адаптивное модальное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости ..... 249

**А.И. Глущенко, К.А. Ласточкин**

Адаптивный линейно-квадратичный регулятор с гарантией экспоненциальной устойчивости ..... 253

**К.Р. Чернышев, Е.Ф. Жарко, Е.А. Абдулова**

Условия идентифицируемости стохастических систем ..... 257

**Р.О. Оморов, Т.А. Акунов, А.О. Айдралиев**

Робастность и эллипсоидные оценки качества интервальных многомерных систем ..... 260

**А.В. Колногоров, А.Н. Лазутченко**

Задача о двуруком бандите с мультиномиальным распределением доходов: байесовский и минимаксный подходы ..... 264

**С.В. Гарбарь**

Пакетная версия стратегии UCSV для гауссовского однорукого бандита ..... 267

**В.Н. Овчаренко**

Структурно-параметрическая идентификация линейной динамической системы..... 272

**Р.О. Оморов, А. Акунова, Т.А. Акунов**

Алгебраические и частотные методы анализа и синтеза многомерных робастных систем ..... 275

**К.А. Рыбаков**

Применение спектрального метода анализа линейных систем управления к моделированию повторных стохастических интегралов ..... 279

**Н.М. Маркович, М.С. Рыжов**

Оценивание хвостового индекса Мер влиятельности узлов в случайных эволюционно меняющихся графах..... 282

Секция 1**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

Р.О. ОМОРОВ

(Институт машиноведения и автоматике  
Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек)**МЕТОД ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ  
И УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

*Рассматривается метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову-Понтрягину и именуемый «методом топологической грубости». Метод позволяет управлять грубостью систем управления на основе теоремы, сформулированной с использованием матричного уравнения Сильвестра. Основные этапы исследований грубости и бифуркаций систем с помощью рассматриваемого метода сформулированы в виде соответствующего алгоритма. Кратко изложены вопросы о синергетических системах и хаосе (странных аттракторах). Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы.*

**Введение.** Проблеме исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-3].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксоу или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется  $\varepsilon$  – близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4].

В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [6 - 8].

Основы метода. Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС)  $n$ -го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \quad (1)$$

где  $z(t) \in R^n$  – вектор фазовых координат,  $F$  –  $n$ -мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову-Понтрягину в некоторой области  $G$  если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти  $\tilde{G}$ , области  $G$ :

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \quad (2)$$

являются  $\varepsilon$  – тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2)  $\varepsilon$  – тождественны, если существуют открытые области  $D$ ,  $\tilde{D}$  в  $n$  – мерном фазовом пространстве также, что  $D \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$

$$\exists \varepsilon, \delta > 0:$$

если  $\|f(\tilde{z})\| < \delta$ ,  
 $|df_i(\tilde{z})/d\tilde{z}_j| < \delta, \quad i, j = \overline{1, n}$ ,  
 то  $\|z\| - \|\tilde{z}\| < \varepsilon$ , или

$$(\tilde{D}, (2)) \stackrel{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \quad (3)$$

иначе, разбиение областей  $\tilde{D}$  и  $D$  траекториями систем (2) и (1)  $\varepsilon$  – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до  $\varepsilon$ ).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек (положений равновесия), особых линий (сепаратрис), замкнутых (периодических) траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности  $C\{M\}$  – матрицы  $M$  – нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введены понятия максимальной грубости и минимальной негрубости на отношении пары  $\delta$  и  $\varepsilon$ , а также доказаны базовые теоремы о необходимых и достаточных условиях грубости вблизи особых точек, об условиях существования управления, доставляющего грубость системе. При этом последние условия получены на базе использования матричного уравнения Сильвестра.

Метод топологической грубости позволяет определять бифуркации топологий динамических систем на основе критериев, разработанных в [6–9].

Очевидно, число обусловленности  $C\{M\}$  как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

**Синергетика и хаос.** В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [10, 11].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук – физики, химии, биологии, геологии, геофизики и кончая неточными областями наук, такими как экономика, социология, психология, философия, распознавание образов, а также в области техники и технологий [6 - 11].

Многие ученые в настоящее время ставят задачи не только исследования синергетических процессов и систем, но и управления ими с целью достижения желаемого развития и динамики [12, 13].

Одним из явлений в синергетических системах, вызывающих огромное внимание исследователей в различных областях науки, являются так называемые странные аттракторы, представляющие притягивающие многообразия в фазовом пространстве с хаотическим поведением (хаосом) траекторий в этих многообразиях [10–15]. Исследования странных аттракторов вызывает интерес и потому, что многие исследователи видят в изучении этого феномена ключ к разгадке тайн природы турбулентности и хаоса в системах различной природы – физических, химических, экономических и социальных системах [14, 15]. Более того, актуальным становится и задача управления хаосом в синергетических системах различной физической природы [12].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций

синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости».

**Заключение.** Рассмотренный в данной работе «метод топологической грубости» является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы.

Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций апробированы для исследований как синергетических систем различной природы – Лоренца, Ресслера, Чуа и др., так и для исследований динамических систем более широкого класса, в частности, при исследованиях колебательных систем и бифуркаций Хопфа, аттрактора отображения Хенона и др. [6–9, 10, 11].

Таким образом, алгоритм исследований грубости и бифуркаций динамических систем методом топологической грубости, по особым точкам фазового пространства, будет следующий:

1. Исследуемая система представляется в виде (1);
2. Определяются особые точки ( $OT_i$ ) системы (1):  $F(z(t))=0$ .
3. Находятся матрицы Якоби  $A_i$  (линейного приближения) в особых точках.
4. Вычисляются матрицы  $M_i$  приведения  $A_i$  к диагональному (квазидиагональному) виду.
5. Вычисляются числа обусловленности  $C\{M_i\}$ , которые в совокупности и определяют грубость исследуемой системы по каким-либо варьируемым параметрам.
6. При значениях варьируемых параметров, удовлетворяющих критериям [6–9], возникают соответствующие бифуркации топологии исследуемой системы (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т.14. №5. С.247-250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). М.: Наука, 1985. С. 59-93.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3-31.
4. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69. No. 1. P. 199-222.
5. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и Телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
6. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии, 1997. № 2. С. 26-36.
7. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. №2. С. 5-12.
8. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 257-262.
9. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 288 с.
10. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.
11. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 342 с.
12. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // А и Т, 2003. № 5. С. 3-45.
13. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. Изд-е 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 240 с.
14. Странные аттракторы / Сб. пер. с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
15. Peak D., Frame M. Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity. New York: W.H. Freeman and Company. 1994. 408 p.

R.O. Omorov (Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek). **Method of Topological Roughness in Tasks of Research and Control of Dynamic Systems**

Abstract. The method of a research of roughness of dynamic systems based on a concept of roughness according to Andronov-Pontryagin and named with "method of topological roughness" is considered. The method allows to controlling roughness of control systems on the basis of the theorem formulated with use of the matrix equation of Sylvester and proved in works of the author which is also provided in this work. The main stages of researches of roughness and bifurcations of systems by means of the considered method are formulated in the form of the corresponding algorithm. In work questions of synergetic systems and chaos (strange attractors) are briefly stated. The method can be used for researches of roughness and bifurcations of dynamic systems and also synergetic systems and chaos of the different physical nature.

Л.М. БЕРЛИН, А.А. ГАЛЯЕВ  
(ИПУ РАН, Москва)

## О ГРАНИЦАХ КЛАССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Рассматривается задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами по критерию быстродействия. Управление, размерность которого меньше размерности системы, выбирается таким образом, чтобы перевести систему из состояния покоя в произвольное состояние, где фазовые координаты второго осциллятора равны нулю.*

*Учитывая релейный вид оптимального управления, исследование уравнений динамики системы и условий невырожденности управления дало возможность построить кривые, которые определяют на фазовой плоскости первого осциллятора ранее полученные области некоторых классов переключений.*

**Введение.** Большой практической значимостью обладают задачи управления, где размерность вектора управляющего воздействия меньше размерности всей системы или её подсистем. Задача оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами с критерием быстродействия впервые была сформулирована в монографии [1] академиком РАН Ф.Л. Черноусько и рассмотрена при некотором соотношении частот. Для такой системы в [2] показана сильная достижимость и глобальная управляемость. В работе [3] рассматривается данная задача при фиксированном конечном состоянии осцилляторов и приводится зависимость общего времени движения системы от величины максимально возможной амплитуды управления, а также описывается механизм переходов между различными классами переключений. Следующим расширением данной задачи является выбор произвольного конечного состояния первого осциллятора и исследование его фазовой плоскости на принадлежность к конкретному классу переключений оптимального управления, следуя работе [4], где приводятся необходимые условия оптимальности, которые позволяют рассматривать управления с любым количеством переключений. Там же были выделены области на фазовой плоскости конечных состояний первого осциллятора, отвечающие классам трёх и четырёх переключений. В данной работе предлагается описание переходов между различными классами, позволяющее получить системы уравнений для нахождения границ указанных областей.

**Основная часть.** Задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами со скалярным управлением по критерию быстродействия формулируется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -\omega_1^2 q_1 \\ p_2 \\ -\omega_2^2 q_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = (q_1, p_1, q_2, p_2)^T \in \mathbb{R}^4 = M, u \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U, \quad (1)$$

где  $q_i, p_i, \omega_i$  – координата, импульс и собственная частота колебаний  $i$ -го осциллятора соответственно,  $i = 1, 2$ ,  $u$  – управляющее воздействие. Граничные условия выбираются следующим образом:

$$x(0) = (0, 0, 0, 0)^T, \quad x(T_0) = (q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, 0, 0)^T. \quad (2)$$

Задача решается по критерию быстродействия

$$T_0 = \int_0^{T_0} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Оптимальное управление  $u^*(t)$  было получено в [2] с использованием геометрической формулировки принципа максимума Понтрягина,

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign}(h_2(t)) = \varepsilon \operatorname{sign}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t)), \quad (4)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – некоторые константы.

Решения уравнений динамики (1) совместно с условиями невырожденности оптимального управления (4), следуя [4], составляют необходимые условия оптимальности для управления с

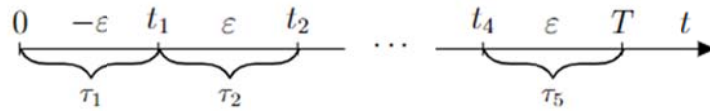
любым количеством переключений. Для полученных теоретических результатов было проведено моделирование в классе трёх и четырёх переключений управления [4]. Следующим шагом в исследовании областей на фазовой плоскости первого осциллятора стал поиск их аналитических или численных границ. Особенности переходов между классами переключений были описаны в [3] для задачи с фиксированным конечным состоянием и заключались в обнулении крайних интервалов постоянства управления при переходах между классами. Показано, что обнуление внутреннего интервала управления приводит к переходам между классами управления, количество переключений в которых отличается на две единицы.

Для нахождения границ классов трёх и четырёх переключений выписываются решения уравнений динамики (1) и условие невырожденности для класса четырёх переключений:

$$\begin{cases} 2 \sum_{j=1}^5 (-1)^{j+1} \cos(\omega_1 \sum_{i=j}^5 \tau_i) - \cos(\omega_1 \sum_{i=1}^5 \tau_i) = 1 + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} \omega_1^2}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^5 (-1)^{j+1} \sin(\omega_1 \sum_{i=j}^5 \tau_i) - \sin(\omega_1 \sum_{i=1}^5 \tau_i) = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} \omega_1}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^5 (-1)^{j+1} \cos(\omega_2 \sum_{i=j}^5 \tau_i) - \cos(\omega_2 \sum_{i=1}^5 \tau_i) = 1, \\ 2 \sum_{j=1}^5 (-1)^{j+1} \sin(\omega_2 \sum_{i=j}^5 \tau_i) - \sin(\omega_2 \sum_{i=1}^5 \tau_i) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \cos(\omega_1 t_3) & \cos(\omega_1 t_4) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \sin(\omega_1 t_3) & \sin(\omega_1 t_4) \\ \cos(\omega_2 t_1) & \cos(\omega_2 t_2) & \cos(\omega_2 t_3) & \cos(\omega_2 t_4) \\ \sin(\omega_2 t_1) & \sin(\omega_2 t_2) & \sin(\omega_2 t_3) & \sin(\omega_2 t_4) \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где  $t_l, l = \overline{1,4}$ , – моменты времени, в которых происходит переключение управления,  $\tau_i, i = \overline{1,5}$  – длительности интервалов, на которых управление остаётся постоянным. Параметру  $k$ , равному 0 и 1, соответствует управлению  $\varepsilon, -\varepsilon$  на первом интервале. Смена знака управления эквивалентна симметричному отражению  $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0}) \rightarrow (-q_1^{T_0}, -p_1^{T_0})$ , что видно из (5). Связь этих величин и оптимального управления можно проиллюстрировать на Рис. 1.



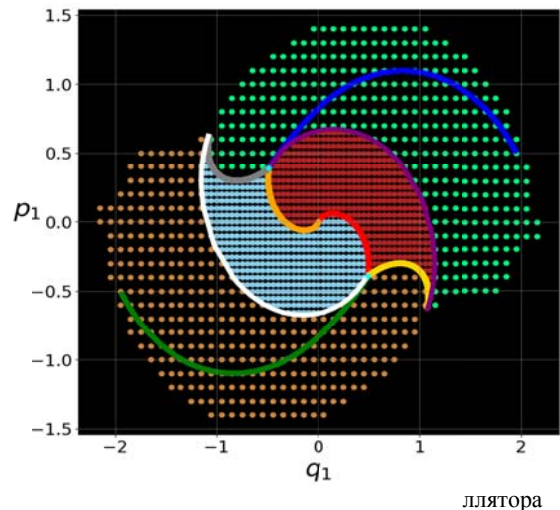
При наложении условий  $\tau_1 = 0$  или  $\tau_2 = 0$  на уравнения (5), (6) происходит переход из класса четырёх в класс трёх переключений. Стоит отметить важную особенность, заключающуюся в том, что уравнение (6), записанное в переменных  $\tau_i, i = \overline{1,5}$  не содержит  $\tau_1, \tau_5$ .

**Моделирование.** Для сопоставления новых результатов с существующими в [4], выбираются следующие параметры задачи:

$$\varepsilon = 0,4, \omega_1 = 1, \omega_2 = 1,4.$$

Классу трёх переключений с начальным управлением  $\varepsilon, -\varepsilon$  отвечают голубая и красная области на Рис. 2. Класс четырёх переключений представлен оранжевой и зелёной областями с управлением  $-\varepsilon, \varepsilon$  на начальном интервале соответственно. Красная, оранжевая, синяя и зелёная кривые характеризуют класс двух переключений [4]. Приводятся результаты численного решения уравнений (5), (6) при условиях  $\tau_1 = 0$  или  $\tau_2 = 0$  относительно переменных  $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0})$ . Жёлтая и серая граничные кривые получаются при переходе из класса четырёх переключений в класс трёх переключений путём обнуления последнего интервала постоянства

управления, причём управление на начальном интервале совпадает с начальным управлением в областях по обе стороны границы. Белая и фиолетовая кривые отвечают обнулению первого интервала постоянства управления в классе четырёх переключений, что означает переход в класс трёх переключений. Начальное управление для данных кривых совпадает с начальным управлением соответствующих областей для трёх переключений. Одновременному обнулению крайних интервалов постоянства управления в классе четырёх переключений соответствуют голубые точки, в которых пересекаются кривые, полученные при условиях  $\tau_1 = 0$  или  $\tau_2 = 0$ .



**Заключение.** В данной работе исследуется задача оптимального быстродействия для системы двух несинхронных осцилляторов, которые требуется перевести из состояния покоя в состояние, когда второй осциллятор продолжает покоиться, а для первого рассматривается некоторое множество конечных состояний. Для полученных областей на фазовой плоскости первого осциллятора в классе трёх и четырёх переключений были описаны механизмы переходов между данными классами. Данные переходы характеризуются обнулением крайних интервалов постоянства управления в классе с большим числом переключений.

*Работа проводилась при поддержке гранта ИПУ РАН МНШ “Методы оптимизации и планирования движения управляемых объектов” 2021-2023г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Берлин Л. М., Галяев А. А., Лысенко П. В. Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 215, 2022, С. 40-51.
3. Берлин Л. М., Галяев А. А., Лысенко П. В. Исследование оптимального решения задачи быстродействия для двух несинхронных осцилляторов. XIV Всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2021. Материалы XIV мультиконференции. Т. 4, Ростов-на-Дону, 2021. С. 39-41.
4. Берлин Л. М., Галяев А. А. Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстродействия. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. Т. 505, № 1, Москва, 2022. С. 86-91.

L.M. Berlin (ICS RAS, Moscow), A.A.Galyaev (ICS RAS, Moscow). **About the boundaries of the classes in the time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators**

The time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators with a restriction on a scalar control in the problem of acceleration from rest is considered. A control whose dimension is less than the dimension of the system is chosen in such a way as to transfer the system from the origin to an arbitrary state where the phase coordinates of the second oscillator are zero. Taking into account the relay type of optimal control, the study of the equations of system dynamics and the conditions of non-degeneracy of control made it possible to construct curves that separate previously obtained regions of some switching classes on the phase plane of the first oscillator.



Д. Ю. КНЯЗЬКОВ, Т. Ю. ФИГУРИНА  
(Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва)

## ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

*Исследуется прямолинейное движение цепочки одинаковых тел в вязкой среде. Соседние тела взаимодействуют друг с другом, ограничений на величину сил взаимодействия не накладывается. Построено движение, при котором скорость каждого из тел кусочно-постоянна, скорость центра масс постоянна, и относительное положение тел в начале и в конце движения одинаково. В случае, если скорости всех тел ограничены, построено движение с максимальной скоростью центра масс. Решена задача о перемещении системы на заданное расстояние при условиях покоя и совпадения конфигурации системы в начале и в конце движения.*

**Введение.** Прямолинейное движение системы одинаковых тел за счет сил взаимодействия между ними в сопротивляющихся средах рассматривалось в работах [1]–[3]. В работе [2] была решена задача оптимального управления такой системой в случае сухого трения. В работе [3] исследовалась устойчивость движения системы при периодическом изменении ее конфигурации для широкого класса законов сопротивления. В работе [1] было построено движение системы при периодическом изменении конфигурации в случаях кусочно-линейного и квадратичного трения. Это движение реализовывалось за счет неограниченных сил взаимодействия между телами, мгновенно изменяющих скорости тел в некоторые моменты времени; в остальные моменты времени взаимодействие между телами отсутствовало. Предполагалось, что в начале движения импульс системы не равен нулю.

В настоящем докладе строится движение системы взаимодействующих тел в среде с квадратичным трением при периодическом изменении конфигурации системы. Силы взаимодействия между телами мгновенно изменяют скорости тел в некоторые моменты времени и, в отличие от работы [1], кусочно-постоянны и не равны нулю в остальные моменты времени. В построенном движении скорость центра масс системы постоянна, а скорости всех тел кусочно-постоянны. При ограничении на скорость каждого из тел, строится движение, максимизирующее скорость центра масс системы. Кроме того, решается задача о перемещении системы на заданное расстояние в случае, если в начальный и конечный моменты времени все тела покоятся.

**Постановка задачи.** Рассматривается прямолинейное движение системы  $N$  идентичных взаимодействующих тел  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  в среде с квадратичным трением. Масса каждого из тел равна  $m$ . Силы взаимодействия между телами приводят к изменению скоростей тел, при этом изменяются действующие на эти тела силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Таким образом, управляя внутренними по отношению к системе силами взаимодействия тел, можно управлять движением системы как целого. Обозначим через  $x_i$  координаты тел  $A_i$  на прямой их движения, а через  $v_i$  скорости этих тел. Уравнения движения системы тел вдоль прямой имеют вид

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= F_1 + R(v_1), \\ m\dot{v}_i &= F_i - F_{i-1} + R(v_i), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ m\dot{v}_N &= -F_{N-1} + R(v_N), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F_i$  – сила, действующая со стороны тела  $A_{i+1}$  на тело  $A_i$ , а  $R$  – сила сопротивления среды, определяемая соотношением

$$R(v_i) = -cv_i|v_i|. \quad (3)$$

Будем изучать движения, при которых система перемещается на заданное расстояние  $L$  при условии равенств конфигурации системы и скоростей каждого из тел в начале и в конце движения:

$$x_i(T) = x_i(0) + L, \quad v_i(T) = v_i(0), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

Предполагается, что силы взаимодействия неограничены, что позволяет мгновенно изменять скорости тел системы любым таким образом, что скорость центра масс системы  $v$ ,

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$$

остается неизменной.

**Основные результаты.** Укажем такое движение системы, при котором скорость центра масс постоянна в течение всего времени движения и скорость каждого из тел кусочно-постоянна. Пусть  $v_i(0) = a_i$ . Укажем, каким условиям должны удовлетворять величины  $a_i$  и как выбрать силы взаимодействия между телами, чтобы реализовать движение с постоянными скоростями на интервале  $[0, \tau]$ :

$$v_i(t) \equiv a_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, \tau]. \quad (5)$$

При постоянной скорости центра масс сумма сил сопротивления среды, действующих на тела, равна нулю, откуда следует

$$\sum_{i=1}^N a_i |a_i| = 0.$$

При этом условии движение с постоянными скоростями реализуется при следующем выборе сил взаимодействия

$$F_i = \sum_{j=1}^i c a_j |a_j|, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Определим движение системы следующим образом. Пусть скорости всех тел постоянны на интервалах времени  $(k\tau, (k+1)\tau]$ ,  $k=0, \dots, N-1$ , на интервале  $(0, \tau]$  заданы формулой (5) и изменяются циклически, то есть скорость тела  $A_i$  на каждом последующем интервале времени равна скорости тела  $A_{i+1}$  на предыдущем интервале, скорость тела  $A_N$  на каждом последующем интервале времени равна скорости тела  $A_1$  на предыдущем интервале. При этом в моменты времени  $t = k\tau$ ,  $k = 1, \dots, N$  скорости тел системы мгновенно изменяются, а скорость центра масс постоянна на всем интервале движения.

Таким образом, на интервале времени  $[0, N\tau]$  построено движение системы с постоянной скоростью центра масс и кусочно-постоянными скоростями тел и такое, что  $v_i(N\tau) = v_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , при этом смещение каждого из тел на интервале  $[0, N\tau]$  одинаково и равно  $\sum_{k=1}^N a_k \tau$ . Выбирая  $\tau = L / \sum_{k=1}^N a_k$ , получаем решение исходной задачи в случае, если импульс системы в начальный момент времени положителен,  $\sum_{k=1}^N a_k > 0$ . Заметим, что такое движение может быть продолжено на интервал  $[0, \infty)$ .

Задача (1)–(4) также была решена в случае, когда импульс системы в начальный момент времени равен нулю, в частности когда все тела покоятся. Показано, что с помощью импульсного воздействия в начальный момент времени и последующего интервала времени, на котором силы взаимодействия равны нулю, систему можно привести в состояние, в котором ее импульс положителен. Затем можно организовать движение с кусочно-постоянными скоростями всех тел, и на последнем этапе движения привести систему в состояние покоя с помощью импульсных взаимодействий и интервала времени, на котором силы взаимодействия равны нулю.

Решена задача максимизации скорости центра масс системы в случае, когда наложено ограничение на скорость каждого из тел,  $|a_i| \leq V$ . Показано, что в оптимальном наборе скоростей  $a_i$  все отрицательные скорости равны  $-V$ , нулевые скорости отсутствуют, а все положительные скорости одинаковы. Найдено оптимальное количество тел, движущихся вперед, в зависимости от общего числа тел системы  $N$ .

**Заключение.** В работе исследуется прямолинейное движение цепочки одинаковых взаимодействующих тел в вязкой среде. Решается задача о перемещении системы на заданное расстояние при условии совпадения конфигурации системы и скорости каждого из тел в начале и в конце движения. Построено движение, при котором скорость каждого из тел кусочно-постоянна, и скорость центра масс постоянна, которое является решением задачи в случае ненулевого начального импульса системы. При наличии ограничения на скорости тел построено движение с максимальной скоростью центра масс. Построено решение задачи в случае нулевого начального импульса системы, в частности когда все тела покоятся в начальный момент времени.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 21-51-12004*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Поступательное движение цепочки тел в сопротивляющейся среде. *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. № 4. С. 380–388.
2. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2015. № 5. С. 3–9.
3. Knyazkov D., Figurina T. Periodic regimes of motion of a chain of interacting bodies in a medium with resistance // *Proc. of 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Moscow, Russia*. 2020. P. 1–3.

---

D.Knyazkov, T.Figurina (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow). **Rectilinear motion of a chain of interacting bodies in a viscous medium**

The rectilinear motion of a chain of identical bodies in a viscous medium is considered. Adjacent bodies interact with each other. There are no restrictions on the magnitude of the interaction forces. A motion is constructed in which the velocity of each of the bodies is piecewise constant, the velocity of the center of mass is constant, and the relative position of the bodies at the beginning and at the end of the motion is the same. If the velocities of all bodies are bounded in magnitude, the motion with the maximum velocity of the center of mass is constructed. The problem of moving the system to a given distance under conditions of rest and coincidence of the configuration of the system at the beginning and at the end of the motion is solved.

В. Р. БАРСЕГЯН

(Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет, Ереван)

## ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАНЫМИ СКОРОСТЯМИ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

*Рассмотрена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Полагается, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением одного конца при закреплении другом конце с заданными начальными, конечными условиями и заданными значениями скоростей точек системы в промежуточные моменты времени. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен подход аналитического построения оптимального граничного управления. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее используется метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.*

**Введение.** Задачи управления и оптимального управления колебательными процессами, описываемые волновыми уравнениями имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение [1–8]. Моделирование и управление динамических систем с промежуточными условиями являются активно развиваемыми направлениями в современной теории управления [3–8]. Для распределенной однородной колебательной системы, описываемой однородным волновым уравнением с многоточечными промежуточными условиями, задачи граничного управления рассмотрены в работах [2–6]. В них решения задач построены на основе методов Фурье и теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями.

К задачам управления и оптимального управления разнородных распределенных систем посвящена, в частности, работа [2, 8]. В работе [2] (и других работах этого же автора и его учеников), изучены и выведены формулы типа Даламбера. Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно-постоянными характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако, научное направление по управлению и оптимальному управлению неоднородными колебаниями пока еще недостаточно исследовано.

Предлагаемый доклад посвящен рассмотрению задач оптимального граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с заданными значениями скоростей точек системы в промежуточные моменты времени. Распределенная неоднородная колебательная система, описываемая однородным волновым уравнением, в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Рассмотренный колебательный процесс состоит из двух участков с разными физическими характеристиками (упругими свойствами и плотностями) материалов. Предполагается, что длины однородных участков такие, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен подход аналитического построения оптимального граничного управления.

**Об основных результатах.** В настоящей работе рассмотрена задача оптимального граничного управления кусочно-однородной колебательной системой (состоящей из двух участков:  $-l_1 \leq x \leq 0$  и  $0 \leq x \leq l$ ) с заданной скоростью точек в промежуточный момент времени.

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), описывается функцией  $Q(x, t)$ ,  $-l_1 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ , а отклонения от состояния равновесия, подчиняются следующему волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и с условиями сопряжения в точке  $x = 0$  соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (3)$$

где  $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$  - скорость прохождения по участкам волны,  $\rho_i = const$  - плотность,  $k_i = const$  - модуль Юнга,  $i = 1, 2$ . Предполагается, что длины  $l_1$  и  $l$  участков выбраны так, что время прохождения волны по участку  $-l_1 \leq x \leq 0$  совпадает со временем прохождения волны по участку  $0 \leq x \leq l$ , т.е.  $a_2 l_1 = a_1 l$ .

Пусть заданы начальные (при  $t = t_0 = 0$ ) и конечные (при  $t = T$ ) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Пусть также в некоторые промежуточные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ )

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы промежуточные значения скоростей точек в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \psi_k(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

В формуле (2) функции  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  - управляющие воздействия (граничные управления).

Предполагается, что функция  $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$ , где  $\Omega_T = \{(x, t): x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$ , а функции  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$ ;  $\psi_i(x) \in C^1[-l_1, l]$ ,  $i = 0, 1, \dots, m, m+1$ . Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования [3, 4].

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются следующие условия согласования.

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(-l_1), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l), \\ \dot{\mu}(t_i) &= \psi_i(-l_1), & \dot{\nu}(t_i) &= \psi_i(l), & & & & i = 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(-l_1), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l). \end{aligned} \quad (7)$$

Требуется найти такие оптимальные управления  $\mu^0(t)$  и  $\nu^0(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , под воздействием которых колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение условий (6) и минимизирующие функционал

$$\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t)) dt. \quad (8)$$

Для решения задачи переходим к новой переменной  $\xi$ , что приводит к сжатию или растяжению отрезка  $-l_1 \leq x \leq 0$  относительно точки  $x = 0$ . При этом будем иметь, что отрезок  $-l_1 \leq x \leq 0$  переходит к отрезку  $-l \leq \xi \leq 0$ . Для функции состояния  $Q(\xi, t)$  получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение, с соответствующими условиями для (3)-(7), относительно нового переменного.

Решение задачи сведено к задаче оптимального управления колебательного движения, описываемого неоднородным уравнением с нулевыми граничными условиями, с соответствующими начальным, промежуточным, конечным состояниями и минимизируемым функционалом (8).

Используя метод разделения переменных и учитывая промежуточные и конечные условия, применяя подходы, приведенные в работах [3, 4, 6], получено, что искомая функция оптимального управления  $\mu^0(t)$  и  $\nu^0(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  для каждой гармоники должна удовлетворять некото-

рым интегральным соотношениям и доставлять минимум функционалу (8). Далее на основе метода проблем моментов [9, 10] для произвольных чисел первых гармоник построены аналитические выражения для искомых оптимального граничного управления и соответствующих функций состояния.

**Заключение.** Рассмотрена задача оптимального граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стержня с заданными начальными, промежуточными и конечными условиями с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами. При этом явное выражение функции оптимального граничного управления представлено через заданные начальные, промежуточные и конечные значения функции прогиба распределенной системы. Результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. **Ильин В.А.** Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков. Доклады РАН, т. 440, № 2, с. 159–163, 2011.
3. **Барсегян В.Р.** Оптимальное граничное управление колебаниями струны с заданными значениями скоростей точек в промежуточные моменты времени. Известия НАН РА, Механика, 2021, т. 74, № 1, с. 35–50.
4. **Barseghyan V., Solodusha S.** Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science. Vol 12755.* pp 299-313.
5. **Barseghyan V.R. and Solodusha S.V.** On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time. *Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1847 (2021) 012016.*
6. **Barseghyan V., Solodusha S.** Control of String Vibrations by Displacement of One End with the Other End Fixed, Given the Deflection Form at an Intermediate Moment of Time. *Axioms.* 2022; 11(4):157.
7. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.
8. **Рогожников А.М.** Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН, 2012, Т. 444, с. 488–491.
9. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
10. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

V. R. Barseghyan (Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan State University, Yerevan, Armenia). **Optimal Boundary Control of a Distributed Non-Homogeneous Oscillating System with Given Velocities of Points at Intermediate Moments of Time**

We consider a problem of optimal boundary control of a distributed non-homogeneous oscillating system described by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. It is assumed that the time of propagation of a wave through each homogeneous section is the same. Control is performed by displacement of one end with the other end fixed with given initial, final conditions and given values of velocities of points of the system at intermediate moments of time. The quality criteria are set for the whole time interval. An approach for analytical construction of the optimal boundary control is proposed. The scheme of construction is as follows: the initial problem is reduced to the problem of control with distributed actions with zero boundary conditions. Then, the method of separation of variables and methods of optimal control theory of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions are used. The obtained results are illustrated by a concrete example.

И.М. АНАНЬЕВСКИЙ  
(Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва)

## ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

*Рассматривается задача о гашении колебаний упругой балки с грузом на конце с помощью активного динамического гасителя. На величину хода гасителя накладываются ограничения. Предложен закон ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, который успокаивает систему за конечное время, в том числе, в присутствии неконтролируемого возмущения, например сил сухого трения.*

**Введение.** Рассматривается задача о гашении колебаний упругой балки с закрепленным на конце грузом. Гашение осуществляется с помощью активного динамического гасителя с поступательно перемещающейся массой. Такие устройства могут применяться, например, на космических аппаратах, где платформа с измерительными приборами выносится на значительное расстояние от корпуса аппарата с помощью длинной штанги. Использование управляемого гасителя, расположенного на самой платформе, позволяет точнее позиционировать платформу и погасить поперечные колебания штанги, тем самым повысить точность измерений.

На схеме, представленной на рис. 1, один конец штанги 2 прикреплен к корпусу космического аппарата 1, на другом конце располагается платформа 3. Гаситель состоит из направляющей 4, перпендикулярной оси штанги, и подвижной массы 5, которая может перемещаться вдоль направляющей посредством электропривода. Управляющей переменной служит сила взаимодействия подвижной массы гасителя с направляющей. При этом возникают два естественных ограничения: одно - на управляющую силу, обусловленное ограниченными возможностями привода, другое - на величину смещения массы гасителя вдоль направляющей, поскольку направляющая имеет конечные размеры. Предполагается, что помимо управляющей силы между массой гасителя и направляющей действует неконтролируемое возмущение, например, сила сухого трения, параметры которого неизвестны и непостоянны.

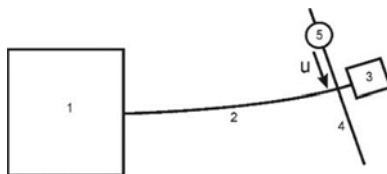


Рис. 1. Схема конструкции с активным динамическим гасителем

Ранее в работах [1,2] в предположении, что трение отсутствует, были предложены алгоритмы программного управления, переводящие систему из заданного начального состояния в начало координат с сохранением ограничений на модуль управляющей функции. В предлагаемом докладе строится управление в форме обратной связи, что позволяет справиться с неконтролируемыми ограниченными возмущениями.

**Постановка задачи.** При некоторых упрощающих предположениях [3] моделью данной конструкции служит следующая механическая система: два тела, массами  $m_1$  и  $m_2$ , перемещаются вдоль горизонтальной прямой (рис. 2). Первое тело соединено с неподвижным основанием пружиной жесткости  $k > 0$ , а второе тело соединено с первым посредством привода, который генерирует силу  $u$ .

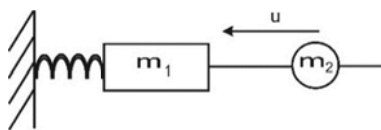


Рис. 2. Упрощенная модель

Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi} + k\xi = -u - v, \quad m_2 \ddot{\eta} = u + v. \quad (1)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  – координаты на прямой первого и второго тел соответственно,  $u$  – управляющая сила,  $v$  – неконтролируемое возмущение. На силы  $u$  и  $v$  наложены ограничения

$$|u| \leq U, \quad |v| \leq \rho U, \quad U > 0, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (2)$$

Кроме того, на протяжении всего процесса движения смещение второго тела относительно первого не должно превышать половины длины направляющей, т.е. должно выполняться условие

$$|\xi(t) - \eta(t)| \leq r. \quad (3)$$

Требуется построить управление  $u(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$ , удовлетворяющее ограничению (2) и переводящее систему (1) за конечное время из произвольного начального состояния в состояние покоя  $\xi = \eta = 0$ ,  $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$  с соблюдением ограничения (3).

Положим

$$x_1 = k\xi, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = m_2 k \eta / m_1, \quad x_4 = \dot{x}_3, \quad t' = (k/m_1)^{1/2} t. \quad (4)$$

Уравнения (1) примут вид (точка теперь означает производную по  $t'$ ):

$$\dot{x}_2 = -x_2 - u - v, \quad \dot{x}_4 = u + v. \quad (5)$$

Поставленная задача сводится к построению управления, удовлетворяющего ограничению (2) и переводящего систему (5) из произвольного начального состояния в начало координат за конечное время.

**Алгоритм управления.** Алгоритм построения искомого управления основан на методике, развитой в [4]. С помощью преобразования

$$z = Sx, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

приведем систему (5) к виду

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (u + v). \quad (7)$$

В переменных  $z$  условие (3) принимает форму

$$|p^T z| \leq kr, \quad p \in R^4, \quad p^T = \left(-2 + \frac{m_1}{2m_2}, -\frac{1}{2} + \frac{m_1}{4m_2}, 0, 0\right). \quad (8)$$

Зададим функцию  $T(z)$  уравнением

$$(Q\delta(T)z, \delta(T)z) = d, \quad d > 0, \quad (9)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 20 & -180 & 420 & -280 \\ -180 & 2220 & -5880 & 4200 \\ 420 & -5880 & 16800 & -12600 \\ -280 & 4200 & -12600 & 9800 \end{pmatrix}, \quad \delta(T) = \text{diag}\{T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, T^{-4}\}.$$

В [4] установлено, что это уравнение имеет единственное положительное решение для любого  $z \in R^4$ ,  $z \neq 0$ . Зададим управление в виде

$$u(z) = -\frac{10}{T(z)} z_1 + \frac{90}{T^2(z)} z_2 - \frac{210}{T^3(z)} z_3 + \frac{140}{T^4(z)} z_4 - z_2. \quad (10)$$



**Основной результат.** Выбор в уравнении (9) постоянной  $d$  в виде  $d = U^2/5$  гарантирует выполнение неравенства  $|u(z) + z_2| \leq U$ , а управление (10) останавливает систему (7) в начале координат за конечное время при условии  $\rho < 1/20$ . Кроме того, имеет место соотношение

$$\max_{z^T Bz=d} p^T z = (d p^T B^{-1}(T(z_0))p)^{1/2}, \quad (11)$$

где  $B(T) = \delta(T)Q\delta(T)$  – положительно определенная симметрическая матрица, а  $z_0$  – начальное состояние системы. Соотношение (11) дает верхнюю оценку отклонения массы гасителя от нулевого положения вдоль траектории системы. Чем ближе начальное состояние к нулю, тем меньше максимальное значение этого смещения во время движения. При достаточно малых начальных отклонениях системы от положения равновесия условие (7) выполнено.

Сказанное выше справедливо и в отношении системы (5), управляемой по закону  $u(Sx)$ , в котором сделана обратная замена переменных (6). Используя последовательно преобразования (6) и (4), можно представить закон управления в исходных переменных  $\xi, \eta$ .

**Заключение.** Для механической системы, содержащей колебательное звено, предложен закон ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, позволяющий приводить систему в заданное состояние покоя за конечное время. При этом система может испытывать действие неконтролируемых возмущений, а на фазовые переменные могут накладываться геометрические ограничения. Предложенный подход может быть использован для управления динамикой различных технических объектов, в частности, систем точного позиционирования.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 21-51-12004) и в рамках Госзадания АААА-А20-120011690138-6.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка. Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. N 6. С. 94-100.
2. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях. Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 901-908.
3. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшев С.А., Чернов А.А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс. Изв. АН СССР. Теория и системы управления. 2000. N 1. С. 135-145.
4. Ovseevich A. A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium. J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 165. P. 532-544.

---

I.M.Ananievski (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow). **Damping of oscillations of a linear mechanical system under phase constraints**

The problem of vibration damping of an elastic beam with a load at the end using an active dynamic absorber is considered. Constraints are imposed on the damper stroke. A law of modulo-bounded control in the form of feedback is proposed, which calms the system in a finite time, including in the presence of uncontrolled perturbations, such as dry friction forces.

А. А. ЗАМЫШЛЯЕВА, Е. В. БЫЧКОВ  
(Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск)

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

*В работе рассмотрена задача оптимального управления решениями задачи Шоултера – Сидорова для математической модели распространения волн на мелкой воде. Данная математическая модель основана на уравнении ИМВq и краевых условиях Дирихле. Уравнение ИМВq относится к классу неполных полулинейных уравнений соболевского типа второго порядка. С помощью редукции к абстрактной задаче управления для уравнения соболевского типа показано существование оптимального управления в исходной модели.*

**Введение.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ . В цилиндре  $\Omega \times (0, T)$  рассмотрим неоднородное модифицированное уравнение Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2 \Delta u - \Delta(u^3) = y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

с однородным краевым условием Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (2)$$

и начальными условиями Шоултера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ , а  $P$  – некоторый проектор.

Уравнение (1) моделирует распространение волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов [1]. Поскольку оператор  $\lambda - \Delta$  может быть вырожденным, то уравнение (1) относится к классу уравнений соболевского типа [2] (вырожденных уравнений [3], уравнений не разрешенных относительно старшей производной по времени [4]). Используя теорию относительно  $p$ -ограниченных операторов, разработанную Г.А. Свиридюком и его учениками [5], в работе [6] показано, что в подходящем образом выбранных пространствах задачу (1)–(3) можно редуцировать к начальной задаче Шоултера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0 \quad (4)$$

для неполного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} + Mu + N(u) = y, \quad (5)$$

где  $P$  – некоторый проектор вдоль ядра оператора  $L$ ,  $\dot{u}, \ddot{u}$  – первая и вторая производные по  $t$ .

Введем пространство управлений  $Y$  в нем выделим непустое, замкнутое и выпуклое множество  $Y_{ad}$ , которое назовем множеством допустимых управлений. Для задачи (4), (5) рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u, y) \rightarrow \inf, y \in Y_{ad}. \quad (6)$$

Задача оптимального управления является классической оптимизационной задачей, среди классических работ стоит отметить [7]. Она позволяет балансировать между близостью к желаемому состоянию и объемом трудо- и энергозатрат. В моделях соболевского типа задача оптимального управления впервые была рассмотрена в работе [8]. Для полулинейных моделей соболевского типа первого порядка задача оптимального управления была исследована в работах [9].

**Метод фазового пространства.** Пусть  $U, F$  – банаховы пространства, оператор  $L \in L(U; F)$  (т.е. линейный и непрерывный), а оператор  $M \in Cl(U; F)$  (линейный, замкнутый и плотно определенный). Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in L(F; U)\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора  $M$  относительно оператора  $L$  (или,  $L$ -резольвентным множеством оператора  $M$ ). Множество  $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$  называется  $L$ -спектром оператора  $M$ .

Оператор-функции  $(\mu L - M)^{-1}$ ,  $R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L$ ,  $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$  с областью определения  $\rho^L(M)$  называются, соответственно  $L$ -резольвентой, правой  $L$ -резольвентой, левой  $L$ -резольвентой оператора  $M$ .

Оператор  $M$  называется  $(L, \sigma)$ -ограниченным, если

$$\exists a > 0 \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) d\lambda, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\lambda^L(M) d\lambda$$

являются проекторами в пространствах  $U$  и  $F$ , соответственно. Здесь  $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$ . Далее в силу теоремы о расщеплении [5] проекторы  $P$  и  $Q$  расщепляют пространства  $U$ ,  $F$  в прямую сумму:  $U = U^0 \oplus U^1$  и  $F = F^0 \oplus F^1$ , где  $\ker P = U^0$ ,  $\text{im} P = U^1$ ,  $\ker Q = F^0$ ,  $\text{im} Q = F^1$ . И имеют смысл оператор  $H = M_0^{-1}L_0 \in L(U^0)$ . Если  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен и оператор  $H$  нильпотентен степени  $p$ , тогда оператор  $M$  называется  $(L, p)$ -ограниченным.

Пусть  $M$  – некоторое риманово многообразие без края моделируемое пространством  $U$ . Будем говорить, что пара  $(x, y)$  принадлежит касательному расслоению ТМ множества  $M$ , если  $x$  принадлежит  $M$  и пара  $(x, y)$  принадлежит касательному пространству  $T_x M$ , т.е.  $(x, y) \in \text{TM} \Leftrightarrow x \in M \wedge (x, y) \in T_x M$ . Множество  $M$  назовем фазовым пространством уравнения однородного уравнения (5), если

- 1) для любых  $(u_0, u_1) \in \text{TM}$  существует единственное решение задачи (4), (5);
- 2) любое решение  $u = u(t)$  уравнения (5) лежит в  $M$  как траектория.

Пусть  $\ker L \neq \{0\}$  и оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен, тогда, в силу теоремы о расщеплении [5], уравнение (7) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} (I - Q)(M + N)(u) = (I - Q)y, \\ \ddot{u}^1 = L_1^{-1}Q(M + N)(u) + L_1^{-1}Qy, \end{cases}$$

где  $u^1 = Pu$ . Пусть  $(I - Q)y$  не зависит от  $t$ , тогда локальным фазовым пространством уравнения (5) является множество  $M = \{u \in U : (I - Q)(M + N)(u) = (I - Q)y\}$ .

**Задача оптимального управления.** Рассмотрим задачу (4), (5). Для этого зададим вещественное, сепарабельное, гильбертово пространство  $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , дуальные пары рефлексивных банаховых  $(A, A^*)$  и  $(L^p, L^q)$ .

В заданных пространствах определим операторы  $L$ ,  $M$ ,  $N$  удовлетворяющие условиям:

- (C1)  $L \in L(A, A^*)$  – самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов;
- (C2)  $M \in L(A, A^*)$  – самосопряженный, неотрицательно определенный;
- (C3)  $N \in C^r(L^p, L^q), r \leq 1$  –  $s$ -монотонный,  $p$ -коэрцитивный и однородный оператор порядка  $p$ , с симметричной производной Фреше.

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен и выполнены условия (C1), (C2), (C3) и  $y \in L^q(0, T; A^*)$ . Тогда для любых  $u_0 \in A$  и  $u_1 \in \text{coim} L$  существует решение задачи (4), (5)

$u = u(x, t)$  такое, что  $u \in L^\infty(0, T; A) \cap L^p(0, T; M)$  и  $\dot{u} \in L^\infty(0, T; \text{coim}L)$ .

Рассмотрим задачу оптимального управления (4), (5), (6). Для этого построим пространство управлений  $Y = L_2(0, T; L^q)$  и определим в нем непустое замкнутое и выпуклое множество  $Y_{ad}$ , для которого  $(I - Q)y = 0$ , пространство состояний  $A_1 = \{u \mid u \in L^\infty(0, T; A) \cap L^p(0, T; M), \dot{u} \in L^\infty(0, T; \text{coim}L)\}$ .

Решением задачи оптимального управления назовем пару  $(\tilde{u}, \tilde{y}) \in A_1 \times Y_{ad}$  минимизирующую функционал штрафа  $J(\tilde{u}, \tilde{y}) = \inf_{(u, y)} J(u, y)$ , а функцию  $\tilde{y}$  назовем оптимальным управлением.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен и выполнены условия (C1), (C2), (C3) и  $y \in L^q(0, T; A^*)$ . Тогда для любых  $u_0 \in A$  и  $u_1 \in \text{coim}L$  существует решение задачи оптимального управления (4), (5), (6).

**Приложение к исследованию математической модели.** Редуцируем задачу (1)–(3) к задаче (4), (5) для этого возьмем в качестве пространства  $H$  пространство Соболева  $W_2^{-1}(\Omega)$  со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \tilde{v} dx$ , где  $\tilde{v}$  – обобщенное решение задачи Дирихле (2) для уравнения  $\Delta \tilde{v} = v$  в области  $\Omega$ . Положим  $A = A^* = L^2$  и зададим операторы  $L, M, N$  в данных пространствах. В докладе будет показано, что при  $\lambda \geq \lambda_1$  и произвольных  $u_0 \in A$  и  $u_1 \in \text{coim}L$  существует решение задачи оптимального управления (1) – (3), (6).

**Заключение.** Проведено аналитическое исследование задачи оптимального управления решениями задачи Шоуолтера - Сидорова для математической модели распространения волн на мелкой воде. В дальнейшем планируется рассмотреть условия Коши и провести численное исследование данных задач.

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072Г3).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах. *Письма в ЖЭТФ*. 2011. Т. 93. № 8. С. 469–472.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
3. Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. N.Y., Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.
4. Ryatkov S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2002.
5. Свиридюк Г.А., Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка. *Дифференциальные уравнения*. 2006. Т. 42. № 2. С. 252–260.
6. Замышляева А.А., Бычков Е.В. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2012. № 18 (277). С. 13–19.
7. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
8. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений. *Доклады академии наук*. 1999. Т. 364. № 3. С. 323–325.
9. Манакова Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации. *Дифференциальные уравнения*. 2007. Т. 43. № 9. С. 1185–1192.

A.A. Zamyshlyayeva, E.V. Bychkov, (South Ural State University, Chelyabinsk). **Optimal control of solutions to the Showalter–Sidorov problem for a mathematical model of wave propagation in shallow water**

Of concern is the optimal control problem over the solutions of the Showalter - Sidorov problem for a mathematical model of wave propagation in shallow water. This mathematical model is based on the IMBq equation and Dirichlet boundary conditions. Comparison IMBq refers to incomplete semi-linear classes belonging to patients of the second order type. With the help of reduction to an abstract control problem for the Sobolev-type equation, the manifestation of the significance of control in the original model.

Е. А. МАРЧУК, Я. В. КАЛИНИН, А. В. МАЛОЛЕТОВ  
(Университет Иннополис, Иннополис)

## О КОМПЕНСАЦИИ ОТКЛОНЕНИЙ РАБОЧЕГО ИНСТРУМЕНТА КРУПНОГАБАРИТНОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТРОСОВОГО РОБОТА

*Для оценки величины отклонений рабочего инструмента параллельного тросового робота от заданного положения и ориентации строится математическая модель и выполняется численный эксперимент. Основной причиной отклонений при отсутствии внешнего воздействия являются деформации элементов несущей конструкции и тросовой системы. На основании результатов произведенного моделирования предлагается компенсировать отклонения с использованием показаний датчиков сил натяжения тросов. Для гашения крутильных колебаний рабочего инструмента относительно вертикальной оси, возникающих при воздействии внешних сил, предлагается использовать пассивный динамический гаситель колебаний.*

**Введение.** При проектировании несущей конструкции в зависимости от габаритных размеров параллельного тросового робота могут использоваться различные инженерные решения. Так, при относительно небольших размерах робота (длина ребра призмы несущей конструкции порядка 1–2 м) и относительно небольшой массе полезной нагрузки (1–2 кг) при условии достаточной жесткости элементов, деформации элементов робота малы, и в большинстве практических задач ими можно пренебречь. При увеличении габаритных размеров робота до единиц метров и увеличении массы полезной нагрузки до десятков килограмм деформации элементов робота становятся заметными и могут учитываться, либо не учитываться в зависимости от требуемой точности к выполнению поставленных задач. При дальнейшем увеличении габаритных размеров робота до десятков метров и увеличении массы полезной нагрузки до сотен и тысяч килограмм деформации элементов робота становятся значительными, и требуется введение поправок на ошибки позиционирования и ориентации рабочего инструмента робота. У малых и средних тросовых роботов для монтажа элементов тросовой системы, как правило, используются пространственные конструкции в форме правильных призм. У крупногабаритных роботов для монтажа элементов тросовой системы, как правило, используются несущие башни. Экстремальные варианты (линейные размеры рабочего пространства в сотни метров, большая масса полезной нагрузки, малая жесткость элементов, высокие скорости и ускорения и т.д.), имеющие место в лабораторных экспериментах и единичных проектах, в настоящей работе не рассматриваются. В настоящее время специфика крупногабаритных параллельных тросовых роботов изучена мало. В доступной литературе упоминаются некоторые проблемы для частных случаев [1]. При описании реального действующего экспериментального образца приводится проблема вибрации при увеличении скорости движения рабочего инструмента крупногабаритного параллельного тросового робота, используемого для 3D-печати строительным материалом [2]. Однако, авторы ограничиваются лишь констатацией факта и проблема колебаний рабочего инструмента робота при увеличении скорости движения остается нерешенной. Предлагаемый доклад посвящен изложению метода компенсации отклонения рабочего инструмента параллельного тросового робота с использованием датчиков сил натяжения тросов, а также метода гашения крутильных колебаний рабочего инструмента робота с использованием пассивного динамического гасителя колебаний.

**Математическая модель.** Математическая модель крупногабаритного параллельного тросового робота состоит из следующих основных блоков: система тросов, несущие башни, система управления. Предполагается, что тросы натянуты сильно и не провисают. Также полагается, что ролики системы тросов имеют малый вес и работают без трения. Также полагается, что сигналы датчиков проходят через фильтры, обеспечивающие удовлетворительное качество сигналов.

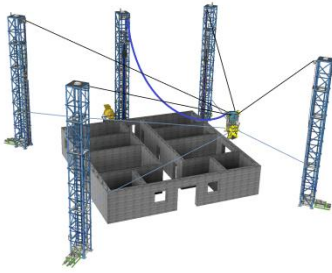


Рис. 1. Комплекс крупногабаритного параллельного тросового робота. Строительство методом 3D-печати.

**Система тросов.** Кинематика системы тросов описывается математическим аппаратом линейной алгебры, наиболее распространенная методика приводится в [3]. С использованием векторов, совпадающих с сегментами тросов, находящихся между точкой схода с направляющего ролика и точкой крепления к рабочему инструменту, строится матрица Якоби. Транспонированная матрица Якоби используется для перехода от скоростей, сил и моментов в пространстве обобщенных координат к скоростям, силам и моментам в пространстве рабочего инструмента робота. Модель троса как твердого тела с вязкоупругими характеристиками задается в соответствии с моделью Фойгта. Поскольку тросы являются односторонними связями, в модель вводятся функции активации, задающие нулевое значение силы натяжения тросов при отрицательном значении деформации тросов, и сохраняющие значение силы натяжения при неотрицательной деформации. Полученное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение твердого тела, решается с использованием численных методов (по умолчанию рекомендуется использовать метод Рунге–Кутты, реализованный в *ode45*):

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Cq = -w_p + A^T \sigma f, \quad (1)$$

где  $q$  – вектор обобщенных координат;  $M$  – матрица инерции;  $D$  – матрица затухания;  $C$  – матрица жесткости;  $w_p$  – динамический винт внешних сил;  $A^T$  – матрица Якоби;  $\sigma$  – вектор функций активации;  $f$  – вектор сил натяжения тросов.

**Несущие башни.** Предварительно моделирование башен производится в программном комплексе «ЛИРА» методом конечных элементов, позволяющим определить величину деформации для различных секторов башни. Для учета влияния деформаций несущих башен на отклонения рабочего инструмента в модели робота башни представлены как вертикальные балки Эйлера–Бернулли с жесткой заделкой. Перенос точки схода верхнего троса выполняется на величину, равную отклонению свободного конца балки, находящегося под действием силы натяжения троса. Поскольку деформации нижней половины башни незначительны, положение нижнего ролика считается соответствующим заданному.

**Система управления.** Закон управления движением рабочего инструмента параллельного тросового робота задается таким образом, чтобы обеспечить плавное начало движения и плавное изменение скорости во время движения. В противном случае возникают колебания тросовой системы, отрицательно влияющие на точность позиционирования рабочего инструмента робота. Авторами разработана оригинальная методика выбора закона движения, основанная на дифференцировании сложных функций и представлении траектории движения через ряд Фурье [4]. Численное моделирование показывает, что при отсутствии внешних воздействий наибольшее отклонение рабочего инструмента от заданного положения происходит по вертикальной координате вследствие действия силы тяжести. Для определения отклонения рабочего инструмента от заданного положения используются датчики сил натяжения нижних тросов. При деформации нижних тросов, в состоянии покоя лежащих в горизонтальной плоскости, тросы становятся ребрами усеченной пирамиды, направленной вершиной вниз. Основания пирамиды образуются точками схода тросов с башен и точками крепления тросов к рабочему инструменту. Из закона Гука выражаются деформации тросов, находится их длина в деформированном состоянии, и далее находится высота усеченной пирамиды, соответствующая отклонению центра масс рабочего инструмента по вертикальной координате. Компенсация отклонения осуществляется двумя одновременно исполняемыми процессами: вывод центра масс рабочего инструмента на заданную высоту и вывод точек крепления тросов к рабочему инструменту на заданную высоту. Управление обоими процессами может осуществляться как посредством ПИД-регулирования, так и более совершенными методами автоматического управления.

**Динамический гаситель колебаний.** Выбранная конфигурация тросовой системы обеспечивает гарантированное избежание столкновений тросов при условии заданной

ориентации платформы с нулевыми углами Тэйта–Брайана. Однако, такая конфигурация тросовой системы обеспечивает очень малое влияние управляющего воздействия на вращательную степень свободы рабочего инструмента относительно вертикальной оси. При добавлении в модель внешнего возмущения, например, ветровой нагрузки на башни и рабочий инструмент, возникают крутильные колебания рабочего инструмента относительно вертикальной оси. Для снижения вибронагрузки предлагается использование пассивного динамического гасителя колебаний, присоединяемого к рабочему инструменту робота. В модели принимается, что и основной объект, и гаситель, являются соосными цилиндрами.

**Численный эксперимент.** Численный эксперимент проведен при следующих значениях изменяемых параметров модели: линейные размеры рабочего пространства робота 20x20x12 м; масса рабочего инструмента 350 кг; масса динамического гасителя 50 кг; материал башен конструкционная сталь; материал тросов полимер Даунеета; скорость ветра 5 м/с; скорость движения рабочего инструмента не более 0,15 м/с.

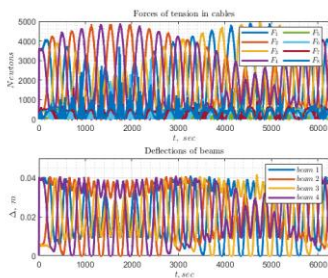


Рис. 2. Силы натяжения тросов и деформации башен крупногабаритного параллельного тросового робота.

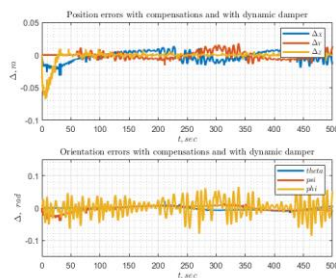


Рис. 3. Ошибки позиционирования и ориентации с компенсирующим воздействием и динамическим гасителем.

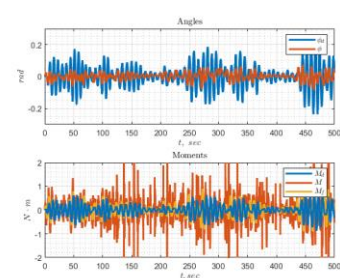


Рис. 4. Углы поворота и моменты относительно вертикальной оси для основного объекта и динамического гасителя.

**Заключение.** Проведенный численный эксперимент подтверждает целесообразность предложенных методов упреждения и компенсации ошибок позиционирования рабочего инструмента крупногабаритного тросового робота. Предложенный способ пассивного динамического гашения колебаний положительно сказывается на снижении вибронагрузок и уменьшении ошибок ориентации и позиционирования рабочего инструмента робота при наличии внешнего возмущающего фактора, например, ветра.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФ 22-29-01618*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zi B., Qian S. *Design, Analysis and Control of Cable-Suspended Parallel Robots and Its Applications*. Springer Singapore, 2017.
2. Izard J.-B., Dubor A., Herve P.-E., Cabay E., Culla D., Rodriguez M., Barrado M. On improvements of a cable-driven parallel robot for achieving additive manufacturing for construction. *Cable-Driven Parallel Robots*. 2018. P. 353 – 363.
3. Pott A. *Cable-Driven Parallel Robots: Theory and Application*. Springer International Publishing. 2018.
4. Marchuk E.A., Kalinin Ya.V., Maloletov A.V. On Smooth Planar Curvilinear Motion of End-Effector of Cable-Driven Parallel Robot. 10th IFAC Conference on Manufacturing Modeling for Management and Control (MIM 2022). 2022.

E.A.Marchuk, Ya.V.Kalinin, A.V.Maloletov (Innopolis University, Innopolis)

#### **On compensation of errors in position and orientation of end-effector of large-sized cable-driven parallel robot**

The article deals with a problem of compensation the errors in position and orientation of end-effector of large-sized cable-driven parallel robot. The method to define error in positioning via force sensors has been proposed. The method to reduce torsional oscillations via dynamic damper that is attached to the end-effector has been also proposed. Numerical experiment has been carried out and shown good results for proposed methods in simulation.

Б.Ы. АШИРБАЕВ

(Кыргызско-Российский Славянский Университет им. Б. Н. Ельцина, г. Бишкек, Кыргызская Республика)

Ж.А. АЛТЫМЫШОВА

(Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, г. Бишкек, Кыргызская Республика)

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ**

*В статье предложен асимптотический способ построения оптимального управления в линейной сингулярно-возмущенной дискретной задаче с квадратичным функционалом. Решения задачи построены для эквивалентной системы, полученной при разделении переменных состояния исходной системы. Так как решение задачи выбора оптимального управления зависит от решения нелинейного разностного матричного уравнения Риккати, то в работе это уравнение преобразуется к трем линейным разностным уравнениям, решениями которых определяется оптимальное управление исходной задачи.*

**Ключевые слова:** сингулярно-возмущенная дискретная система с малым шагом, квадратичный функционал, переходная матрица, разностные уравнения Риккати и Ляпунова.

**Введение.** Множество работ посвящены исследованию сингулярных возмущений в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества. Более подробно об этих работах приведены в обзоре [1]. Среди них можно отметить работы [2,3,4], которые рассматривались линейные сингулярно возмущенные дискретные задачи оптимального управления с квадратичным функционалом. В основном авторы этих работ асимптотические решения строили используя методы прямой схемы и Принцип максимума Понтрягина. В отличие от указанных работ в данной работе использован метод разделения переменных состояния и свойства переходных матриц разделенных систем. Предложенный способ значительно упрощает получения решений задачи оптимального управления в замкнутой форме.

**Постановка задачи.**

Рассмотрим задачу определения оптимального управления  $u^*(t, \mu) \in R^r$ , доставляющую минимум функционала

$$J(u) = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT) \Lambda(t) u(iT) + y'(MT) Q y(MT) \quad (1)$$

на траекториях системы

$$y(t+T) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad (2)$$

$$\varphi(t) = C(t)y(t) + \Phi(t)u(t),$$

где  $y(t) = (x(t) \ z(t))'$ ,  $x(t) - (n \times r)$ ,  $z(t) - (m \times r)$  – векторы переменных состояния,

$\Lambda(t) - (r \times r)$ -положительно определенная матрица,  $A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ (1/\mu)A_3(t) & (1/\mu)A_4(t) \end{pmatrix}$ ,

$B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ (1/\mu)B_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{pmatrix} > 0$ ,  $A_1(t) - (n \times n)$ ,  $A_2(t) - (n \times m)$ ,  $A_3(t) - (m \times n)$ ,

$A_4(t) - (m \times m)$ ,  $B_1(t) - (n \times r)$ ,  $B_2(t) - (m \times r)$  – матрицы,  $0 < T < 1$  – малый шаг,

$\mu$  – малый параметр,  $0 < \mu \ll 1$ ,  $u(t) \in R^r$  вектор управления,

$t \in \Omega_T = \{t: t = kT, k = 0, 1, \dots, M-1\} \subset \{t: 0 \leq t \leq 1\}$ ,  $M = (1/T)$ ,

$\varphi(t) = (\varphi_1(t) \ \varphi_2(t))'$ ,  $\varphi_1(t) - (n \times r)$ ,  $\varphi_2(t) - (m \times r)$  – векторы выходных сигналов,

$C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) \\ (1/\mu)C_3(t) & (1/\mu)C_4(t) \end{pmatrix}$ ,  $C_1(t) - (n \times n)$ ,  $C_2(t) - (n \times m)$ ,  $C_3(t) - (m \times n)$ ,

$C_4(t) - (m \times m)$  – матрицы выхода,  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ (1/\mu)\Phi_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_1(t) - (n \times r)$ ,

$\Phi_2(t) - (m \times r)$  – матрицы прямого управления.

Заданы начальные условия системы (2)



$$y(0) = y_0 = (x(0) \ z(0))' = (x_0 \ z_0)'. \quad (3)$$

### Решение задачи.

Предположим, что

1. Матрицы  $A_1(t), A_2(t), A_3(t), A_4(t), B_1(t)$  и  $B_2(t)$  являются непрерывно дифференцируемы на  $t \in [0, 1]$ .

2. Собственные значения матрицы  $A_4(t)$  и  $C_4(t)$  соответственно удовлетворяют неравенствам:

$$|\operatorname{Re} \lambda_j(t)| < 1 \text{ и } |\operatorname{Re} \beta_j(t)| < 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

При выполнении условий 1 и 2, в работе [5] получена следующая эквивалентная система к системе (2)

$$\tilde{y}(t+T) = \tilde{A}(t, \mu)\tilde{y}(t, \mu) + \tilde{B}(t, \mu)u(t, \mu), \quad (4)$$

где

$$\tilde{A}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(t, \mu) & 0 \\ 0 & (1/\mu)\tilde{A}_4(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(t, \mu) \\ (1/\mu)\tilde{B}_2(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \tilde{y}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t, \mu) \\ \tilde{z}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\tilde{x}(t, \mu) = x(t, \mu) + \mu N(t, \mu)\tilde{z}(t, \mu), \quad \tilde{z}(t, \mu) = z(t, \mu) - H(t, \mu)x(t, \mu),$$

$$\tilde{A}_1(t, \mu) = A_1(t) + A_2(t)H(t, \mu), \quad \tilde{A}_4(t, \mu) = A_4(t) - \mu H(t, \mu)A_2(t),$$

$$\tilde{B}_1(t, \mu) = B_1(t) + N(t, \mu)\tilde{B}_2(t, \mu), \quad \tilde{B}_2(t, \mu) = B_2(t, \mu) - \mu H(t, \mu)B_1(t).$$

Матрицы  $H(t, \mu)$  и  $N(t, \mu)$  удовлетворяют следующим матричным разностным уравнениям Риккати и Ляпунова [5]:

$$\mu H(t+T, \mu) + \mu H(t, \mu)A_1(t) + \mu H(t, \mu)A_2(t)H(t, \mu) = A_3(t) - A_4(t)H(t, \mu), \quad (6)$$

$$\mu N(t+T, \mu) + \mu \tilde{A}_1(t, \mu)N(t, \mu) - N(t, \mu)\tilde{A}_4(t, \mu) - A_2(t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия системы (4) определяются соотношениями:

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \quad \tilde{y}_0 = (\tilde{x}_0 \ \tilde{z}_0)' \quad (8)$$

где  $\tilde{x}_0 = x_0 + \mu N_0 \tilde{z}_0$ ,  $\tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0$ ,  $H_0 = -A_4^{-1}A_3$ ,  $N_0 = -A_2 A_4^{-1}$ .

С учетом (4) – (8) функционал (1) записывается в виде

$$J(u) = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)\Phi(t)u(iT) + \tilde{y}'(MT)P\tilde{y}(MT), \quad (9)$$

где  $\tilde{y}(MT) = (\tilde{x}(MT) \ \tilde{z}(MT))'$ ,  $P = D_M' Q D_M$ ,  $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{pmatrix}$ ,

$D_M = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N_M \\ H_M & E_m - \mu H_M N_M \end{pmatrix}$ ,  $H_M = H(MT)$ ,  $N_M = N(MT)$ ,  $H_M$ ,  $N_M$  определяются из уравнения (6), (7).

Векторы выходных сигналов  $\varphi(t)$  с учетом замены:

$$x(t, \mu) = \tilde{x}(t, \mu) - \mu N(t, \mu)\tilde{z}(t, \mu), \quad z(t, \mu) = \tilde{z}(t, \mu) + H(t, \mu)x(t, \mu)$$

в матричной форме записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ (1/\mu)C_3 & (1/\mu)C_4 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ (1/\mu)\Phi_2(t) \end{pmatrix} u,$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & (1/\mu)\tilde{C}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ (1/\mu)\tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} u,$$

или в векторной форме:

$$\tilde{\varphi}(t, \mu) = \tilde{C}(t, \mu)\tilde{y}(t, \mu) + \tilde{\Phi}(t, \mu)u(t, \mu), \quad (10)$$

где

$$\tilde{C}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1(t, \mu) & 0 \\ 0 & (1/\mu)\tilde{C}_4(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(t, \mu) \\ (1/\mu)\tilde{\Phi}_2(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(t, \mu) \\ \tilde{\varphi}_2(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(t, \mu) &= \tilde{C}_1(t, \mu)\tilde{x}(t, \mu) + \tilde{\Phi}_1(t, \mu)u(t, \mu), \\ \mu\tilde{\varphi}_2(t, \mu) &= \tilde{C}_4(t, \mu)\tilde{z}(t, \mu) + \tilde{\Phi}_2(t, \mu)u(t, \mu), \\ \tilde{C}_1(t, \mu) &= C_1(t) + C_2(t)H(t, \mu), \quad \tilde{C}_4(t, \mu) = C_4(t) - \mu H(t, \mu)C_2(t), \\ \tilde{\Phi}_1(t, \mu) &= \Phi_1(t) + N(t, \mu)\tilde{\Phi}_2(t, \mu), \quad \tilde{\Phi}_2(t, \mu) = \Phi_2(t, \mu) - \mu H(t, \mu)\Phi_1(t).\end{aligned}$$

В соотношениях (11) матрицы  $H(t, \mu)$  и  $N(t, \mu)$  определяются из следующих алгебраических матричных уравнений Риккати и Ляпунова соответственно:

$$\mu H(t, \mu)C_1(t) + \mu H(t, \mu)C_2(t)H(t, \mu) = C_3(t) + C_4(t)H(t, \mu), \quad (12)$$

$$\mu\tilde{C}_1(t, \mu)N(t, \mu) - N(t, \mu)\tilde{C}_4(t, \mu) - C_2(t) = 0. \quad (13)$$

Теперь задачу (1) – (3) сформулируем в форме: требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, \mu)$  доставляющую минимум функционала (9) при ограничениях (4) – (8).

Оптимальным управлением для задачи (4) – (9) является функция [6]

$$u^*(t, \mu) = -\Lambda^{-1}(t)\tilde{B}'(t, \mu)K(t, P, M)\tilde{y}(t, \mu), \quad (14)$$

где матрица  $K = K(t, P, M)$  удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$K(t + T) = -K\tilde{A}(t) - \tilde{A}'(t)K + K\tilde{B}(t)\Phi^{-1}(t)\tilde{B}'(t)K, \quad K[(M - 1)T] = P, \quad (15)$$

Предположим, что матрица  $K$  имеет обратную, тогда справедливо соотношение [7]

$$K^{-1}(t + T) = -K^{-1}K(t + T)K^{-1}. \quad (16)$$

Умножая уравнение (15) справа и слева на матрицу  $K^{-1}$ , с учетом (16) получаем

$$W(t + T) = W(t)\tilde{A}(t) + W'(t)\tilde{A}'(t) - \tilde{B}(t)\Phi^{-1}(t)\tilde{B}'(t), \quad W(MT) = P^{-1}, \quad (17)$$

где  $W(t) = K^{-1}(t)$ .

Введем блочную матрицу

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) & W_2(t) \\ W_2'(t) & \frac{1}{\mu}W_3(t) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $W_1(t)$  и  $W_3(t)$  симметрические матрицы размеров  $(n \times n)$  и  $(m \times m)$  соответственно,  $W_2(t)$  матрица размера  $(n \times m)$ .

Тогда уравнение (17) записывается в виде трех независимых уравнений:

$$W_1(t + T) = \tilde{A}_1(t)W_1(t) + W_1'(t)\tilde{A}_1'(t) - \tilde{B}_1(t)\Phi^{-1}(t)\tilde{B}_1'(t), \quad W_1(MT) = S_1, \quad (19)$$

$$\mu W_2(t + T) = \mu\tilde{A}_1(t)W_2(t) + W_2'(t)\tilde{A}_4'(t) + \tilde{B}_1(t)\Phi^{-1}(t)\tilde{B}_2'(t), \quad W_2(MT) = S_2,$$

$$\mu W_3(t + T) = \tilde{A}_4(t)W_3(t) + W_3'(t)\tilde{A}_4'(t) + \tilde{B}_2(t)\Phi^{-1}(t)\tilde{B}_2'(t), \quad W_3(MT) = S_3,$$

где  $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2' & S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{pmatrix}^{-1}$ ,  $P_1 = Q_1 + H_M'Q_2' + Q_2H_M + H_M'Q_3H_M$ ,

$P_2 = Q_2 + H_M'Q_3 - \mu P_1N_M$ ,  $P_3 = Q_3 - \mu(Q_2' + Q_3H_M)N_M - \mu N_M'(Q_2 + H_M'Q_3) + \mu^2N_M'P_1N_M$ .

Если  $F(t, \mu)$  и  $\Psi(t, \mu)$  переходные матрицы следующих однородных уравнений соответственно:

$$\tilde{x}(t + T) = \tilde{A}_1(t, \mu)\tilde{x}(t), \quad \mu\tilde{z}(t + T) = \tilde{A}_4(t, \mu)\tilde{z}(t), \quad (20)$$

то матрицы  $F(t, \mu)$  и  $\Psi(t, \mu)$  соответственно удовлетворяют разностным уравнениям [6]:

$$F(t + T, \mu) = \tilde{A}_1(t, \mu)F(t, \mu), \quad F(0, 0) = E_n, \quad (21)$$

$$\mu\Psi(t + T, \mu) = \tilde{A}_4(t, \mu)\Psi(t, \mu), \quad \Psi(0, 0) = E_m. \quad (22)$$

Тогда решения уравнения (19) можно представить в виде:

$$W_1(t, \mu) = F(t, \mu)S_1F'(t, \mu) + \bar{W}_1(t, \mu), \quad (23)$$

$$W_2(t, \mu) = F(t, \mu)S_2\Psi'(t, \mu) + \bar{W}_2(t, \mu),$$

$$W_3(t, \mu) = \Psi(t, \mu)S_3\Psi'(t, \mu) + \bar{W}_3(t, \mu),$$

где  $\bar{W}_1(t, \mu)$ ,  $\bar{W}_2(t, \mu)$  и  $\bar{W}_3(t, \mu)$  определяются формулами:

$$\bar{W}_1(t, \mu) = \sum_{i=0}^{M-1} F(iT, \mu) \bar{B}_1(iT) \bar{B}_1'(iT) F'(iT, \mu), \quad (24)$$

$$\bar{W}_2(t, \mu) = (1/\mu) \sum_{i=0}^{M-1} F(iT, \mu) \bar{B}_1(iT) \bar{B}_2'(iT) \Psi'(iT, \mu),$$

$$\bar{W}_3(t, \mu) = (1/\mu) \sum_{i=0}^{M-1} \Psi(iT, \mu) \bar{B}_2(iT) \bar{B}_2'(iT) \Psi'(iT, \mu).$$

В результате сформулируем следующую теорему

**Теорема.** Если матрицы  $W_1$  и  $L = W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2$  при  $0 < \mu \ll 1$  для всех  $0 \leq t \leq M - 1$  невырождены, то существует управление вида (14), которое доставляет минимум критерий качества (9). При этом симметричная матрица  $K = K(t, P, M)$  и вектор выхода  $\tilde{\varphi}(t, \mu)$  определяются соотношениями:

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & \mu K_2 \\ \mu K_2' & \mu K_3 \end{pmatrix}, \quad K_1 = W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 L^{-1} W_2 W_1^{-1}, \quad K_2 = -W_1^{-1} W_2 L^{-1}, \quad K_3 = L^{-1},$$

$$\tilde{\varphi}(t, \mu) = (\tilde{C}(t, \mu) - \tilde{\Phi}(t, \mu) \Lambda^{-1}(t) \tilde{B}'(t, \mu) K) \tilde{y}(t, \mu).$$

**Заключение.** Предложенный способ определения оптимального управления задачи с квадратичным функционалом минимума затрат энергии по управлению, позволяет понижение размерности матриц состояния и в результате определяются векторы переменных состояний и выхода. Результаты работы могут быть применены для задачи с квадратичным критерием качества цифрового оптимального управления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления /Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ, 1982, т. 20. С. 3 – 77.
2. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Решение некоторых задач аналитического конструирования регулятора методом пограничного слоя. Дифференц. уравнения и их приложения. Днепропетровск, 1975, 3. С. 63 – 70.
3. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом. Дифференц. уравнения, 1979, 15, №9. С. 1681 – 1691.
4. Курина Г.А. Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабоуправляемых систем /Прикладная математика и механика, 2002, т. 66, вып. 2. С. 214 – 227.
5. Аширбаев Б.Б. Об одном способе построения переходной матрицы линейной дискретной управляемой системы с малым шагом /Горный журнал, научно-технический журнал, т. 2 (1), Бишкек, 2021. – С. 13 – 17.
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. 424 с.
7. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных систем. - М.: Наука, 1973. 256 с.

---

B.Y. Ashirbaev (B.Yel'tsin Kyrgyz-Russian Slavonic University, Bishkek, Kyrgyz Republic), Zh.A. Altymyshova (I. Razza-kov Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyz Republic). **Optimal control in a linear discrete singularly-perturbed problem with quadratic functional**

The paper offers an asymptotic method for optimal control development in a linear discrete singularly-perturbed problem with quadratic functional. The problem solution is formed for an equivalent system obtained by separating the state variables of the initial system. Since the solution of the optimal control selection problem depends on the solution of Riccati's nonlinear differential matrix equation, in this paper this equation is transformed to three linear differential equations the solutions to which define the optimal control of the initial problem.

В.Р. БАРСЕГЯН

(Институт механики НАН РА, Ереванский государственный университет, Ереван)

С.В. СОЛОДУША

(ИСЭМ СО РАН, Иркутский государственный университет, Иркутск)

## ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ СМЕЩЕНИЕМ ДВУХ КОНЦОВ С УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ ПРОГИБА И СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

*Рассматривается задача граничного управления для уравнения колебаниями струны с заданными начальным и конечным условиями, а также условиями на функции прогиба и скоростей точек струны в промежуточные моменты времени. Используя метод разделения переменных и методы теории управления с многоточечными промежуточными условиями, для произвольных чисел первых гармоник построены оптимальные граничные управления. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено граничное управление с заданным значением скоростей точек струны в некотором промежуточном моменте времени.*

**Введение.** Управляемые колебательные системы широко распространены в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1-7]. На практике часто возникают задачи граничного управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т.д.) колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. Исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [3-8].

Предлагаемый доклад посвящен рассмотрению задач граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба и значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени. Задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями и, используя метод разделения переменных, полученная задача сводится к задаче управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями. Предложен подход аналитического построения граничного управления.

**Об основных результатах.** Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией  $Q(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ , которая подчиняется при  $0 < x < l$  и  $t > 0$  волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где функции  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  – граничные управления.

В уравнении (1)  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ , где  $T_0$  – натяжение струны,  $\rho$  – плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ )

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы промежуточные значения функции прогиба и значения скоростей точек струны в виде:

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (5)$$

где  $m$  – четное число.

Предполагается, что функция  $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$ , где  $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l, l], t \in [0, T]\}$ , а функции  $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$ ,  $\psi_j(x) \in C^1[0, l]$ . Предполагается также, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования:

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l),$$

$$\mu(t_i) = \varphi_i(0), \quad \dot{\mu}(t_j) = \psi_j(0), \quad \nu(t_i) = \varphi_i(l), \quad \dot{\nu}(t_j) = \psi_j(l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l).$$

Задача граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба и значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ставится следующим образом. Требуется найти граничные (3) управления  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , переводящие колебательное движение систем (1) из заданного начального состояния (2), удовлетворяя промежуточным условиям (4) и (5), в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Отметим, что промежуточные значения функции прогиба и значения скоростей точек струны в условиях (4) и (5) можно задавать в любой очередности.

В работе предложен конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны. Схема построения граничных управлений заключается в следующем: задача с неоднородными граничными условиями сводится к задаче управления распределенным воздействием с нулевыми граничными условиями [3-6]. Далее, используя метод разделения переменных и методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями [8, 9], для произвольного числа первых  $n$  гармоник построены граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере. Проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ, которые подтверждают полученные результаты. В частности, результаты анализа, даже для первой гармоники (при  $n=1$ ) показывают, что под воздействием построенных граничных управлений поведение функции прогиба струны и ее производная достаточно близки в желаемых моментах времени заданным исходным функциям.

**Заключение.** Предложенный подход построения граничного управления можно распространить на другие неоднородные колебательные системы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления процессами колебаний в физических и технологических системах.

*Исследование Солодуши С.В. проводилось при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. **Ильин В.А., Моисеев Е.И.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. т. 60, вып. 6 (366). с. 89-114.
3. **Barseghyan V.R.** The Problem of Optimal Control of String Vibrations. International Applied Mechanics, Vol. 56, No. 4, 2020, pp. 471-480.
4. **Barseghyan V.R., Solodusha S.V.** On one Boundary Control Problem of String Vibrations with Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time. Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1847 (2021) 012016.
5. **Barseghyan V., Solodusha S.** Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science. Vol 12755. pp 299-313. Springer, Cham.
6. **Barseghyan V., Solodusha S.** Control of String Vibrations by Displacement of One End with the Other End Fixed, Given the Deflection Form at an Intermediate Moment of Time. *Axioms*. 2022; 11(4):157.
7. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.
8. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
9. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука. 1975. 496 с.

---

V.R. Barseghyan (Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA, Yerevan State University, Yerevan), S.V. Solodusha (Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk). **The boundary control problem for string vibrations by displacement of two ends with conditions on the deflection functions and point velocities at intermediate times**

The problem of boundary control for the equation of string vibrations with given initial and final conditions and given on the deflection function and velocities of the string points at intermediate times is considered. Using the variables separation method and methods of control theory with multipoint intermediate conditions, optimal boundary controls are constructed for arbitrary numbers of first harmonics. As an application of the proposed constructive approach, a boundary control with a given value of the velocities of the string points at some intermediate time is constructed.

К.В. ПЕРЕВОЗЧИКОВА, Н.А. МАНАКОВА  
(Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

*Работа посвящена исследованию задачи стартового управления для одной математической модели соболевского типа, в основе которой лежит уравнение, описывающее процесс изменения потенциала концентрации вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде (процесс нелинейной диффузии вещества). Найдены достаточные условия, при которых существует решение задачи управления исследуемой модели. Построен алгоритм численного метода решения и проведен вычислительный эксперимент.*

К настоящему времени накоплен богатый опыт исследований, посвященных нелинейным моделям математической физики. При исследовании таких моделей можно выделить класс моделей, в основе которых лежат полулинейные уравнения соболевского типа: модели, описывающие процессы деформации [1], процессы, протекающие в полупроводниках [2], волновые процессы и т.д.

Рассмотрим ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , которая имеет гладкую границу  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . В  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  будем изучать начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - u(s)) = 0, \quad s \in \Omega, \quad (1)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

для дифференциального уравнения в частных производных

$$(\lambda - \Delta)x_t - \operatorname{div}(|\nabla x|^{p-2}\nabla x) = y. \quad (3)$$

Задача (1) – (3) описывает процесс изменения потенциала концентрации вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде (процесс нелинейной диффузии вещества) [3] и образует математическую модель нелинейной диффузии. Параметр  $\lambda \in \mathbb{R}$  характеризует вязкость жидкости, причем экспериментально было подтверждено, что отрицательное значение параметра  $\lambda$  не противоречит физическому смыслу модели. Правая часть (3)  $y = y(s, t)$  описывает заданное внешнее воздействие.

В дальнейшем будем рассматривать функциональные пространства  $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ ,  $\mathfrak{Y} = W_2^1(\Omega)$ ,  $\mathfrak{B} = W_p^1(\Omega)$ ,  $\mathfrak{Y}^* = W_2^{-1}(\Omega)$ ,  $\mathfrak{B}^* = W_p^{-1}(\Omega)$ . Построим операторы  $L$  и  $M$ , для этого определим их следующим образом:

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (\lambda \nabla x \cdot \nabla y + xy) ds, \quad x, y \in \mathfrak{Y};$$

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} |\nabla x|^{p-2} \nabla x \cdot \nabla y ds, \quad x, y \in \mathfrak{B}.$$

Далее обозначим через  $\{\varphi_k\}$  последовательность собственных функций оператора  $(-\Delta)$  в задаче Штурма – Лиувилля с однородным условием Дирихле с учетом их возможной кратности, а через  $\{\lambda_k\}$  неубывающую последовательность собственных значений.

Рассмотрим множество  $\operatorname{coim} L = \begin{cases} \mathfrak{Y}^*, & \lambda > -\lambda_1, \\ \{x \in \mathfrak{Y}^* : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$

**Теорема 1.** [4] При всех фиксированных значениях параметра  $\lambda \geq -\lambda_1$  и при любых  $u \in \mathfrak{Y}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$  существует единственное слабое обобщенное решение  $x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})$  задачи (1) – (3).

В качестве пространства управлений возьмем пространство  $\mathcal{U} = \mathfrak{B}$  и зафиксируем в нем непустое, замкнутое и выпуклое подмножество  $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{U}$ . Построим целевой функционал и рассмотрим задачу стартового управления решениями (1) – (3):

$$J(x, u) = \nu \|x(s, t) - x_d(s, t)\|_{L_p(0, T; \mathfrak{B})}^p + (1 - \nu) \|u\|_{\mathfrak{B}}^p \rightarrow \inf, \quad \nu \in (0, 1), \quad (4)$$

где  $x_d = x_d(s, t)$  – фиксированное состояние системы, которое необходимо достичь при минимальном начальном воздействии  $u = u(s)$ .

**Определение 1.** Пару  $(\hat{x}, \hat{u}) \in [L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})] \times \mathcal{U}_d$  будем называть решением задачи (1) – (4), если  $J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf J(x, u)$ , где пары  $(x, u) \in [L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})] \times \mathcal{U}_d$  удовлетворяют задаче (1) – (3) в слабом обобщенном смысле.

**Определение 2.** Пара  $(\hat{x}(t, s), \hat{u}(s))$  называется допустимой, если  $(\hat{x}, \hat{u}) \in [L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})] \times \mathcal{U}_d$  и  $J(\hat{x}, \hat{u}) < +\infty$ .

**Замечание 1.** В случае непустоты множества  $\mathcal{U}_d = \emptyset$  для каждого фиксированного  $u \in \mathcal{U}_d$  в силу теоремы существования найдется единственное решение  $x = x(y, u)$  задачи (1) – (3). Из чего вытекает, что множество допустимых элементов задачи управления непусто.

**Теорема 2.** [4] Для всех фиксированных значений параметров  $\lambda \geq -\lambda_1$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$  существует решение  $(\hat{x}, \hat{u})$  задачи (1) – (4).

Теоремы 1 и 2 устанавливают существование решения, но не описывают метода его нахождения. Используя теоретические результаты, полученные выше, нами был разработан и реализован алгоритм приближенного численного решения задачи стартового управления для модели нелинейной фильтрации на основе модифицированных методов декомпозиции, штрафа, Галеркина. Для численного исследования задачи стартового управления для математической модели нелинейной диффузии необходимо:

1) Численное решение представить в виде  $\hat{x}(s, t) = \sum_{k=1}^K x_k(t) \varphi_k(s)$ ,  $\hat{f}(s, t) = \sum_{k=1}^K f_k(t) \varphi_k(s)$ , правую часть уравнения (3) в виде  $\hat{y}(s, t) = \sum_{k=1}^K y_k(t) \varphi_k(s)$ , начальное состояние в виде  $\hat{u} = \sum_{k=1}^K u_k \varphi_k(s)$ .

2) Применить метод декомпозиции и линеаризовать исходное уравнение (3) путем введения новой неизвестной функции  $f=f(s, t)$ . Тогда уравнение (3) эквивалентно системе:

$$(\lambda - \Delta)x_t - \text{div}(|\nabla f|^{p-2} \nabla f) = y, \quad x(s, t) = f(s, t). \quad (5)$$

Отсюда неизвестные коэффициенты  $x_k(t)$  могут быть получены как функции зависящие от  $f_k(t)$  и  $u_k$ .

3) Перейти от рассмотрения исходного функционала задачи к функционалу штрафа (в силу второго уравнения системы (5) , а также метода штрафа):

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x, f, u) = & \theta \cdot \beta \int_0^T dt \int_\Omega |\nabla x(s, t) - \nabla x_d(s, t)|^p ds + \\ & + \theta \cdot \beta \int_0^T dt \int_\Omega |x(s, t) - x_d(s, t)|^p ds + \theta \cdot \beta \int_0^T dt \int_\Omega |f(s, t) - x_d(s, t)|^p ds \\ & + \theta \cdot \beta \int_0^T dt \int_\Omega |\nabla f(s, t) - \nabla x_d(s, t)|^p ds + (1 - \theta) \int_\Omega |\nabla u(s)|^p ds + \\ & + (1 - \theta) \int_\Omega |u(s)|^p ds + r_\varepsilon \int_0^T dt \int_\Omega |x(s, t) - x_d(s, t)|^2 ds, \end{aligned} \quad (6)$$

где параметр штрафа  $r_\varepsilon \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0 +$ .

4) Найти необходимые коэффициенты управления.

**Пример 1.** Требуется найти решение задачи стартового управления для математической модели нелинейной диффузии (1), (2), (4), (5), с функционалом (6), которая в случае  $n = 1$  и области  $\Omega = (0, \pi)$  примет вид

$$\lambda(x(s, 0) - u(s)) = x_{ss}(s, 0) - u_{ss}(s), \quad s \in (0, \pi), \quad (7)$$



$$\lambda x_t - x_{sst} - (|f_s|^{p-2} f_s)_s = y, \quad x(s, t) = f(s, t), \quad (8)$$

при  $T=1$ ,  $N=3$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{99}{100}$ ,  $r_\varepsilon = 100$ , правая часть уравнения  $y(s, t) = \sin s$ , требуемое состояние  $x_d(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + t \sin 2s + t^2 \sin 3s)$ .

В результате работы программы «Программный модуль численного решения задачи стартового управления» было найдено приближенное решение задачи. В том числе значение функционала составило  $J = 0.487555110$ . Полученные приближенные решения  $(\hat{x}, \hat{f})$  совместно с требуемым состоянием  $x_d$  в момент времени  $t = T$  представлены на рис. 1, а функция управления  $\hat{u}$  на рис. 2. Отметим, что сплошной линией изображено требуемое состояние  $x_d$ , пунктирной линией  $\hat{x}$ , линией из точек  $\hat{f}$ .

Таким образом можно сделать вывод, что при заданных параметрах найдено такое начальное состояние системы  $u(s)$ , при котором распределение потенциалов  $x(s, t)$  в концентрации вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде близко к требуемому значению  $x_d(s, t)$ .

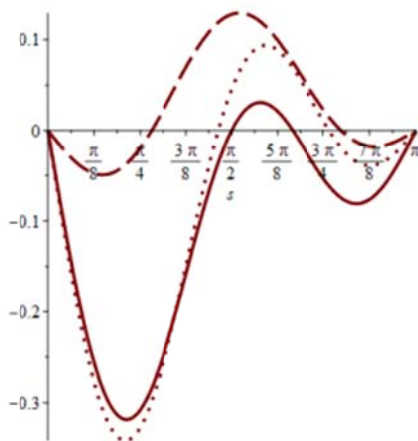


Рис. 1. График численного решения

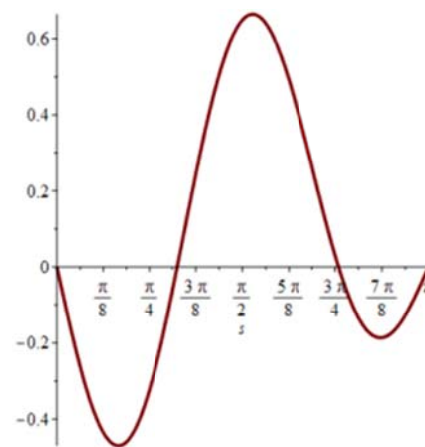


Рис. 2. Управление решениями задачи

*Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Manakova N.A., Sviridyuk G.A.** Non-Classical Equations of Mathematical Physics. Phase Spaces of Semilinear Sobolev Equations. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. 2016. Vol. 8. № 3. P. 31–51. DOI: 10.14529/mmph160304
2. **Manakova N.A., Vasiuchkova K.V.** Research of One Mathematical Model of the Distribution of Potentials in a Crystalline Semiconductor. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2019. Vol. 12. № 2. P. 150–157. DOI: 10.14529/mmp190213
3. **Davis P. L.** A Quasilinear Parabolic and a Related Third Order Problem. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1972. Vol. 40. № 2. P. 327–335.
4. **Perevozchikova K.V., Manakova N.A., Kuptsova A.S.** Investigation of Various Types of Control Problems for One Nonlinear Model of Filtration. Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2021. Vol. 8. № 4. P. 45–61.

K.V. Perevozchikova, N.A. Manakova, (South Ural State University, Chelyabinsk). **Investigation of the start control problem for one model of nonlinear filtration**

The work is devoted to the study of the problem of starting control of one mathematical model of the Sobolev type, which is based on an equation that describes the process of changing the concentration potential of a viscoelastic fluid filtering in a porous medium (the process of nonlinear diffusion of matter). Sufficient conditions are found under which there are solutions to the control problems of the model under study. An algorithm for the numerical solution method is constructed and a computational experiment is carried out.

В. А. КАМЕНЕЦКИЙ

(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Москва)

**ТЕОРЕМА О СВЕРТЫВАНИИ: КРИТЕРИЙ ЦЫПКИНА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ S-ПРОЦЕДУРЫ**

*Используя теорему о свертывании о переходе от системы из двух матричных неравенств к одному ей эквивалентному, удается получить критерий Цыпкина абсолютной устойчивости для дискретных систем Лурье с несколькими нелинейностями без S-процедуры. Показывается, как с помощью теоремы о свертывании существенно уменьшать порядок систем линейных матричных неравенств без потерь в области разрешимости.*

**Введение.** Одними из основных инструментов для исследования вопроса об устойчивости систем с неопределенностью [1] служат теория абсолютной устойчивости и теория устойчивости систем с переключениями. В последнее время вопросы устойчивости систем с дискретным временем рассматривались в работах [2-4]. Важным результатом в этой области является критерий Цыпкина [5] – достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в случае дискретной системы Лурье с несколькими нелинейностями [6]. К достаточности приводит использование специального приема – S-процедуры [7]. Существование КФЛ в случае нескольких нелинейностей определяется разрешимостью системы линейных матричных неравенств [8]. В [9] приведена теорема, полученная Пятницким, в которой показывается, как получить одно матричное неравенство (МН), эквивалентное системе из двух МН. В [10] операция перехода от системы из двух МН к одному ей эквивалентному названа свертыванием. Здесь показано, как критерий Цыпкина в случае систем с несколькими нелинейностями получить с помощью операции свертывания и без S-процедуры. В заключительной части показывается, как с помощью операции свертывания существенно уменьшать количество МН в связанной [4, 10] системе линейных МН.

**Теорема о свертывании и критерий Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями.** Здесь теорему Пятницкого, на которой основана операция свертывания, будем называть теоремой о свертывании и использовать в следующей формулировке.

Теорема 1. Для выполнения системы из двух МН

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^T + qp^T \quad p, q \in R^n), \quad (1)$$

где  $\{\cdot\}^T$  означает операцию транспонирования, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , при котором выполнено одно МН

$$I_1 + Q^+(\tilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\tilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^T, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon} q.$$

Дискретная система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle, \quad A \in R^{n \times n}, \quad b_j, c_j \in R^n, \quad (2)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $R^n$  и нелинейности  $\varphi_j(t, \sigma_j)$  при всех  $\sigma_j$  и  $t > 0$  удовлетворяют секторным ограничениям  $0 \leq \varphi_j \sigma_j \leq k_j \sigma_j^2$ . Абсолютная устойчивость системы (1) означает, что эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях. Наличие КФЛ  $v(x) = x^T L x$  ( $L \in R^{n \times n}$ ,  $L^T = L$ ) для системы (1) определяется [8] разрешимостью системы линейных МН

$$I_s = A_s^T L A_s - L < 0, \quad s = 1, \dots, N, \quad (N = 2^m), \quad (3)$$

с матрицами  $A_s$  следующего вида

$$A_s = A + \sum_{j=1}^m h_{sj} b_j c_j^T, \quad h_s = \left\| h_{sj} \right\|_{j=1}^m, \quad (4)$$

где  $h_{sj}$  независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Будем считать, что  $h_1 = (0, \dots, 0)$ , т.е.  $A_1 = A$ .

Под критерием Цыпкина абсолютной устойчивости системы (2) с несколькими нелинейностями здесь понимается достаточное частотное условие существования для таких систем КФЛ, которое получено с использованием  $S$ -процедуры и обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [11,12]. Критерий Цыпкина в случае системы (1) с произвольным конечным  $m$  представляет собой полученный с помощью обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [11,12] частотный критерий разрешимости МН

$$I_{Ts}^m = \begin{pmatrix} A^T L A - L & A^T L B + C \hat{\tau} / 2 \\ B^T L A + \hat{\tau} C^T / 2 & B^T L B - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \quad (5)$$

в котором  $B = (b_1 \dots b_m)$ ,  $C = (c_1 \dots c_m)$  и  $\hat{\tau} = \Gamma = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m) > 0$ . Далее неравенство (5) будем называть МН Цыпкина для системы (2) с  $m$  нелинейностями.

Таким образом, требуется, используя теорему 1, показать, что из разрешимости МН (5) относительно  $L$  при некотором  $\hat{\tau} > 0$  следует разрешимость системы (3). При  $m=1$  это сделано в [4], при  $m=2$  это сделано в [13]. Заметим, что дискретный случай гораздо сложнее непрерывного, поскольку матричные неравенства в (3) зависят от  $A_s$  квадратично, а в непрерывном случае эта зависимость линейна.

По предположению индукции будем считать, что достаточным условием разрешимости системы (3) является разрешимость при некотором  $m$  МН (5).

При увеличении количества нелинейностей в системе (2) на единицу, количество МН в системе (3) увеличится в два раза, т.е. при  $N = 2^{m+1}$  систему (3) можно представить в виде

$$A_s^T L A_s - L < 0, \quad s = 1, \dots, 2^m, \quad (6)$$

$$A_s^T L A_s - L < 0, \quad s = 2^m + 1, \dots, 2^{m+1}. \quad (7)$$

Будем считать, что система (6) в точности совпадает с (3), а матрицы  $A_s$  в системе (7) пронумерованы таким образом, что  $A_{s+2^m} = A_s + b_{m+1} c_{m+1}^T$ ,  $s = 1, \dots, 2^m$ . Таким образом, система (7) совпадает с (6), если в системе (6) в выражениях (4) для матриц  $A_s$  матрицу  $A$  заменить на  $A_\xi = A_{1+2^m}$ . Следовательно, по предположению индукции достаточным условием разрешимости системы (7) является разрешимость матричного неравенства

$$\hat{I}_{Ts}^m = \begin{pmatrix} A_\xi^T L A_\xi - L & A_\xi^T L B + C \hat{\tau} / 2 \\ B^T L A + \hat{\tau} C^T / 2 & B^T L B - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \quad (8)$$

где  $B$  и  $C$  те же, что и в (5). Пусть значения дополнительных параметров  $\hat{\tau}$  в (5) и в (8) одинаковы, тогда к системе из этих двух МН применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого  $\varepsilon_{m+1} > 0$ , что разрешимо одно МН

$$I_{Ts}^{m+1} = I_{Ts}^m + \left( \varepsilon_{m+1}^2 / 2 \right) \left( \tilde{p} + \left( 1 / \varepsilon_{m+1}^2 \right) \tilde{q} \right) \left( \tilde{p} + \left( 1 / \varepsilon_{m+1}^2 \right) \tilde{q} \right)^T < 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{p} + \left( 1 / \varepsilon_{m+1}^2 \right) \tilde{q} = \begin{pmatrix} A^T L b_{m+1} + (\tau_{m+1} / 2) c_{m+1} \\ B^T L b_{m+1} \end{pmatrix}$ , и  $\tau_{m+1} = b_{m+1}^T L b_{m+1} + (2 / \varepsilon_{m+1}^2) > 0$ . Применяя

к МН (9) лемму Шура и опуская алгебраические подробности, получим, что МН (9) эквивалентно МН (5), в котором  $B = (b_1 \dots b_{m+1})$ ,  $C = (c_1 \dots c_{m+1})$  и  $\hat{\tau} = \Gamma = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_{m+1}) > 0$ , т.е. является неравенством Цыпкина для системы (2) с  $m+1$  нелинейностями.

**Уменьшение порядка системы линейных матричных неравенств.** Следующее утверждение, объединяющее теорему 1 и лемму Шура, позволяет существенно уменьшать размерность системы линейных МН.

Теорема 2. Пусть в системе (1) неравенства являются линейными МН относительно переменной  $\nu$ , т.е.  $I_1 = I_1(\nu)$  и  $I_2 = I_2(\nu)$ , и  $Q(\nu) = I_2(\nu) - I_1(\nu) = p(\nu)q^T + qp^T(\nu)$ , где  $p(\nu)$  зависит от  $\nu$  линейно, а  $q$  от  $\nu$  не зависит. Тогда система (1) эквивалентна одному МН

$$\begin{pmatrix} I_1(\nu) & p(\nu) + (\tau/2)q \\ p^T(\nu) + (\tau/2)q^T & -\tau \end{pmatrix} < 0,$$

которое является линейным МН относительно  $(\nu, \tau)$ .

Каждое применение теоремы 1, с одной стороны, уменьшает количество МН в системе на единицу, с другой стороны, увеличивает на единицу количество неизвестных. От системы (3), имеющей общий порядок  $n2^m$  относительно  $n(n+1)/2$  неизвестных, можно перейти к эквивалентной системе порядка  $(n+1)2^{m-1}$  относительно  $n(n+1)/2 + 2^{m-1}$  неизвестных.

Пусть при  $N = 2^m$  в системе (3) матрицы  $A_s$  занумерованы таким образом, что первые  $2^{m-1}$  матриц  $A_s$ ,  $s = 1, \dots, 2^{m-1}$ , совпадают с матрицами  $A_s$  системы (3) при  $N = 2^{m-1}$ , а следующие  $2^{m-1}$  матрицы  $A_s$ ,  $s = 2^{m-1} + 1, \dots, 2^m$ , занумерованы следующим образом:  $A_{s+2^{m-1}} = A_s + b_m c_m^T$ ,  $s = 1, \dots, 2^{m-1}$ . Теорема 1 применима к парам МН

$$I_s < 0, \quad I_{s+2^{m-1}} < 0, \quad s = 1, \dots, 2^{m-1}, \quad (10)$$

так как  $A_{s+2^{m-1}}^T L A_{s+2^{m-1}} - A_s^T L A_s = p_s c_m^T + c_m p_s^T$ , где  $p_s = A_s^T L b_m + (b_m^T L b_m / 2) c_m$ . Применяя теорему 1 к каждой системе (10), получим, что система (3) эквивалентна системе линейных МН

$$\begin{pmatrix} A_s^T L A_s - L & A_s^T L b_m + \frac{1}{2}(b_m^T L b_m + \tau_s) c_m \\ b_m^T L A_s + \frac{1}{2}(b_m^T L b_m + \tau_s) c_m^T & -\tau_s \end{pmatrix} < 0, \quad s = 1, \dots, 2^{m-1},$$

с  $2^{m-1}$  дополнительными параметрами  $\tau_s = 2/\varepsilon_s^2$ .

**Заключение.** Во-первых, критерий Цыпкина для дискретных систем Лурье с несколькими нелинейностями (2) получен с помощью теоремы 1 о свертывании без использования  $S$ -процедуры. Во-вторых, получена теорема 2, которая позволяет уменьшать размерность систем линейных МН. С помощью этой теоремы показано, как с  $n2^m$  до  $(n+1)2^{m-1}$  уменьшить порядок системы (3), которая определяет существование КФЛ для системы Лурье (2) при произвольном конечном  $m$ . Использование теоремы 2 открывает широкие возможности для существенного уменьшения размерности произвольных связанных систем линейных МН.

*Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, №7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью. Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 3–54.
2. Александров А.Ю., Платонов А.В. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями. Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 37–49.
3. Проскурников А.В., Матвеев А.С. Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем. Автоматика и телемеханика. 2018. № 6. С. 119–139.

4. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями. Автоматика и телемеханика. 2018. № 8. С. 3–26.
5. Цыпкин Я.З. Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 52–65.
6. Fradkov A. Early ideas of the absolute stability theory. 2020 European Control Conference (ECC). P. 762–768. May 2020. [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9143937>.
7. Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры. Автоматика и телемеханика. 2006. №10. С. 77–121.
8. Каменецкий В.А. Абсолютная устойчивость дискретных систем управления с нестационарными нелинейностями. Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. С. 172–176.
9. Скородинский В.И. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I. Автоматика и телемеханика. 1981. № 9. С. 21–29.
10. Каменецкий В.А. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами. Автоматика и телемеханика. 1983. № 12. С. 20–30.
11. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II. Автоматика и телемеханика. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.
12. Шепелявый А.И. Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии. Автоматика и телемеханика. 1972. № 6. 49–56.
13. Kamenetskiy V. Stability conditions for systems with switching between four linear discrete subsystems / Proceedings of the 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2020, Moscow). New York: IEEE Catalog Number CFP20E79-ART. 2020. С. 1-4. [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9140572>.

---

V.A. Kamenetskiy (Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **The convolution theorem: Tsypkin's criterion for systems with several nonlinearities without the S-procedure**

Using the convolution theorem on the transition from a system of two matrix inequalities to one equivalent to it, it turns out to obtain Tsypkin's criterion for the absolute stability of the discrete Lurie systems with several nonlinearities without the S-procedure. It is shown how to use the convolution theorem to significantly reduce the order of systems of linear matrix inequalities without loss in the domain of solvability.

# Анализ качественных свойств несимметричной двухконтурной системы с кластерным движением

М.В. Яшина<sup>1,2,3</sup>, А.Г. Таташев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский автомобильно-дорожный  
государственный технический университет (МАДИ)

<sup>2</sup>Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)

<sup>3</sup>Московский авиационный институт (МАИ)  
(Национальный исследовательский университет)

## 1. Введение

В настоящей работе исследуется динамическая система, принадлежащая классу контурных сетей, разработанному А.П. Буслаевым. Структура и правила работы контурных сетей вводились таким образом, чтобы они отражали особенности реальных транспортных сетей, и к их исследованию были применимы аналитические методы. Контурные сети могут иметь и другие приложения, в том числе, могут использоваться при моделировании работы инфокоммуникационных систем. А. П. Буслаев ввел также понятие кластерного движения в дискретных и непрерывных математических моделях трафика [1]. В дискретном варианте кластер представляет собой группу частиц, располагающихся в соседних ячейках и перемещающихся одновременно. В непрерывном варианте кластер представляет собой движущийся отрезок, который при отсутствии задержек движется с постоянной скоростью.

Аналитические результаты для математических моделей трафика, в которых частицы движутся по определенным правилам на одномерной или двумерной решетке и которые могут интерпретироваться в терминах клеточных автоматов [1]

Контурная сеть содержит замкнутые контуры, по которым движутся частицы или кластеры. Соседние контуры имеют общие точки, называемые узлами. Задержки в перемещении кластеров возникают из-за ограничения, в соответствии с которым одновременно пересекать узел может не более одной частицы (кластера). Если кластер подошел к узлу в момент прохождения через этот узел другого кластера, то подошедший кластер останавливается и возобновляет движение после освобождения узла. Если кластеры подошли к одному и тому же узлу одновременно, то возникает конкуренция и первым через узел проходит один из этих кластеров, выбираемый в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции. Основными задачами являются нахождение средней скорости движения кластеров (частиц), нахождение условий попадания системы в состояние свободного движения (все кластеры движутся с некоторого момента времени без задержек в текущий момент и в будущем) или коллапса (движение частиц полностью прекращается), а также задача выбора правила разрешения конкуренции, оптимального в смысле максимизации средней скорости движения.

В [2] исследовалась дискретная контурная сеть, содержащая два контура, на каждом из которых имеется один кластер. Длина контура и находящегося на нем кластера не зависят от контура. Имеются два узла, делящие каждый контур на две части с длинами  $d$  и  $1 - d$  (длина контура равна 1). В одном из рассматривавшихся вариантов оба кластера после прохождения одного из узлов оказываются на дуге длиной  $d$ , а после прохождения другого узла попадают на дугу длиной  $1 - d$ . В таком варианте система названа системой с сонаправленным движением. В другом варианте после прохождения одного и того же узла один кластер попадает на дугу длиной  $d$ , а другой на дугу длиной  $1 - d$  (система с однонаправленным движением). Основной исследуемой характеристикой является средняя скорость движения, равная среднему расстоянию, проходимому кластером в единицу времени, с учетом задержек. Как следует из результатов [2], при любых фиксированных значениях  $d$ , длине кластера  $l$  и начальном состоянии системы

средняя скорость одинакова для обоих кластеров и при сонаправленном движении не зависит от начального состояния, а при однонаправленном движении для каждого заданных значений  $d$  и  $l$  возможны одно или два зависящих от начального состояния значения средней скорости. В [3] получены результаты, аналогичные результатам [2], но для непрерывных аналогов систем с сонаправленным и однонаправленным движением. В [4] для системы с однонаправленным движением рассматривалась задача нахождения правила разрешения конкуренции, оптимального в смысле максимизации средней скорости кластеров. В [5] исследуются непрерывные двухконтурные системы с двумя узлами с однонаправленным и сонаправленным движением, в которых контуры имеют одинаковую длину, но кластеры различны по длине. Как и в системах, рассматриваемых в [2]–[4], каждый контур делится узлами в отношении  $d$  к  $1 - d$ , где значение  $d$  не зависит от контура. Показано, что для сонаправленного движения, как и в случае одинаковых по длине контуров, средняя скорость не зависит от кластера и начального состояния системы. Найдена зависимость средней скорости кластеров от значения  $d$  и длин кластеров  $l_1, l_2$ . Установлено, что для системы с однонаправленным движением кластеры могут при фиксированных значениях  $d, l_1, l_2$  и различных состояниях иметь разные средние скорости, а при заданном начальном состоянии скорости могут двигаться с неодинаковыми средними начальными скоростями. Описаны различные сценарии поведения систем и найдены достаточные условия, при которых реализуется конкретный сценарий.

В настоящей работе исследуются сценарии поведения непрерывной двухконтурной системы, в которой контуры имеют одинаковую длину, принимаемую за 1, кластеры имеют в общем в общем случае неодинаковые длины  $l_1$  и  $l_2$ , а расположение узлов несимметрично, в том смысле, что один контур делится в соотношении  $d_1, 1 - d_1$ , а другой контур в соотношении  $d_2, 1 - d_2$ .

## 2. Описание системы. Основные определения

Система содержит два замкнутых *контур* длиной 1 — контур 1 и контур 2. На контуре  $i$  находится *кластер*  $i$  длиной  $l_i < 1, i = 1, 2$ . Скорость движения кластера, если нет задержек, равна 1, т.е. кластер совершает полный обход контура за единицу времени. Имеются две общие точки контуров *узлы*. На каждом контуре задана *система координат*  $[0, 1]$ , направление которой совпадает с направлением движения кластера. Состояние системы в момент времени  $t \geq 0$  представляет собой вектор  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , где  $x_i(t)$  — координата передней точки кластера,  $i = 1, 2$ . При нахождении системы в состоянии  $(x_1(t), x_2(t))$  кластер  $i$  располагается на дуге  $(x_i(t) - l_i, x_i)$  (вычитание по модулю 1),  $i = 1, 2$ . Узел  $i$  располагается в точке с координатой 0 на контуре  $i$ , а узел 2 находится на контуре  $i$  в точке с координатой  $d_j, j \neq i$ . Состояние системы допустимо, если при нахождении системы в этом состоянии ни один узел не занят сразу двумя кластерами. Начальное состояние  $x(0)$  задается. Задержка в перемещении кластера возникает в момент, когда передняя точка этого кластера находится у узла, занятого другим кластером. Задержка продолжается до момента, когда данный узел перестает быть занятым. Если два кластера подошли к узлу одновременно, то возникает *конкуренция*. Первым проходит через узел кластер, который *выигрывает* конкуренцию в соответствии с заданным *правилом разрешения конкуренции*. Все результаты, сформулированные в настоящей работе, верны для любого правила разрешения конкуренции, при котором выигрывающий конкуренцию кластер однозначно определяется состоянием системы.

Установлено, что начиная с некоторого момента периодически повторяются состояния системы, принадлежащие некоторому множеству. Таким образом, инвариантные множества состояний рассматриваемой динамической системы относятся к типу *предельных циклов*.

Пусть  $H_i(t)$  — расстояние, которое проходит кластер  $i$  в интервале времени  $(0, t)$ . Назовем *средней скоростью*  $v_i$  кластера  $i$  предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_i(t)}{t}, i = 1, 2$ . В силу того, что реализуется один из предельных циклов, этот предел существует и равен  $v_i = A_i/T$ , где  $A_i$  — расстояние, проходимое кластером на предельном цикле, а  $T$  — период. Средние скорости кластеров зависят от значений  $l_1, l_2, d$  и в общем случае от начального состояния системы. Если в любой момент  $t \geq t_0$  все частицы перемещаются, то говорим, что с момента  $t_0$  система *находится в состоянии свободного движения*, при этом  $v_1 = v_2 = 1$ . Если начиная с момента  $t_0$  ни одна частица не перемещается, то говорим, что с момента  $t_0$  система находится в состоянии *коллапса*, при этом  $v_1 = v_2 = 0$ .

### 3. Сценарии поведения системы

Выявлены следующие 12 возможных сценариев при заданных значениях  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  и найдены достаточные условия, которым должны удовлетворять эти значения, чтобы выполнялся конкретный сценарий: 1. Система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния,  $v_1 = v_2 = 1$ . Достаточное условие для этого сценария:  $\max(l_1, l_2) < \min(d_1, d_2)$ ,  $l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2$ . 2. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние свободного движения,  $v_1 = v_2 = 1$ , либо  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+d_1+d_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $l_2 < \min(d_2, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $l_1 + l_2 > 1 - d_1 - d_2$ . 3. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние свободного движения,  $v_1 = v_2 = 1$ , либо  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+1-d_1-d_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $d_1 < l_2 < d_1 + d_2$ ,  $d_1 + d_2 < l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2$ . 4. В зависимости от начального состояния либо  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+d_1+d_2}$ , либо  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+1-d_1+d_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $d_2 < l_2 < \min(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $l_1 + l_2 > \min(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d_2)$ . 5. Для любого начального состояния  $v_2 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+d_1+d_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $d_1 + d_2 < l_2 < 1 - d_1 - d_2$ ,  $l_1 + l_2 > d_1 + d_2$ . 6. Для любого начального состояния  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2+1-d_1+d_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $l_2 > \max(d_2, 1 - d_2)$ ,  $l_1 + l_2 > d_1 + d_2$ . 7. Для любого начального состояния  $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1+l_2}$ . Достаточное условие:  $|1 - d_1 - d_2| < l_1 < \min(d_1, 1 - d_1)$ ,  $1 - d_2 < l_2 < d_2$ ,  $l_1 + l_2 > 1$ . 8. Для любого начального состояния средняя скорость одного кластера равна  $\frac{1}{2}$ , а другого равна 1. Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $\max(d_1 + d_2, 1 - d_1) < l_2 < 1 - d_2$ ,  $l_1 + l_2 < 1$ . 9. Для любого начального состояния средняя скорость одного кластера равна  $\frac{1}{2(l_1+l_2)}$ , а другого  $\frac{1}{l_1+l_2}$ . Достаточное условие:  $l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2)$ ,  $\max(d_1 + d_2, 1 - d_1) < l_2 < 1 - d_2$ ,  $l_1 + l_2 > 1$ . 10. В зависимости от начального состояния система попадает либо попадает в состояние свободного движения,  $v_1 = v_2 = 1$ , либо в состояние коллапса,  $v_1 = v_2 = 0$ . Достаточное условие:  $\min(l_1, l_2) > \max(d_1, d_2)$ ,  $l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2$ . 11. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние коллапса,  $v_1 = v_2 = 0$ , либо средняя скорость кластеров равна  $v = \frac{1}{l_1+l_2+d_1+d_2}$ . 12. Система попадает в состояние коллапса из любого начального состояния. Достаточное условие:  $\min(l_1, l_2) > \max(d_1, d_2, 1 - d_1, 1 - d_2)$ .

### 4. Заключение

Исследовалось поведение непрерывной динамической системы, называемой двухконтурной системой с двумя узлами. В отличие от рассматривавшегося ранее частного случая, в котором кластеры имеют одинаковую длину, в системе, рассматриваемой в настоящей работе кластеры могут иметь различающиеся между собой средние скорости. Исследуются сценарии поведения системы и характер предельных. Приведены достаточные условия для каждого сценария.

### Благодарности

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) грант № 20-01-00222.

### Список литературы

1. Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V. (2011, October). Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling. In 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), Washington, USA. IEEE. DOI: 10.1109/ITSC.2011.6082805. (2011) 477–481.
2. Yashina M.V., Tatashev A.G. Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes. Math. Method. Appl. Sci., 2020, vol. 43, issue7, pp. 4303–4316. DOI: 10.1102/mma6194
3. Yashina M. V., Tatashev A. G. Uniform cluster traffic model on closed two-contours system with two non-symmetrical common nodes // Traffic and Granular Flow 2019. – Springer, Cham, 2020. P. 583–588. DOI: 10.1007/978-3-030-55973-1\_71
4. Yashina M.V., Tatashev A.G., Fomina M.Y. Optimization of velocity mode in Buslaev two-contour networks via competition resolution rules. International Journal of Interactive Mobile Technologies, 2020, vol. 14, no. 10, pp. 61–73. DOI: 103991/ijim.v14i10.14641



5. Yashina M.V., Tatashev A.G. A Two-contour system with two clusters of different lengths// Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2021, vol. 2, pp. 221–242. DOI:10.20537/nd210207

И. Б. ФУРТАТ (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

## ДИВЕРГЕНТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Предложен новый метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Установлена связь между методом функций Ляпунова и предложенным методом. Применение полученных результатов для исследования устойчивости линейных систем позволило свести задачу к вопросу разрешимости матричных неравенств. Разработан метод синтеза закона управления с обратной связью по состоянию для стабилизации линейных и нелинейных систем. Синтез закона управления нелинейными системами сводится к решению дифференциального неравенства относительно искомой функции управления, а для линейных объектов со статическим линейным регулятором -- к решению матричного неравенства.*

**Введение.** Хорошо известно, что метод функций Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений дифференциальных уравнений, не решая их. Впервые это показано А.М. Ляпуновым в конце 19 века в его докторской диссертации применительно к задачам астрономии и движения жидкости.

Методы исследования устойчивости динамических систем на базе свойств дивергенции вектора фазовой скорости объекта являются альтернативными методу функций Ляпунова. Результаты, предложенные в настоящей статье, будут тесно связаны с работами В.П. Жукова [1] и А. Рантцера (A. Rantzer) [2].

В [1] для исследования неустойчивости нелинейных динамических систем вводится вспомогательная скалярная функция. Позже в [2] А. Рантцер рассмотрел обратную функцию к данной скалярной функции, которую назвал функцией плотности (density function). В [1] получены условия устойчивости для систем второго порядка. Затем А. Рантцер в работах [2] обсуждает сходимость почти всех решений нелинейных динамических систем произвольного порядка и рассматривает вопросы синтеза закона управления. Подход [2] отличается от подходов [1] тем, что для исследования устойчивости в [2] используется функция плотности, которая подобна обратной вспомогательной функции в [1], за исключением их свойств в точке равновесия динамической системы.

Однако результатам [1, 2] присущи следующие особенности:

- 1) необходимое условие достаточно усиленное;
- 2) метод [1] обоснован только для систем второго порядка;
- 3) достаточные условия в [2] гарантируют сходимость только части решений системы в зависимости от начальных условий.

В настоящей статье предложен новый метод устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости, который позволит преодолеть особенности 1-3. Дополнительно, с помощью полученных результатов будут решены следующие задачи:

а) будут получены новые необходимые условия устойчивости. Будет показано, что достаточные условия сходимости почти всех решений в [2] на самом деле являются частным случаем полученных в статье необходимых условий устойчивости;

б) будет установлена связь метода функций Ляпунова с предложенными методами исследования устойчивости на базе потока и дивергенции вектора фазовой скорости;

в) будет показано, что скалярные функции, предложенные в [1, 2], не являются произвольными в том смысле, что свойства данных функций зависят от поверхности интегрирования;

г) будут получены новые достаточные условия устойчивости. Для линейных систем данные условия будут сведены к разрешимости как нелинейных, так и линейных матричных неравенств.

**Основная часть.** Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  – вектор состояния,  $f = [f_1, \dots, f_n]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывно-дифференцируемая функция, определенная в области  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Множество  $D$  содержит начало координат и  $f(0) = 0$ . Ради простоты положим, что область притяжения  $D_A$  точки  $x = 0$  совпадает с областью  $D$ . Однако все полученные результаты будут справедливы, если  $D_A \subset D$  или  $D_A = \mathbb{R}^n$ . Обозначим  $\bar{D}$  – граница области  $D$ .

В статье будем использовать следующие обозначения:  $\text{grad}\{W(x)\} = [\frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}]^T$  – градиент скалярной функции  $W(x)$ ,  $\text{div}\{h(x)\} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}$  – дивергенция векторного поля  $h(x) = [h_1(x), \dots, h_n(x)]^T$ ,  $|\cdot|$  – евклидова норма соответствующего вектора,  $\text{trace}(\cdot)$  – след соответствующей матрицы. Под устойчивостью будем понимать устойчивость нулевого положения равновесия системы по Ляпунову [3].

Сформулируем необходимое условие устойчивости (1).

**Теорема 1 (необходимое условие устойчивости).** Пусть  $x = 0$  – асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1). Тогда существует положительно определенная дважды непрерывно-дифференцируемая функция  $S(x)$  такая, что  $S(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \bar{D}$ ,  $|\text{grad}\{S(x)\}| \neq 0$  для любых  $x \in D \setminus \{0\}$  и для которой выполнено одно из следующих условий:

- 1) функция  $\text{div}\{|\text{grad}\{S(x)\}| f(x)\}$  интегрируема в области  $V = \{x \in D : S(x) \leq C\} \subset D$  и  $\int_V \text{div}\{|\text{grad}\{S(x)\}| f(x)\} dV < 0$  для всех  $C > 0$ ;
- 2) функция  $\text{div}\{|\text{grad}\{S^{-1}(x)\}| f(x)\}$  интегрируема в области  $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \geq C\} \subset D$  и  $\int_{V_{inv}} \text{div}\{|\text{grad}\{S^{-1}(x)\}| f(x)\} dV_{inv} > 0$  для всех  $C > 0$ .

**Теорема 2 (достаточное условие устойчивости).** Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция  $\rho(x)$  определенная в области  $D$ . Тогда точка  $x = 0$  устойчива (асимптотически устойчива), если выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $\text{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \rho(x)\text{div}\{f(x)\}$  ( $\text{div}\{\rho(x)f(x)\} < \rho(x)\text{div}\{f(x)\}$ ) для любых  $x \in D \setminus \{0\}$  и  $\text{div}\{\rho(x)f(x)\}|_{x=0} = 0$ ;
- 2)  $\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \geq 0$  ( $\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ ) и  $\text{div}\{f(x)\} \leq 0$  для любых  $x \in D \setminus \{0\}$  и  $\lim_{|x| \rightarrow 0} [\rho^2(x)\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}] = 0$ ;
- 3)  $\text{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \beta(x)\rho^2(x)\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$  ( $\text{div}\{\rho(x)f(x)\} < \beta(x)\rho^2(x)\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ ), где  $\beta(x) > 1$  и  $\text{div}\{f(x)\} \leq 0$  или только  $\beta(x) = 1$  для любых  $x \in D \setminus \{0\}$ , а также  $\text{div}\{\rho(x)f(x)\}|_{x=0} = 0$  и  $\lim_{|x| \rightarrow 0} [\rho(x)\text{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}] = 0$ .

**Заключение.** Предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Для исследования устойчивости требуется существование определенного вида поверхности интегрирования или вспомогательной скалярной функции. Сформулированы отдельно необходимые и достаточные условия устойчивости. Более подробно результаты описаны в [4-8].

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФ №18-79-10104-П в ИПМаш РАН.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуков В.П.** Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 7. – С. 34–43.
2. **Rantzer A.** A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – P. 161–168.
3. **Халил Х.К.** Нелинейные системы. М-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
4. **Фургат И.Б.** Дивергентные условия устойчивости динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 2. – С. 62–75.
5. **Фургат И.Б., Гушин П.А.** Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2021. – 196 с.

6. **Furtat I., Gushchin P., Nekhoroshikh A.** Divergence Conditions for Stability Study of Autonomous Nonlinear Systems // Proc. of the 21st International Federation on Automatic Control World Congress (WC IFAC 2020), Berlin, Germany, 12-17 July 2020. IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, no. 2. – P. 6317–6320.
7. **Furtat I., Gushchin P.** Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // Journal of the Franklin Institute. –2020. – Vol. 357, no. 18. – P. 13753-13765.
8. **Furtat I., Gushchin P.** Stability/Instability Study and Control of Autonomous Dynamical Systems: Divergence Method // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 23764–23771.

I.B. Furtat (IPME RAS, St. Petersburg)

### **Divergence method for investigation of stability of dynamical systems**

A new method is proposed for studying the stability of dynamical systems using the properties of the flow and the divergence of the phase velocity vector. A connection is established between the method of Lyapunov functions and the proposed method. The application of the obtained results to the study of the stability of linear systems made it possible to reduce the problem to the question of the solvability of matrix inequalities. A method for synthesizing a control law with state feedback for stabilizing linear and nonlinear systems has been developed. The synthesis of the control law for nonlinear systems is reduced to solving a differential inequality with respect to the desired control function, and for linear objects with a static linear controller, to solving a matrix inequality.

Д. В. ШАТОВ, В. А. АЛЕКСАНДРОВ  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА МЕТОДОМ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ

*Для скалярных объектов управления предлагается метод синтеза ПИД-регуляторов, обеспечивающих заданные или достижимые требования к инженерным показателям качества: быстродействию и запасам устойчивости. Предлагаемый подход основан на использовании техники размещения полюсов (или модального управления). При этом желаемый характеристический полином выбирается специальным образом исходя из заданных показателей качества. Приводятся примеры синтеза для минимально-фазового и неминимально-фазового случаев.*

**Введение.** Преобладание ПИД регуляторов в действующих системах автоматического управления обусловлено в том числе тем, что модель объекта управления известна неточно, и ее параметры непостоянны. В этом случае построение более сложного регулятора для номинальных параметров чаще может приводить к неудовлетворительной работе системы. Кроме того, оценки параметров упрощенной линеаризованной модели второго порядка, по которой можно находить коэффициенты ПИД регулятора, можно получить, проведя несложные эксперименты [1]. После этого результата большое количество работ было посвящено нахождению различных формул расчета коэффициентов ПИД регулятора по параметрам модели. Наиболее обширный обзор таких работ сделан в [2]. В [3] такие формулы получены с учетом запасов устойчивости системы. Отметим, что при наличии модели второго порядка с оценками значений ее параметров можно использовать все доступные методы синтеза регуляторов с выбором тех критериев, которые важны для конкретной системы. Так в [4, 5] предложен синтез регуляторов методом размещения полюсов по показателям точности, быстродействия и запасов устойчивости. Настоящий доклад посвящен применению этого подхода для нахождения коэффициентов ПИД регулятора.

**Постановка задачи.** Задача состоит в том, чтобы для объекта, описываемого передаточной функцией второго порядка

$$W(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (1)$$

с известными коэффициентами, где  $s$  – это переменная преобразования Лапласа, найти коэффициенты ПИД регулятора

$$W_r(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1} \right) \quad (2)$$

такие, что система будет удовлетворять требованиям к быстродействию  $t_{\text{пер}} \leq t_{\text{пер}}^*$ , где  $t_{\text{пер}}$  – время установления до 5%,  $t_{\text{пер}}^*$  – его требуемое значение и запасам устойчивости [6]

$$\inf_{0 \leq \omega < \infty} |1 + W(j\omega)W_r(j\omega)| \geq r^*, \quad (3)$$

где  $0 < r^* \leq 1$  – требуемое значение радиуса запасов устойчивости.

**Метод размещения полюсов.** Регулятор (2) можно записать в форме

$$W_r(s) = \frac{K_p(T_d + T_f)s^2 + K_p \left( 1 + \frac{T_f}{T_i} \right) s + K_p/T_i}{s(T_f s + 1)} = \frac{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{c_2 s^2 + c_1 s} = \frac{d(s)}{c(s)} \quad (4)$$

и тогда характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\psi(s) = a(s)c(s) + b(s)d(s). \quad (5)$$

Если задать желаемый характеристический полином  $\psi^*(s)$  степени 4, то коэффициенты полиномов регулятора  $c(s)$  и  $d(s)$  можно найти, решая систему пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными, полученную приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях полиномов (5) и  $\psi^*(s)$  [7].

**Выбор желаемого характеристического полинома.** На основе процедур выбора корней желаемого характеристического полинома, предложенных в [4, 5], получим аналогичную, соответствующую поставленной задаче. Будем формировать желаемый характеристический полином следующей структуры:

$$\psi^*(s) = \delta(s)b_+(s)b_-(-s)\varepsilon(s), \quad (6)$$

где  $\delta(s)$  – базовая часть степени  $n = \deg a(s)$ ,  $b_+(s)$  – устойчивая часть полинома  $b(s)$ ,  $b_-(-s)$  – полином с обратным знаком вещественных частей корней неустойчивой части полинома  $b(s)$ ,  $\varepsilon(s)$  – полином степени, равной разности степеней знаменателя и числителя передаточной функции объекта (1). Выберем

$$\delta(s) = \prod_{i=1}^n \left( s + \alpha^{(i-1)} \frac{3}{t_{\text{пер}}^*} \right), \quad (7)$$

где  $\alpha > 1$  вводится, чтобы избежать кратности корней и

$$\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{n-m} \left( \mu_i \frac{t_{\text{пер}}^*}{3} s + 1 \right), \quad (8)$$

где  $0 < \mu_i < 1$  – достаточно малые различные числа, и таким образом обеспечим требуемое время регулирования. Для полученного полинома  $\psi^*(s)$  найдем полиномы регулятора  $c(s)$  и  $d(s)$  и проверим выполнение требования (3) к запасам устойчивости. Если они выполнены, то задача решена, а если нет, то значит требования завышены, и нужно увеличить желаемое значение  $t_{\text{пер}}^*$  и/или уменьшить  $r^*$  и повторить процедуру.

**Пример.** Синтез ПИД-регуляторов демонстрируется на примере двух типовых объектов управления [8]:

$$W_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \text{ и } W_2(s) = \frac{1}{Ts+1} e^{-\tau s} \approx \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{(Ts+1)\left(\frac{\tau}{2}s+1\right)}, \tau=1, T=2. \quad (9)$$

Объект  $W_1(s)$  представляет собой передаточную функцию с кратными полюсами и без нулей, а  $W_2(s)$  – широко распространенная модель первого порядка с запаздыванием, которую для задачи синтеза можно, используя Паде-аппроксимацию, заменить неминимально-фазовым линейным объектом.

При синтезе регулятора для объекта  $W_1(s)$  были заданы следующие требования к быстродействию и запасам устойчивости

$$t_{\text{пер}}^* = 1,5 \text{ с}; r^* = 0,7.$$

Остальные параметры синтеза:  $\alpha = 1,1$ ;  $\mu = 0,3$ .

В результате синтеза получен следующий ПИД-регулятор

$$W_{r1}(s) = \frac{65,803(s^2 + 3,105s + 2,596)}{s(s + 14,76)} = 13,06 \left( 1 + \frac{1}{1,13s} + \frac{0,274s}{0,068s + 1} \right). \quad (10)$$

Показатели качества, по которым проводился синтез, в замкнутой системе  $W_1(s)$ ,  $W_{r1}(s)$ :  $t_{\text{пер}} = 1,28$  с;  $r = 0,81$ . На рисунке 1 изображены результаты моделирования замкнутой системы (9), (10). Синим цветом показан выходной сигнал  $y$ , а красным – сигнал управления  $u$ .

Задающее воздействие – ступенчатая функция единичной амплитуды, дополнительно в момент времени  $t = 2$  с к системе прикладывается ступенчатое внешнее возмущение амплитудой 0,5. Точка приложения возмущения совпадает с точкой приложения управления. Можно отметить, что перерегулирование по выходу составляет 15,1%, однако, по управлению максимальное значение составляет  $\max u(t) = 65,8$ , что составляет довольно большую величину. Предложенный метод синтеза позволяет косвенно учесть ограничения на управления варьированием настраиваемых параметров ( $\alpha$  и  $\mu$ ) или требуемых показателей качества ( $t_{\text{пер}}^*$  и  $r^*$ ).

Синтез ПИД-регулятора для объекта  $W_2(s)$  проводился для следующих показателей качества

$$t_{\text{пер}}^* = 4 \text{ с}; r^* = 0,5.$$

Остальные параметры процедуры синтеза оставлены без изменений. В результате получен ПИД-регулятор

$$W_{r2}(s) = \frac{2,76(s+2)(s+0,544)}{s(s+4,915)} = 1,3 \left( 1 + \frac{1}{2,13s} + \frac{0,227s}{0,204s+1} \right). \quad (11)$$

Фактические значения показателей качества системы  $W_2(s)$ ,  $W_{r2}(s)$ :  $t_{\text{пер}} = 2,66$  с и  $r = 0,67$  (радиус запасов устойчивости определялся по линеаризованной модели объекта управления). На рисунке 2 изображены результаты моделирования замкнутой системы (9), (11), цветовая схема осталась без изменений, также как амплитуды задающего воздействия и внешнего возмущения, однако, момент приложения последнего сдвинут во времени до  $t = 7$  с. Перерегулирование по уставке фактически отсутствует ( $<1\%$ ).

Так как объект неминимально-фазовый, то при попытке задания требуемого быстродействия  $t_{\text{пер}}^* = 2$  с при сохранении требований к запасам устойчивости ( $r^* = 0,5$ ) синтезированный предложенным методом ПИД-регулятор может их обеспечить только при быстродействии  $t_{\text{пер}} = 2,42$ .

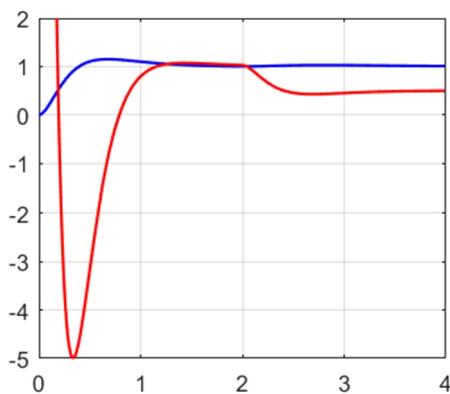


Рис. 1. Результаты моделирования замкнутой системы  $W_1(s)$ ,  $W_{r1}(s)$

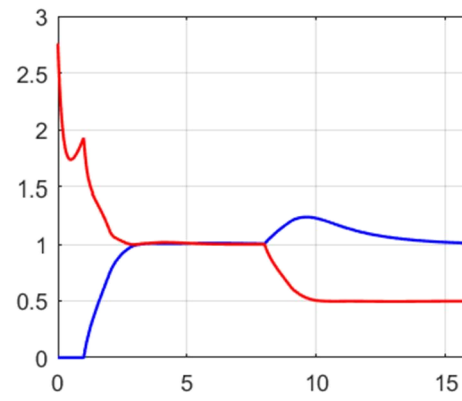


Рис. 2. Результаты моделирования замкнутой системы  $W_2(s)$ ,  $W_{r2}(s)$

**Заключение.** Предложен метод синтеза ПИД регуляторов с использованием процедуры размещения полюсов. Выбор корней желаемого характеристического полинома замкнутой системы осуществляется по инженерным показателям качества, но при этом в отличие от работ [4, 5] интегральная составляющая ПИД регулятора обеспечивает нулевую статическую ошибку. Следует учитывать, что полученный результат должен проверяться на соответствие другим критериям качества системы, не учтенным в процедуре синтеза: частота среза, ограничение на управление и другие. На типовых примерах показана эффективность метода.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimum settings for automatic controllers // Transactions of ASME. 1942. V. 64. P. 759–768.
2. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules (3<sup>rd</sup> Edition). Imperial College Press, 2009.
3. Åström K. J., Hägglund T. Advanced PID control. NC: ISA, 2006.

4. **Александров А.Г.** Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // *АиТ*. 2015. № 5. С. 27–42.
  5. **Александров А.Г.** Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые объекты // *АиТ*. 2017. № 6. С. 3–17.
  6. **Александров А.Г.** Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // *Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб.* Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
  7. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, Физматлит, 1981.
  8. **Åström K. J., Hägglund T.** Benchmark systems for PID control // *IFAC Proceedings Volumes*. 2000. V. 33. №. 4. P. 165–166.
- 

D.V.Shatov, V.A.Alexandrov (ICS RAS, Moscow). **PID controller design by engineering performance indices via pole placement method**

For SISO control plants, a method is proposed for the synthesis of PID controllers that provide specified or achievable requirements for engineering performance indices: speed of response and stability margins. The proposed approach is based on the use of the pole placement technique (or modal control). In this case, the desired characteristic polynomial is selected in a special way based on the given quality indicators. Examples of synthesis are given for the minimum-phase and non-minimum-phase cases.



## Секция 2

### **ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ, СЕТЕВОЕ, ГРУППОВОЕ И КООПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

М. Ю. КЕНЗИН, И. В. БЫЧКОВ, Н. Н. МАКСИМКИН  
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова, Иркутск)

#### **ДВУХУРОВНЕВЫЙ ПОДХОД К КООРДИНАЦИИ ГРУППЫ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ КОММУНИКАЦИЕЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МИССИЙ**

*В докладе предлагается двухуровневая схема по онлайн-планированию динамических миссий для группы мобильных роботов, действующих в условиях энергетических и коммуникационных ограничений. В предлагаемой схеме верхний уровень обеспечивает планирование групповых действий, связанных с проведением сеансов связи, подзарядкой и перегруппировкой текущего состава, а нижний уровень отвечает за построение индивидуальных планов и маршрутов. Такой подход позволяет существенно облегчить общую задачу групповой маршрутизации за счет вынесения самых сложных ограничений в отдельную задачу временного планирования.*

**Введение.** Надежность и эффективность применения автономных групп мобильных роботов для решения реальных поисково-обследовательских задач в первую очередь определяется способностью группы самостоятельно и оперативно реагировать на любые возникающие изменения [1]. Это требование может быть выполнено только при условии эффективной организации межагентной коммуникации внутри группы с целью обеспечения своевременной передачи постоянно обновляющихся знаний о среде и состоянии самих роботов.

Наряду с коммуникационными требованиями, еще одним важным ограничением при планировании долгосрочной групповой стратегии является энергоемкость аккумуляторных батарей, ограниченный запас которых вынуждает каждого робота периодически покидать действующий состав группы для пополнения заряда батарей [2]. В случае, когда все роботы в группе идентичны и взаимозаменяемы, порядок подзарядки, как правило, регулируется несложными системами на основе правил [3]. В обратной ситуации возникает необходимость в применении более комплексного подхода для определения эффективного расписания подзарядок, способного обеспечить высокую работоспособность группы в условиях постоянно изменяющегося состава. Таким образом, актуальной представляется задача разработки такой структуры для системы группового управления, которая обеспечивала бы автономную, непрерывную и эффективную работу динамической группы (в том числе разнородной) мобильных роботов в рамках комплексных энергетических и коммуникационных ограничений.

В работе предлагается оригинальный двухуровневый подход, который отталкивается в первую очередь от общего набора ограничений, свойственного продолжительным миссиям робототехнических групп, и только во вторую – от специфики конкретной среды и типа роботов. Верхний уровень подхода отвечает за координацию группы на коллективном уровне, обеспечивая своевременное выполнение энергетических и коммуникационных требований, а нижний уровень обеспечивает маршрутизацию роботов с элементами событийного поведения. Концепция групповых рандеву является ядром подхода, связывая два уровня вместе с целью обеспечить периодическую и аperiodическую (на основе событий) коммуникацию.

**Система группового управления.** В общем случае, поисково-обследовательские операции заключаются в посещении и выполнении динамического набора заданий группой автономных мобильных роботов в соответствии с оперативными требованиями [4]. Возникающая при этом

проблема распределения заданий и ресурсов группы во многом пересекается с классом задач маршрутизации и, таким образом, обычно рассматривается в терминах теории графов [5].

Комплексные многоатрибутные модели реальных миссий должны учитывать множество разнообразных факторов, включая схему координации группы, топологию коммуникационной сети, функциональную и параметрическую разнородность текущего состава, а также набор пространственно-временных ограничений и технических требований. В разрезе масштабных продолжительных миссий сложные комбинации различных по своей природе ограничений делают решение таких задач в явном виде и за приемлемое время практически невозможным. В связи с этим, на первый план выходят различные декомпозиционные схемы построения групповых систем управления.

Как уже указывалось выше, можно выделить два основных фактора, объединяющих наиболее реалистичные и комплексные модели группового управления: коммуникационные и энергетические ограничения [6]. Эти два фактора формируют основную концепцию подхода: разбить всю миссию на последовательность рабочих периодов, где на каждом периоде функционировала бы группировка с постоянным составом, а все изменения состава осуществлялись бы в рамках заранее запланированных групповых сборов в конце каждого такого периода. Проведение сборов с требуемой периодичностью позволяет роботам регулярно обновлять знания о внешней среде и состоянии группы путем полного обмена информацией.

Таким образом, планирование миссии будет заключаться в том, чтобы найти эффективную стратегию в форме расписания групповых рандеву (рис. 1). При этом, каждому рандеву должно быть поставлено в соответствие одно или более событий двух различных типов: сбор группы для коммуникационных нужд и/или сбор для обновления состава группы (отправка части роботов на подзарядку или возвращение подзарядившихся роботов обратно в группу).



Рис. 1. Декомпозиция миссии на последовательность рабочих периодов

Последовательность рабочих периодов с соответствующим набором событий должны быть сформированы таким образом, чтобы не только гарантировать требуемую периодичность рандеву (сеансов связи) и своевременную подзарядку всех роботов в группе, но и обеспечить максимальную работоспособность действующих на протяжении миссии группировок роботов в контексте их функциональной и параметрической разнородности. Это позволит исключить вопросы связи и пополнения энергии из задачи планирования индивидуальных маршрутов роботов на каждом рабочем периоде.

Еще одним дополнительным фактором комплексности реальных робототехнических миссий являются их динамические условия. Так, в случае возникновения непредвиденных событий, существенно влияющих или даже угрожающих успеху миссии, группа должна быть оперативно оповещена о произошедших изменениях и собрана для проведения внепланового (экстренного) рандеву с целью корректировки текущей групповой стратегии. Эффективная организация такого децентрализованного оповещения в условиях ограниченных коммуникационных возможностей также является самостоятельной и нетривиальной задачей.

Таким образом, описанный двухуровневый подход к организации групповой работы и соответствующая ей система группового управления могут быть представлены в виде следующей блок-схемы (рис. 2). Верхний уровень здесь отвечает за планирование расписания групповых рандеву, а нижний уровень осуществляет планирование работ на уровне индивидуальных роботов и состоит из двух блоков: блока распределения заданий между действующими роботами группы и блока экстренного оповещения, который перехватывает управление в случае возникновения непредвиденных изменений высокой важности.

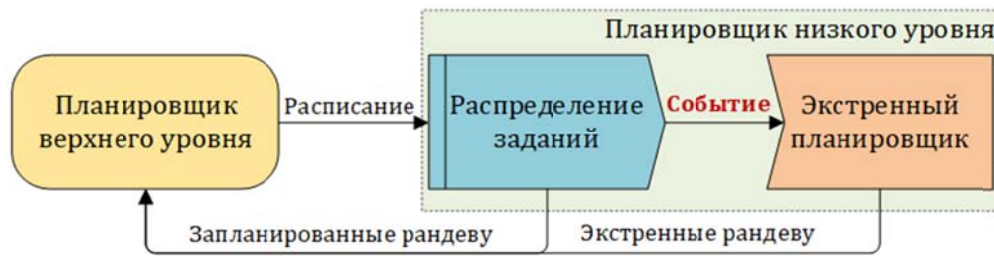


Рис. 2. Общая схема системы группового управления

**Верхний уровень планирования.** Задача верхнеуровневого планирования групповой стратегии по своей сути является обратной вариацией задачи составления расписания для персонала или рабочей силы (personnel/workforce scheduling problem) [7]. В общем виде такие задачи заключаются в том, чтобы подобрать из некоторого имеющегося множества доступных агентов команду рабочих и сформировать для нее рабочий режим таким образом, чтобы гарантированно покрыть заданную потребность в рабочей силе наиболее эффективным образом (обычно, при наименьших затратах на оплату работы агентов).

В рассматриваемом случае, наоборот, общая команда рабочих (роботов) изначально задана и фиксирована, а требуется лишь составить для неё наиболее эффективное расписание с точки зрения покрытия потребностей в рабочей силе и других требований задачи (рис. 3). В качестве первых могут выступать как требования по наличию роботов с конкретными возможностями, так и потребность в присутствии некоторого количества разных агентов. Таким образом, эффективность группового расписания определяется следующим набором критериев:

1. Своевременная подзарядка для всех роботов в группе;
2. Максимальное покрытие потребностей в рабочей силе на протяжении всей миссии;
3. По возможности равномерное распределение рабочей силы действующей подгруппы;
4. Минимальное количество необязательных (излишних) рандеву, поскольку каждое из них отвлекает роботов от выполнения текущих целей.

В условиях необходимости планирования и корректировки расписаний в режиме, близком к реальному времени, наиболее применимыми представляются различные эвристические и метаэвристические методы. Несмотря на большое разнообразие существующих подходов к составлению расписаний, эволюционные алгоритмы (ЭА) остаются одним из наиболее часто используемых методов на протяжении уже многих лет [8].

В среднем, ЭА работают быстрее и масштабируются лучше, чем другие метаэвристические подходы. Кроме того, сама их структура позволяет легко встраивать дополнительные проблемно-ориентированные эвристики и алгоритмические схемы для более эффективной оптимизации с учетом особенностей конкретных задач из прикладной области.

Таким образом, предлагается использование гибридных эволюционных алгоритмов со встроенными проблемно-ориентированными блоками локального поиска.

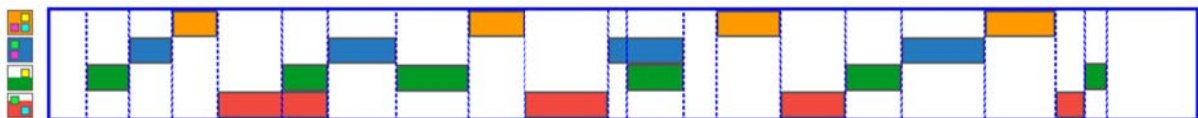


Рис. 3. Пример верхнеуровневого расписания группы из четырех разнородных роботов

**Нижний уровень планирования.** Планировщик нижнего уровня отвечает за действия каждого робота в группе на каждом ее рабочем периоде. Задача распределения целей в этом случае сводится к задаче командного ориентирования (team orienteering problem) с заданным горизонтом планирования, когда роботы должны выдвинуться из некоторой области (в данном случае, из области групповых рандеву), выполнить максимально возможный объем работ и вернуться обратно в стартовую область не позднее следующего группового сбора.

Эволюционные алгоритмы и для этого класса задач неоднократно демонстрировали свою эффективность при решении самых разных вариаций задач групповой маршрутизации. Основным преимуществом ЭА в данном случае является их any-time структура, а также способность

строить решения для постановок со сложным набором ограничений, так как ЭА требуют относительно небольшое количество информации о природе самой задачи и при этом легко расширяются путем добавления новых проблемно-ориентированных эвристик [9].

**Блок экстренного планирования.** В случае обнаружения каких-либо существенных изменений условий миссии, робот-инициатор (первым зарегистрировавший эти изменения) должен немедленно оповестить остальных членов группы с целью инициации экстренного рандеву. Сама задача такого децентрализованного оповещения нестационарной группы мобильных роботов в условиях ограниченной связи является нетривиальной и лежит на стыке задач групповой маршрутизации и сетевых мультиагентных моделей распространения [10].

**Заключение.** В работе предложена новая двухуровневая схема организации системы группового управления группой мобильных роботов в условиях энергетических и коммуникационных ограничений. Общая цель подхода состоит в том, чтобы обеспечить полностью автономное функционирование группы в оптимальном рабочем состоянии на протяжении всей миссии. Исходя из специфики задачи, предложены классы алгоритмов, способные осуществлять эффективное планирование миссий на различных уровнях системы управления с учетом соответствующего набора ограничений. Проведен ряд вычислительных экспериментов, продемонстрировавших высокую эффективность предложенного подхода.

*Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФ 22-29-00819.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. El Asmar B., Chelly S., Azzi N, et al. AWARE: a situational awareness framework for facilitating adaptive behavior of autonomous vehicles in manufacturing. The Semantic Web – ISWC 2020. Springer International Publishing. 2020. P. 651–666.
2. Afshar-Bakeshloo M., Mehrabi A., Safari H., et al. A green vehicle routing problem with customer satisfaction criteria. Journal of Industrial Engineering International. 2016. Vol. 12. № 4. P. 529–544.
3. Kabir Q.S., Suzuki Y. Comparative analysis of different routing heuristics for the battery management of automated guided vehicles. International Journal of Production Research. 2019. Vol. 57. № 2. P. 624–641.
4. Kenzin M., Bychkov I., Maksimkin N. Coordinated recharging of heterogeneous mobile robot teams during continuous large scale missions. Proceedings of 7th International Conference on Control Decision and Information Technologies (CoDIT). 2020. P. 745–750.
5. Badreldin M., Hussein A., Khamis A. A comparative study between optimization and market-based approaches to multi-robot task allocation. Advances in Artificial Intelligence. 2013. Vol. 256524. P. 2013–2111.
6. Asghari M., Mirzapour Al-e-hashem S.M.J. Green vehicle routing problem: a state-of-the-art review. International Journal of Production Economy. 2021. Vol. 231. № 107899.
7. Van den Bergh J., Belien J., De Bruecker P, et al. Personnel scheduling: a literature review. European Journal of Operational Research. 2013. Vol. 226. № 3. P. 367–385.
8. Amjad M.K., Butt S.I., Kousar R., et al. Recent research trends in genetic algorithm based flexible job shop scheduling problems. Mathematical Problems in Engineering. 2018. Vol. 2018. № 5. P. 1–32.
9. Koc C., Bektas T., Jabali O., Laporte G. Thirty years of heterogeneous vehicle routing. European Journal of Operational Research. 2016. Vol. 249. № 1. P. 1–21.
10. Kenzin M., Bychkov I., Maksimkin N. Situational awareness for distributed mobile robot teams under limited communication. Proceedings of 2nd International Workshop ICCS-DE-2020. 2020. P. 146–155.

---

M.Yu. Kenzin, I.V. Bychkov, N.N. Maksimkin (ISDCT SB RAS, Irkutsk). **A two-level coordination approach for mobile robots with limited communication in dynamic operations**

The paper proposes a two-level scheme for online dynamic mission planning for a group of mobile robots operating under energy and communication constraints. In the proposed scheme, the upper level provides planning for group activities such as communication sessions, recharging, and regrouping activities, while the lower level is responsible for constructing individual plans and routes. The approach significantly reduces the complexity of the initial multi-attribute group routing problem by isolating several harsh constraints into a separate time-planning task.

А. И. ГЛУЩЕНКО

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

П. И. ЖУКОВ, А.В. ФОМИН

(СТИ НИТУ «МИСиС», Старый Оскол)

## АДАПТАЦИЯ СЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА

*Предлагается подход к решению задачи адаптации модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу, основная идея которого заключается в замене классического метода (нахождение зависимостей теплофизических параметров от температуры по известным в литературе табличным данным) на «обучение с учителем» сеточной модели по технологическим данным с реального агрегата. Подход дает возможность проводить адаптацию сеточной модели для таких материалов, по которым в литературе отсутствует необходимый объем данных, но есть достаточно технологических данных с конкретного агрегата.*

**Введение.** Развитие концепции «Индустрия 4.0» придало новый импульс к применению таких подходов к управлению как Advanced Process Control (APC) [1] и Model Predictive Control [2]. Областью приложения данных методологий стали энергоемкие технологические процессы или объекты, например, высокотемпературный нагрев стальных заготовок в печах нагрева. На сегодняшний день такой нагрев является одним из наиболее сложных для управления и крайне энергозатратным процессом в металлургии, что признают как отечественные исследователи [3], так и зарубежные [4].

Основная сложность высокотемпературного нагрева в печах заключается в нестационарности условий нагрева, что приводит к невозможности получения одновременно оптимального по качеству и энергоэффективности управления на уровне контуров регулирования при применении упомянутых подходов. С этой целью проектируют надсистемы управления, как например представленные в работе [3] – они корректируют уставки отдельных контуров управления. В ядре подобных систем должна находиться математическая модель нагрева заготовки, достаточно точно описывающая и прогнозирующая данный процесс. Данная работа посвящена получению такой модели и ее адаптации к нагреваемому веществу в ситуациях, когда применение классического подхода к решению данной проблемы затруднено ввиду отсутствия необходимых данных.

**Постановка задачи.** В промышленных условиях одним из способов промоделировать нагрев заготовки в нестационарных условиях является численное решение краевой задачи на основе дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности (1):

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

В данном случае уравнение представляется в двумерном виде и рассматривает распределение температурного поля по сечению заготовки. Краевая задача на основе (1) формируется вокруг граничных условий конвективно-радиационного теплообмена:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \kappa \cdot (T_{Cp} - T_{Ob}) + \varepsilon_{Ob} \cdot \sigma \cdot (T_{Cp}^4 - T_{Ob}^4) \quad (2)$$

Здесь  $l$  – нормаль к поверхности нагреваемого объекта;  $T_{Cp}$  – температура нагревающей среды, К;  $T_{Ob}$  – температура нагреваемого объекта, К;  $\kappa$  – коэффициент теплообмена,  $Вт/м^2 \cdot К$ ;  $\varepsilon_{Ob}$  – приведенная степень черноты нагреваемого объекта;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ . Уравнение (1) при граничных условиях (2) и начальных условиях  $t_0 = 0$ ;  $T_0 = T$ , может быть решено методом конечных разностей [5]. Однако, при рассмотрении высокотемпературного нагрева нельзя пренебречь изменением теплопроводности ( $\lambda$ ), плотности ( $\rho$ ) и теплоемкости ( $c$ ) нагреваемого вещества от температуры. Таким образом, формируется подзадача нахождения функциональных зависимостей для каждого теплофизического параметра:

$$\lambda = f_1(T), \rho = f_2(T), c = f_3(T) \quad (3)$$

Форма и вид данных уравнений в случае нагрева стали будет полностью зависеть от её физико-химической конфигурации (или «марки»). Чем точнее подобраны правые части уравнений (3), тем точнее будет модель (1). Получить искомые функциональные зависимости можно при помощи аппроксимации табличных значений, имеющихся в открытом доступе, как например [6]. Однако, не для всех «марок» стали имеется достаточная выборка, чтобы получить адекватную функциональную зависимость, и невозможно оценить качество таких данных для отдельных марок. Кроме того, полученные функциональные зависимости являются внешними моделями, оценить их в клад в ошибку самой модели можно только косвенным анализом выходов модели.

**Предлагаемое решение.** Пусть имеет место замена теплофизических параметров уравнения (1) на безразмерные коэффициенты:

$$\varphi = \lambda, \quad \omega = \rho \cdot c \quad (4)$$

В работе [7] приводится пример решения краевой задачи на основе (1) и (2) методом конечных разностей с покоординатным расщеплением. Данный процесс изложен в работе [8] в более общем виде. Известно, что в результате получается две динамические системы с дискретным временем, жизненный цикл которой определен на временной сетке  $n \in [0, N]$ . Если выполнить для них замену (4), то получим:

$$\begin{cases} \omega_x^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k, y_q = \text{const}}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x_k, y_q = \text{const}}^n}{\tau} = \varphi_x^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} + T_{x_k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}, \\ \omega_y^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k = \text{const}, y_q}^{n+1} - T_{x_k = \text{const}, y_q}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \varphi_y^{(n)} \cdot \frac{T_{y_q+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{y_q}^{n+1} + T_{y_q-1}^{n+1}}{h_y^2}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $x_k$  – это  $k$ -й узел локально-одномерной сетки вдоль оси  $Ox$ ;  $y_q$  – это  $q$ -й узел локально-одномерной сетки вдоль оси  $Oy$ ;  $h_x$  – шаг вдоль сетки  $Ox$ ;  $h_y$  – шаг вдоль сетки  $Oy$ ;  $\tau$  – шаг по временной сетке.

Опираясь на вид моделей (5), предположим, что безразмерные коэффициенты представляют собой векторы, коллинеарные временной оси и соразмерные сетке, наложенной на неё:

$$\begin{cases} \omega_x = \{ \omega_x^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \} \\ \omega_y = \{ \omega_y^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \} \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_x = \{ \varphi_x^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \} \\ \varphi_y = \{ \varphi_y^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \} \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, поиск непрерывных правых частей уравнений (3) заменится на поиск пары дискретных параметров  $\{\varphi, \omega\}$ , определенных в каждом из узлов временной сетки  $n$ . Вести такой поиск возможно методом градиентного спуска. Для этого пусть каждая модель системы (5) имеет свой целевой критерий

$$E_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - g_1(T_{x_k}^{(n)}, u_1(n)_i))^2; \quad E_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - g_2(T_{y_q}^{(n)}, u_2(n)_i))^2 \quad (7)$$

где  $M$  – это количество наблюдений эталонных состояний моделей (температура заготовок после нагрева);  $g_1$  и  $g_2$  – это уравнения смены состояния моделей, определенных на одномерных сетках  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, зависящие от температуры и управления  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть управление  $u_1$  и  $u_2$  есть пара параметров  $\{\varphi, \omega\}$ , тогда имеем следующую оптимизационную задачу:

$$\{u_p(n), u_p(n+1), \dots, u_p(N)\}, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n)_i))^2 \rightarrow \min, \quad p = 1, 2 \quad (8)$$

Здесь и далее  $l$  определяется как  $x_k$  или  $y_q$  в зависимости от приложения к конкретному уравнению модели системы (5). Решать данную задачу предлагается методом стохастического градиентного спуска [9] на основе выборки данных, полученных с действующей нагревательной печи (температуры в зонах печи, время нагрева в них, финальная температура заготовки и др.):

$$\Delta \varphi_l^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}; \quad \Delta \omega_l^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}} \quad (9)$$

В данном случае определить ошибку модели явно можно только на последнем временном слое:

$$\frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l} = \frac{\partial g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))}{\partial \varphi_l} \cdot (y - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))); \quad \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l} = \frac{\partial g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))}{\partial \omega_l} \cdot (y - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))) \quad (10)$$

Для определения ошибки на внутренних временных слоях необходимо воспользоваться цепным уравнением. Приведем полученное уравнение только для параметра  $\varphi$ , поскольку для параметра  $\omega$  оно имеет аналогичный вид:

$$\frac{\partial E_l^{(N-1)}}{\partial \varphi_l} = \delta_{N-1}^{(p)} \cdot \left( \frac{\partial g_p(T_l^{(N-1)}, u_p(N-1))}{\partial T_l^{(N)}} \cdot \frac{\partial g_p(T_l^{(N)}, u_p(N))}{\partial \varphi_l} \right) \cdot (y - g_p(T_l^{(N)}, u_p(N))) \quad (12)$$

Здесь  $\delta_n$  определяет связь ошибки между временными слоями и вычисляется отдельно для каждого уравнения модели системы (5). Для модели по  $Ox$  – (13), для модели по  $Oy$  – (14).

$$\delta_n^{(1)} = \left( h_x^2 \cdot \varphi_x^{(n)} \right) / \left( \varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{x_{k-1}}) \right), n = \overline{0, N-1} \quad (13)$$

$$\delta_n^{(2)} = \omega_y^{(n)} \cdot h_y^2 / X_n - \sqrt[4]{2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot h_y / X_n}, \quad X_n = 2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_q}^{(n-1)}) + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y + \omega_y^{(n)} \cdot h_y^2. \quad (14)$$

**Численный эксперимент.** Определив дискретные модели (5) на пространственной сетке 100x100, а также временной сетке 50x1, был проведен численный эксперимент, используя (6) – (14). Предварительно были определены все частные производные цепного уравнения (12) относительно  $\varphi$  и  $\omega$ . Сам эксперимент представлял собой попытки «обучить» сеточную модель, опираясь на концепцию «обучения с учителем». В качестве исходной выборки использовались данные с действующего производства ( $M=6097$  заготовок), которые были разбиты на обучающее (80%) и тестовое (20%) множества. Сами данные содержали информацию о времени нагрева заготовок, а также информацию об изменении температур в печи в процессе этого нагрева. Обучение велось до срабатывания критерия остановки – разница между градиентами ошибок по  $\varphi$  в двух соседних эпохах меньше  $10^{-6}$ . Всего было проведено 8424 эпохи обучения, в каждую из которых подавалось фиксированные порции из обучающего множества (100 записей на одну эпоху обучения). В результате была получена модель, для которой средняя абсолютная ошибка (MAE) составила 18,82 °C (рис.1). Данная модель не получала в явном виде никакой информации о «марке» стали, и показала результат не хуже, чем модель, для которой правые части системы (3) были получены на основании табличных значений (18,1 °C) [10]. При условии, что обе модели тестировались на одной и той же выборке, содержащей углеродистые марки стали.

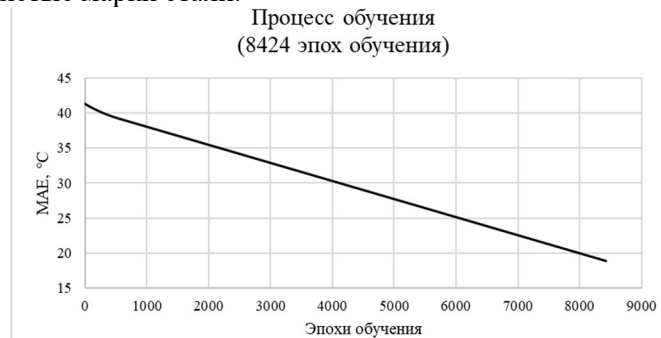


Рис.1. Результаты обучения модели

**Заключение.** Предлагаемый в работе подход, основанный на неявном восстановлении динамики теплофизических коэффициентов от температуры на основании истории нагрева заготовок, решает проблему адаптации модели к нагреваемому веществу. Модель в виде (6)–(14) способна восстановить температурные зависимости теплофизических параметров, необходимых для модели (1), по динамике нагрева в процессе «обучения», не получая никаких сведений о физико-химической структуре нагреваемого вещества. Подход дает возможность проводить адаптацию сеточной модели для таких материалов, по которым в литературе отсутствует необходимый объем данных, но есть достаточно технологических данных с конкретного агрегата.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hadjiski M., Deliiski N. Advanced Process Control of Distributed Parameter Plants by Integration First Principle Modeling and Case-Based Reasoning: Part 1: Framework of DPP Control with Initial Uncertainty. *2020 Int. Conf. Automatics and Informatics*. 2020, P. 1-6.
2. Barbasova T. A., Filimonova F. A., Zakharov A. V. Energy-saving oriented approach based on model predictive control system. *Int. Russian Automation Conf.* 2019. P. 243-252.
3. Парсункин Б. Н., Андреев С. М., Мухина Е. Ю. Экстремально-оптимизирующее автоматизированное управление нагревом непрерывнолитых заготовок в печах проходного типа. *Вестник Череповецкого государственного университета*. 2021. Т. 104. №. 5. С. 22-34.
4. Feng Y., Wu M., Chen L., Chen X., Cao W., Du S., Pedrycz W. Hybrid intelligent control based on condition identification for combustion process in heating furnace of compact strip production. *IEEE transactions on industrial electronics*. 2021, Vol.69, №3, P. 2790-2800.
5. Вабищевич П. Н. Разностные схемы декомпозиции расчетной области при решении нестационарных задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1989. Т. 29. №. 12. С. 1822-1829.
6. Драгунов Ю.Г., Зубченко А.С., Каширский Ю.В. Марочник сталей и сплавов. 4-е изд., переработ. и доп. Под общей ред. Ю.Г. Драгунова и А.С. Зубченко. М.: 2014. 1216 с.
7. Zhukov P., Fomin A., Glushchenko A., Comparison of finite-difference and data-based models of temperature transfer process in heating furnaces for cast billet temperature prediction. *2021 3rd Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency*, 2021, P. 811-816.
8. Каримбаев Т. Д., Рапилбекова Н. С. Метод прогонки в пространственных задачах нестационарной теплопроводности для анизотропных сред. *Конструкции из композиционных материалов*. 2009. №. 4. С. 3-16.
9. Kerkar N. Stochastic gradient descent. In deep learning with python. *Apress, Berkeley*. 2017. P. 113-132.
10. Жуков П. И., Глущенко А.И., Фомин А. В. Адаптация значений коэффициентов теплопереноса для сеточной модели нестационарного нагрева стали. *УВС: Труды XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых*. М: Институт Проблем Управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2021. С. 521-532.

A.I. Glushchenko (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow)

P.I. Zhukov, A.V. Fomin (Sary Oskol technological institute (branch) NUST "MISIS, Sary Oskol)

### **Adaptation of Mesh Model of Transient Heat Conduction Based on Gradient Descent Method**

Abstract. An approach to solve the problem of transient heat conduction model adaptation to the heated material is proposed. The main idea is to substitute the classical method (to identify the dependences of thermophysical parameters on the temperature using the table data from the literature) with "supervised learning" of a mesh model using technological data from a real technological unit. The approach makes it possible to adapt the mesh model for such materials, for which there is no necessary amount of data in the literature, but there is enough technological data from a particular unit.



А. А. ГАЛЯЕВ, А. С. САМОХИН, М. А. САМОХИНА  
(ИПУ РАН, Москва)

## О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПОМОЩИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

*В некоторых задачах планирования маршрутов движения управляемых объектов основным критерием является повышение скрытности при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных рисков-угроз. Данные задачи могут быть по-разному формализованы, и их численное решение может быть основано, например, на применении алгоритма Дейкстры или на решении краевой задачи принципа максимума Понтрягина. В данной работе исследуется идея дискретизации задачи поиска пути в конфликтной среде, благодаря которой удаётся свести решение бесконечномерной задачи к решению серии конечномерных. Получены аналитические формулы для вычисления дискретного функционала.*

**Введение.** В настоящее время системы предотвращения несанкционированного доступа к охраняемому объекту могут включать в себя подвижные детекторы и неподвижные обнаружители. В работе рассматривается конфликтная среда [1], представленная обнаружителями и уклоняющимся объектом (УО), перемещающимся с возможно переменной скоростью между двумя заданными точками. Предполагается, что местоположение обнаружителей, формирующих карту угроз [2], подвижному объекту известно. Выбор маршрута УО и параметров движения осуществляется таким образом, чтобы минимизировать негативное воздействие конфликтной среды, а именно повысить скрытность.

Предполагается, что отношение сигнал/помеха на входах приемных систем обнаружителей мало в течение всего времени движения объекта по маршруту, поэтому уклоняющимся объектом минимизируется интегральный функционал, называемый риском [3]. В работе рассматривается разработанная методика решения задачи построения карты локально-оптимальных путей УО на основе дискретизации задачи. Полученная дискретная задача может исследоваться с использованием принципа Лагранжа и решаться градиентными методами.

**Постановка непрерывной задачи.** Решается задача оптимального перемещения УО – материальной точки  $S$  на плоскости из одной заданной точки в другую за фиксированное время  $T < \infty$ . Управление осуществляется величиной и направлением вектора скорости  $v$ .

Минимизируется функционал  $\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N g_i \frac{v^2}{r_i^2} \right) dt \rightarrow \min$ , где  $v$  – величина вектора скорости УО, а  $r_i$  – расстояние до обнаружителей, т.е. некоторых фиксированных точек  $S_i$ , находящихся в плоскости движения материальной точки.

**Формализация непрерывной задачи.** Задача формализуется как задача оптимального управления.

На плоскости вводится декартова система координат следующим образом: начало координат совпадает с точкой старта, ось  $Oy$  проходит через точки старта и финиша и направлена от точки старта к точке финиша. Единичный отрезок выбирается таким, чтобы ордината конечной точки была равна 1. В такой системе координат начальные и конечные условия имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 0, & x(T) = 0, \\ y(0) = 0; & y(T) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Движение материальной точки в данной системе координат описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi, \\ \dot{y} = v \sin \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi$  – угол, отсчитывающийся от положительного направления оси  $Ox$  и задающий направление вектора скорости  $v$ . Функции  $v$  и  $\varphi$  являются функциями управления и полагаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями:

$$\begin{aligned} 0 \leq v(t) \leq v_{max} \leq \infty, \\ 0 \leq \varphi(t) \leq 2\pi \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v_{max}$  – заданное ограничение скорости УО.

При кусочно-непрерывных ограниченных управлениях  $v$ ,  $\varphi$  фазовые переменные  $x$ ,  $y$  будут непрерывными кусочно-гладкими функциями, удовлетворяющими на участках непрерывности своих производных уравнениям дифференциальной связи (2).

Начальный момент времени  $t = 0$  – время начала движения, т.е.  $v(0) > 0$ .

Обозначим координаты точек  $L_i = (a_i, b_i)$ . Тогда минимизируемый функционал будет иметь вид:

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \right) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Решением задачи нахождения глобального минимума является набор неизвестных фазовых переменных  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  и управлений  $v(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$ , которые должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (2), ограничениям на управление (3), начальным и конечным условиям (1) и минимизировать функционал (4).

**Дискретизация.** Дискретизация позволяет свести решение бесконечномерной задачи оптимального управления к серии конечномерных задач оптимизации.

**Общая идея.** Будем искать минимум функционала для траекторий, представляющих собой плоские ломаные с началом в точке старта и концом в точке финиша, причём скорость на каждом из звеньев ломаной постоянна.

Пусть во введённой ранее системе координат неподвижные точки  $S_i$  имеют координаты  $(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда минимизируемый функционал будет иметь вид:

$$I = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \right) dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:  $M$  – количество звеньев ломаной;  $L_j(x_j, y_j)$  –  $j$ -ая вершина ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M+1$ ;  $L_j L_{j+1}$  –  $j$ -ое звено ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  – координаты вектора  $\overline{L_j L_{j+1}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $\ell_j = |L_j L_{j+1}| = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}$  – длина  $j$ -го звена ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $v_j = \text{const}$  – скорость на  $j$ -м звене ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $T_j = \frac{\ell_j}{v_j}$  – время прохождения  $j$ -го звена ломаной,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

Начальные и конечные условия будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{N+1} = 0, \\ y_{N+1} = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Общее время движения  $\sum_{j=1}^M T_j = T$  задано.

**Результаты дискретизации.** В результате исследования дискретной постановки минимизируемый функционал (5) был представлен в виде (7):

$$I = \sum_{j=1}^M I_j, \quad (7)$$

где величины  $I_j$  аналитически явно выражаются через введённые ранее обозначения.

**Схема вычислений.** В результате проведённой дискретизации исходная бесконечномерная задача сведена к серии конечномерных, которые могут решаться численно градиентными методами, а также могут быть исследованы на основе непрямых методов.

**Заключение.** В работе рассмотрена задачи поиска путей в конфликтной среде. Производится дискретизация исходной непрерывной задачи, пути УО при этом представлены ломаными с постоянной скоростью на каждом звене. В результате бесконечномерная задача оптимизации сводится к конечномерной, которая может решаться градиентными методами. В таком приближении получено аналитическое выражение для функционала, позволяющее решать задачу быстрее и с большей точностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамянц Т.Г., Галяев А.А., Маслов Е.П., Рудько И.М., В.П. Яхно. Уклонение подвижного объекта в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей. Управление подвижными объектами и навигация. 2015. № 2. С. 31–37.
2. Dogan A., Zengin U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2006. V. 29. № 4. P. 723–732.
3. Сысоев Л.П. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде. Проблемы управления. 2010. № 6. С. 65–72

---

A.A. Galyaev, A.S. Samokhin, M.A. Samokhina (ICS RAS, Moscow). **On solving the problem of constructing the trajectory of a controlled moving object in a conflict environment using discretization**

In some problems of route planning of controlled objects, the main criterion is the increase of stealth when moving in a conflict environment, taking into account the map of potential risks-threats. These problems can be formalized in different ways and their numerical solution can be based, for example, on the application of the Dijkstra algorithm or on the solution of the boundary problem of the Pontryagin's maximum principle. In this paper we investigate the idea of discretization of the path search problem in a conflicted environment, due to which it is possible to reduce the solution of an infinite-dimensional problem to the solution of a series of finite-dimensional ones. Analytic formulas for calculating the discrete functional are obtained.

М.Э. БУЗИКОВ, А. А. ГАЛЯЕВ, П.В. ЛЫСЕНКО, А.И. МЕДВЕДЕВ, И.А. НАСОНОВ  
(ИПУ РАН, Москва)

## НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕХВАТА МАШИНОЙ ДУБИНСА

*Рассматривается задача оптимального  $R$ -перехвата по критерию быстрого действия машиной Дубинса подвижного объекта, движущегося по предписанной траектории. Задача решена с помощью методов глубокого обучения с подкреплением. Полученные траектории  $R$ -перехвата сравнены с аналитическим решением задачи перехвата.*

**Введение.** Развитие вычислительных возможностей беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) и снижение их стоимости приводит к тому, что в последние годы всё более часто военные специалисты различных стран мира обращаются к идее автоматизации и интеллектуализации боевой авиации для задач наблюдения, разведки и нейтрализации объектов противника [1]. Прорабатываются и реализуются различные концепции от автономных дронов-разведчиков до беспилотных ведомых для поддержки пилотируемых боевых самолетов. В виду дешевизны исполнения БПЛА возможно их групповое применение в составе стаи или роя [2]. Предполагается, что благодаря массовости беспилотники смогут эффективнее прорывать противоздушную оборону противника.

В виду этого особенно актуальным становится создание конкурирующих систем, нацеленных на перехват подобных аппаратов. Важнейшей задачей в контексте этой проблемы является нахождение опорных траекторий подвижных объектов с помощью методов математической теории управления. В виду ограниченности энергетических ресурсов БПЛА, искомая траектория должна быть экономически эффективна (например, кратчайшей или быстрой). Кроме того, эта траектория должна быть физически выполнима для конкретного аппарата. Поэтому важно определить траекторию минимальной длины и при этом удовлетворить ограничениям движения подвижного объекта. Для этого часто применяется динамическая модель движения, называемая «машиной Дубинса» или «автомобилем Дубинса», которая удобна для описания движения объектов, имеющих ограничения на кривизну траектории. Возможны вариации данной модели применительно к плоским [3] или пространственным задачам [4, 5], в которых уже используется термин «самолет Дубинса». Сформулированная задача оптимального управления может быть решена аналитически для простейших случаев или с помощью различных численных алгоритмов для более сложных для рассмотрения постановок. В виду качественного улучшения возможностей нейросетей в последнее время популярным подходом становится глубокое обучение с подкреплением [2], [6]. Настоящая работа посвящена нахождению нейросетевого решения задачи перехвата цели машиной Дубинса.

**Основная часть.** Динамика машины Дубинса имеет вид

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \cos \varphi, \\y_p(t) &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u.\end{aligned}$$

Здесь координаты машины Дубинса на декартовой плоскости, угол между направлениями скорости преследователя и осью  $X$ , а  $u$  - управление.

Предполагается, что цель движется по прямолинейной или круговой, заранее известной непрерывной траектории, а её состояние описывается вектором непрерывных функций  $E(t) = (x_E(t), y_E(t))$  на декартовой плоскости. Под перехватом будем понимать такое положение машины и цели, при котором расстояние между ними не превышает заранее заданное расстояние  $R$ .



Рис. 1. Структурная схема DDPG алгоритма

Так как невозможно применить Q-обучение к пространствам непрерывных действий, то для решения задачи обучения с подкреплением с непрерывными действиями был разработан алгоритм Deep Deterministic Policy Gradient (DDPG) [7], где была предложена модель структуры Actor-Critic, в которой структура Actor используется для выбора действий, а структура Critic применяется для оценки этого выбора. DDPG сочетает в себе достоинства предшествующих ему алгоритмов, что делает его более устойчивым и эффективным в обучении. Образцы, полученные в результате последовательного исследования в среде, не распределяются независимо и одинаково, поэтому DDPG использует идею Deep Q Networks (DQN) [8], называемую буфером воспроизведения. Буфер воспроизведения представляет собой буфер конечного размера. На каждом временном шаге Actor и Critic обновляются путем равномерной выборки mini-batch из буфера воспроизведения. Еще одной отличительной особенностью DDPG стала концепция обновлений целей вместо прямого копирования весов в целевую сеть. Поиск решения реализуется путем добавления шума, полученного от шумового процесса  $N$ , в управление Actor.

После обучения сети было проведено моделирование на различных сценариях движения цели. Результаты приведены на рис. 2.

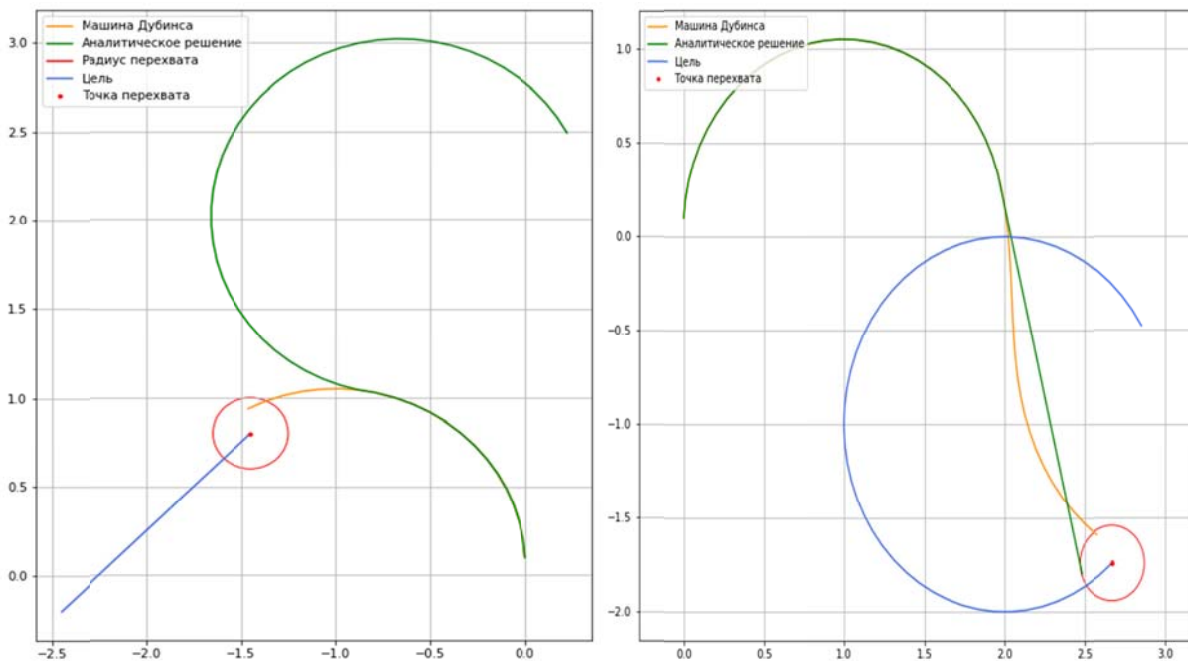


Рис. 2. Прямолинейная траектория цели.

Круговая траектория цели.

**Заключение.** В данной работе получено нейросетевое решение задачи R-перехвата цели машиной Дубинса по критерию быстродействия. Полученные траектории сравнены с аналитическим решением задачи. Решение, полученное при помощи нейросети не всегда является оптимальным и совпадает с аналитическим [3]. Это можно объяснить тем, что нейросеть осуществляет захват цели исходя из того, что его можно совершить в радиусе R от цели, когда как оптимальный алгоритм перехватывает цель точно при совпадении терминальных координат цели машины Дубинса. Поэтому нейросеть может показать примерно такое же время перехвата или даже меньше, чем у оптимального алгоритма перехвата.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dong Y, Ai J, Liu J. Guidance and control for own aircraft in the autonomous air combat: A historical review and future prospects. // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2019, 233(16), pp. 5943-5991.
2. Burak Yuksek, Mustafa Umut Demirezen, Gokhan Inalhan, and Antonios Tsourdos. Cooperative Planning for an Unmanned Combat Aerial Vehicle Fleet Using Reinforcement Learning // Journal of Aerospace Information Systems. 2021, 18(10), pp. 739-750.
3. Buzikov M.E., Galyaev A.A. Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2021. V. 135. Art. No. 109968.
4. P. Váňa, A. Alves Neto, J. Faigl and D. G. Macharet. Minimal 3D Dubins Path with Bounded Curvature and Pitch Angle. // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2020, pp. 8497-8503.
5. P. Váňa, J. Sláma and J. Faigl. The Dubins Traveling Salesman Problem with Neighborhoods in the Three-Dimensional Space. // 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2018, pp. 374-379.
6. Yong-feng Li, Jing-ping Shi, Wei Jiang, Wei-guo Zhang, Yong-xi Lyu. Autonomous maneuver decision-making for a UCAV in short-range aerial combat based on an MS-DDQN algorithm. // Defence Technology. 2021.
7. Timothy P. Lillicrap, Jonathan J. Hunt, Alexander Pritzel, Nicolas Heess, Tom Erez, Yuval Tassa, David Silver, Daan Wierstra. Continuous control with deep reinforcement learning. arXiv:1509.02971
8. Mnih, V., Kavukcuoglu, K., Silver, D. et al. Human-level control through deep reinforcement learning. Nature, 518, 529–533 (2015).

---

M.E. Buzikov, A.A.Galyaev, P.V. Lysenko, A.I. Medvedev, I.A. Nasonov (ICS RAS, Moscow). **Neural network approach to the problem of optimal interception by a Dubins machine**

The problem of optimal R-intercept according to the performance criterion of a Dubins machine of a moving object moving along a prescribed trajectory is considered. The problem is solved using deep learning techniques with reinforcement learning. The obtained R-intercept trajectories are compared with the analytical solution of the intercept problem.

Г.К. ТЕВЯШОВ

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТРАТЕГИЯ ГРУППОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ВИДА ВОЛЧЬЯ СТАЯ НАДВОДНЫМИ АППАРАТАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИНСПЕКТИРОВАНИЯ ВОДОЕМОВ

*В данной статье рассматривается решение задачи инспектирования окружающего надводного пространства с использованием группового управления мобильных надводных роботов лодочного типа. Указаны преимущества использования группового управления в задачах патрулирования. Описываются различные стратегии группового управления, такие как – децентрализованное, централизованное и гибридное (смешанное) управление. В результате анализа за основу предлагаемого была взята стратегия централизованного управления. Предлагаемая стратегия подразумевает, что все аппараты имеют возможность организовывать управление, но только в том случае, когда аппарат, с более мощным бортовым вычислителем, был выведен из строя. Были представлены аппараты для отработки данной стратегии управления. Таким образом, данная статья, по мнению автора, может послужить началом для дальнейшего изучения проблем и их решения группового управления, связанных с задачами мониторинга и инспектирования водоемов.*

**Введение.** В настоящее время использование мобильных роботов внедряется во многих сферах человеческой деятельности. Одним из крупных направлений является мониторинг и инспектирование окружающей обстановки. Воздушные роботы применяются, в частности, для облета сельскохозяйственных полей [1], наземные роботы проводят картографирование местности, по которой они двигаются. [2] Также и для инспектирования надводной обстановки используются надводные аппараты, например, контроль состояния опор мостов. [3] Данные типы задач могут быть решены гораздо быстрее по времени исполнения, используя группу мобильных роботов, работающих одновременно. Эффективнее применить групповое управление и для надводных аппаратов.

Предлагаемый доклад посвящен обзору и краткому анализу принципов группового управления и применения его в инспектировании надводной обстановки с использованием надводных роботизированных комплексов.

**Групповое управление.** Группой роботов принято называть группу мобильных роботов, действия которых скоординированы для достижения общей цели. Необходимое коллективное поведение возникает из совместных действий роботов между собой и окружающим пространством. Группа роботов может состоять из множества роботов одинакового типа, кроме того, известны примеры реализации коллектива роботов, состоящего из аппаратов разного типа и назначения, каждая из которых предназначена для решения своего класса задач. [4]

Предпочтительность использования групп роботов заключается в многих аспектах, например:

- больший радиус действия, чем у одного мобильного робота, достигаемый за счет рассредоточения аппаратов по всей поле деятельности;
- большая надежность для выполнения задачи, это объясняется тем, что при выводе из строя одного из аппаратов, его работу можно перераспределить на другого;
- возможность масштабирования системы за счет ввода добавления новых аппаратов.

**Стратегии управления коллективом роботов.** Результативность применения группового управления роботов во многом зависит от выбранной стратегии управления.

**Децентрализованное управление.** При таком управлении каждый из роботов группы обладает своим индивидуальным устройством управления, а общая координация действия всех роботов группы при выполнении общей задачи происходит путем их совместного взаимодействия, используя определенный канал связи. [5]

**Централизованное управление.** При данном виде управления в функции общего устройства управления входит согласование работы индивидуальных устройств управления для организа-

ции требуемого взаимодействия отдельных роботов друг. При выходе из строя такого центрального устройства будет нарушена работа всех роботов. [6]

**Смешанное (гибридное) управление.** При таком управлении вся система разделена на подгруппы роботов, к каждой из которых привязан свой центр управления. Эта система используется при большом наборе роботов в группе и совмещает в себе преимущества и недостатки централизованных и децентрализованных систем.

**Методы исследования.** Для решения задач инспектирования водоемов предлагается новую стратегию управления. В природном мире большое количество примеров коллективного поведения, как например муравьиный и пчелиный улей, которые адаптируют для использования в робототехнических системах. Автором предлагается использовать стратегию управления типа волчья стая. Смысл заключается в том, что система представляет изначально собой централизованное управление. Но существенным отличием будет являться то, что при выходе из строя центрального аппарата главенствующую роль по организации движения берет на себя второй по вычислительной мощности аппарат. Функции организации и контроля будут находиться в неактивном режиме, до тех пор, пока эти функции не станут необходимыми. Таким образом, такая стратегия решает главную проблему централизованного управления: в ситуации отказа центрального звена прекращается выполнения всей миссии. Также в качестве резерва, в ситуации выхода из строя ведущего устройства, его функции можно перенаправить стационарному ПК, находящимся у оператора, например, на берегу. На рис. 1 представлены надводные аппараты лодочного типа, которые используются для работы. Аппарат по середине предполагается использовать в качестве начального центрального управляющего звена, на котором установлено самый мощный бортовой вычислитель, и который является ведущим с возможностью постановки задач группе меньших роботов. Аппараты по бокам с более слабыми бортовыми вычислителями, малым количеством сенсоров, которые предназначены для выполнения локальных заданий. Группа мобильных роботов с таким разделением будет очень гибким и простым инструментом для решения большинства задач разведки, патрулирования, наблюдения и мониторинга окружающего пространства.



Рис. 1. Централизованная группа надводных аппаратов лодочного типа

**Заключение.** Групповая робототехника на сегодняшний день является одним из ключевых направлений развития робототехнических систем. Это объясняется тем, что для некоторых классов задач (таких, например, как мониторинг, инспектирование, патрулирование) применение коллектива из более простых роботов гораздо эффективнее по сравнению с применением одного массивного многоцелевого аппарата. В качестве начальной точки дальнейших исследований была выбрана централизованная стратегия управления группой надводных аппаратов, это обосновано относительно простой реализацией и в то же время очень эффективной стратегией управления.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Tevyashov G.K., Mamchenko M.V., Migachev A.N., Galin R.R., Kulagin K.A., Trefilov P.M., Anisimov R.O., Goloburdin N.V. Algorithm for Multi-drone Path Planning and Coverage of Agricultural Fields / Agriculture Digitalization and Organic Production. St. Petersburg, Russia: Springer Singapore, 2021. С. 299-310.
2. Михайлов Б. Б., Назарова А. В., Ющенко А. С. "Автономные мобильные роботы - навигация и управление" Известия Южного федерального университета. Технические науки, № 2 (175), 2016, с. 48-67.
3. Абросимов В. К., Мочалкин А. Н., Татаренко Е. И. Морской роботизированный комплекс для решения задач ситуационной осведомленности в акваториях // Экстремальная робототехника. 2018. Т. 1. № 1. С. 509–512.
4. Боровик В. С., Гуцул В. И., Клестов С. А. Коллективы интеллектуальных роботов. Сферы применения /; под ред. В. И. Сырямкина ; Нац. исслед. Том. гос. ун-т. - Томск: STT, 2018
5. Каляев, А. И., Каляев И. А. Метод децентрализованного управления группой роботов при выполнении потока заданий // Робототехника и техническая кибернетика. – 2015. – № 1(6). – С. 26-35
6. Курочкин С.Ю., Тачков А.А. Методы управления групповым движением мобильных роботов (обзор). Мехатроника, автоматизация, управление. 2021;22(6):304-312

---

G.K. Tevyashov (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia). **Group Control of Surface Vehicles for Solving Problems of Monitoring and Inspection of Water Bodies**

This article solves the problem of inspecting the surrounding surface space using group control of mobile boat-type surface robots. The advantages of using group management in the interests of patrolling are indicated. Various group management strategies are described, such as decentralized, distributed and hybrid (mixed) management. As a result of the analysis, it is assumed that an analytical control system was taken. The proposed strategy makes it possible to organize control, but only in the case when the apparatus, with more than an enlarged onboard computer, was taken out of formation. Apparatus was used to work out this strategic management. Thus, the search for an article, according to the author, can begin to study the problems and their group management applicable to the tasks of monitoring and inspecting water bodies.

А.А. ТОЛСТИХИН, С.А. УЛЬЯНОВ

(Институт динамики систем и теории управления им. Матросова СО РАН, г. Иркутск)

**СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ГРУППОЙ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ ПРИ ОБСЛЕДОВАНИИ ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ**

*Задача обследования поля концентрации все больше привлекает внимание отечественных и зарубежных исследователей благодаря как своему теоретическому интересу, так и приложениям, к которым можно отнести поиск источников загрязнения, оконтуривание физического поля и отслеживание динамики биологических популяций. С целью сокращения финансовых и временных затрат, а также повышения эффективности решения задачи обследования в настоящий момент общепринятой практикой становится использование группы мобильных роботов. В работе предлагается стратегия управления группой мобильных роботов, построенная на основе градиентного поиска, метода потенциальных полей и механизмов сегрегации, которая обеспечивает локализацию и долгосрочный мониторинг движущихся источников поля. Также приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих качество предложенной стратегии.*

**Введение.** В настоящее время наблюдается значительный рост интереса к задачам обследования полей концентрации различной природы [1]. Необходимость решения таких задач возникает, например, при поиске нарушений целостности трубопровода под водой или источника экологического загрязнения, исследовании магнитных полей и отслеживании динамики биологических популяций. В зависимости от цели обследования эти задачи условно разделяют на три класса: картографирование [2], определение фронта и границ поля [3], а также поиск и локализация его источников [4]. В докладе рассматривается именно последний класс задач, как представляющий наибольший интерес, в первую очередь, благодаря большому числу практических применений.

В последнее время становится общепринятой практикой использование группировок роботов при решении задач обследования полей концентрации. Они позволяют существенно сократить финансовые и временные затраты на проведение работ, улучшить качество обследования, а также исключить риск для жизни человека при работе в опасных средах. Вместе с тем, многие вопросы, связанные с координацией действий и совместным управлением роботов при обследовании поля концентрации, остаются актуальными и по сей день. В работе предлагается стратегия управления группой мобильных роботов, построенная на основе градиентного поиска, метода потенциальных полей и механизмов сегрегации, которая обеспечивает поиск, локализацию и долгосрочный мониторинг движущихся источников поля.

**Стратегия управления кластеризованной группой.** Пусть скалярное нестационарное поле концентрации представляется в виде функции

$$f(t, q): T \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^p$  – область поиска,  $p$  – размерность области поиска (в реальных задачах  $p = 2$  или  $p = 3$ ),  $T = [0, \infty)$  – время обследования. Источниками поля будем считать точки  $q^e(t) \in L$  (множество источников), в которых  $f(t, q)$  принимает локально максимальные значения. В работе рассматривается случай, когда источники способны перемещаться по области поиска по некоторым заранее неизвестным для роботов законам, что делает поле концентрации нестационарным. Для того чтобы задача имела смысл, введем ограничение на перемещение источников:

$$\forall t_1, t_2 \in T, q^e \in L: \|q^e(t_1) - q^e(t_2)\| < v|t_2 - t_1|,$$

где  $v$  – некоторый положительный параметр, характеризующий максимальную скорость движения роботов. Кроме того, будем считать, что

$$\forall t \in T: n_e(t) \ll n,$$

где  $n$  – количество роботов в поисковой группе, а  $n_e(t)$  – количество источников.

Примерами полей концентрации, описываемых функцией  $f(t, q)$ , являются поле солёности, распределение некоторой популяции биологических организмов или такие явления, как термоклины и апвеллинг.

Пусть имеется множество  $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$  мобильных роботов, движение которых описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_i, \quad i \in \Gamma,$$

где  $q_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $v_i \in \mathbb{R}^p$  и  $u_i \in \mathbb{R}^p$  – соответственно, положение, скорость и управление  $i$ -го робота. При этом будем считать, что множество роботов  $\Gamma$  разбито на  $m$  непересекающихся кластеров:

$$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\} \forall j, k: j \neq k \rightarrow \tau_j \cap \tau_k = \emptyset.$$

Предполагается, что разбиение  $\tau$  сбалансировано, т. е.  $\forall j, k: |\tau_j| \approx |\tau_k|$ , а состав кластеров не изменяется в процессе решения задачи. Естественно считать, что каждый робот может измерять значение поля только в точке, в которой он находится.

Задачу поиска и мониторинга источников сформулируем в виде задачи оптимизации

$$\max_{j=1, n_e} \min_{i \in \Gamma} \|q_i(t) - q_j^e(t)\| \rightarrow \min. \quad (1)$$

Децентрализованное управление группой будем строить с применением метода искусственных потенциальных полей [5]. Определим три силы, действующие на роботов: кооперирующую  $F_i^c$ , градиентную  $F_i^g$  и сегрегирующую  $F_i^s$ .

**Кооперирующая сила.** Данная сила обеспечивает стайный характер поведения роботов. В частности, она отвечает за избегание столкновений и центрирование роботов кластера. Используя модификацию потенциала притягивающего поля из [5], построим ее в виде

$$F_i^c = -\sum_{j \in \tau_k} \left( \nabla_{q_i} U_{ij}^c(\|q_{ij}\|) \right), \quad i \in \tau_k, \\ U_{ij}^c(\|q_{ij}\|) = \alpha \left( \frac{1}{2} (\|q_{ij}\| - d_{ij}^A)^2 + \beta \ln \|q_{ij}\| + \beta \frac{d_{ij}^A}{\|q_{ij}\|} \right),$$

где  $\nabla_{q_i}$  обозначает градиент относительно компонент вектора  $q_i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  – некоторые положительные управляющие параметры,  $d_{ij}^A > 0$  определяет желаемое расстояние между агентами,  $\|q_{ij}\|$  – евклидова норма вектора  $q_{ij} = q_i - q_j$ .

Для правильного функционирования подхода достаточно, чтобы кластер состоял как минимум из трех роботов. В этом случае при отсутствии внешних возмущений группа построится в виде правильного треугольника. При большем количестве роботов существует множество локально стационарных формаций, достижимых под воздействием остальных сил. Однако, в ходе тестов было выявлено, что увеличение размера кластеров в лучшем случае не оказывает влияния на процесс решения задачи, а в худшем – замедляет поиск за счет увеличения количества связей между роботами и, как следствие, объема вычислений.

**Градиентная сила.** Как следует из названия, с ее помощью обеспечивается движение робота по оценке градиента поля, вычисленного на основе сравнения собственного замера со значениями поля других роботов того же кластера, полученными в тот же момент времени. Благодаря этому достигается стягивание роботов кластера к одному из источников поля и согласование их скоростей. Градиентная сила определяется следующим образом:

$$F_i^g = -\sum_{j \in \tau_k} \left( \frac{q_{ij}(s_i - s_j)}{\|q_{ij}\|} \right), \quad i \in \tau_k,$$

где  $s_j, s_i$  – замеры поля концентрации, произведенные роботами в текущий момент времени.

**Сегрегирующая сила.** Определяет взаимодействие между роботами, принадлежащим разным кластерам. Она вводится в качестве механизма глобального поиска. Каждый кластер, учитывая биологическую ориентированность всей стратегии, представляется обособленным организмом, отталкивающим других особей в случае достижения по сравнению с ними более выгодных условий (замера поля концентрации). Такое поведение обеспечивается функцией

$$F_i^s = -\sum_{j \notin \tau_k} \left( \nabla_{q_i} U_{ij}^s(\|q_{ij}\|) \right), \quad i \in \tau_k,$$

$$U_{ij}^s(\|q_{ij}\|) = \begin{cases} 0, & \text{при } (\|q_{ij}\| > d_{ij}^B) \vee (s_i > s_j), \\ \alpha \left( \frac{1}{2} (\|q_{ij}\| - d_{ij}^B)^2 + \beta \ln \|q_{ij}\| + \beta \frac{d_{ij}^B}{\|q_{ij}\|} \right), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $d_{ij}^B \gg d_{ij}^A$  – минимальное желаемое расстояние между кластерами.

При этом, для отталкиваемого кластера существуют два варианта развития событий:

1. Удаляясь от отталкивающего кластера может быть обнаружен другой источник, после чего, под действием градиентной силы, роботы начнут с ним сближение.
2. Удалившись на расстояние, приблизительно равное  $d_{ij}^B$ , градиентная и сегрегирующая силы окажутся равны по модулю, но разнонаправленны. В таком случае, кластеры будут перемешаться, сохраняя данную дистанцию. Длительное нахождение отталкиваемого кластера в таком состоянии сигнализирует о неправильном подборе значения  $d_{ij}^B$  и необходимости его увеличения. Помимо этого, данная ситуация может быть достигнута, если каждый источник отслеживается каким-либо кластером (проводится его мониторинг), а  $n_e(t) < |\tau|$ .

Учитывая вышесказанное, управление каждого робота формируется следующим образом:

$$u_i = c_1 F_i^c + c_2 F_i^g + c_3 F_i^s,$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – некоторые положительные коэффициенты, определяющие поведение группы.

**Проведение испытаний.** Для оценки качества работы предложенной стратегии управления была проведена серия тестов, оценивающих изменение метрики  $\max_{j=1, \dots, n_e} \min_{i \in \Gamma} \|q_i(t) - q_j^e(t)\|$  из (1) при обследовании различных моделей поля концентрации. Пример одной из моделей, использованных в испытаниях, представлен на рис. 1. Для каждой модели было произведено по 20 независимых запусков с участием 5 кластеров по 3 робота в каждом. Стартовые координаты генерировались случайным образом при производстве нового теста.

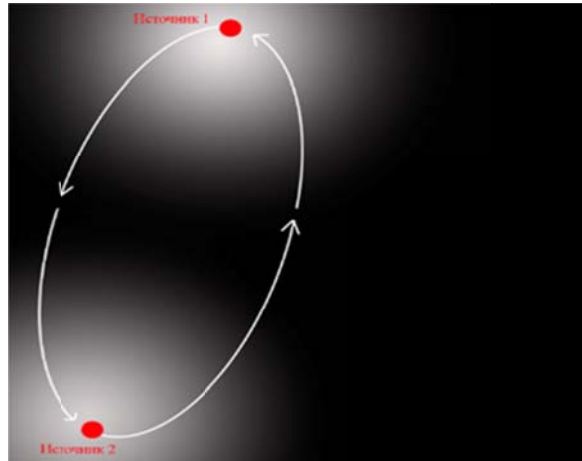


Рис. 1. Пример модели поля концентрации

На графике (рис. 2) представлено изменение значения метрики для трех выявленных характерных для данной модели случаев. Первый график характеризует наиболее часто встречающийся случай, при котором оба источника были обнаружены за относительно короткое время ( $\approx 150$  модельных секунд), после чего наблюдался их стабильный мониторинг с незначительными колебаниями метрики, не превышающими  $d_{ij}^A$ . На втором графике представлен один из запусков, при котором все кластеры были созданы далеко от источников, так что градиентная сила, действующая на роботов, оказывалась равна нулю. Однако, под действием сегрегирующей силы некоторым кластерам удавалось выбраться из данной подобласти, хоть и за значительно большее время. Наконец, третий график показывает случай, когда генерация координат роботов произошла таким образом, что все три силы каждого робота в определенный момент

обратились в ноль. Соответственно, колебание значений метрики определяется только собственным движением источников. Этот случай характеризует ситуацию, когда имеющегося количества роботов просто не хватает для гарантированной локализации источников.

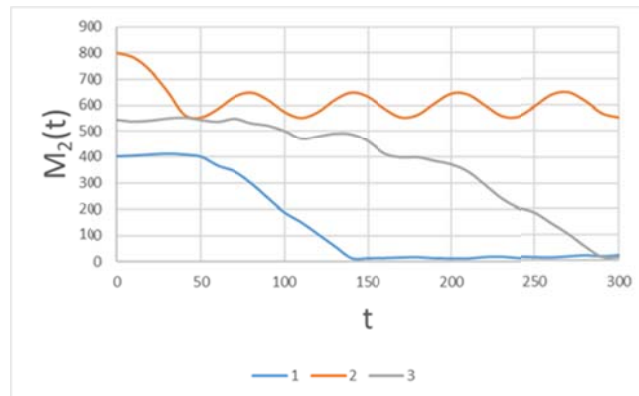


Рис. 2. Пример изменения значений метрики качества

**Заключение.** Для большинства проведенных тестов, включая полунатурные испытания с использованием неголономных колесных роботов, предложенная стратегия продемонстрировала высокую скорость обнаружения источников и их стабильный мониторинг в течение любого заданного промежутка времени. Однако, существуют ситуации, в которых остро сказывается отсутствие в стратегии каких-либо механизмов глобального поиска. Для устранения этой проблемы предполагается использовать ранее предложенный подход [6], хорошо зарекомендовавший себя с этой точки зрения.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-07-00397.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hwang J., Bose N., Fan S. AUV Adaptive Sampling Methods. Applied Sciences. 2019. Vol. 9. P. 1 – 30.
2. Zhang Y., Bellingham J.G. Autonomous Four—Dimensional Mapping and Tracking of a Coastal Upwelling Front by an Autonomous Underwater Vehicle. J. Field Robot. 2016. Vol. 33. P. 67–81.
3. Zhang Y., Godin M.A. Using an autonomous underwater vehicle to track a coastal upwelling front. IEEE J. Ocean. Eng. 2012. Vol. 37. P. 338–347.
4. Pang S., Farrell J.A. Chemical plume source localization. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B. 2006. Vol. 36. P.1068–1080.
5. Santos V. G., Chaimowicz L. Cohesion and segregation in swarm navigation. Robotica. 2014. Vol. 32. P.209–223.
6. Tolstikhin A., Bychkov I. Swarm optimization approach to non-stationary physical field survey problem using a group of autonomous underwater vehicles. Proc. of the 2nd Intern. Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments (Irkutsk, July 6–7, 2020). 2020. Vol. 2638. P. 277–288.

A.A. Tolstikhin, S.A. Ulianov (Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk). **The concentration field survey control strategy for a decentralized group of mobile robots**

The task of surveying the concentration field increasingly attracts the attention of domestic and foreign researchers due to both its theoretical interest and applications, which can include the search for pollution sources, contouring of the physical field and tracking the dynamics of biological populations. In order to reduce financial and time costs, as well as to increase the efficiency of solving the problem of survey, it is now common practice to use a group of mobile robots. The paper proposes a control strategy for a group of mobile robots, based on gradient search, potential fields method and segregation mechanisms, which provides localization and long-term monitoring of moving field sources. The results of computational experiments demonstrating the quality of the proposed strategy are also provided.

А. М. ПОПОВ, В. Ю. ЕМЕЛЬЯНОВ, Д. Г. КОСТРЫГИН, А. А. ШЕВЧИК  
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург)

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

*Рассматривается задача разработки алгоритма управления беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) при физических ограничениях на управления. Показано, что для решения данной задачи может быть применен метод SDRE (State Dependent Riccati Equations) с ограничениями на фазовые координаты. Нелинейная модель БПЛА преобразуется к эквивалентной линейной системе методами теории плоских систем.*

**Постановка проблемы.** Для описания движения БПЛА в настоящей работе используется широко распространенная динамическая модель с точечной массой [1]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos(\gamma) \cos(\psi), \\ \dot{y} &= V \cos(\gamma) \sin(\psi), \\ \dot{z} &= V \sin(\gamma), \\ \dot{V} &= \frac{Ft}{m} - \frac{Fd}{m} - g \sin(\gamma), \\ \dot{\psi} &= \frac{Fl \sin(\phi)}{Vm \cos(\gamma)}, \\ \dot{\gamma} &= \frac{Fl \cos(\phi)}{Vm} - \frac{g \cos(\gamma)}{V},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\gamma$  – угол наклона траектории,  $\psi$  – угол курса,  $V$  – скорость,  $Fd$  – сила лобового сопротивления,  $m$  – масса аппарата. В дальнейшем будем считать силу лобового сопротивления и массу постоянными. Сигналы управления:  $Ft$  – сила тяги двигателя,  $Fl$  – подъемная сила от несущих поверхностей и  $\phi$  – угол крена. Они имеют физические ограничения:

$$Fl_{\min} \leq Fl \leq Fl_{\max},\tag{2a}$$

$$Ft_{\min} \leq Ft \leq Ft_{\max},\tag{2b}$$

где  $Fl_{\min} = const$ ,  $Fl_{\max} = const$ ,  $Ft_{\min} = const > 0$ ,  $Ft_{\max} = const > 0$ .

Можно показать, что для системы (1) выходы  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  являются плоскими [2]. Тогда, методом линеаризации динамической обратной связью, можно получить эквивалентную линейную систему с виртуальными управлениями:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u_1, \\ \ddot{y} &= u_2, \\ \ddot{z} &= u_3.\end{aligned}\tag{3}$$

Обратные преобразования управления при линеаризации обратной связью позволяют получить реальные сигналы в виде:

$$\begin{aligned}Ft &= Fd + m(\dot{x}u_1 + \dot{y}u_2 + \dot{z}(g + u_3))/V, \\ Fl &= m((g + u_3)\cos(\gamma) - (u_1 \cos(\psi) + u_2 \sin(\psi))\sin(\gamma)/\cos(\phi)), \\ \phi &= \arctan\left(\frac{u_2 \cos(\psi) - u_1 \sin(\psi)}{(g + u_3)\cos(\gamma) - (u_1 \cos(\psi) + u_2 \sin(\psi))\sin(\gamma)}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

Допустимая область, в фазовом пространстве уравнений БПЛА, в которой определены полученные выражения (4) для системы (1), задается неравенствами:

$$V > 0, \quad |\gamma| < \pi/2, \quad |\phi| < \pi/2. \quad (5)$$

Далее, если задана задача слежения в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |z(t) - z_d(t)| = 0, \quad (6)$$

где  $x_d(t)$ ,  $y_d(t)$ ,  $z_d(t)$  – заданные функции, можно тем или иным способом найти виртуальные сигналы управления  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , при которых выполняется цель управления (6). Используя найденные  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , по выражениям (4), вычисляются реальные сигналы управления.

Как показывает моделирование, ограничения (2а) обычно легко реализуются для синтезированных управлений  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , путем ввода элементов насыщения. А вот ограничение вида (2b), с элементами насыщения, может приводить к неустойчивости системы. Поэтому, в более общей постановке, возникает задача нахождения управлений  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  для ограниченной области фазового пространства. Система (3) должна быть асимптотически устойчива при ограничениях вида:

$$Ft_{\min} - Fd - m(\dot{x}u_x + \dot{y}u_y + \dot{z}(g + u_z))/V \leq 0, \quad (7a)$$

$$-Ft_{\max} + Fd + m(\dot{x}u_x + \dot{y}u_y + \dot{z}(g + u_z))/V \leq 0, \quad (7b)$$

где  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ .

Наиболее критичным является первое неравенство. Тогда проблема может быть сформулирована следующим образом: для системы (3) надо найти управления  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , так, чтобы была выполнена цель управления (6) при ограничениях (7а).

**Метод SDRE с ограничениями на фазовые координаты.** Известный метод синтеза управления на основе метода SDRE [3, 4] имеет модификацию, позволяющую найти управление при нелинейных ограничениях на фазовые координаты [5, 6]. Рассмотрим аффинную по входным воздействиям нелинейную систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор переменных состояния,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  – вектор сигналов управления и

$$\chi = \{ \mathbf{x} : \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{h}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n) \} \quad (9)$$

– множество допустимых состояний системы. Граница  $\chi$  определяется следующим образом:

$$\partial\chi = \{ \mathbf{x} : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{h}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n) \} \quad (10)$$

$$\mathbf{z} = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{z} = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0, \quad (12)$$

где  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$  – фиктивный выход системы (8),  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) \triangleq \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \triangleq \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$ .

Требуется, чтобы замкнутая система была устойчива и ни одна из возможных ее траекторий не пересекала  $\partial\chi$ . Последнее эквивалентно:  $\mathbf{x} \in \chi$  в любой момент времени.

Таким образом, задача сводится к поиску управления:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad (13)$$

полностью удовлетворяющего  $\mathbf{x} \in \chi$ . В общем случае искомое управление может быть вычислено в ходе решения задачи минимизации функционала вида:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + J_\chi(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (14)$$

Второе слагаемое функционала представляет собой квадратичную форму:

$$J_\chi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{z} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_\chi(\mathbf{x}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{S}_\chi(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_\chi(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt, \quad (15)$$

где  $\mathbf{W}(\mathbf{x}) > 0$  – диагональная весовая матрица размерности  $p \times p$  такая, что ее  $i$ -ый элемент увеличивается при приближении  $\mathbf{x}$  к границе  $i$ -го ограничения и уменьшается в противном случае, а также:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_\chi(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{R}_\chi(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{D}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{S}_\chi(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (16)$$

Первое слагаемое (14) является функционалом, не учитывающим ограничения на управляющие сигналы, призванным избежать сингулярности выражения, например в случае необратимости  $\mathbf{R}_\chi(\mathbf{x})$ :

$$J_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt, \quad (17)$$

где  $\mathbf{Q}_0(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$  – зависящие от состояния весовые матрицы.

Таким образом, функционал (14) имеет вид:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt, \quad (18)$$

где:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{S}_\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (19)$$

Искомая матрица коэффициентов управления, зависящая от состояния, минимизирующая (19) равна:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{x})] = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_\chi(\mathbf{x}), \quad (20)$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) > 0$  удовлетворяет системе матричных уравнений Риккати для системы с коэффициентами, зависящими от состояния:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (21)$$

где:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{S}(\mathbf{x})^T, \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{S}(\mathbf{x})^T. \end{cases} \quad (22)$$

**Выбор весовой матрицы.** Предлагается выбирать  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  непосредственно на основании расстояния от  $\mathbf{x}$  к границе  $\partial\chi$ . Рассмотрим следующую функцию:



$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\|h_i(\mathbf{x})\|_2 + \varepsilon_i)^{2N_i}}, i = 1, \dots, p, \quad (23)$$

где  $N_i \in \mathbb{Z}$ ,  $N_i > 1$  и  $0 < \varepsilon_i < 1$ . Тогда весовую функцию можно задать следующим образом:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_p(\mathbf{x})). \quad (24)$$

Когда  $\mathbf{x} \rightarrow \partial\mathcal{X}$ ,  $h_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  и поэтому  $\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_i^{2N_i}}$ .  $N_i$  и  $\varepsilon_i$  выступают в качестве настраиваемых параметров, которые позволяют увеличить  $\phi_i(\mathbf{x})$  при приближении вектора состояния  $\mathbf{x}$  к границе  $\partial\mathcal{X}$ .

**Применение метода SDRE с ограничениями на фазовые координаты для БПЛА.** Введем дополнительные переменные в исследуемую систему (3) с целью избавиться от виртуальных управлений в ограничениях (7а):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u_{11}, \\ \ddot{y} &= u_{22}, \\ \ddot{z} &= u_{33}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\ddot{x} = u_1$ ,  $\ddot{y} = u_2$ ,  $\ddot{z} = u_3$ , а  $u_{11}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{33}$  – новые виртуальные управления.

Тогда ограничения (7а) примут вид:

$$Ft_{\min} - Fd - m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}(g + \ddot{z}))/V \leq 0. \quad (26)$$

В данном виде к системе (25)-(26) можно применить метод SDRE с ограничениями на фазовые координаты. В нашем случае ограничение одно, поэтому  $p = 1$ . Фазовый вектор  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}]^T$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = Ft_{\min} - Fd - m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}(g + \ddot{z}))/V. \quad (27)$$

Для системы (25) и (27) по выражениям (12) получаем вектора  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (g\dot{x}\dot{z} - \dot{x}\dot{z}^2 - \dot{x}\dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}\dot{z} + \dot{x}\dot{z}\dot{z}) \dots \\ 0 & 0 & (g\dot{y}\dot{z} - \dot{y}\dot{z}^2 - \dot{x}^2\dot{y} + \dot{x}\dot{x}\dot{y} + \dot{y}\dot{z}\dot{z}) \dots \\ 0 & 0 & -(g\dot{x}^2 + g\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z} + \dot{y}^2\dot{z} - \dot{x}\dot{x}\dot{z} - \dot{y}\dot{y}\dot{z}) \end{pmatrix} \frac{m}{V^3}, \quad (28)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x})^T = (-\dot{x} \quad -\dot{y} \quad -\dot{z}) \frac{m}{V}. \quad (29)$$

Далее эти вектора используются для задания функционала (18) и решения задачи методом SDRE. Матрица  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  задается выражениями (23) и (24).

Для задачи слежения (6) нужно переписать систему (25), (27) в отклонениях:  $e_x(t) = x(t) - x_d(t)$ ,  $e_y(t) = y(t) - y_d(t)$ ,  $e_z(t) = z(t) - z_d(t)$ .

**Заключение.** Для управления БПЛА в настоящей работе разработан метод, основанный на решении уравнения Риккати для квазилинейной системы с фазовыми ограничениями. Данные ограничения определяются физически допустимой силой тяги двигателя БПЛА. Для проверки эффективности было проведено компьютерное моделирование. Результаты показывают, что предложенный алгоритм позволяет решить задачу управления при сохранении значений силы тяги в допустимом диапазоне.

*Работа выполнена в организации БГТУ «ВОЕНМЕХ» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (доп. соглашение от 09.06.2020 No 075-03-2020- 045/2 на выполнение базовой части государственного задания «Разработка фундаментальных основ создания и управления группировками высокоскоростных беспилотных аппаратов космического и воздушного базирования и группами робототехнических комплексов наземного базирования»).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Beard and T. W. McLain, Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice (Princeton University Press, USA, 2012).
2. J. Levine, Analysis and Control of Nonlinear Systems A Flatness-based Approach (Springer Berlin Heidelberg, 2009).
3. J. Cloutier, C. Souza, and C. Mracek, “Nonlinear regulation and nonlinear  $H_\infty$  control via the State-Dependent Riccati Equation technique: Part1, theory,” (1996).
4. J. Cloutier, “State-Dependent Riccati Equation techniques: an overview,” in Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041), Vol. 2 (1997) pp. 932–936 vol.2.
5. J. Cloutier and J. Cockburn, “The state-dependent nonlinear regulator with state constraints,” in Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148), Vol. 1 (2001) pp. 390–395 vol.1.
6. T. Cimen, “State Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey,” Plenary Session of 17th IFAC World Congress 17 (2008), 10.3182/20080706-5-KR-1001.00635.

---

Alexander M. Popov, Valentin Yu. Emelyanov, Daniil G. Kostygin, and Anatoly A. Shevchik (BSTU «ВОЕНМЕХ» named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, Russian Federation). **Development of control algorithm for unmanned aerial vehicle, taking into account boundedness of control action**

We consider the problem of developing an unmanned aerial vehicle (UAV) control algorithm under physical control constraints. It is shown that the SDRE (State Dependent Riccati Equations) method with phase coordinate constraints can be applied to solve this problem. The nonlinear UAV model is converted to an equivalent linear system by the methods of flat systems theory.

В.Ф. ФИЛАРЕТОВ

(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,  
Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток)

А.А. КАЦУРИН

(Дальневосточный федеральный университет,  
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток)

## СОГЛАСОВАННАЯ РАБОТА ДВУХ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ В СЛОЖНОЙ ОБСТАНОВКЕ

*В работе решена задача управления манипулятором, установленным на мобильном роботе (МР), работающем в стесненных условиях, когда объекты работ (ОР) не наблюдаются его системой технического зрения (СТЗ). При этом координаты ОР определяются с помощью СТЗ вспомогательного МР, а затем передаются основному МР. Для устранения возникающих погрешностей с помощью СТЗ вспомогательного МР дополнительно определяются координаты рабочего органа манипулятора. Результаты выполненных экспериментов подтвердили работоспособность и эффективность предложенного подхода к согласованной автоматической работе двух МР.*

**Введение.** В современных условиях применение мобильной робототехники постоянно расширяется. Одним из перспективных направлений является использование мобильных роботов (МР) для выполнения различных операций в стесненных условиях заранее неизвестной рабочей среды с помощью манипуляторов, устанавливаемых на МР [1-4]. Сейчас эти работы обычно выполняются в полуавтоматическом режиме оператором, который ориентируется по изображению рабочего пространства на экране телемонитора, полученному от системы технического зрения (СТЗ). При этом анализ показывает, что даже сложные манипуляционные операции вполне могут выполняться МР и в полностью автоматическом режиме.

В процессе движения нескольких МР в стесненных условиях рабочей среды возможны ситуации, когда СТЗ МР, оснащенных манипуляторами, не обеспечивают требуемый обзор рабочего пространства и объекты работ (ОР) оказываются вне зоны видимости их СТЗ. В этих случаях пространственные расположения и ориентации, указанных ОР целесообразно определять с помощью СТЗ более маневренных вспомогательных МР и затем передавать полученную информацию в связанные системы координат (СК) более громоздких манипуляционных роботов. При этом для получения лучшего обзора рабочего пространства и ОР используемые СТЗ могут изменять пространственные ориентации своих оптических осей [5-8]. Однако при работе в автоматическом режиме такое взаимодействие роботов будет затруднено, поскольку при передаче информации об ОР от вспомогательных к манипуляционным МР неизменно будут появляться погрешности, обусловленные как особенностями функционирования навигационных систем этих МР, так и их СТЗ.

Таким образом, по-прежнему актуальной остается задача создания новых подходов, методов и алгоритмов согласованного управления несколькими МР для автоматического выполнения точных манипуляционных операций. Особенно в стесненных условиях произвольной рабочей среды.

**Постановка задачи.** В работе поставлена задача разработки нового подхода, обеспечивающего автоматическую согласованную работу двух МР, один из которых (основной) оборудован манипулятором и СТЗ, а второй – вспомогательный – только СТЗ. При этом обеспечивается точное автоматическое выполнение сложных манипуляционных операций с различными ОР, когда эти объекты находятся вне зоны видимости СТЗ манипуляционного МР. Пространственные расположения и ориентации ОР могут определяться только СТЗ вспомогательного робота и затем должны передаваться в связанную СК манипуляционного МР с неизбежными погрешностями, обусловленными ошибками работы навигационных систем и СТЗ обоих МР. При этом текущие координаты и пространственные ориентации базовых оснований обоих МР по углам крена, тангажа и рыскания, определяемые рельефами опорных поверхностей, в абсолютной СК принимаются произвольными.

**Описание согласованной работы двух мобильных роботов.** На рис. 1 показана обобщенная схема расположения двух МР 1 и 2 в рабочем пространстве. В качестве основного МР 1 в работе используется роботизированная мобильная платформа KUKA youBot на всенаправленных колесах, оснащенная пятиступенным манипулятором 3 с рабочим органом 4. Эта же платформа дополнительно оснащена СТЗ 5. На рис. 1 показана ситуация, когда СТЗ 5 не наблюдает ОР 7, находящийся за другим объектом. В этом случае более маневренный вспомогательный МР 2, оснащаемый своей СТЗ 6, оптическая ось которой может менять свою пространственную ориентацию, подходит к ОР 7 с удобного ракурса так, чтобы одновременно был виден этот объект и рабочий орган 4 манипулятора МР 1. МР 2 с помощью СТЗ 6 определяет их координаты в СК  $C_2$ . Эти координаты с помощью навигационной системы 9 МР 2, оборудованной гироскопами, из СК  $C_2$  переводятся в абсолютную систему координат (АСК)  $C_0$ , а из нее с помощью навигационной системы 8 МР 1, также содержащей гироскопы - в его СК  $C_1$ .

Так как координаты ОР 7 и рабочего органа 4 манипулятора МР 1 определяются СТЗ 6 и в дальнейшем передаются с примерно одинаковыми пространственными погрешностями, то появляется возможность уточнения реального расположения ОР 7 в СК  $C_1$ . Для этого используются всегда известные точные координаты рабочего органа 4 манипулятора 3 в этой СК. В результате появляется возможность обеспечения точной работы манипулятора с ОР 7 в автоматическом режиме, полностью ориентируясь только на исходную информацию, получаемую с помощью СТЗ 6 и затем передаваемую в СК  $C_1$  по каналам связи, даже если СТЗ 5 МР 1 совсем не видит этот ОР.

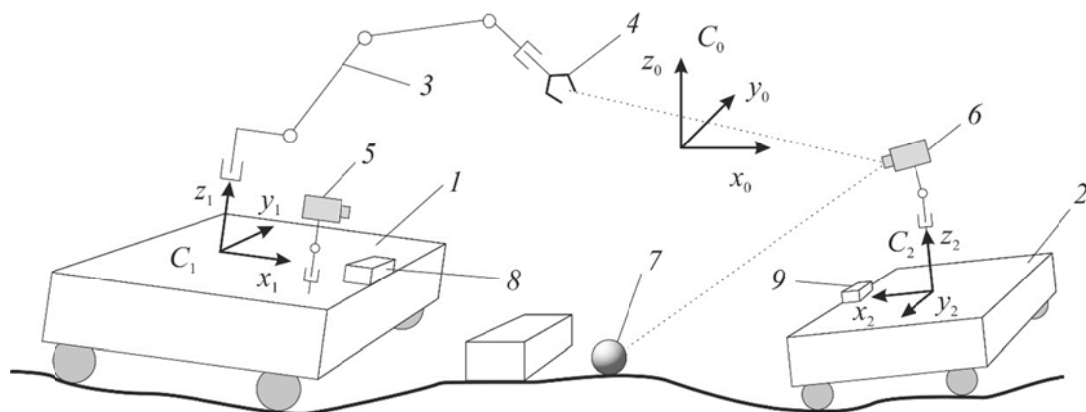


Рис. 1. Согласованная работа двух мобильных роботов

Для уточнения координат ОР 7 в СК  $C_1$  требуется сравнить координаты рабочего органа 4, определенные СТЗ 6 и переданные из СК  $C_2$  в СК  $C_1$ , с его более точными координатами в этой СК. Эти координаты определяются текущей конфигурацией манипулятора, которая формируется значениями всех его обобщенных координат, измеряемых встроенными в соответствующие степени подвижности манипулятора датчиками положения. В результате удастся определить пространственную погрешность (ошибку) передачи навигационной информации о расположении рабочего органа 4 из СК  $C_2$  в СК  $C_1$ . Вектор этой погрешности (ошибки) затем используется для корректировки и уточнения переданных ранее координат объекта 7 в СК  $C_1$ .

Описанные операции передачи координат объекта 7 и рабочего органа 4 из СК  $C_2$  в СК  $C_1$  выполняются одновременно. При этом положения оснований двух участвующих в работе МР остаются неподвижными. Поскольку гироскопы навигационных систем 8 и 9 обоих МР точно определяют текущие значения их углов крена, тангажа и рыскания в АСК, то выявленный вектор ошибки передачи координат рабочего органа 4 будет совпадать с вектором ошибки передачи координат ОР 7. Поэтому уточненные координаты этого объекта с учетом сформированного вектора ошибки будут достаточно точно определять реальное расположение ОР в СК  $C_1$ , и манипулятор 3 сможет обеспечить точное автоматическое выполнение заданных технологических операций с ОР 7, невидимым СТЗ 5. Это позволит значительно расширить функциональные возможности манипуляционных МР, которые с использованием малогабаритных вспомогательных МР смогут эффективно выполнять многие операции даже в сложной обстановке рабочей среды, содержащей препятствия.

Для реализации предложенного подхода к согласованной работе двух МР при автоматическом выполнении сложных манипуляционных операций был разработан алгоритм преобразований соответствующих координат при передаче всех навигационных данных, который позволяет не только успешно и точно определить, а затем и скомпенсировать погрешности, возникающие при определении пространственных координат ОР с помощью СТЗ, но и погрешности работы используемых навигационных систем, определяющих реальные расположения обоих МР в АСК  $C_0$  в процессе автономного выполнения многозвенным манипулятором конкретных технологических операций.

**Исследование работы системы.** Для проверки эффективности практической реализации, решенной выше задачи, были выполнены натурные эксперименты с оборудованием, показанным на рис. 2. На этом рисунке цифрой 1 обозначен основной манипулятор (Mitsubishi RV-2-FB), предназначенный для захвата и перемещения ОР, а цифрой 2 – вспомогательный (KUKA KR 6 R700 sixx), управляющий стереокамерой ZED, которая определяет координаты ОР. Эти координаты передаются сначала в СК манипулятора 2, а затем в СК манипулятора 1.

Манипуляторы жестко закреплены в плоскости рабочего стола, а их расположения в АСК были измерены с реальными погрешностями, соответствующими возможностям современных систем инерциальной навигации мобильных роботов [9] и навигации с ультракороткой базой. В качестве ОР использован цилиндр красного цвета.

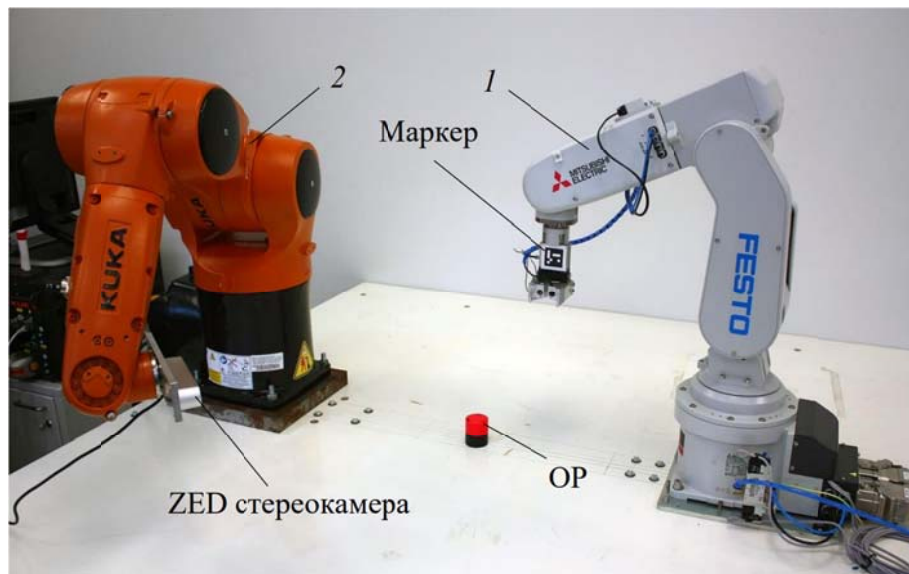


Рис. 2. Общий вид экспериментального комплекса

Для определения погрешности при передаче навигационной информации и последующей ее компенсации в эксперименте вместо характерной точки рабочего органа манипулятора 1 использовался более информативный специальный ArUco маркер, закрепленный на рабочем органе манипулятора 1 (рис. 2). Положение его центральной точки известно.

В начале эксперимента стереокамера манипулятора 2 была выведена в положение, где с ее помощью наблюдалась центральная точка ОР на его верхней крышке. Эта стереокамера определила координаты указанной точки в своей СК, которые далее были преобразованы в СК манипулятора 1. После решения обратной задачи кинематики для манипулятора 1 и определения конечных значений всех его обобщенных координат был выполнен пробный подход его рабочего органа к ОР. Однако из-за наличия погрешностей определения расположения ОР точно подойти и захватить его не удалось.

Для компенсации указанных погрешностей в определении точных координат ОР, с помощью ZED стереокамеры были определены координаты центральной точки ArUco маркера. Затем эти координаты были последовательно преобразованы сначала в СК манипулятора 2, а затем в СК манипулятора 1. Координаты расположения ОР на основе этой информации были

скорректированы, а далее было выполнено дополнительное решение обратной задачи кинематики для манипулятора *I*. После этого удалось точно подойти к ОР и захватить его.

**Заключение.** В работе предложен новый подход, обеспечивающий согласованное взаимодействие двух МР в автоматическом режиме при выполнении технологических операций с различными ОР в стесненных условиях рабочей среды. При этом требуемые операции выполняются с объектами, находящимися вне зоны видимости СТЗ основного манипуляционного МР, а координаты пространственного положения и ориентации этих объектов вначале формируются в СК малогабаритного и маневренного вспомогательного МР с помощью его СТЗ. Затем указанные координаты с неминуемыми погрешностями передаются в СК манипуляционного МР и корректируются (уточняются). Результаты экспериментальных исследований подтвердили работоспособность предложенного подхода. Его техническая реализация не вызывает принципиальных затруднений.

*Работа проводилась при поддержке гранта грант РНФ 22-29-01156*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Andreev V.P., Pryanichnikov V.E. Operation Environment of Mobile Robots with Supervision Control // Annals of DAAAM for 2011 & Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium. Vienna, Austria. 2011. Volume 22, No. 1. – pp. 0021-0022.
2. Cetin L., Baser O., Keskin O., Uyar E. Vision Based Control Algorithm for a Mobile Manipulator // Annals of DAAAM for 2011 & Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium. Vienna, Austria. 2011. Volume 22, No. 1. – pp. 0449-0450.
3. Changhwan C., Yongchil S., Seungho J., Seungho K. Tele-Operated Fuel Handling Machine Manipulation Robot for the Nuclear Power Plants // Proc. CD-ROM of the 6th Asian Control Conf. Bali, Indonesia. 2006. – pp. 983-987.
4. Lee D., Spong M.W. Passive bilateral control of teleoperators under constant time-delay // Proc. 16 IFAC World Congress. Prague, Czech Rep. 2005. File 03009.pdf (CD-ROM). – pp. 1-6.
5. Katsurin Alexey. System of Telecontrol by the Mobile Robot with Movable Camera // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 643. – pp. 9-14.
6. Филаретов В. Ф., Кацури А. А., Пугачев Ю.А. Метод полуавтоматического комбинированного управления манипулятором с помощью подвижной телекамеры // Мехатроника, автоматизация, управление. – № 2. – 2009. – С. 38-45.
7. Филаретов В. Ф., Кацури А. А. Метод полуавтоматического позиционного управления манипулятором с помощью телекамеры, изменяющей пространственную ориентацию своей оптической оси // Мехатроника, автоматизация, управление. – № 9. – 2008. – С. 15-22.
8. Филаретов В. Ф., Кацури А. А. Система телеуправления многозвенным манипулятором, установленным на мобильном роботе // Информационно-измерительные и управляющие системы. – № 12. – 2018. – С. 40-48.
9. Cook G., Zhang F. Mobile robots: Navigation, control and sensing, surface robots and AUVS. Wiley. 2020. pp. 1-329.

---

V.F. Filaretov (Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok), A.A. Katsurin (Far Eastern Federal University, Institute of Marine Technology Problems FEB RAS, Vladivostok). **Coordinated work of two mobile robots in a complex environment**

The paper solves the problem of control by manipulator based on a mobile robot (MR) operating in complex conditions when the objects of work (OW) are not observed by its vision system (VS). In this case, the coordinates of the OW are determined using the VS of the auxiliary MR, and then transmitted to the main MR. To eliminate the errors that occur, the coordinates of the manipulator's working tool are additionally determined using the VS of the auxiliary MR. The results of the performed experiments confirmed the operability and effectiveness of the proposed approach to the coordinated automatic operation of two MR.

Секция 3  
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ПРИРОДЫ

В. В. ЦЫГАНОВ  
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

**МЕХАНИЗМ ДИХОТОМИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПОЛИТИКИ САМООБУЧАЮЩИМСЯ  
ГРАЖДАНИНОМ**

*В условиях неопределенности, политик может манипулировать результатами своей деятельности, чтобы получить более высокие оценки граждан сегодня и в будущем. Такая нежелательная активность может привести к неиспользованию возможностей, в реализации которых заинтересованы граждане и общество в целом. Предложен механизм индивидуальной оценки политика гражданином, включающий процедуры машинного обучения дихотомии и формирования оценок политика. Найдены достаточные условия для синтеза такого механизма, при котором политик в полной мере использует имеющиеся возможности в интересах гражданина и общества. Функционирование предложенного механизма проиллюстрировано на примере оценки политики вакцинации против COVID-19 в Великобритании.*

**Введение.** Политика влияет на общество. Поэтому члены общества - граждане должны уметь адекватно оценивать эту политику, чтобы общество могло контролировать власть. Согласно концепции цифрового общества, для оценки политики может использоваться искусственный интеллект, прежде всего, машинное обучение [1-3]. В статье рассматривается механизм оценки политика на основе процедуры самообучения гражданина [4]. При этом необходимо учитывать активность политика, связанную с наличием у него собственных целей, не обязательно совпадающих с целями общества [5]. В условиях недостаточной информированности граждан, политик может прибегнуть к манипуляциям, чтобы получать более высокие оценки со стороны общества сегодня и в будущем. Такая нежелательная активность политика может привести к неиспользованию возможностей, в реализации которых заинтересованы граждане и общество в целом. Данная работа посвящена синтезу и построению механизма оценки гражданином политика, исключая такую активность.

**Механизм оценки гражданином политика.** Рассмотрим систему «Гражданин — Политик», в которой  $p_t$  — стационарная случайная величина, характеризующая возможности (потенциал) Политика в периоде  $t$ ,  $p_t \in A \subset R_+^1$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Политик узнает потенциал  $p_t$  в начале периода  $t$ , после чего выбирает свое состояние в этом периоде — показатель  $y_t$ , который не может превышать его потенциал:  $y_t \leq p_t$ . Этот показатель  $y_t$  становится известен Гражданину. Однако, в силу недостаточной информированности, Гражданину неизвестен потенциал  $p_t$ . Проблема состоит в синтезе механизма оценки Гражданином политика, при котором последний в полной мере использует свой потенциал:  $y_t = p_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Этот синтез проводится на множестве процедур дихотомической классификации Гражданином деятельности Политика, связанных с отнесением  $y_t$  к одной из двух областей  $A_1$  и  $A_2$ ,  $A_1 \cup A_2 = A$ .

**Процедура параметризации.** Неправильная дихотомическая классификация связана с потерями. Соответственно, для каждой неизвестной области  $A_1$  и  $A_2$ , введем функции потерь Гражданина  $L_1(c_t, p_t) = p_t - vc_t$ ,  $0 < v < 1$ ,  $L_2(c_t, p_t) = b(c_t - p_t)$ ,  $b > 0$ ,  $vc_t \leq p_t \leq c_t$ , где  $c_t$  — неизвестный параметр решающего правила при классификации в периоде  $t$ ,  $c_t > 0$ . Для настройки параметра  $c_t$  можно использовать алгоритм машинного самообучения [4], минимизирующий математическое ожидание этих потерь:

$$c_{t+1} = C(c_t, y_t) = \begin{cases} c_t + \gamma_t v, & \text{если } y_t < (b+v)c_t / (b+1) \\ c_t - \gamma_t d, & \text{если } y_t \geq (b+v)c_t / (b+1) \end{cases}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где  $C(c_t, y_t)$  — процедура параметризации для обучения дихотомической классификации.

**Процедура дихотомии.** В периоде  $t$  Гражданин рассчитывает оценку Политика:

$$e_t = E(c_t, y_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \geq n_t \\ 0, & \text{если } y_t < n_t \end{cases}, \quad n_t = c_t(b+v)/(b+1), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $E(c_t, y_t)$  – процедура дихотомической оценки;  $n_t$  – норма. Предполагается, что Гражданин поощряет Политика при оценке  $e_t = 1$  (например, отдает свой голос за него), или осуждает Политика при дихотомической оценке  $e_t = 0$  (не отдает свой голос за него). Таким образом, норма  $n_t$  – это нижняя граница показателя  $y_t$ , при котором Гражданин считает работу Политика нормальной. Совокупность процедур параметризации (1) и дихотомической оценки (2) будем называть механизмом оценки, и обозначать как  $M = (C, E)$  (рис. 1).

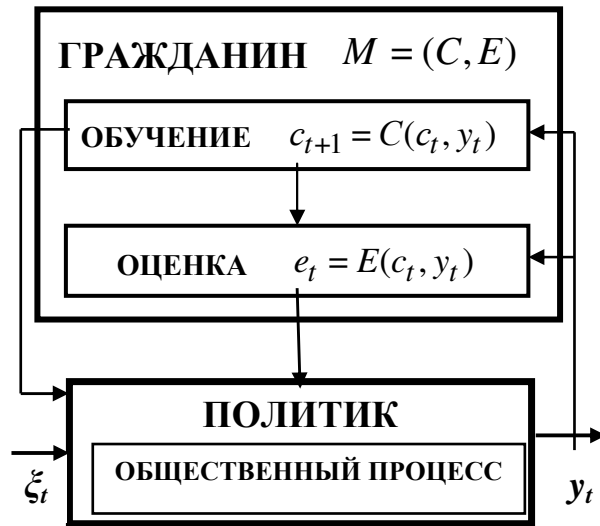


Рис. 1. Механизм дихотомической оценки политика  $M = (C, E)$

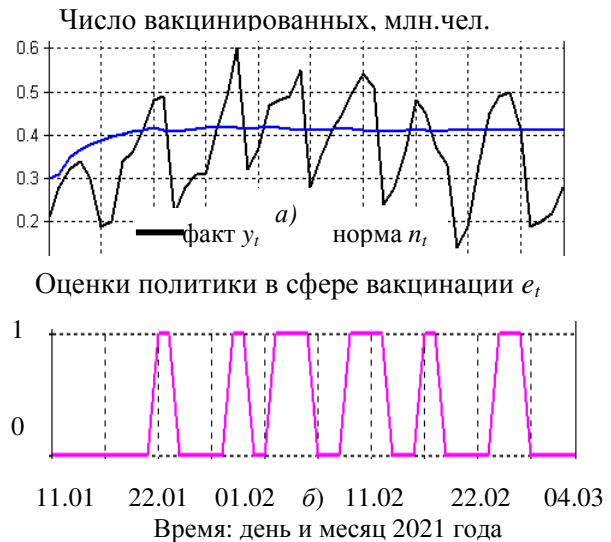


Рис. 2. а) Факт и норма суточной вакцинации (в миллионах человек); б) ежедневные дихотомические оценки политики вакцинации

**Оптимальный синтез механизма дихотомической оценки.** Зная  $p_t$ , дальновидный Политик выбирает показатель  $y_t^*$ , при котором достигается максимум его целевой функции:

$$V(c_t, y_t) = \sum_{\tau=t}^{t+T} \rho^{\tau-t} E(c_\tau, y_\tau), \quad 0 < \rho < 1, \quad y_t \leq p_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $\rho$  – коэффициент дисконтирования,  $T$  – дальновидность Politika. Примем гипотезу благожелательности Politika по отношению к Гражданину: если максимум  $V(c_t, y_t)$  достигается при  $y_t = p_t$ , то  $y_t^* = p_t, t=0, 1, \dots$ . Это означает, что Политик занижает свои возможности (т.е.  $y_t^* < p_t$ ), только если это реально увеличивает его целевую функцию (3). Гражданин же заинтересован в использовании неизвестных ему возможностей Politika  $p_t$ .

**Теорема.** Для заинтересованности Politika в раскрытии своих возможностей:  $y_t^* = p_t, t = 0, 1, \dots$ , достаточно использования Гражданином механизма оценки  $M = (C, E)$ .

Теорема допускает простую интерпретацию. Гражданин наблюдает величину  $y_t$ , характеризующую эффективность Politika в период  $t$ , где  $y_t \leq p_t, p_t$  – неизвестный случайный потенциал Politika. Используя механизм  $M = (C, E)$ , Гражданин настраивает параметр решающего правила (1). Далее, в соответствии с решающим правилом (2), Гражданин классифицирует Politika. Если  $y_t < n_t$ , то Гражданин считает Politika неуспешным (имеющим нулевую оценку  $e_t = 0$ ) и отказывает ему в поддержке. Если же  $y_t \geq n_t$ , то Гражданин относит Politika к успешным ( $e_t = 1$ ) и поддерживает. При этом неверные решения чреваты потерями для Гражданина. Во-первых, в случае несправедливого осуждения Politika при  $e_t = 0$ , потери  $L_1(c_t, y_t) = y_t - vc_t$  растут с ростом показателя его эффективности



( $y_t$ ). Во-вторых, в случае незаслуженной поддержке Политика при  $e_t = 1$ , потери  $L_2(c_t, y_t) = b(c_t - y_t)$  растут при уменьшении его эффективности  $y_t$ .

Заметим, что, согласно (2), чем выше показатель  $y_t$ , тем ниже норма  $n_{t+1} = c_{t+1}(b+v)/(b+1)$  на следующий период. Кроме того, норма  $n_{t+1}$  играет роль порогового значения показателя  $y_t$ , при котором Политик может получить оценку 1 в периоде  $t+1$ . Следовательно, Политика становится легче получить поддержку от Гражданина в следующем периоде, даже при меньших возможностях  $p_t$ . Иными словами, с повышением эффективности ( $y_t$ ), Политик получает не только более высокую текущую оценку. Порог для будущих положительных оценок также снижается. Это еще больше заинтересует Политика в раскрытии собственных возможностей, т.е. в выборе  $y_t^* = p_t$ . По сути, сначала Политик работает на свой авторитет (снижая указанный порог), а затем авторитет (пониженный порог) работает на Политика.

**Пример: синтез механизма дихотомической оценки политики вакцинации против COVID-10 в Великобритании.** При наличии оперативных данных, граждане имеют возможность оценивать политику в сфере борьбы с пандемией в режиме реального времени. В соответствии с развитым выше подходом, рассмотрим построение механизма дихотомической оценки гражданами Великобритании политики вакцинации от коронавируса в этой стране.

Крупномасштабная программа вакцинации в Великобритании стартовала во второй декаде января 2021 года. Публичный мониторинг вакцинации от COVID-19 обеспечивал ежедневно обновляемый правительственный сайт [4]. Из него граждане могли узнавать фактические характеристики процесса вакцинации. Особый интерес у граждан вызвали данные о ежедневном числе людей, получивших первую дозу вакцины в Великобритании и её частях. На основе этих данных, формировалось общественное мнение относительно эффективности или неэффективности деятельности властей в сфере борьбы с пандемией.

Соответственно, рассмотрим построение механизма оценки  $M = (C, E)$  в случае, когда показатель  $y_t$ , по которому гражданин оценивает эффективность проводимой властями политики в режиме реального времени, равен фактическому числу людей в Великобритании, получивших первую дозу вакцины против COVID-19 в день  $t$ . В соответствии с механизмом  $M = (C, E)$ , параметр решающего правила  $c_t$  рассчитывается по (1). Он используется для определения нормы  $n_t$ . На рис. 2а представлены графики фактического показателя  $y_t$  и нормы  $n_t$ , где  $t$  – день и месяц 2021 года. Как видно из рис. 2а, процедура (1) обеспечивает быструю сходимость нормы  $n_t$  к ее стационарному значению. Для получения оценки политики вакцинации, согласно  $M = (C, E)$ , показатель  $y_t$  сравнивается с нормой  $n_t$ . Результатом этого сравнения является дихотомическая оценка  $e_t$ , определяемая согласно (2).

Применение механизма  $M = (C, E)$  заинтересовывает власть в повышении эффективности борьбы с пандемией, во-первых, потому, что власть получает более высокую оценку  $e_t$  при увеличении показателя  $y_t$ . Во-вторых, согласно (2), чем выше показатель  $y_t$ , тем ниже норма  $n_{t+1}$  на следующий период. Но, согласно (9), эта норма  $n_{t+1}$  играет роль порогового значения показателя  $y_{t+1}$ , при котором власть может получить оценку  $e_{t+1} = 1$  в периоде  $t+1$ . Следовательно, власть может получить поддержку от гражданина в следующем периоде даже при меньшем значении случайного потенциала  $p_t$ . Таким образом, увеличивая  $y_t$ , власть получает не только более высокую текущую оценку  $e_t$ . Порог для будущих оценок также снижается. Это еще больше мотивирует власть эффективно бороться с пандемией COVID-19.

**Заключение.** Разработан механизм дихотомической оценки политики, включающий процедуры машинного обучения и формирования оценок гражданином. При этом политик заинтересован использовать в полной мере возникающие возможности в интересах гражданина. Функционирование этого механизма проиллюстрировано на примере оценки политики вакцинации против COVID-19 в Великобритании. Такой механизм побуждает власть использовать имеющиеся возможности в общественных интересах в условиях изменений. Разработанный механизм может быть использован любым гражданином для регулярной дихотомической оценки политики властей с использованием машинного самообучения. Для удобства, такой механизм можно реализовать в виде приложения на смартфонах граждан.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tsyganov V. Models of voters and politicians in a digital society under uncertainty. *IFAC PaperOnline*. 2019. Vol. 52. № 25. P. 275-280.
2. De Fine Licht K. and de Fine Licht J. Artificial intelligence, transparency, and public decision-making. *AI & Soc.* 2020. Vol. 35. P. 917–926.
3. Diallo S.Y., Shults F.L., and Wildman W.J. Minding morality: ethical artificial societies for public policy modeling. *AI & Soc.* 2021. Vol. 36. P. 49–57.
4. Tsyganov V. Mechanism of citizen evaluation of policy using machine learning. *IFAC PapersOnLine*. 2021. Vol.54. № 13. P. 107-112.
5. Burkov V., Gubko M., Kondratiev V., Korgin N., and Novikov, D. Mechanism design and management. *Mathematical methods for smart organizations*. New York: NOVA Publishers, 2013.
6. Coronavirus (COVID-19) in the UK. <https://coronavirus.data.gov.uk/details/vaccinations>.

V.V.Tsyganov (V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow)

**Mechanism of dichotomous policy evaluation by a self-learning citizen**

Public policy is designed to influence society. In turn, members of society - citizens should evaluate this policy so that society can control it. According to the concept of digital society, policy evaluation is based on artificial intelligence solutions, primarily machine learning. In addition, when monitoring politics by society, it is necessary to take into account the human factor. The article discusses theoretical and practical issues that arise when a citizen applies the machine learning procedure to determine alternative evaluations - ratings of a politician. In conditions of uncertainty, it is assumed that this politician knows his ability to meet the needs of society better than the citizen. Using this knowledge, the politician can manipulate own activities in order to get higher ratings today and in the future. Such undesirable activity can lead to the failure to use the available opportunities in which the citizen and society as a whole are interested. To solve this problem in conditions of uncertainty, a mechanism for citizen evaluation of politician is proposed. This mechanism includes the procedure of machine learning of dichotomy and the formation of alternative ratings of a politician. Sufficient conditions have been found for the synthesis of such a mechanism in which a politician fully uses the existing opportunities in the interests of the citizen and society as a whole. The functioning of this mechanism is illustrated by the example of an evaluation of the national policy on vaccination against COVID-19 in the UK. Such a mechanism encourages the politician to use all available opportunities in the public interest. The developed mechanism can be used by any citizen for permanent evaluation of policy using machine self-learning. For this, for example, such mechanism can be implemented as an application on a smart phone.

М. И. ГЕРАСЬКИН

(Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Самара)

**ОПТИМУМ АГЕНТА ОЛИГОПОЛИИ ПРИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗДЕРЖЕК**

*Рассматривается агрегативная игра олигополии при линейной функции спроса и нелинейных (выпуклых) функциях издержек агентов, которые рефлексируют, т.е. выдвигают предположения о стратегиях контрагентов. Моделирование продемонстрировало характер влияния рефлексии агента, а также рефлексии его контрагентов и степени выпуклости их функций издержек на равновесное действие агента в игре.*

Олигополия – это модель рынка, на котором ограниченное количество фирм продают идентичный товар, вследствие чего каждая фирма, изменяя объем предложения товара, оказывает влияние на равновесную цену. Поэтому фирмы (далее, агенты), максимизируя свои функции полезности, вступают в игру, анализ которой отражен в обширном корпусе исследований [1-7]. Игра агентов в модели олигополии Штакельберга [8] характерна тем, что агенты анализируют предположительные вариации, т.е. предполагаемые изменения действий контрагентов (далее, окружения) в ответ на единичное изменение действия агента. Процесс такого анализа, называемый рефлексией [1], закономерно приводит к появлению в игре лидеров по Штакельбергу (первого и более высоких уровней), которые в результате получают преимущественную долю общей полезности. Особую сложность представляет вычисление равновесия игры Штакельберга при нелинейных функциях издержках, для которого выведены приближенные формулы [9]. Далее проанализируем применение этих формул путем численного эксперимента в случае выпуклых функций издержек всех агентов.

В агрегативной игре модели выбора действий агентов имеют вид:

$$Q_i = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \{(a - bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i}\}, \quad i \in N, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i, \quad (1)$$

где  $Q_i$ ,  $\Pi_i$  – действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль)  $i$ -го агента;  $N$  – множество агентов;  $n$  – количество агентов, т.е. количество элементов множества  $N$ ;  $Q$  – суммарный объем рынка;  $C_{Fi}, B_i, \beta_i$  – коэффициенты функций издержек агентов,  $C_{Fi}$  интерпретируется как постоянные издержки;  $a, b$  – коэффициенты обратной функции спроса; коэффициенты удовлетворяют условиям  $a > B_i \gg b > 0$ . Исследуется выпуклая функция издержек при  $1 < \beta_i < 2$ , что соответствует отрицательному эффекту расширения масштаба.

Рассмотрим нормированное значение действия агента  $y_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0,1)$ , где  $Q_{\max} = \frac{a}{b}$ .

Поскольку дальнейшие результаты касаются  $i$ -го агента, то для упрощения записи опустим индекс  $i$ , а если некоторый параметр относится к окружению, то используется символ «- $i$ ».

Решение системы необходимых условий оптимальности для задачи (1) было получено [9] в виде следующего выражения равновесного действия (оптимума) агента:

$$y = \begin{cases} (\tilde{y}_{\theta=0})^{1-2\theta} (\tilde{y}_{\theta=0,5})^{2\theta}, & \theta \in (0;0,5), \quad k_2 < 1, \quad k_1 + k_2 > 1, \quad \text{при } k_1, k_2 > 0, \\ (\tilde{y}_{\theta=0,5})^{2-2\theta} (\tilde{y}_{\theta=1})^{2\theta-1}, & \theta \in (0,5;1), \quad k_1 + k_2 > 1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tilde{y}_{\theta=0} = \frac{1-k_2}{k_1}$ ,  $\tilde{y}_{\theta=0,5} = \left( \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2$ ,  $\tilde{y}_{\theta=1} = \frac{1}{k_1 + k_2}$ ,  $k_1 = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $k_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_0}$ , и введены

следующие коэффициенты:

$$\theta = \beta - 1 \in (0,1), \quad a_0 = \frac{1-\lambda}{B}, \quad a_1 = \theta^2 - 1 < 0, \quad b_0 = \frac{1+S+\tau}{B}, \quad b_1 = \theta(\theta+1) > 0, \quad \bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}^{1-\theta}}, \quad (2a)$$

в которых  $S$  – сумма предположительных вариаций агента касательно окружения;  $\tau$  характеризует интенсивность рефлексии окружения данного агента;  $\lambda$  комплексно оценивает тип окружения, объединяя коэффициент  $\tau$  и характеристику нелинейности функций издержек

окружения: чем больше  $\theta_{-i}$ , т.е. чем более выпуклы функции издержек окружения, тем больше  $\lambda$ . При выпуклых функциях издержек окружения  $\tau \in (0,1)$ ,  $\lambda \in (0,1)$ ,  $S \wedge S_{-i} \in (-1,0]$ .

Ростом рефлексии будем называть увеличение модуля  $S$ . С ростом рефлексии окружения, т.е. с увеличением  $|S_{-i}|$ , параметр  $\lambda$  растет, а параметр  $\tau$  стремится к нулю.

Из (2а) следует, что  $\bar{B} = \vartheta Q_{\max}^{\theta}$ , где  $\vartheta = \frac{B}{a} < 1$ . Поэтому при моделировании постоянными коэффициентами будем считать набор  $\{\theta', \vartheta', Q_{\max}'\}$ , который определяет рассматриваемый случай  $t$  (табл. 1). По сравнению с диапазоном (2а) параметр  $\theta$  исследован в более узком диапазоне  $\theta \in (0; 0,55)$ , так как при  $\theta > 0,55$  равновесное действие близко к нулю; также  $\vartheta \in (0; 0,15)$ , поскольку при  $\vartheta > 0,15$  равновесие мало. Анализируется влияние на равновесие агента изменения параметров  $S$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ .

Таблица 1

Варианты моделирования						
Параметр	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$
$\theta$	0,1	0,1	0,1	0,55	0,55	0,55
$\vartheta$	0,1	0,15	0,1	0,1	0,15	0,1
$Q_{\max}$	1000	1000	500	1000	1000	500

На рис. 1-6 представлены результаты моделирования, т.е. равновесные значения  $u$  действия агента, вычисленные по (2), в зависимости от  $|S|$ , но при этом параметры  $\lambda$  и  $\tau$  также изменяются с шагом 0,1 в соответствии с вариантом динамики (возрастание обозначено « $\uparrow$ », убывание « $\downarrow$ »), указанном для соответствующего случая  $a-f$  в подрисуночной надписи.

Обобщим результаты численных экспериментов.

1. Если рефлексия окружения нарастает ( $\tau \rightarrow 0$ ) и выпуклость функций издержек окружения уменьшается ( $\lambda \rightarrow 0$ ), то рост рефлексии агента ( $|S| \rightarrow 1$ ) влечет увеличение его оптимума, в противном случае – наоборот (случаи  $a$  и  $c$  на рис. 1,3):

$$y'_{|S|} \begin{cases} > 0, \text{ если } \tau \rightarrow 0 \wedge \lambda \rightarrow 0, \\ < 0, \text{ если } \tau \rightarrow 1 \wedge \lambda \rightarrow 1. \end{cases}$$

Это проявление эффекта компенсации роста рефлексии окружения приближением функций издержек к линейному виду.

2. Если рефлексия окружения снижается ( $\tau \rightarrow 1$ ) и выпуклость функций издержек окружения уменьшается ( $\lambda \rightarrow 0$ ), то рост рефлексии агента ( $|S| \rightarrow 1$ ) влечет увеличение его оптимума (случай  $d$  на рис. 4):

$$y'_{|S|} > 0, \text{ если } \tau \rightarrow 1 \wedge \lambda \rightarrow 0.$$

Этот случай выражает типичное влияние динамики рефлексии агента и окружения: углубление рефлексии есть предположение о более резком снижении действия контрагента, что ведет к росту действия агента вследствие повышения его уровня лидерства по Штакельбергу.

3. Если динамика рефлексии окружения и изменение выпуклости функций издержек окружения имеют аналогичную направленность (кроме случая  $d$ ), т.е.  $\tau \downarrow \wedge \lambda \uparrow$  или  $\tau \uparrow \wedge \lambda \downarrow$ , то с ростом рефлексии агента чередуются интервалы уменьшения и увеличения его оптимума, т.е. имеют место наибольшее и наименьшее значения этого оптимума (рис. 2, 5, 6). В частности, если рефлексия окружения снижается ( $\tau \rightarrow 1$ ) и выпуклость функций издержек окружения уменьшается ( $\lambda \rightarrow 0$ ), то рост рефлексии агента приводит к увеличению оптимума при  $|S| \in (0; 0,1)$ , его снижению при  $|S| \in (0,1; 0,9)$  и росту при  $|S| \in (0,9; 1)$  в случае  $t=3$  (случай  $b$ , рис. 2).

Следовательно, случаи  $b$ ,  $e$ ,  $f$  демонстрируют нетипичное влияние динамики рефлексии: случай  $b$  соответствует снижению рефлексии окружения и уменьшению выпуклости функций издержек на фоне снижения рефлексии агента; в случаях  $e$ ,  $f$  имеет место рост рефлексии окружения совместно с увеличением выпуклости функций издержек – здесь немонотонная динамика оптимума агента проявляется как при росте его рефлексии, так и при снижении.

Поэтому нетипичное влияние рефлексии агента обусловлено противоположным воздействием других факторов – рефлексии окружения и выпуклости функций издержек.

4. С ростом коэффициента функции издержек агента  $B$  (т.е.  $\vartheta$  при  $a=\text{const}$ ) оптимум агента снижается ( $y'_\vartheta < 0$ ), так как рост издержек агента по модели (1) снижает его полезность.

5. С ростом суммарного действия всех агентов оптимум агента растет ( $y'_{Q_{\max}} > 0$ ) вследствие возрастания выигрыша, распределяемого между фиксированным числом агентов.

6. С ростом выпуклости функций издержек всех агентов оптимум каждого агента уменьшается ( $y'_\theta < 0$ ), поскольку усиливается отрицательный эффект расширения масштаба.

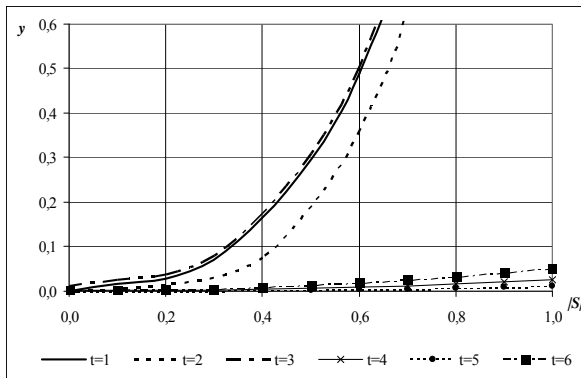


Рис. 1. Влияние динамики (a)  $\tau \downarrow \wedge \lambda \downarrow \wedge S \downarrow, |S| \uparrow$   
(или  $\tau \uparrow \wedge \lambda \uparrow \wedge S \uparrow$ )

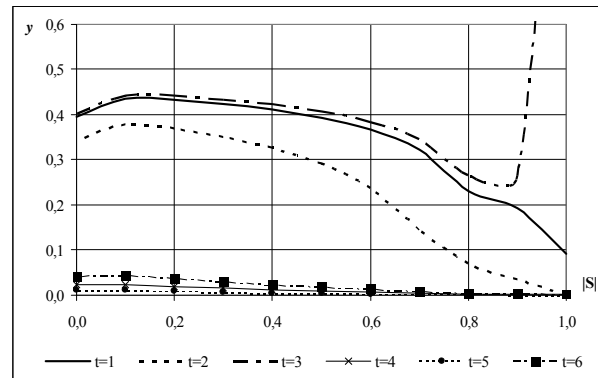


Рис. 2. Влияние динамики (b)  $\tau \uparrow \wedge \lambda \downarrow \wedge S \uparrow, |S| \downarrow$

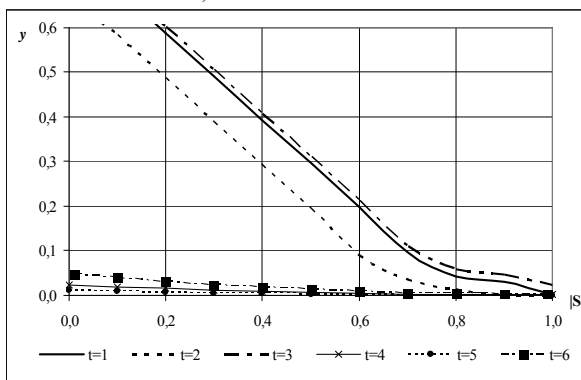


Рис. 3. Влияние динамики (c)  $\tau \uparrow \wedge \lambda \uparrow \wedge S \downarrow, |S| \uparrow$   
(или  $\tau \downarrow \wedge \lambda \downarrow \wedge S \uparrow$ )

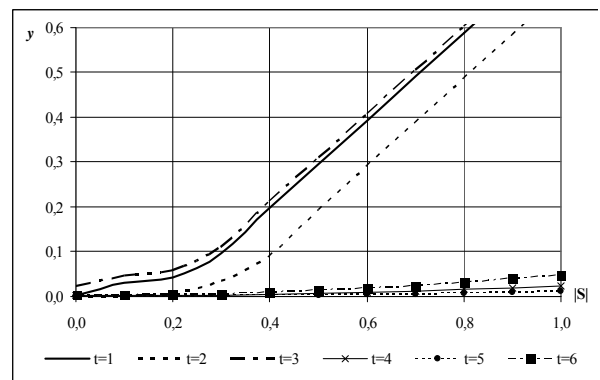


Рисунок 4. Влияние динамики (d)  $\tau \uparrow \wedge \lambda \downarrow \wedge S \downarrow, |S| \uparrow$

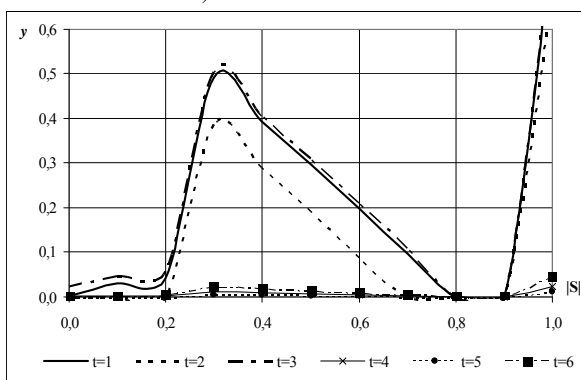


Рис. 5. Влияние динамики (e)  $\tau \downarrow \wedge \lambda \uparrow \wedge S \uparrow$

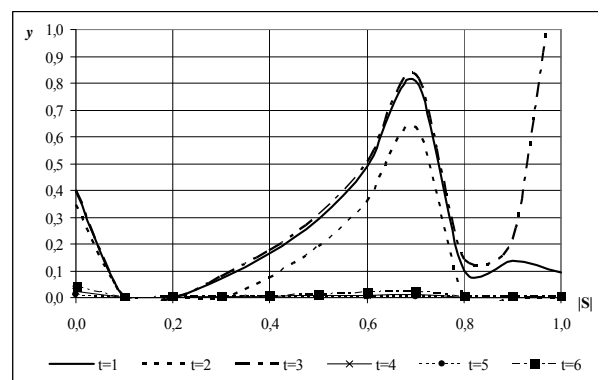


Рис. 6. Влияние динамики (f)  $\tau \downarrow \wedge \lambda \uparrow \wedge S \downarrow$

В целом, важнейший вывод из проведенных численных экспериментов состоит в том, что существует уровень рефлексии агента, который максимизирует его равновесное действие. Следовательно, имеется возможность оптимизировать ранг рефлексии агента в зависимости от

поведения окружения. Поэтому известное положение о неэффективности углубления рефлексии [1] не всегда соблюдается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.** Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
2. **Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.** Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parall., Emergent and Distribut. Syst. 2018. No.33 (3). P. 319-335.
3. **Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.** Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No.49 (32). P. 19-23.
4. **Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.** Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91-105.
5. **Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.** The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207-208.
6. **Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.** Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115-133.
7. **Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.** Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113-128.
8. **Stackelberg H.** Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer. 2011. (Original 1934).
9. **Гераськин М.И.** Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // А и Т (в печати)

---

М. И. Geraskin (Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev, Samara). **Oligopoly agent optimum under convex cost functions**

An aggregative game of oligopoly is considered for a linear demand function and non-linear (convex) cost functions of agents that reflex, i.e. make assumptions about the strategies of counterparties. The simulation demonstrates the nature of the influence of the agent's reflection, as well as the reflection of his counterparties and the degree of convexity of their cost functions on the equilibrium action of the agent in the game.

Э. И. ДЖАФАРОВ, В. В. ЦЫГАНОВ  
(Институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ПРОТИВОЗАТРАТНЫЙ МЕХАНИЗМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРЕХУРОВНЕВОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ

*Необходимость контроля затрат в многоуровневой системе управления обусловлена неопределенностью, выражающаяся в асимметричной информированности элементов системы. Манипулируя выходными показателями, активные элементы стремятся к увеличению собственной выгоды. Найдены достаточные условия синтеза противозатратного механизма, включающий противозатратный механизм ранжирования, основанный на алгоритме машинного обучения, и адаптивный противозатратный механизм с процедурами стандартизации и стимулирования, позволяющий минимизировать затраты в трехуровневой активной системе. Функционирование механизма рассмотрено на примере компании в нефтегазовом проекте на условиях соглашения о разделе продукции, включающей на верхнем уровне Центра с Советником, на среднем Агента и на нижнем Менеджера.*

**Введение.** В нефтегазовых проектах в России, реализуемых на условиях соглашения о разделе продукции, добываемое углеводородное сырье делится между государством (Центр) и компанией. Доля компании определяется исходя из расчета внутренней нормы рентабельности проекта и находится в обратной зависимости от ее значения. Исходя из установленных правил распределения, Менеджер компании может завышать затраты на добычу сырья в каждом периоде, чтобы снижать рентабельность проекта с целью увеличения доли компании. Для контроля затрат Центр привлекает Агента и дополнительно несет затраты для обеспечения его деятельности. При этом Агент также может исказить информацию о своих фактических затратах по контролю компании. Оценивая работу Агента, Центр основывается на мнении Советника, который дает заключение о том, являются ли затраты Агента завышенными. Следовательно, структуру взаимодействия можно представить в виде трехуровневой системы, где на верхнем уровне Центр с Советником, на среднем Агент, на нижнем Менеджер. Подобные проблемы управления в условиях неопределенности рассматриваются в теории активных систем [1]. Особую значимость в задаче контроля затрат приобретают механизмы управления, основанные на алгоритмах машинного обучения с учителем, и механизмы управления с адаптивной идентификацией [2-7]. Настоящая работа посвящена синтезу противозатратного механизма, позволяющего в условиях неопределенности снизить затраты в трехуровневой системе.

**Противозатратный механизм ранжирования.** Затраты компании  $R_t$  в периоде  $t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  равны сумме производственных  $F_t$  и накладных затрат  $O_t$ :  $R_t = F_t + O_t$ . Здесь  $F_t \in \Phi_t = [f_t, \alpha]$ , где  $f_t$  – производственные затраты, которые Менеджер сообщает Агенту. При этом,  $O_t \in O_t = [o_t, \beta]$ , где  $o_t$  – затраты Агента,  $f_t \in \varphi = [\chi, \delta]$ ,  $\chi > 0$ ,  $\delta \leq \alpha$ ,  $o_t \in o = [\varepsilon, \gamma]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma \leq \beta$ , где  $f_t$  и  $o_t$  стационарные стохастические значения. Минимальные затраты компании  $r_t = f_t + o_t$ . Таким образом,  $R_t \in P_t = [r_t, \alpha + \beta]$ ,  $P_t \subset P = [\chi + \varepsilon, \alpha + \beta]$ . Рассматривая функционирование трехуровневой системы в условиях неопределенности, будем полагать, что Центр и Советник не знают  $f_t$ ,  $o_t$ , и  $r_t$ . Но  $f_t$  и  $o_t$  становятся известными Агенту в начале периода  $t$ , т.е. до выбора  $R_t$ . Однако и сам Агент не знает  $f_t$ , сообщаемых Менеджером. Следовательно Центр должен управлять Агентом, а последний в свою очередь Менеджером, чтобы свести затраты  $R_t$  к  $r_t$ .

**Процедура обучения Центра с Советником.** Рассмотрим взаимодействие Центра с Советником и Агента. В условиях неопределенности, Центр оценивает работу Агента как удовлетворительную (ранг 1) или неудовлетворительную (ранг 0), используя заключение Советника  $v_t$ , о том являются ли затраты компании  $R_t$  завышенными в периоде  $t$ . Неправильное ранжирование приводит к потерям Центра. Тогда для минимизации средних потерь воспользуемся алгоритмом обучения с учителем [2], где параметр решающего правила  $c_{t+1}$  вычисляется с помощью рекурсивной процедуры:

$$c_{t+1} = C(c_t, R_t) = c_t - \lambda_t \{c_t + [(w_{01} + w_{10})v_t - w_{01} - \zeta]/l\}, c_0 = c^0, \quad (1)$$

где  $l = \alpha + \beta - \chi - \varepsilon$ ,  $\zeta = [(\alpha + \beta)^2 - (\chi + \varepsilon)^2]/2$ ,  $w_{10}$  – потери, при  $g_t = 0$  (хотя Агент заслуживает  $g_t = 1$ ),  $w_{01}$  – потери, при  $g_t = 1$  (хотя Агент заслуживает  $g_t = 0$ ),  $C(c_t, R_t)$  – процедура оценки,  $\lambda_t$  – коэффициент усиления,  $0 < \lambda_{t+1} < \lambda_t$ ,  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda_{\tau} < \infty$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Применяя (1), Центр определяет ранг Агента  $g_t$ :

$$g_t = G(c_t, R_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } R_t \leq c_t \\ 0, & \text{если } R_t > c_t \end{cases} \quad (2)$$

**Процедура самообучения Советника.** Ошибочное заключение Советника наносит ущерб его репутации. Соответственно, чтобы избежать ущерба, Советнику необходимо учиться самостоятельно, наблюдая  $R_t$ . Представим функцию такого ущерба в виде:  $W_0(a, R_t) = R_t - \eta a$ ,  $W_1(a, R_t) = \iota(a - R_t)$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\iota > 0$ , где  $a$  – параметр, настраиваемый так, чтобы минимизировать средний ущерб. Для настройки параметра  $a$  применим алгоритм самообучения [3], с помощью которого Советник формирует оценку параметра  $a_{t+1}$  используя процедуру стохастической аппроксимации:

$$a_{t+1} = A(a_t, R_t) = \begin{cases} a_t + \eta \kappa_t, & \text{если } R_t \leq d_t \\ a_t - \iota \kappa_t, & \text{если } R_t > d_t \end{cases}, a_0 = a^0, t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

где  $d_t = a_t(\eta + \iota)/(\iota + 1)$  – параметр, с помощью которого Советник формирует заключение;  $\kappa_t$  – коэффициент усиления  $0 < \kappa_{t+1} < \kappa_t$ ,  $\sum_{\tau=1}^{\infty} \kappa_{\tau} < \infty$ ,  $A(\cdot)$  – процедура аппроксимации. Используя (3), Советник формирует заключение:

$$v_t = V(a_t, R_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } R_t > d_t \\ 0, & \text{если } R_t \leq d_t \end{cases} \quad (4)$$

где  $V(\cdot)$  – процедура заключения. Затем Советник сообщает свое заключение (4) Центру. Совокупность процедур оценки  $C(\cdot)$ , ранжирования  $G(\cdot)$ , аппроксимации  $A(\cdot)$  и заключения  $V(\cdot)$ , определяемые соответственно (1), (2), (3) и (4) называется механизмом ранжирования и обозначается  $\sum_R = (C, G, A, V)$ .

Предположим, что полезность Агента является неубывающей функцией от текущего и будущих рангов, присваиваемых Центром:  $U_t = U(g_t, g_{t+1}, \dots, g_{t+\Omega})$ ,  $U_{\tau} \uparrow g_{\tau}$ ,  $\tau = t, t + \Omega$ , где  $\Omega$  – число периодов, учитываемых дальновидным Агентом. Выбирая затраты  $R_t$  в каждом периоде  $t$ , зная только текущую реализацию стохастического значения  $r_t$ , но не зная будущих реализаций  $r_{\tau}$ ,  $\tau = t + 1, t + \Omega$ , Агент руководствуется принципом максимального гарантированного результата [1], зная только, что  $r_{\tau} \in P$  и  $R_{\tau} \in P_{\tau}$ ,  $\tau = t + 1, t + \Omega$ . Тогда при устранении неопределённости относительно будущих  $r_{\tau}$  целевая функция Агента  $T_t(R_t)$  определяется как минимальное гарантированное значение функции полезности Агента  $U_t$ :

$$T_t(R_t) = \min_{\tau = t+1, t+\Omega} \min_{r_{\tau} \in P} \min_{R_{\tau} \in P_{\tau}} U_t \quad (5)$$

Примем гипотезу благожелательности Агента по отношению к Центру: если максимум  $T_t(R_t)$  достигается при  $R_t = r_t$ , то  $R_t^* = r_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  Это означает, что Агент завышает затраты  $R_t$  только в том случае, если это увеличивает его целевую функцию (5).

**Лемма 1.** Противозатратного механизма ранжирования  $\sum_R = (C, G, A, V)$  достаточно для снижения затрат,  $R_t^* = r_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Адаптивный противозатратный механизм.** Затраты компании  $f_t$ , значение которых Менеджер сообщает Агенту, не могут быть ниже минимально возможных затрат (потенциал)  $m_t$ ,  $m_t \in \pi = [\chi, \theta]$ ,  $\theta \leq \delta$ . В соответствии с гипотезой асимметричной осведомленности, будем полагать, что  $m_t$  известны Менеджеру, но не известны Агенту. Отсюда следует, что Менеджер может манипулировать затратами в свою пользу выбирая  $f_t$ ,  $f_t \in \Theta_t = [m_t, \delta]$ ,  $f_t > m_t$ , чтобы обеспечить себе лучшими стимулами сегодня и в будущем [4]. Поэтому Агент должен мотивировать Менеджера снижать затраты компании:  $f_t = m_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Процедура стандартизации затрат.** В случае, если Агенту известны значения  $m_t$  (Менеджер раскрывает Агенту свой потенциал  $f_t = m_t$ ), для настройки модели потенциала можно использовать алгоритмы, разработанные в теории оптимальной идентификации [5]. Однако на практике Агент не всегда информирован о точном значении  $m_t$ . Тогда Агент, использующий



процедуру настройки модели потенциала, получает вместо параметра модели, его оценку [6, 7]. Тогда задача Агента состоит в том, чтобы минимизировать средние потери этой оценки. Получим уравнение для определения Агентом оценки  $b_t$ :

$$b_t = \arg \min_b E_t(b, f_t) = b_{t-1} - \gamma_t L'_b(f_t - b_{t-1}) \equiv E_t(b_{t-1}, f_t), \quad (6)$$

$$E = \{E_t(b_{t-1}, f_t), t = 0, 1, \dots\}, \gamma_t L''_b(f_t - b_{t-1}) < 1, b_0 = e^0, \quad (7)$$

$L_b(f_t - b_{t-1})$  – выпуклая дважды дифференцируемая функция невязки  $(f_t - b_{t-1})$ ,  $L'_b(f_t - b_{t-1})$  – производная функции  $L_b(f_t - b_{t-1})$  по  $b_{t-1}$ ,  $\gamma_t$  – коэффициент усиления, выбираемый так, чтобы оценка (10) сходилась к оптимальной оценке,  $0 < \gamma_{t+1} \leq \gamma_t, \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t < \infty, t = 0, 1, \dots$  Оценка  $b_t$  может рассматриваться как стандарт для менеджера. Соответственно, назовем  $E_t(b_{t-1}, f_t)$  как процедуру стандартизации.

**Процедура стимулирования.** В начале периода  $t$  Менеджеру становится известно значение  $m_t$ . После этого он выбирает  $f_t$ , которые сообщает Агенту. Затем сравнивая  $f_t$  со стандартом  $b_{t-1}$ , сформированным в предыдущем периоде, Агент определяет стимулы для Менеджера:

$$s_t = S(b_{t-1}, f_t), \quad \frac{\partial S(b_{t-1}, f_t)}{\partial f_t} \leq 0, \quad \frac{\partial S(b_{t-1}, f_t)}{\partial b_{t-1}} > 0 \quad (8)$$

где  $S(\cdot)$  – процедура стимулирования. Совокупность процедур стандартизации  $E(\cdot)$  и стимулирования  $S(\cdot)$ , определяемые соответственно (7) и (9), называется адаптивным противозатратным механизмом и обозначается  $\sum_A = (E, S)$ .

Предположим, что Менеджер стремится к увеличению суммы дисконтированных стимулов:

$$D_t = \sum_{\tau=t}^{t+T} \rho^{\tau-t} s_{\tau}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (9)$$

где  $\rho$  – коэффициент дисконтирования,  $T$  – дальновидность Менеджера. В этом случае Менеджер, не зная будущие значения  $m_{\tau}, \tau = \overline{t+1, t+T}$ , руководствуется принципом максимального гарантированного результата (10):

$$\Delta_t(b_{t-1}, f_t, m_t) = \min_{m_{\tau} \in \pi, \gamma_{\tau} \in \Gamma, \tau = \overline{t+1, t+T}} \min_{f_{\tau} \in \Theta_{\tau}, \tau = \overline{t+1, t+T}} D_t \quad (10)$$

Также будем полагать справедливость гипотезы благожелательности Менеджера по отношению к Агенту: если максимум  $\Delta_t(b_{t-1}, f_t, m_t)$  достигается при  $f_t = m_t$ , то  $f_t^* = m_t, t = 0, 1, \dots$  Это означает, что Менеджер не завышает затраты компании, если это ему не выгодно.

Введем оператор, устраняющий неопределенность в отношении потенциала и фактических затрат до выбора  $f_t$  в периоде  $t$ :

$$h_t u = \max_{m_t \in \pi} \max_{m_{t-1} \in \pi, \gamma_{t-1} \in \Gamma} \max_{f_{t-1} \in \Theta_{t-1}} \dots \max_{m_1 \in \pi, \gamma_1 \in \Gamma} \max_{f_1 \in \Theta_1} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (11)$$

Введем также оператор, устраняющий неопределенность в отношении потенциала и фактических затрат следующих за выбором  $f_t$ :

$$k_t u = \max_{\tau = \overline{t+1, t+T}} \max_{m_{t+1} \in \pi, \gamma_{t+1} \in \Gamma} \max_{f_{t+1} \in \Theta_{t+1}} \dots \max_{m_{\tau} \in \pi, \gamma_{\tau} \in \Gamma} \max_{f_{\tau} \in \Theta_{\tau}} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (12)$$

Обозначим  $L'_b(f_t - b_{t-1}) \equiv L'_b(t), t = 0, 1, \dots$ , и используя (11) и (12), введем обозначения:

$$K_t = k_t b_{\tau-1} s_{\tau}, \quad P_t = h f_t [-L'_b(t)], \quad H_t = k_t b_{\tau-1} L'_b(\tau).$$

**Лемма 2.** Адаптивного противозатратного механизма  $\sum_A = (E, S)$  достаточно для снижения затрат,  $f_t^* = m_t, t = 0, 1, \dots$ , если:

$$h_t f_t s_t + \rho \gamma_t K_t P_t [1 - \rho^T (1 - \gamma_t H_t)^T] / [1 - \rho(1 - \gamma_t H_t)] \leq 0, t = 0, 1, \dots \quad (13)$$

**Теорема.** Для минимизации затрат:  $R_t^* = m_t + o_t, t = 0, 1, \dots$ , достаточно противозатратного механизма  $\sum = \{\sum_R, \sum_A\}$ , включающего противозатратный механизм ранжирования  $\sum_R = (C, G, A, V)$  и адаптивный противозатратный механизм  $\sum_A = (E, S)$ .

**Синтез противозатратного механизма на примере компании-оператора нефтегазового проекта Сахалин-1.** Проводя ежемесячный контроль затрат в условиях неопределенности Агент применяет противозатратный механизм  $\sum$  для снижения затрат компании  $R_t$ . Для про-

стоты, Агент применяет механизм  $\Sigma$  с линейными процедурами стандартизации и стимулирования:

$$b_t = E_l(b_{t-1}, f_t) = (1 - \gamma_t)b_{t-1} + \gamma_t f_t, \quad b_0 = b^0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$S_l(b_{t-1}, f_t) = v(b_{t-1} - f_t) + const, \quad v > 0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получаем:

$$\rho \gamma_t [1 - \rho^T (1 - \gamma_t)^T] \leq [1 - \rho(1 - \gamma_t)], \quad t = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

На практике Агент очень плавно снижает затраты:  $\gamma_t \ll 1$ . В этом случае неравенства (16) и (13) выполняются, подтверждая применимость условий теоремы.

**Заключение.** Разработан противозатратный механизм, включающий противозатратный механизм ранжирования и адаптивный противозатратный механизм, основанный на алгоритме машинного обучения, позволяющий снижать затраты в трехуровневой активной системе. Функционирование противозатратного механизма рассмотрено на примере компании-оператора нефтегазового проекта реализуемого на условиях соглашения о разделе продукции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Burkov, V., Gubko, M., Kondratiev, V., Korgin, N., and Novikov, D. Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations. New York: Nova Science Publishers. 2013.
2. Цыганов В.В. Механизмы контролируемого обучения в крупномасштабном транспортном холдинге / Труды 14-й Международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD-2021). М.: ИПУ РАН, 2021. С. 1098-1105.
3. Tsyganov, V. Three-Tier Control of Energy Costs in Transport Corporation with Self-Learning. IFAC-PapersOnLine. 2021. Vol. 54. Issue 2. P. 75-80.
4. Tsyganov, V. Adaptive identification of innovative production function of company. FME transactions. 2019. Vol. 47. Issue 2. P. 691-699.
5. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. Цыганов В.В. Правильные адаптивные механизмы с идентификацией. Проблемы управления. 2018. №2. С. 47-57.
7. Tsyganov, V. Electricity costs control with supervised learning. International Ural Conference on Electrical Power Engineering (UralCon). IEEE. 2021. P. 166-172.

---

E. I. Dzhafarov, V. V. Tsyganov (V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow). **Cost-saving mechanism of functioning three-level active system**

The need for cost control in a multi-level control system is due to uncertainty, expressed in the asymmetric awareness of the system elements. By manipulating output indicators, active elements seek to increase their own benefits. Sufficient conditions have been found for the synthesis of a cost-saving mechanism, including a cost-saving ranking mechanism based on a machine learning algorithm, and an adaptive cost-saving mechanism with standardization and incentive procedures that allows minimizing costs in a three-level active system. The functioning of the mechanism is considered on the example of cost control in an oil and gas company on the terms of a production sharing agreement, including a Center with an Adviser, an Agent and a Manager. The functioning of the mechanism is considered on the example of a company in an oil and gas project on the terms of a production sharing agreement, including the Centre with the Advisor on the top level, the Agent on the middle level and the Manager on the lower level.

Г. А. УГОЛЬНИЦКИЙ  
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

*Построены и аналитически исследованы модели олигополии Курно в виде игры в нормальной форме, при этом учтены варианты цепи поставок, "зелёного" эффекта и заботы о справедливости; для симметричных моделей олигополии Курно при различных способах организации экономических агентов и методах управления аналитически получены совпадающие структуры общественных и индивидуальных предпочтений.*

**Введение.** Проблема неэффективности равновесий играет важную роль в теоретико-игровых моделях управления социально-экономическими системами [1-3]. Для оценки (не)эффективности вводится специальная функция выигрыша, которая позволяет измерить (не)эффективность равновесий как отношение между значением функции выигрыша в некотором равновесии и при оптимальном исходе. Целесообразно формулировать проблему неэффективности равновесий в более общем виде. Во-первых, сравнению подлежат выигрыши не только при базовых способах организации экономических агентов (равноправие, иерархия, кооперация), но и с учётом используемых методов управления (структура и регламент взаимодействия агентов). Во-вторых, сравнение следует проводить с точки зрения не только общественного благосостояния, но и отдельных агентов. Исход игры при некотором способе организации, более выгодный для общества в целом, не обязательно окажется таким же для каждого из агентов. Например, выигрыш ведущего игрока в иерархической игре может превышать долю при симметричном распределении выигрыша от кооперации.

При учёте структуры взаимодействия экономических агентов видное место занимает концепция управления цепями поставок. Под цепью поставок понимается упорядоченная совокупность экономических агентов, обеспечивающих производство товара и его движение от производителя к потребителю [4-6]. Очень интересное направление исследований последних лет в данной области - "зелёные" цепи поставок. Здесь речь идёт об усилиях, которые участники цепи поставок предпринимают для снижения негативного воздействия производства и логистики на окружающую среду. Предполагается, что такая деятельность приведёт к увеличению спроса на "зелёную" продукцию со стороны экологически ответственных потребителей [7,8]. В развитие данного подхода рассматривается так называемая забота о справедливости. Она связана с тем, что если агент считает распределение дохода несправедливым, то он может отказаться от деловых отношений. Поэтому в иерархической игре в функцию выигрыша ведущего включается штраф за существенную разницу доходов ведущего и ведомого [9-12].

Предлагаемый доклад посвящён решению следующих задач: построены и аналитически исследованы модели олигополии Курно [13,14] в виде игры в нормальной форме, при этом учтены варианты цепи поставок, "зелёного" эффекта и заботы о справедливости; для симметричных моделей олигополии Курно при различных способах организации экономических агентов и методах управления аналитически получены совпадающие структуры общественных и индивидуальных предпочтений.

**Игры в нормальной форме.** Рассмотрим симметричные теоретико-игровые модели олигополии Курно в нормальной форме.

**Базовая модель.** Модель олигополии Курно описывает конкуренцию  $n$  экономических агентов (фирм), производящих однородный товар. Пусть  $x_i$  - объём выпуска продукции  $i$ -м агентом,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{x} = x_1 + \dots + x_n$ . Обратная функция спроса берётся в виде  $Q(x) = a - \bar{x}$ , где  $a$  - параметр спроса. Величина  $Q(x)$  показывает цену единицы продукции. При постоянных затратах  $C_i(x_i) = c_i x_i$  параметр  $c_i$  показывает удельную себестоимость продукции. В целом,

выигрыш (прибыль)  $i$ -го агента есть  $u_i(x) = Q(x)x_i - C_i(x_i)$ . Тогда в предположении  $c_i = c, d_i = d, i = 1, \dots, n$  получаем модель

$$u_i(x) = (a - c - \bar{x})x_i \rightarrow \max, 0 \leq x_i \leq 1/n, i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Будем считать, что  $a > c > 0$ . Тогда равновесие Нэша и выигрыш для модели (1)

$$x_i^{NE} = x^{NE} = \frac{a-c}{n+1}, i = 1, \dots, n, u^{NE} = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2}. \quad (2)$$

В случае кооперации экономические агенты олигополии объединяются (образуют картель) и совместно максимизируют суммарный выигрыш  $\bar{u}(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$  по всем управляющим переменным  $x_i, i = 1, \dots, n$ . Тогда модель (1) принимает вид

$$\bar{u}(x) = (a - c - \bar{x})\bar{x} \rightarrow \max, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

Симметричное решение модели (3) и кооперативный выигрыш имеют вид

$$x^C = \frac{a-c}{2n}; \bar{u}^C = \frac{(a-c)^2}{4}. \quad (4)$$

Пусть теперь агент 1 - лидер, который выбирает и сообщает остальным агентам свой объём выпуска  $x_1$ . Зная  $x_1$ , остальные агенты находят равновесие Нэша в своей игре в нормальной форме, которое считается оптимальной реакцией на стратегию  $x_1$ . Тогда фирма 1 выбирает значение  $x_1$  так, чтобы максимизировать свой выигрыш на множестве равновесий Нэша в игре остальных агентов. Равновесие Штакельберга и соответствующие выигрыши имеют вид

$$x_1^{ST1} = \frac{a-c}{2}; x_i^{ST1} = \frac{a-c}{2n}, i = 2, \dots, n; \bar{x}^{ST1} = \frac{(2n-1)(a-c)}{2n}; \quad (5)$$

$$u_1^{ST1} = \frac{(a-c)^2}{4n}; u_i^{ST1} = \frac{(a-c)^2}{4n^2}, i = 2, \dots, n; \bar{u}^{ST1} = \frac{(2n-1)(a-c)^2}{4n^2}. \quad (6)$$

**Учёт "зелёного" эффекта.** Под "зелёным" эффектом в модели олигополии Курно будем понимать выделение агентами дополнительных ресурсов на повышение экологичности выпускаемой продукции. Обозначим соответствующие "зелёные" усилия  $i$ -го агента через  $g_i, g = (g_1, \dots, g_n), \bar{g} = g_1 + \dots + g_n$ . Пусть  $\alpha$  - коэффициент повышения спроса за счёт "зелёного" эффекта,  $\beta_i$  - коэффициент затрат  $i$ -го агента на "зелёные" усилия. Тогда модель (1) при  $\alpha = \beta_i = 1, i = 1, \dots, n$  принимает вид

$$u_i^G(x, g) = (a - c - \bar{x} + \bar{g})x_i - g_i^2 \rightarrow \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Равновесные по Нэшу стратегии агентов и их выигрыши имеют вид

$$x^{GNE} = \frac{2(a-c)}{n+2}, g^{GNE} = \frac{a-c}{n+2}, u^{GNE} = \frac{3(a-c)^2}{(n+2)^2}. \quad (8)$$

В случае кооперации агентов при "зелёном" эффекте получаем модель

$$\bar{u}^{GC}(x, g) = (a - c - \bar{x} + \bar{g})\bar{x} - \sum_{j=1}^n g_j^2 \rightarrow \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Оптимальные кооперативные стратегии агентов и их суммарный выигрыш равны

$$x^{GC} = \begin{cases} \frac{2(a-c)}{n(4-n)}, n < 4, \\ x^C, otherwise; \end{cases} g^{GC} = \begin{cases} \frac{(a-c)}{4-n}, n < 4, \\ 0, otherwise; \end{cases} \bar{u}^{GC} = \begin{cases} \frac{(a-c)^2}{4-n}, n < 4, \\ \bar{u}^C, otherwise. \end{cases} \quad (10)$$

Пусть теперь в модели (7) агент 1 - лидер. Решения и выигрыши имеют вид

$$g_1^{ST1G} = \frac{a-c}{3}; g_i^{ST1G} = \frac{2(a-c)}{3(n+1)}, i = 2, \dots, n; x_1^{ST1G} = \frac{2(a-c)}{3}; x_i^{ST1G} = \frac{4(a-c)}{3(n+1)}, i = 2, \dots, n. \quad (11)$$

$$u_1^{ST1G} = \frac{8(a-c)^2}{9(n+1)}; u_i^{ST1G} = \frac{16(a-c)^2}{9(n+1)^2}, i = 2, \dots, n; \bar{u}^{ST1G} = \frac{8(3n-1)(a-c)^2}{9(n+1)^2}. \quad (12)$$

Связь между агентами в линейной структуре цепи поставок осуществляется за счёт "зелёного" эффекта для каждого агента. При этом действие эффекта одностороннее и тем сильнее, чем ближе расположены соответствующие агенты. Эти соображения при произвольном  $\alpha > 0$  и  $n = 2$  приводят к модели

$$u_1^{SC}(x, g) = (a - c - x_1 - x_2 + g_1)x_1 - g_1^2 \rightarrow \max, x_1 \geq 0, g_1 \geq 0, \quad (13)$$

$$u_2^{SC}(x, g) = (a - c - x_1 - x_2 + \alpha g_1 + g_2)x_2 - g_2^2 \rightarrow \max, x_2 \geq 0, g_2 \geq 0, \quad (14)$$

Равновесные по Нэшу стратегии и выигрыши агентов имеют вид

$$x_1^{SCNE} = \frac{2(a-c)}{5+2\alpha}; \quad x_2^{SCNE} = \frac{2(a-c)(1+\alpha)}{5+2\alpha}; \quad (15)$$

$$g_1^{SCNE} = \frac{(a-c)}{5+2\alpha}; \quad g_2^{SCNE} = \frac{(a-c)(1+\alpha)}{5+2\alpha}; \quad (16)$$

$$u_1^{SCNE} = \frac{3(a-c)^2}{(5+2\alpha)^2}; \quad u_2^{SCNE} = \frac{3(a-c)^2(1+\alpha)^2}{(5+2\alpha)^2}. \quad (17)$$

Допустим теперь, что в достижении "зелёного" эффекта заинтересован внешний агент (Центр). Для максимизации суммарного выигрыша агентов при обеспечении "зелёного" эффекта Центр может устанавливать остальным агентам обязательные нормативы затрат на повышение экологичности продукции  $g_i, i=1, \dots, n$ . Управляющими переменными агентов остаются объёмы выпуска  $x_i, i=1, \dots, n$ . Модель принимает вид

$$U(g, x) = \bar{u}(x, g) \rightarrow \max, g_i \geq 0, i=1, \dots, n; \quad (18)$$

$$u_i^{ST}(g, x) = (a - c - \bar{x} + \bar{g})x_i - g_i^2 \rightarrow \max, x_i \geq 0, i=1, \dots, n. \quad (19)$$

Равновесные по Штакельбергу стратегии и соответствующие выигрыши агентов в игре (18)-(19) имеют вид

$$g^{ST} = \frac{n(a-c)}{2n+1}; \quad x^{ST} = \frac{(n+1)(a-c)}{2n+1}; \quad u^{ST} = \frac{(a-c)^2}{2n+1}. \quad (20)$$

**Забота о справедливости.** Теперь предположим дополнительно, что в модели (18)-(19) Центр заботится о справедливости. Примем для простоты  $n = 2$ . Если  $u_1 \approx u_2$ , то заботиться о справедливости нет смысла, поэтому без ограничения общности предположим, что  $u_1 \gg u_2$ . Тогда функция выигрыша Центра принимает вид

$$U(g, x) = \bar{u}(g, x) - \delta(u_1(g, x) - u_2(g, x)), \quad (21)$$

где  $\delta \in (0,1)$  – параметр заботы о справедливости.

В модели (19), (21) при  $n = 2$  и  $\delta < \sqrt{\frac{41}{81}}$  равновесие по Штакельбергу имеет вид

$$g_1^{STFC} = \frac{2(1+\delta)(a-c)}{5-9\delta^2}; \quad g_2^{STFC} = \frac{2(1-\delta)(a-c)}{5-9\delta^2}; \quad x_1 = x_2 = x^{STFC} = \frac{3(1-\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2}, \quad (22)$$

а соответствующие выигрыши агентов равны

$$u_1^{STFC} = \frac{(1+\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2}; \quad u_2^{STFC} = \frac{(1-\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2}. \quad (23)$$

Если  $\delta \geq \sqrt{\frac{41}{81}}$ , то оптимальные стратегии Центра  $g_1 = g_2 = 0$ , тогда  $u_1 = u_2$  и забота о справедливости не требуется. Итоговая структура предпочтений имеет вид:  $GC \succ C \succ NE \succ ST$ .

**Закключение.** В работе построены и аналитически исследованы модели олигополии Курно в виде игры в нормальной форме, при этом учтены варианты цепи поставок, "зелёного" эффекта и заботы о справедливости; для симметричных моделей олигополии Курно при различных способах организации экономических агентов и методах управления аналитически получены совпадающие структуры общественных и индивидуальных предпочтений. В дальнейшем предполагается провести численное исследование моделей с несимметричными агентами, а также игр в форме характеристической функции и динамических моделей олигополии Курно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirany V. (eds.)** Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007. 754 p.
2. Johari R., Tsitsiklis J.N. Efficiency loss in a network resource allocation game. *Mathematical Operations Research*. 2004, 29(3), 407-435.
3. **Roughgarden T.** Selfish Routing and the Price of Anarchy. MIT Press, 2005.
4. **Ivanov D., Sokolov B.** Adaptive Supply Chain Management. Springer, 2010.
5. **Estampe D.** Supply Chains: Performance and Evaluation. Wiley, 2018.
6. Ivanov D., Dolgui A. Viability of Intertwined Supply Networks: Extending the Supply Chain Resilience Angles towards Survivability. A Position Paper Motivated by COVID-19 Outbreak. *Int. J. of Production Research*. 2020, 58 (10), 2904-2915.
7. Nagarajan M., Sosis G. Game-theoretic analysis of cooperation among supply chain agents: Review and extensions. *European J. Operations Research*. 2008, 187(3), 719–745.
8. Azevedo S.G., Carvalho H., Machado V.C. The influence of green practices on supply chain performance: A case study approach. *Transp. Res. Part E: Logist. Transp. Rev.* 2011, 47(6), 850–871.
9. Sharma A., Jain D. Game-Theoretic Analysis of Green Supply Chain Under Cost-Sharing Contract with Fairness Concern. *Int. Game Theory Review*. 2021, 23(2), 2050017 (32 p.).
10. Sharma A., Nandi S. A review of behavioral decision making in the newsvendor problem. *Operations Supply Chain Management Int. J.* 2018, 11(4), 200–213.
11. Katok E., Olsen T., Pavlov V. Wholesale pricing under mild and privately known concerns for fairness. *Production Operations Management*. 2014, 23(2), 285–302.
12. Katok E., Pavlov V. Fairness in supply chain contracts: A laboratory study. *J. Operations Management*. 2013, 31(3), 129–137.
13. **Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.** Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995.
14. **Vives X.** Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. MIT Press, 1999.
15. **Neumann J. von, Morgenstern O.** Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1953.
16. Petrosjan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. *J. of Economic Dynamics and Control*. 2003, 27(3), 381-398.
17. Gromova E.V., Petrosyan L.A. On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games. *Automation and Remote Control*. 2017, 78, 1680-1692.

G.A. Ougolnitsky (Southern Federal University, Rostov-on-Don)

### **Comparative analysis of the efficiency of control methods in the static models of Cournot oligopoly**

We built and analytically investigated models of Cournot oligopoly as games in normal form. Green effect and fairness concern are considered. For symmetrical models of Cournot oligopoly the coincident structures of social and individual preferences for different modes of organization of the economic agents and control methods are received.

Г.Л. УТЕНКОВ, Т.И. УТЕНКОВА  
(Сибирский федеральный научный центр агробиотехнологий РАН,  
п. Краснообск, Новосиб. обл.)

Э.О. РАПОПОРТ  
(Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет,  
г. Новосибирск)

## АДАПТИВНЫЕ ПОДХОДЫ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПРОДУКТОВЫМИ КОМПЛЕКСАМИ

Основой благополучного будущего России является решение социальной проблемы по производству зерна на душу населения в размере 1 – 1,2 т/чел является [1]. Прогнозируется к 2035 г. обеспечить рост валового производства зерна до 150,3 млн. т. Причем дальнейший рост производства будет достигаться за счет повышения урожайности зерновых культур с использованием гибридных семян и удобрений отечественного производства, повышения энергоэффективности, применения инновационных технологий, а также почвозащитных мероприятий. Однако как следует из работы [2], развитию АПК препятствуют темпы технико – экономического обновления и его модернизации, и в первую очередь значительной части сельхозтоваропроизводителей вследствие дефицита собственных и заемных средств, их относительно слабой господдержки. Так, в 2020 г. без учета субсидий уровень рентабельности сельского хозяйства составил 13,6%, что почти вдвое ниже, чем необходимо для ведения отрасли на расширенной основе.

Зерновое производство Сибири на данном этапе не соответствует потенциальным ресурсам агроландшафтов территории. Низкий уровень продуктивности земледелия обусловлен слабыми социальными и финансовыми условиями товаропроизводителей, половина которых ведут экстенсивное земледелие без удобрений и средств защиты растений. Так, средняя урожайность зерновых по годам за 25 – летний период не изменилась, оставаясь на уровне 1,4...1,6 т/га; валовой сбор зерна снизился в 1,6 раза [3]; а биологический потенциал созданных сортов реализуется не более чем на одну треть. Причем, независимо от вида интенсификации применяемых технологий, идет повышение удельных затрат и энергозатрат на получение дополнительной единицы продукции. Сибирское земледелие по - прежнему остается экстенсивным, энергоемким и экологически несбалансированным [4]. Однако несмотря даже на жесткие природные и климатические условия, уровень господдержки в Сибирском федеральном округе в расчете на 1 га пашни, в 1,8...1,9 раза ниже среднероссийского, оказание несвязанной поддержки растениеводства составляет 21,3%, а отрасли животноводства - 12,3%. Негативные изменения отмечаются также и в животноводстве [3].

Верным путем развития АПК и его продовольственных подкомплексов на сегодняшний день считается наиболее максимальное использование возможностей научно - технического развития и ориентация реального сектора экономики на инновационное развитие. Причем в сельскохозяйственном производстве современная интенсификация заключается не в простом накоплении ресурсов, а в их качественном изменении, позволяющем существенно повысить эффективность их использования. Поэтому центр тяжести экономического роста в сельском хозяйстве переносится на применение качественно новых методов и технологий, значительно увеличивающих выход продукции на единицу затрат. Выделяются особо приоритетные направления научно-технического развития АПК:

- расширение фундаментальных и прикладных исследований по различным аспектам функционирования агропромышленного комплекса;
- углубление теоретических положений научно - технического прогресса и развитие инновационных процессов в АПК в новых экономических условиях [5].

Для изучения и создания антропогенных систем, к которым можно отнести продовольственные подкомплексы АПК, требуется инструмент, позволяющий анализировать особенности их функционирования, прогнозировать их развитие и обосновать принимаемые управленческие решения. Таким инструментом научного познания природно – антропогенной системы служит ее модель, которая отображает структуру, свойства, функционирование и развитие моделируе-

мой системы. Выделяют три концепции развития сложных систем. Именно третья концепция основана на принципе равноправного существования в системе как детерминированных, так и случайных связей. Поэтому она положена в основу стратегии поведения человека, как активного элемента управления природно – аграрными системами [6]. Частично такой подход нами изложен в работе [7].

Цель работы – разработать адаптивные подходы для управления продуктовыми комплексами в регионе. Для этого используются методы управления случайными блужданиями, разработанные в [8].

Основные результаты. Построена динамическая экономическая система с дискретным временем, состояния которой в каждый момент времени характеризуется целыми неотрицательными точками двумерного векторного пространства.

Имеется два подхода и два различных производства (сельхозорганизации, СХО – две подсистемы, подкомплексы), в каждом из которых состояние системы может изменяться на некоторый случайный вектор с целыми компонентами с заданными наборами вероятностей. Под управлением понимается вложение единичного ресурса в одно из производств, т.е. выбор в каждый момент времени одного из имеющихся выборов вероятностей. Цель управления – минимизация вероятности выхода из положительного квадранта. Доказывается существование оптимального управления, и приводится асимптотическая оценка этой вероятности.

**Теорема 1.** Оптимальное управление существует.

Для исследования свойств модели строится марковская цепь, возникающая при оптимальном управлении. При этом оказывается полезным рассмотрение системы уравнений относительно переменных  $\alpha$  и  $\beta$  (введенной в [8]), имеющей вид:

$$\begin{aligned} \sum p_i \alpha^{a_i} \beta^{b_i} &= 1; \\ \sum q_i \alpha^{a_i} \beta^{b_i} &= 1. \end{aligned}$$

Пусть  $g(x,y)$  – вероятность вырождения при оптимальном решении. Тогда справедлива **Теорема 2.** Существует такая константа  $K$ , что:

$$g(x,y) \geq K \min(x^\alpha y^\beta),$$

где минимум берется по всем строго положительным решением системы.

К сожалению, верхнюю оценку для всех точек получить не удастся. Более того, единственная возможная верхняя оценка для точек первого квадранта – единица. Это следует из того, что точка  $(x,y)$  может быть расположена очень близко к одной из полуосей по одной координате и далеко от начала координат. Из такой точки при соответствующем наборе вероятностей можно выйти из первого квадранта за один шаг. Однако, для некоторых частных случаев можно получить как верхние оценки, так и точное значение вероятности вырождения при оптимальном решении.

В качестве примера реализации предложенной модели можно рассмотреть сельскохозяйственную организацию (СХО) (предприятие), производящее зерно и мясо, как преобладающих по объему производства. СХО может работать в двух режимах:

в первом режиме оно производит в основном зерно, а производство мяса – вторично; во втором режиме СХО производит в основном мясо, а зерно – вторично.

Управление – регулярное субсидирование (единичным ресурсом) того или иного режима работы СХО.

В итоге, цель – выбрать решение по субсидированию, чтобы производство каждого продукта было ненулевым. Это положение полностью вписывается в рассмотренную схему и позволяет получить эффективный алгоритм управления СХО.

В качестве примера для реализации разработанной модели предлагается следующий алгоритм, включающий три исхода:

$$\begin{aligned} (x,y) &\rightarrow (x + 1, y) \text{ с вероятностью } p; \\ (x,y) &\rightarrow (x, y - 1) \text{ с вероятностью } q; \\ (x,y) &\rightarrow (x, y) \text{ с вероятностью } (1 - p - q); \\ (x,y) &\rightarrow (x + 1, y) \text{ с вероятностью } r; \end{aligned}$$



$(x, y) \rightarrow (x, y - 1)$  с вероятностью  $s$ ;

$(x, y) \rightarrow (x, y)$  с вероятностью  $(1 - r - s)$ .

Соответствующая ассоциативная система имеет вид:

$$p\alpha + \frac{q}{\beta} = p + q;$$

$$\frac{r}{\alpha} + s\beta = r + s.$$

Требуемое решение этой системы имеет вид:

$$\lambda = \frac{1 - q_1}{p_1}; \quad \mu = \frac{1 - p_1}{q_1},$$

где:

$$p_1 = \frac{p}{p + q}; \quad q_1 = \frac{r}{r + s}.$$

При этом должны выполняться неравенства:

$$\frac{p}{p + q} + \frac{r}{r + s} > 1.$$

Решение  $(\alpha = 1, \beta = 1)$  не представляет интереса. В итоге, при оптимальном решении вложений, вероятность вырождения  $p(x, y)$  определяется по выражению:

$$g(x, y) = \left(\frac{1 - q_1}{p_1}\right)^x \left(\frac{1 - p_1}{q_1}\right)^y.$$

Получаем оптимальное решение, порожаемое лучом:

$$x\alpha = y\beta.$$

Положительный квадрант разбивается этой прямой (лучом) на два сектора. Оптимальное решение – в одном секторе вложения в первую подсистему (производство зерна); в другом – вложение во вторую подсистему (производство мяса).

Для числовых расчетов получения оптимального луча (описанного выше) можно взять:  $p = (1/2)$ , а  $q = (1/3)$ . (Эти вероятности соответствуют первому режиму работы СХО). Для второго режима можно положить:  $r = (1/4)$ , а  $s = (5/8)$ . Тогда системы «а» принимает следующее решение: если:

$$p = (1/2), \quad q = (1/3), \quad \text{то } p_1 = (3/5);$$

$$\text{если } r = (5/8), \quad s = (1/4), \quad \text{то } q_1 = (5/7).$$

В итоге имеем:

$$p_1 + q_1 = (3/5) + (5/7) = (46/35) > 1.$$

При этом количественное соотношение принимают вид:

$$\alpha = (2/3) / (3/7) = (10/21) < 1;$$

$$\beta = (2/5) / (5/7) = (14/25) < 1.$$

Отсюда вероятность вырождения, при оптимальном решении, имеет вид:

$$g(x, y) = (10/21)^x \times (14/25)^y.$$

Задавая начальное состояние  $(x, y)$ , получим вероятность вырождения (или прекращение выпуска того или иного продукта (зерно или мясо)). Чем большие значения принимают  $X$  и  $Y$ , тем меньше вероятность вырождения.

**Выводы.** Предложенные подходы для адаптивного управления продуктовыми подкомплексами, как подсистемами в системе продовольственной безопасности, позволяют создать их рациональную структуру.

Решение задачи в целом позволяет в последующем проектировать и создавать требуемую структуру – векторов набора, как зерновых культур, так и мясных продуктов, отражающих их конкурентоспособность в складывающихся новых рыночных отношениях или же производить оценку оптимальности использования почвенно-климатических условий региона для решения продовольственной безопасности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лачуга Ю.Ф. Сельскохозяйственному производству – новые знания//Сельскохозяйственные машины и технологии. 2011. №3. С.3–8.
2. Алтухов А.И. Проблемы социально – экономического развития отечественного АПК требуют активного решения // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. 2021. №6. С.2–16.
3. Гамзиков Г.П. Точное земледелие в Сибири: реальности, проблемы и перспективы//Земледелие. 2022. №1. С.3–9.
4. Кирюшин В.И. Состояние и проблемы развития адаптивно – ландшафтного земледелия//Земледелие. 2021.№2. С..3–7.
5. Санду И.С., Нечаев В.И., Рыженкова Н.Е. От научно- технического к инновационному развитию АПК: проблемы и перспективы//Экономика, труд, управление в сельском хозяйстве. 2021.-№3(72).- С.3 -10.
6. Арефьев Н.В., Бреусов В.П., Осипов Г.К. Основы формирования природно – аграрных систем. Теория и практика.- СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2011. 532 с.
7. Утенков Г.Л., Рапопорт Э.О., Власенко А.Н. Синтез агротехнологий для управления продуктивностью агроценозов в Сибири//Российская сельскохозяйственная наука. 2021. №1. С. 21–25.
8. Рапопорт Э.О. Об одной модели распределения неделимого ресурса // Дискретный анализ и исследование операций. 2005. Серия 2.Т.12. №1. С. 55–73.

---

G.L. Utenkov, T.I. Utenkova (Siberian Federal Scientific Center of Agro-Bio-Technologies of the Russian Academy of Sciences), E.O. Rapoport, (Sobolev Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University). **Adaptive Approach in Controlling Product Complexes**

О.А. КУЗНЕЦОВА, Е.П. РОСТОВА

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара)

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УРОВНЯ КОНКУРЕНЦИИ В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ НА ПРОЦЕСС СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ В СИЛЬНОСВЯЗАННОЙ ИНТЕГРИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ НА РЫНКЕ ПРОДАЖ КРУПНОЙ БЫТОВОЙ ТЕХНИКИ

*В статье исследуется проблема взаимодействия агентов в сильносвязанной интегрированной системе при разном уровне конкуренции в банковской сфере. Анализируются особенности достижения согласования интересов агентов при различных значениях ключевых параметров.*

**Введение.** В условиях кризисной экономики, сопровождающейся снижением доходов компаний остро встаёт вопрос развития рынка и принятия мер для увеличения прибыли экономических агентов. Формирование интегрированных структур, обеспечивающих поддержку необходимых объёмов продаж, решает эту проблему. Согласование интересов в сильносвязанной интегрированной системе заключается в изменении цен агентов системы и перераспределение прибыли внутри системы. На процесс согласования сильное влияние оказывают уровень конкуренции на рынке.

Вопросы согласования интересов в многоагентных системах изучались отечественными [1, 2] и зарубежными авторами [3, 4]. Также в различных исследованиях существенным признано влияние фактора конкуренции [5, 6, 7].

**Постановка задачи.** Рынок ритейла формируется из трёхуровневых сильносвязанных интегрированных систем, представленных различным количеством агентов на каждом уровне: ритейлер, банк, страховая компания.

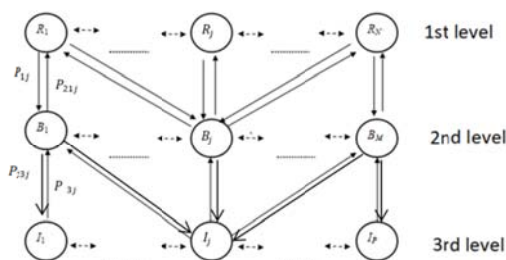


Рис.1 – Схема взаимодействия агентов в системе

$N$  – фактическое количество розничных продавцов на рынке,  $M$  – фактическое количество банков на рынке,  $P$  – фактическое количество страховых компаний на рынке,  $N_{max}$  – максимальное количество агентов на розничном рынке,  $M_{max}$  – максимальное количество агентов на рынке банковских услуг,  $P_{max}$  – максимальное количество агентов на страховом рынке,  $R_j$  –  $j$ -й агент на розничном рынке,  $B_j$  –  $j$ -й агент на рынке банковских услуг,  $I_j$  –  $j$ -й агент на страховом рынке. Рынок характеризуется как монополистическая конкуренция. Стрелки на рисунке 1 показывают направление вертикальной интеграции [1].

Функции прибыли агента  $i$ -го агента  $k$ -го рынка описываются функцией

$$\pi_{ki} = a_{ki} Q_{ki}^{b_{ki}+1} - c_{v_{ki}} Q_{ki} - c_{f_{ki}}, \quad k \in \{R, B, I\},$$

где  $a_{ki}$ ,  $b_{ki}$  – параметры функции цены  $i$ -го агента  $k$ -го рынка;  $k$  – элементы множества, принимающие следующие значения:  $k = R$  (розничный рынок);  $k = B$  (рынок банковских услуг);  $k = I$  (рынок страховых услуг);  $Q_{ki}$  – объём продаж  $i$ -го агента  $k$ -го рынка;  $c_{v_{ki}}$  – прямые затраты на единицу товара  $i$ -го агента  $k$ -го рынка,  $c_{f_{ki}}$  – постоянные затраты  $i$ -го агента  $k$ -го рынка.

Возможны следующие варианты состава системы:

- 1) система, состоящая из 1 ритейлера, 1 банка и 1 страховщика  $N = M = P = 1$ ;
- 2) система, состоящая из 1 ритейлера, нескольких банков и одного или нескольких страховщиков  $N = 1, M > 1, P \ll P_{max}$ ;

3) система, состоящая из нескольких ритейлеров, нескольких банков и нескольких страховщиков  $N > 1, M > 1, P > 1$ .

Особенностью согласования интересов в интегрированной системе является выбор одинаковых объемов продаж агентами  $\bar{Q}^S = \{Q_{ki}^S\}$  на каждом системном уровне с целью максимизации прибыли всей системы. Следует отметить, что изменение объемов продаж агентов осуществляется путем изменения цены услуг/товаров агента в соответствии с функциями спроса вида

$$p_k = d_k Q_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_k < 0, \quad d_k > 0,$$

где  $d_k, \alpha_k$  — параметры функции спроса.

Оптимальный объем продаж  $Q_{ki}^*$  для каждого участника системы определяется из условия максимизации прибыли этого участника:

$$Q_{ki}^* = \arg \max_{Q_{ki} > 0} \pi_{ki}, \quad i = \overline{1, k}.$$

При продаже неоптимального для себя объема продаж  $Q_{ki} \neq Q_{ki}^*$  агенты теряют прибыль, которая компенсируется распределением прибыли агента, выигравшего от установки существующих цен

$$\Delta \pi_{ki}(Q_{ki}) = \pi_{ki}(Q_{ki}^*) - \pi_{ki}(Q_{ki}).$$

Выдвинуты следующие гипотезы:

Гипотеза 1. В ситуации, когда оптимальный объем продаж банков  $Q_B^*$  значительно меньше оптимального объема продаж ритейлера  $Q_R^*$  ( $Q_B^* \ll Q_R^*$ ), согласование интересов агентов невозможно  $\bar{Q}^S \in \emptyset$  при сохранении цены каждого агента отличной от нуля либо приводит к выбору неоптимального для лидера объема продаж  $Q_{ki} \neq Q_{ki}^S$ . Лидером в этой ситуации выступает агент, приносящий максимальную прибыль, чаще всего ритейлер.

Гипотеза 2. В ситуации, когда суммарный оптимальный объем продаж банков  $Q_B^*$  равен оптимальному объему продаж ритейлера  $Q_R^*$  ( $Q_B^* = Q_R^*$ ), при согласовании достигается максимально возможная прибыль системы  $\exists \bar{Q}^S$ .

Гипотеза 3. В ситуации, когда суммарный оптимальный объем продаж банков  $Q_B^*$  больше оптимального объема продаж ритейлера  $Q_R^*$  ( $Q_B^* \gg Q_R^*$ ), между банками существует конкуренция за участие в интегрированной системе.

Рассмотрено несколько состояний агентов:

- 1) Агенты находятся вне системы.
- 2) Агенты находятся в интегрированной системе при условии

$$\sum_{i=1}^N Q_{Ri}^* > \sum_{i=1}^M Q_{Bi}^* > \sum_{i=1}^I Q_{Ii}^*.$$

- 3) Агенты в интегрированной системе при условии

$$\sum_{i=1}^N Q_{Ri}^* = \sum_{i=1}^M Q_{Bi}^* = \sum_{i=1}^I Q_{Ii}^*.$$

**Численный эксперимент.** На основе статистических данных были получены функции прибыли агентов системы [1], которые использованы при численном моделировании различных рыночных ситуаций. Для каждого из агентов системы были получены интервалы допустимых значений объемов продаж, удовлетворяющих условию неотрицательной прибыли:  $Q_R \in [28800; 3500000]$ ,

$Q_B \in [45; 8500]$ ,  $Q_I \in [0; 1200000]$ .

В ходе проведенных экспериментов были получены следующие результаты:

- 1) система, состоящая из 1 ритейлера, 1 банка и 1 страхового агента, невозможна,
- 2) при равном объеме продаж всех агентов системы суммарная функция прибыли достигла 1488017230 рублей,

- 3) при суммарном объёме продаж банков незначительно превышающем объём продаж ритейлера, конкуренция на уровне цен выгодна потребителю, при этом цены на банковский кредит не могут опуститься ниже 2%. В противном случае банк несёт убыток. При оптимальной ставке кредита 8% возможности для изменения объёма продаж весьма ограничены.

**Заключение.** На основе функций спроса выявлена зависимость прибыли от цены товара или услуги. Аналитически определены оптимальные объёмы продаж, рассчитаны пределы допустимого изменения цен для каждого агента.

С помощью функций прибыли определены интервалы объёмов продаж для агентов системы. Показано, что при существующих функциях создание интегрированной системы, состоящей из 1 ритейлера и 1 банка невозможно.

При принятом условии равенства агентов банковской системы общая прибыль системы определяется для случая, когда объём продаж ритейлера равен общему объёму продаж банков. На основе общей прибыли интегрированной системы для равного суммарного оптимального объёма продаж и для неравного объёма продаж, были подтверждены гипотезы о том, что набор агентов в банковской сфере обеспечивает достижение максимальной прибыли интегрированной системы.

Определены цены агентов, при которых достигается максимизация прибыли системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гераськин М.И., Кузнецова О.А. Анализ монополистической конкуренции на рынках, связанных с продажей товаров в кредит // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020). Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодёжной школы (Самара, 26-29 мая) в 4 т. 2020.
2. В.Н. Бурков, Б. Данев, А.К. Еналее. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. – 248 с.
3. The Benefits of a Vertically Integrated Optical Systems Supplier Daniel Staloff Corning Advanced Optics, 60 O'Connor Rd, Fairport, NY 14450 // D Staloff - Optical Design and Engineering VII, 2018
4. Carlson, M., Correia, S., Luck, S. The effects of banking competition on growth and financial stability: Evidence from the national banking era // M Carlson, S Correia, S Luck - Journal of Political Economy, 2022
5. Gottschalg O., Zollo M. Interest Alignment and Competitive Advantage /Gottschalg O., Zollo M. // Academy of Management Review Vol. 32, No. 2 – 2007.
6. Guthrie D., Xiao Z., Wang J. Aligning the Interests of Multiple Principals: Ownership Concentration and Profitability in China's Publicly-Traded Firms / Guthrie D., Xiao Z., Wang J. // NYU Working Paper No. EC-07-32, pp.- 45, 2011.
7. Романова О.С. Согласование интересов участников рыночных отношений в рамках локального экономического пространства / Романова О.С. // Теоретическая экономика, 2014

---

O.A. Kuznetsova, E.P. Rostova (Samara National Research University, Samara). **Analysis of the influence of competition level in the banking sector on the process of reconciling the interests in a tightly-coupled integrated system at the market of large appliances**

The paper studies the problem of economic agents interaction in a tightly-coupled integrated system at different levels of competition in the banking sector. The special aspects of achieving the harmonization of the agents' interests with various values of key parameters are analyzed.

Е.П. РОСТОВА, А.А. ЗИНОВЬЕВА

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара)

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ НА СНИЖЕНИЕ РИСКА НА ПРЕДПРИЯТИЯХ НЕФТЕГАЗОВОГО КОМПЛЕКСА**

*В статье представлены математические модели аварийности на предприятиях нефтегазового комплекса РФ, разработанные для производства различных видов топлива. Расчеты основываются на статистической базе за пятнадцатилетний период. В моделях отражена зависимость числа аварий при производстве различных видов топлива и энергии от затрат на превентивные мероприятия и объема производимой продукции.*

**Введение.** Промышленное производство является флагманом развития экономики региона и государства. Вопросы промышленной безопасности всегда являются актуальными и связаны с различными риск-факторами. Причинами рискованных событий в промышленности могут быть природные явления, человеческий фактор, вредные и опасные условия труда, устаревшее оборудование и т.д. Нефтегазовая отрасль в РФ составляет около 20% ВВП за последние пять лет [1]. Производство в данной отрасли представлено выработкой тепло- и электроэнергии, производством нефти, газа, угля, и других видов топлива. Каждый вид производства имеет свои специфические особенности и характеризуется различными рисками. Формирование плана превентивных мероприятий основывается на характеристиках рискованных событий различных производств, на эффективности предупредительных мер и т.д. Следует отметить необходимость комплексного подхода к решению проблемы оптимального распределения ресурсов на снижение ущерба от промышленных рисков.

Проблема промышленных рисков рассматривалась отечественными и зарубежными учеными с помощью различного математического аппарата: мультиагентных систем [2–4], многокритериальных моделей [5, 6], метода сценариев [7]. Также следует отметить значительный перечень работ, посвященных изучению рисков отдельных отраслей [8 - 10]. Риски нефтегазовой отрасли изучаются с точки зрения исследования статистических данных и с позиции теоретического моделирования [11–13].

**Постановка задачи.** Рассмотрим промышленное предприятие, выпускающее  $n$  видов продукции. Тогда  $Q_i$  – объем производства  $i$ -го вида продукции  $i = \overline{1, n}$ ,  $A$  – количество аварий на предприятии,  $E$  – затраты на превентивные мероприятия, направленные на снижение числа аварий,  $X$  – ущерб от аварий. Суммарные издержки, связанные с авариями представляют сумму издержек на снижение аварийности и ущерб от аварий  $C = E + X$ . Ущерб зависит от количества аварий, объема производства и от предупредительных мероприятий  $X = X(A, Q, E)$ , где  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ . Запишем задачу нахождения оптимального размера затрат на предупредительные

мероприятия по критерию минимизации издержек:

$$C = E + X(A, E, Q) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} X = X(A, E, Q), \\ Q = \sum_{i=1}^n Q_i, \\ X \leq X^{\max}, \\ Q \leq Q^{\max}, \\ E \leq E^{\max}. \end{cases}$$

Здесь  $X^{\max}$  – максимально возможный ущерб,  $Q^{\max}$  – максимально возможный объем производства,  $E^{\max}$  – максимально возможная сумма затрат на предупредительные мероприятия. Построение функций для каждого отдельного предприятия и/или отрасли производства позволит отразить специфику и решить частную задачу, имеющую практическую значимость для объекта исследования.

**Результаты.** На основе статистических данных по нефтегазовой отрасли РФ за период 2005–2020 годов были построены математические модели числа аварий для различных видов производства (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Вид производства	Модель
Нефть	$90,39Q^{0,0301}e^{(-0,00000584 \cdot E)}$
Газ	$90,39Q^{0,0301}e^{(-0,00000590 \cdot E)}$
Уголь	$90,71Q^{0,0369}e^{(-0,00000604 \cdot E)}$
Продукты переработки топлива	$108,80Q^{0,0000}e^{(-0,00000567 \cdot E)}$
Горячие побочные энергоресурсы	$110,42Q^{0,0000}e^{(-0,00000590 \cdot E)}$
Электроэнергий	$110,37Q^{0,0000}e^{(-0,00000590 \cdot E)}$
Теплоэнергия	$110,37Q^{0,0000}e^{(-0,00000590 \cdot E)}$
Котельно-печное топливо	$99,70Q^{0,0142}e^{(-0,00000585 \cdot E)}$

Следует отметить, что модели имеют общий вид:  $A_i = B_i Q_i^{\beta_i} e^{-\xi_i E}$ , где  $B_i$ ,  $\beta_i$  – параметры, отражающие зависимость числа аварий от производственного процесса,  $\xi_i$  – параметр, характеризующий эффективность затрат на предупредительные мероприятия. Тогда ущерб определяется из следующей функции:  $X = \bar{x}_i A_i$ , где  $\bar{x}_i$  – средний размер ущерба от одной аварии при производстве  $i$ -го вида продукции. Функция издержек  $C$  для полученных зависимостей имеет вид:  $C = \sum_{i=1}^8 \left( \bar{x}_i B_i Q_i^{\beta_i} e^{-\xi_i E_i} + E_i \right)$ . Тогда оптимальная сумма затрат на предупредительные мероприятия будет определяться по формуле  $E_i = \frac{1}{\xi_i} \ln(\xi_i B_i \bar{x}_i Q_i^{\beta_i})$ .

**Заключение.** Сформулирована задача определения оптимальной суммы затрат на предупредительные мероприятия по критерию минимизации суммарных издержек. Для нефтегазовой отрасли РФ построены модели, отражающие зависимость ущерба от объема производства и от эффективности предупредительных мероприятий. Разработанные функции позволили решить для рассматриваемой отрасли задачу оптимизации затрат с учетом специфики различных видов производства. Полученные результаты могут быть использованы предприятиями нефтегазовой отрасли РФ при формировании плана предупредительных мероприятий и при расчете затрат на их осуществление.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики <https://rosstat.gov.ru>
2. Ahn H.J., Park S.J. Modeling of a Multi-agent System for Coordination of Supply Chains with Complexity and Uncertainty. In: Lee J., Barley M. (eds) *Intelligent Agents and Multi-Agent Systems. PRIMA 2003. Lecture Notes in Computer Science*, 2003. vol 2891. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-39896-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-39896-7_2)
3. Finch P. Supply chain risk management. *Supply Chain Management*. 2004. Vol. 9 No. 2. P. 183-196. <https://doi.org/10.1108/13598540410527079>
4. Geraskin M.I., Rosotva E.P. Optimization of Costs for Prevention of Industrial Accidents Risks in Economic Sectors. *Proceedings of ITNT 2021 - 7th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*, 2021
5. Edjossan-Sossou A.M., Galvez D., Deck O., Heib M.A., Verdel T., Dupont L., Chery O., Camargo M., Morel L. Sustainable risk management strategy selection using a fuzzy multi-criteria decision approach. *International Journal of Disaster Risk Reduction*. 2020. Vol 45, May 2020, 101474 <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2020.101474>

6. Yazdani M., Gonzalez E.D.R.S. and Chatterjee P. A multi-criteria decision-making framework for agriculture supply chain risk management under a circular economy context. *Management Decision*. 2019. Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. <https://doi.org/10.1108/MD-10-2018-1088>
7. Kulba V., Schelkov A., Chernov I., Zaikin O. Scenario analysis in the management of regional security and social stability. *Intelligent systems reference library*, 2016. Vol. 98, P. 249 – 268.
8. Bouloiz H., Garbolino E. System Dynamics Applied to the Human, Technical and Organizational Factors of Industrial Safety. *Safety Dynamics*. 2019.(p. 93 – 106). Cham: Springer
9. **Лоскутов Н.В.** Диагностика и оценка рисков предприятий стекольной промышленности [Текст]: автореф. дис. ... канд. экон. наук: 08.00.05 / Николай Васильевич Лоскутов. – Саратов, 2005. – 23 с.
10. **Тер-Григорьянц А.А.** Риски в сельском хозяйстве: монография [Текст]/ А.А. Тер-Григорьянц. – М-во образования РФ, Сев.-Кавк. гос. техн. ун-т. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2004. – 75 с
11. Vatanparast S. Hand and Finger Injury Risks in Oil and Gas Industry // *EHS Today*. 2016.
12. Alison E. Health and Safety in Oil and Gas Extraction // *AGI*. 2018. №22/24.
13. Shahata W. A Tool to Identify the Proactive Corrective Actions after the Accidents in Oil and Gas Industry // *International Journal of Petroleum and Petrochemical Engineering (IJPPE)*. 2018. V. 4. P. 32-44

---

Е.Р. Rostova, А.А. Zinovyeva (Samara National Research University, Samara). **Mathematical models of optimization of risk reduction costs at oil and gas complex enterprises**

The article presents mathematical models of accidents at the enterprises of the oil and gas complex of the Russian Federation, developed for the production of various types of fuel. The calculations are based on a statistical base for a fifteen-year period. The models reflect the dependence of the number of accidents in the production of various types of fuel and energy on the costs of preventive measures and the volume of products produced.



В. А. ЕРОФЕЕВА

(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

С. Э. ПАРСЕГОВ

(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

**РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ**

*Расчет балансов является неотъемлемой задачей систем учета предприятий. Централизованный подход к решению задачи не всегда применим, а фиксация отдельных потоков может исказить найденные оценки. В работе предложен новый подход к расчету согласованных балансов в виде задачи распределенной оптимизации, позволяющий как снизить размерность вычислений, так и сохранить приватность обрабатываемой информации.*

**Введение.** Распределенные методы являются важным направлением современной теории оптимизации и управления: использование знаний о сетевой структуре исследуемой системы позволяет улучшать существующие требования по быстродействию, а также придавать новые преимущества, связанные с децентрализацией, снижением размерности обрабатываемых и передаваемых данных, а также их приватностью. В работе представлен распределенный вариант оптимизационной задачи расчета баланса. Задача согласования измеренных данных (также используется термин расчет материального баланса) является одной из ключевых в рамках систем учета промышленных предприятий (например, см. [1–4]). Она также лежит в основе таких задач, как нахождение грубых ошибок измерений и утечек, оптимизация и управление технологическими процессами, прогнозирование и т. д. В рамках классической «централизованной» постановки задачи согласования данных предполагается наличие математической модели предприятия (или предприятий) с графом материальных/энергетических потоков, ограничениями на их значения, известными погрешностями измерительного оборудования, а также выполнение условий по наблюдаемости модели и избыточности измеряемых данных. При линейности ограничений мы приходим к задаче метода наименьших квадратов, решение которой в зависимости от размерности задачи может быть найдено как численно, так и аналитически [3]. Такая постановка и методы решения имеют долгую историю, все аспекты задачи хорошо известны. Тем не менее, во многих случаях даже при работе с простой моделью могут возникать сложности и получаться неприемлемые результаты. Так, при наличии в схеме потоков областей, относящихся к разным собственникам, балансы сводятся по каждой области отдельно, а граничные потоки – потоки между областями – фиксируются. Такая декомпозиция модели, с одной стороны, позволяет сохранить приватность данных о процессах внутри каждой области и понизить размерность подзадачи. С другой стороны, принудительное присваивание значений граничным потокам может привести к некорректному расчету балансов в областях. В статье предлагается распределенный и децентрализованный подход к решению задачи согласования данных, позволяющий найти решение, достаточно близкое к аналитическому. Подход основан на использовании ускоренного метода переменных множителей (A-ADMM [5, 6]), являющегося обобщением классического ADMM [7, 8], и позволяет областям обмениваться данными только по пересекающимся переменным, относящимся к граничным потокам между ними.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  узлов, соединенных между собой потоками, обозначенными дугами на схеме. Система разделена на  $M = \{1, \dots, m\}$  областей, относящихся к разным собственникам/зонам ответственности (см. для примера рис. 1 в разделе моделирования), в каждой из которых имеется независимый от других центр обработки измеренных данных (значений потоков). Каждая область  $i \in M$  измеряет локальное состояние своей области:

$$z_i = x_i + \varepsilon_i, \quad i \in M, \#(1)$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^{d_i}$  – состояние области  $i$ ,  $\varepsilon_i$  – нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и известной матрицей ковариаций  $R_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$ . Предполагается, что случайные величины независимы и одинаково распределены как в разных областях, так и в разные момен-

ты времени. В каждой области требуется найти оценку  $\hat{x}_i$  истинного значения  $x_i$ , являющуюся решением следующей задачи:

$$\min f_i(\hat{x}_i) \quad s. t.: A_i \hat{x}_i = 0, \#(2)$$

где  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times d_i}$  – матрица связи между потоками области  $i$ ,  $n_i$  – количество узлов в области  $i$ .

В частном случае, если области не связаны потоками друг с другом, то возможно локальное решение задачи каждым центром обработки данных. Однако, как видно из Рис. 1, области связаны, а измерители, необходимые для нахождения оценки, могут принадлежать только одной из смежных областей. Вследствие этого, требуется согласование данных между областями.

Введем множество  $S_{i,j}$ , состоящее из номеров элементов вектора состояния области  $i$ , являющихся общими с областью  $j$ . Пусть  $x_i[j]$  ( $x_j[i]$ ) – часть вектора  $x_i$  ( $x_j$ ), включающая только пересекающиеся состояния. Например, из Рис. 1,  $x_1[2] = x_2[1]$  состоят из значений состояния между узлами 1 и 3 соответствующей области. При независимом решении  $m$  задач оптимизации возникает проблема с измеримостью при нахождении состояний, относящихся к нескольким областям, так как каждый прибор учета принадлежит только одной из областей. Таким образом, задача оптимизации для всей системы формулируется в следующем виде:

$$\min_{\hat{x}_i \in \mathcal{X}_i} \sum_{i=1}^m f_i(\hat{x}_i) \#(3)$$

$$s. t.: A_i \hat{x}_i = 0, \hat{x}_i[j] = \hat{x}_j[j], \forall i \in M, \forall j \in N_i,$$

где  $N_i$  – множество областей, смежных с областью  $i$ .

В статье рассматривается линейная постановка задачи с целевой функцией вида:

$$f_i(\hat{x}_i) = (z_i - \hat{x}_i)^T R_i^{-1} (z_i - \hat{x}_i). \#(4)$$

При решении задачи (2) для системы в целом, без разделения на подобласти, возможно нахождение решения аналитическим способом [3]. Однако, ввиду проблемы измеримости, такой подход не применим к решению задачи (3). В работе предлагается распределенный алгоритм для задачи согласования данных.

**Распределенный алгоритм на основе ускоренного ADMM.** Введем вспомогательные переменные. Пусть  $D_{i,j} = [e_{i,1}, \dots, e_{i,l}]^T$ , где  $l = |S_{i,j}|$ , т. е. число элементов в множестве  $S_{i,j}$ ,  $e_{i,q} \in \mathbb{R}^{d_i}$  – вектор со значением 1 на месте индекса  $q \in S_{i,j}$  и нулевыми значениями в остальных индексах. Из структуры схемы потоков следует, что  $x_i[j] = x_j[i] = v_{i,j} = v_{j,i}$ , а также  $|S_{i,j}| = |S_{j,i}|$ .

Составим дополненную функцию Лагранжа для задачи (3) применительно к области  $i$ , воспользовавшись подходом из [п. 3.1.1, 7] для записи упрощенной формы:

$$\mathcal{L}(\hat{x}_i, v_{i,j}, \gamma_i, \lambda_{i,j}) = f_i(\hat{x}_i) + \frac{\mu}{2} \|A_i \hat{x}_i + \gamma_i\|^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{j \in N_i} \|D_{i,j} \hat{x}_i - v_{i,j} + \lambda_{i,j}\|^2, \#(5)$$

где  $\gamma_i, \lambda_{i,j}$  – множители Лагранжа,  $\rho, \mu$  – выбираемые коэффициенты.

Алгоритм состоит в последовательном обновлении переменных  $\hat{x}_i, v_{i,j}, \gamma_i, \lambda_{i,j}$  на каждой итерации  $k$  для каждой области  $i \in M$ :

$$\hat{x}_i^{k+1} = \arg \min_{\hat{x}_i} \left( f_i(\hat{x}_i) + \frac{\mu}{2} \|A_i \hat{x}_i + \gamma_i\|^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{j \in N_i} \|D_{i,j} \hat{x}_i - v_{i,j} + \lambda_{i,j}\|^2 \right) \#(6)$$

$$v_{i,j}^{k+1} = \arg \min_{v_{i,j}} \left( \frac{\rho}{2} \sum_{j \in N_i} \|D_{i,j} \hat{x}_i^{k+1} - v_{i,j} + \lambda_{i,j}\|^2 \right) \#(7)$$

$$\gamma_i^{k+1} = \gamma_i^k + \mu A_i \hat{x}_i^{k+1} \#(8)$$

$$\lambda_{i,j}^{k+1} = \lambda_{i,j}^k + \rho (D_{i,j} \hat{x}_i^{k+1} - v_{i,j}^{k+1}) \#(9)$$

Формулы (6)-(9) получены аналогично классической схеме ADMM. Учитывая явный вид целевой функции (4), получим аналитическую форму для  $\hat{x}_i^{k+1}$  и  $v_{i,j}^{k+1}$ . Для этого продифференцируем функцию Лагранжа по  $\hat{x}_i$ :

$$\hat{x}_i^{k+1} = \frac{2z_i + \mu R_i A_i^T \gamma_i^k - \rho R_i \sum_{j \in N_i} (D_{i,j}^T v_{i,j}^k - D_{i,j}^T \lambda_{i,j}^k)}{2 + R_i A_i^T A_i + \rho R_i \sum_{j \in N_i} D_{i,j}^T D_{i,j}}. \#(10)$$

Аналогично получим выражение для  $v_{i,j}^{k+1}$  и  $v_{j,i}^{k+1}$ , приравняв к нулю продифференцированную функцию Лагранжа. Просуммируем полученные выражения и заметим, что по изначаль- ному предположению  $v_{i,j}^{k+1} = v_{j,i}^{k+1}$ , получим:

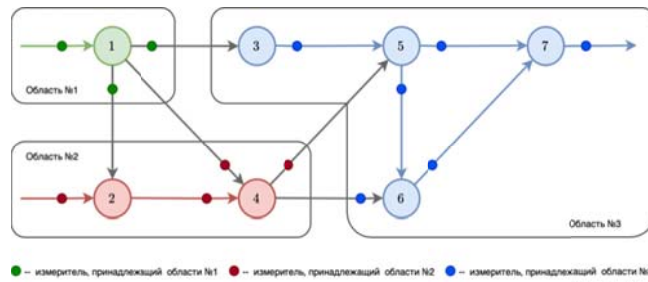
$$v_{i,j}^{k+1} = v_{j,i}^{k+1} = \frac{1}{2} (D_{i,j} \hat{x}_i^{k+1} + D_{j,i} \hat{x}_j^{k+1} + \lambda_{i,j}^k + \lambda_{j,i}^k). \quad (11)$$

Заметим, что для вычисления  $v_{i,j}^{k+1}$  и  $v_{j,i}^{k+1}$  требуется обмен данными между областями  $i$  и  $j$  для вычисления полученного для них выражения.

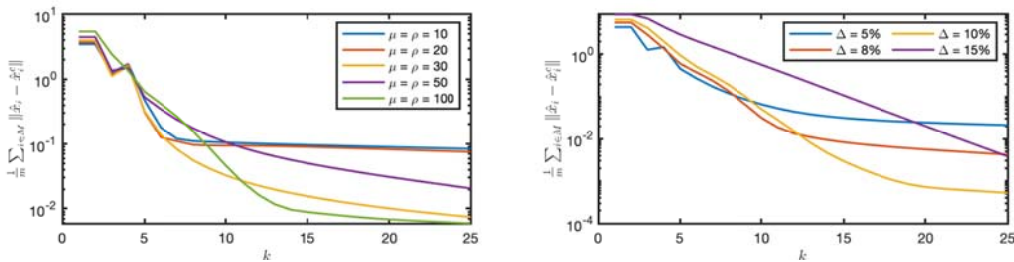
Воспользуемся схемой ускорения из работы [6] и получим итоговую схему алгоритма. Для каждой области  $i \in M$  выполняется последовательность следующих действий с обменом необ- ходимой информацией:

1. Инициализация:  $k = 0, \alpha_i^0, \rho, \mu$
2. Установить текущий номер итерации  $k + 1$ , получить оценку  $\hat{x}_i^{k+1}$  по формуле (10)
3. Для области  $j \in N_i$  запросить данные  $D_{j,i} \hat{x}_j^{k+1}, \lambda_{j,i}^k$ , обновить  $v_{i,j}^{k+1}$  по формуле (11)
4. Рассчитать  $\gamma_i^{k+1}, \lambda_{i,j}^{k+1}$  по формулам (8)-(9). Установить  $\alpha_i^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + (\alpha_i^k)^2}}{2}$
5. Обновить  $\gamma_i^{k+1} = \gamma_i^{k+1} + \frac{\alpha_i^k - 1}{\alpha_i^{k+1}} (\gamma_i^{k+1} - \gamma_i^k), \lambda_{i,j}^{k+1} = \lambda_{i,j}^{k+1} + \frac{\alpha_i^k - 1}{\alpha_i^{k+1}} (\lambda_{i,j}^{k+1} - \lambda_{i,j}^k)$
6. Обновить  $v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^{k+1} + \frac{\alpha_i^k - 1}{\alpha_i^{k+1}} (v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k)$ . Перейти на шаг 2

**Моделирование.** Продемонстрируем работу ускоренного распределенного алгоритма согла- сования данных на примере системы, представленной на рис. 1.



Вектор состояния этой системы имеет вид  $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ , где  $x_i \in M = \{1, 2, 3\}$  – вектор состояния области  $i$ . В моделировании взяты следующие точные значения потоков:  $x_1 = [10, 7, 2, 1]^T, x_2 = [5, 7, 1, 12, 8, 5]^T, x_3 = [2, 2, 8, 5, 5, 5, 10, 15]^T$ . Задается уровень ошибки измерений  $\Delta$  в процентах и определяется среднеквадратичное отклонение каждого измерителя в области  $i$  равное  $3\sigma_i = \frac{\Delta}{100} x_i$ . Измерители назначены областям в соответствии с изображени- ем. Распределенный алгоритм сравнивался с централизованным аналитическим решением. Ре- зультаты сравнения представлены на Рис. 2, где  $\hat{x}_i$  – оценка, полученная предложенным алго- ритмом,  $\hat{x}_i^C$  – централизованное решение,  $k$  – число итераций.



**Заключение.** В статье представлен распределенный ускоренный алгоритм на основе метода переменных множителей для решения задачи согласования данных. Результаты моделирования проведены для разных значений параметров и уровня ошибок. Как видно из результатов, полученное распределенным способом решение находится в малой окрестности аналитического решения. Таким образом, централизованная постановка задачи сводится к децентрализованной с желаемой точностью получаемого решения.

*Работа проводилась при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых (МК-372.2022.4)*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Veverka V., Madron F. Material and Energy Balancing in the Process Industries: From Microscopic Balances to Large Plants, first ed Elsevier B.V., Amsterdam, 1997.
2. Romagnoli J., Sánchez M.C. Process Systems Engineering – Vol. 2 - Data Processing and Reconciliation for Chemical Process Operations, 1999.
3. Narasimhan S., Jordache C. Data Reconciliation and Gross Error Detection: An Intelligent Use of Process Data, first ed Gulf Publishing, Houston, 2000.
4. Valle E., Kalid R., Secchi A., and Kiperstok A. Collection of Benchmark Test Problems for Data Reconciliation and Gross Error Detection and Identification. Computers and Chemical Engineering, 2018, Vol. 111, P. 134-148.
5. Lin Z., Li H., and Fang C. Accelerated algorithms for constrained convex optimization. In Accelerated Optimization for Machine Learning, 2020, 57–108. Springer.
6. Parsegov S., Kubentayeva S., Gryazina E., Gasnikov A., and Ibáñez F. ADMM-based Distributed State Estimation for Power Systems: Evaluation of Performance, IFAC-PapersOnLine Vol. 53, Issue 5, 2020, P. 182-188.
7. Boyd S., Parikh N., Chu E., Peleato B., and Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3, P. 1–122.
8. Kekatos V., Giannakis G.B. Distributed robust power system state estimation. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(2), 1617–1626.

---

V.A. Erofeeva (Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St.Petersburg), S.E. Parsegov (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow). **Data reconciliation through distributed optimization**

Data reconciliation is an integral task of industrial process monitoring and control systems. The centralized approach to solving the problem is not always applicable, and the fixation of individual flows can distort the estimates found. The paper proposes a new approach to data reconciliation in the form of a distributed optimization problem, which allows both reducing the dimension of calculations and preserving the privacy of the information being processed.

Е.Г. МУСАТОВА, А.А. ЛАЗАРЕВ  
(Институт проблем управления РАН, Москва)

## ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОЙ СТОИМОСТИ ПОДПРОЕКТОВ, ВЫПОЛНЯЕМЫХ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ

*Рассматривается одноприборная задача теории расписаний с разными продолжительностями обслуживания работ и ограничениями предшествования между работами. Некоторые работы проекта объединены в подпроекты. Стоимость подпроекта зависит от его длительности, т.е. от промежутка времени между началом выполнения первой работы подпроекта и окончанием выполнения последней работы подпроекта. Ставится задача минимизации суммарной стоимости выполнения подпроектов. Показано, что данная задача является NP-трудной. Предлагается метод решения, полиномиально зависящий от количества работ и экспоненциально – от количества подпроектов.*

**Введение.** Одноприборные задачи теории расписаний – популярная и хорошо изученная область дискретной оптимизации. В [1] представлен обзор результатов исследования различных постановок таких задач. В зависимости от целевой функции задача построения расписания обслуживания работ на одном приборе может быть как полиномиально разрешимой, так и NP-трудной. Предлагаемый доклад посвящен решению одноприборной задачи с ограничениями предшествования между работами и новой целевой функцией, имеющей много практических приложений. Предполагается, что некоторые работы объединены в подпроекты, стоимость которых определяется временем их выполнения. Необходимо минимизировать суммарную стоимость всех подпроектов. С практической точки зрения, для выполнения подпроекта может быть задействован дополнительный ресурс, т.е. стоимость подпроекта зависит от времени аренды этого ресурса. В задачах управления проектом с ограничениями на ресурсы такая целевая функция часто используется применительно к задачам строительства или ремонта сложных объектов (см., например, [2–6]). Если же рассматривать задачу составления расписания занятий в учебном процессе, то в качестве подпроектов могут подразумеваться учебные курсы, изучение которых не должно быть слишком «растянуто» по времени. В этом случае под стоимостью курса понимается его продолжительность, умноженная на вес (коэффициент важности) курса. Примером такой задачи может служить составление плана индивидуальной подготовки космонавтов к полету на Международную космическую станцию [7]. Вес курса – это некоторая интегрированная величина, учитывающая стоимость аренды тренажеров, платы преподавателям, а также важность прохождения занятий курса в сжатые сроки. Отметим, что использование подобной целевой функции применительно к одноприборным задачам теории расписания авторам не известно. В работе доказываемость NP-трудности поставленной задачи, и предлагается алгоритм решения, который может эффективно применяться в случае большого количества работ и небольшого количества подпроектов.

**Постановка задачи.** Имеется множество работ  $I = \{1, \dots, n\}$ , составляющих проект, которые необходимо обслужить на одном приборе. Одновременно прибор может обслуживать не более одной работы. Время обработки  $i$ -й работы прибором составляет  $p_i$  единиц времени,  $i \in I$ . Запрещены прерывания в обслуживании работ. Задан ациклический ориентированный граф отношений предшествования  $G(I, E)$ . Если работы  $i, j \in I$  соединены дугой в графе, т.е.  $(i, j) \in E$ , то работа  $i$  должна быть выполнена раньше работы  $j$ . Все работы доступны для обслуживания в начальный момент времени. Имеется  $K$  подпроектов, представляющих собой подмножества работ  $I_k \subset I, k \in \{1, \dots, K\}$ . Для каждого подпроекта  $I_k$  однозначно заданы первая и последняя работы, которые будем обозначать  $i_k^f$  и  $i_k^l$  соответственно и называть *крайними* работами подпроекта  $I_k$ . Иными словами, из вершины-работы  $i_k^f$  в графе  $G(I, E)$  существуют пути во все остальные вершины курса  $I_k$ , а также существуют пути в вершину  $i_k^l$  из всех вершин, принадлежащих множеству  $I_k \setminus \{i_k^l\}$ . Допустимое, т.е. не противоречащее отношениям предшествования, расписание  $\pi$  для каждой работы  $i \in I$  однозначно определяет момент  $C_i(\pi)$  окончания

обслуживания на приборе. Пусть за каждую единицу времени, что длится подпроект  $I_k$ , необходимо выплатить сумму, равную  $w_k$  условных единиц. Ставится задача минимизации суммарной стоимости выполнений подпроектов, которая определяется следующей функцией:

$$H(\pi) = \sum_{k=1}^K w_k \left( C_{i_k^l}(\pi) - C_{i_k^f}(\pi) + p_{i_k^f} \right), \quad (1)$$

при условии, что общая длительность проекта, т.е. всех работ, не превышает величину  $C_{max} = \sum_{i=1}^n p_i$ . В соответствии с принятой в теории расписаний классификацией [8], обозначим данную задачу как  $1|prec|H$ , где 1 означает один прибор,  $prec$  – наличие отношений предшествования, а  $H$  – целевую функцию (1).

**Свойства задачи и метод ее решения.** Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Задача  $1|prec|H$  является NP-трудной.

Доказательство теоремы осуществляется сведением к рассматриваемой задаче NP-трудной одноприборной задачи  $1|prec|\sum w_i C_i$  минимизации взвешенной суммы моментов окончания обслуживания работ [9]. В силу ограничения на общую продолжительность проекта в оптимальном расписании нет перерывов между работами, поэтому целевая функция (1) может быть переписана в виде

$$H(\pi) = \sum_{k=1}^K w_k \left( \sum_{j:\pi(i_k^f) \leq \pi(j) \leq \pi(i_k^l)} p_j \right), \quad (2)$$

где  $\pi(j)$  – порядковый номер выполнения работы  $j \in I$  при расписании  $\pi$ . Стоимость одного подпроекта в расписании зависит от множества работ, обслуженных между его крайними работами, а суммарная стоимость всех подпроектов определяется взаимным порядком всех крайних работ подпроектов и расположением остальных работ между крайними работами. В связи с этим основная идея метода решения задачи заключается в переборе всех возможных перестановок крайних работ курсов и решении для каждой такой перестановки вспомогательной задачи. Обозначим через  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{2K}\}$  некоторую перестановку крайних работ. Скажем, что расписание  $\pi$  соответствует перестановке  $\Lambda$ , если

$$\pi(\lambda_1) < \pi(\lambda_2) < \dots < \pi(\lambda_{2K}). \quad (3)$$

Поскольку граф  $G(I, E)$  ациклический, такая перестановка существует. Построим граф  $G_1(I, E)$  путем добавления в граф  $G(I, E)$  дуг  $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_2, \lambda_3), \dots, (\lambda_{2K-1}, \lambda_{2K})$ , если их нет в исходном графе. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации суммарной стоимости подпроектов (2) для множества работ  $I$  и графа  $G_1(I, E)$ . Предлагается полиномиальный алгоритм решения такой задачи. Опишем основную идею алгоритма.

Будем говорить, что работа  $j$ , не являющаяся крайней, помещена в ячейку  $q \in \{1, \dots, 2K - 1\}$ , если работа обслуживается прибором после крайней работы  $\lambda_q$  и до крайней работы  $\lambda_{q+1}$ . Если  $q = 0$ , то работа обслуживается до  $\lambda_1$ , а если  $q = 2K$ , то работа обслуживается после  $\lambda_{2K}$ . Определим цену ячейки  $q$  как

$$f(q) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq q \\ \bar{x}(\lambda_i) = 1}} w_{\bar{k}(\lambda_i)} - \sum_{\substack{1 \leq i \leq q \\ \bar{x}(\lambda_i) = 2}} w_{\bar{k}(\lambda_i)}, \quad (4)$$

где  $\bar{k}(\lambda)$  – номер курса крайней работы  $\lambda$ , а  $\bar{x}(\lambda)$  принимает значение 1, если крайняя работа  $\lambda$  является первой работой в подпроекте, и значение 2, если  $\lambda$  является последней работой в подпроекте.

В процессе работы алгоритма для каждой работы  $j$  определяется множество допустимых ячеек, и выбирается ячейка  $q^*(j)$  как первая из допустимых ячеек, доставляющих минимум в (4). Далее строится новый граф  $G_2(I, E)$  следующим образом: для каждой работы  $j$  такой, что  $q^*(j) > 0$  в граф  $G_1(I, E)$  добавляется дуга  $(\lambda_{q^*(j)}, j)$ , если ее не было в графе  $G_1(I, E)$ , и для каждой работы  $j$  такой, что  $q^*(j) < 2K$  добавляется дуга  $(j, \lambda_{q^*(j)+1})$ . Доказано, что построенный таким образом граф  $G_2(I, E)$  является ациклическим, а любая его топологическая сорти-

ровка доставляет оптимальное решение вспомогательной задачи. Сложность алгоритма решения вспомогательной задачи не превышает  $O(n^2)$  операций, где  $n$  – количество работ.

Пусть  $B$  – множество возможных перестановок крайних работ подпроектов, не противоречащих ограничениям предшествования задачи. Тогда за не более чем  $O(|B|n^2)$  операций может быть найдено решение исходной задачи. Таким образом, если количество подпроектов в задаче невелико или структура графа отношений предшествования между работами не допускает большого количества перестановок крайних работ подпроектов, данный подход может эффективно применяться для решения поставленной задачи.

**Заключение.** В работе рассмотрена NP-трудная задача минимизации суммарной стоимости подпроектов. Предлагается алгоритм, позволяющий находить решение задачи при большом количестве работ и небольшом фиксированном количестве подпроектов. Дальнейшее направление исследований может касаться построения эффективных нижних оценок и метода ветвей и границ для случая большого числа подпроектов, а также разработки методов решения задачи с несколькими параллельными приборами или задачи управления проектом с ограничениями на ресурсы.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 20-58-S52006 МНТ\_a.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brucker P. *Scheduling Algorithms*. Heidelberg: Springer, 2007. 372 p.
2. Biruk S., Jaśkowski P. The work continuity constraints problem in construction projects' network models. *Archives of Civil Engineering*. 2009. Vol. 55. № 1. P. 29–41.
3. Csébfalvi A.B., Csébfalvi G. Hammock activities in project scheduling. *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of POMS*. 2005.
4. El-Rayes K., Moselhi O. Resource-driven scheduling of repetitive activities. *Construction management and Economics*. 1998. Vol. 16. № 4. P. 433–446.
5. Vanhoucke M., Van Ossaer K. Work Continuity in a Real-Life Schedule: the Westerschelde Tunnel. 2005. *Working Papers of Faculty of Economics and Business Administration*, Ghent University, Belgium 04/271.
6. Vanhoucke M. Work Continuity Constraints In Project Scheduling. 2004. *Working Papers of Faculty of Economics and Business Administration*, Ghent University, Belgium 04/265.
7. Lazarev A., Khusnullin N., Musatova E., Yadrentsev D., Kharlamov M., Ponomarev K. Minimization of the weighted total sparsity of cosmonaut training courses. *Communications in Computer and Information Science*. 2019. Vol. 974. P. 202–215.
8. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra, J. K., Kan, A. R. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Annals of discrete mathematics*. 1979. Vol. 5. P. 287-326.
9. Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Complexity of scheduling under precedence constraints. *Operations Research*. 1978. Vol. 26. № 1. P. 22–35.

---

E.G. Musatova, A.A. Lazarev (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow).

#### **A single-machine problem of minimizing the total cost of subprojects**

A one-machine scheduling problem with different job durations and with precedence constraints among jobs is considered. Some jobs are grouped into subprojects. The cost of a subproject depends on its duration, i.e. from the time interval between the start of the first job of the subproject and the end of the last job of the subproject. The problem is to minimize the total cost of subprojects. It is shown that this problem is NP-hard. A solving method is proposed that depends polynomially on the number of jobs and exponentially – on the number of subprojects.

МОРОЗОВ Н.Ю., ГРИШИН Е.М., ПРАВДИВЕЦ Н.А.  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ ПЕРЕВОЗОК НА ПРИМЕРЕ ПЕРЕВАЛОЧНОГО ПУНКТА С МОРСКОГО НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ ТРАНСПОРТ

*Предлагается комплексная математическая модель согласования доставки грузов морским транспортом с последующей перегрузкой на железную дорогу, включающая две подзадачи: задачу распределения причалов (ВАР) и задачу формирования железнодорожных составов. Совместное решение этих взаимосвязанных задач позволяет учитывать в процессе решения все ограничения и находить решение, с учетом как оптимизации перегрузки в морском порте, так и с учётом технических особенностей железной дороги. Проведено тестирование разработанной модели на сгенерированных псевдореальных данных при помощи оптимизатора Gurobi.*

**Введение.** При доставке грузов на большие расстояния часто применяются так называемые мультимодальные перевозки, то есть доставка груза с использованием нескольких видов транспорта. Международные мультимодальные перевозки с использованием железнодорожного и водного транспорта являются неотъемлемой частью комплексного логистического обслуживания и составляют основу современного мирового грузооборота, их объём с каждым годом увеличивается. Для моделирования работы перевалочных пунктов морской порт – железная дорога, играющих ключевую роль в данном типе мультимодальных перевозок, рассмотрена комплексная задача разгрузки прибывающих кораблей и формирования железнодорожных составов с целевой функцией минимизации суммарного взвешенного времени доставки грузов до пунктов назначения и стоимости формирования составов. Предполагается, что известны параметры порта и количество причалов и горизонт планирования, заданы ограничения на типы грузов, разгружаемых на каждом причале. Требуется назначить причал для разгрузки каждого прибывающего корабля. Задача распределения кораблей по причалам, рассматриваемая в качестве первой подзадачи в данной работе, относится к классу задач Berth allocation problem (ВАР). Это NP-полная задача [1], которая широко рассматривается в зарубежной литературе и обычно решаются при помощи различных эвристических алгоритмов или пакетов-оптимизаторов (CPLEX, Gurobi) [2–4]. Проведённый анализ существующих исследований задачи ВАР показал, что чаще рассматривают динамическую ВАР, хотя большое количество исследований также посвящено и классической ВАР. В статической задаче все суда уже находятся в порту, тогда как в динамической корабли прибывают в порт с течением времени, а в порту в момент их прибытия могут уже находиться другие корабли. При этом в одних моделях рассматривается непрерывный причал с разгрузочными кранами, а в других – дискретное причальное пространство. Для решения задач ВАР используют решатели (CPLEX, Gurobi) или различные эвристические алгоритмы. Также встречаются гибридные методы, которые позволяют получить точное решение за более короткое время.

Задача формирования железнодорожных составов отдельно от задачи планирования причалов, исследована достаточно хорошо. Так, в [5] рассматриваются задачи с похожей постановкой, а именно задача формирования составов, наряду с задачей оперативного управления движением составов и составлением расписания движения грузовых поездов и другие. Рассмотренные задачи решаются с применением методов теории расписаний. В частности, более подробно рассмотрен случай грузопотока между двумя станциями при различных условиях. В [6] приведено решение задачи управления парком грузовых вагонов методом целочисленного линейного программирования. Подзадача формирования составов, рассматриваемая в настоящей работе, специфична наличием портов, в которые прибывают грузы из единственной начальной точки, в то время как в [5, 6] для грузов изначально заданы различные станции отправления, расположенные по всему графу.

Изучение постановок вышеупомянутых задач позволило сделать вывод, что рассматриваемая в настоящей работе задача является классической ВАР. Новизна исследования заключается в одновременном решении проблемы ВАР с задачей формирования железнодорожных соста-



вов, доставляющих грузы в места их назначения. При этом мы считаем, что задачи ВАР и последующего формирования железнодорожных составов нельзя рассматривать независимо друг от друга. Такой подход может внести изменения в расписание назначения кораблей на причалы при наличии грузов разного типа. Такой подход позволит получать общее решение для оптимизации разгрузки кораблей и формирования составов. Целевой функцией является минимизация взвешенных затрат на доставку всех грузов до пунктов их назначения. Полученное решение в большинстве случаев будет эффективнее использовать имеющиеся ресурсы, чем композиция из решений двух независимых задач.

**Задача координации перевалки грузов с морского порта на железную дорогу.** Задача заключается в том, чтобы как можно быстрее и дешевле доставить грузы, приходящие в порт на кораблях, в пункт назначения. Каждому кораблю должны быть назначены причал и интервал разгрузки, после чего должны быть сформированы железнодорожные составы. Каждый причал оснащен набором погрузчиков, тип и количество которых влияет на скорость разгрузки и на множество типов грузов, которые можно на этом причале разгрузить. Первую часть задачи можно охарактеризовать как динамическую задачу ВАР с дискретным распределением причалов (на причале в каждый момент времени может находиться только один корабль) и детерминированными временами поступления кораблей и временами их разгрузки. Вторая часть, являющаяся задачей формирования составов, может быть охарактеризована как задача кластеризации грузов на основе таких признаков как пункт назначения, тип груза, объем, время поступления и весовой коэффициент.

Времена прибытия в порт кораблей в течение периода планирования определены и известны заранее. Сформированные составы движутся к одному из пунктов назначения напрямую. Все пункты назначения являются ближайшими к порту сортировочными станциями. В обобщенной задаче возникают следующие ограничения: разгрузка корабля может происходить только на одном причале; в каждый момент времени на причале может разгружаться не более одного корабля; разгрузка корабля на причале может быть произведена только после прибытия корабля в порт; разгрузка корабля на причале может быть произведена только в интервал доступности причала (когда он освободится после предыдущего периода планирования или планового обслуживания); на разгрузку на причал можно назначить только корабль с грузами, типы которых могут быть разгружены на этом причале; все грузы должны быть доставлены; количество вагонов в каждом поезде не должно превышать заданного максимального значения, связанного с мощностью локомотивов; все грузы в составе одного поезда должны иметь одинаковый пункт назначения; поезд может быть отправлен только после готовности всех грузов, входящих в состав (соответствующие грузы должны быть перегружены с корабля на железнодорожный состав); одновременно не могут быть отправлены по одному пути больше одного поезда, а между отправлением любых двух поездов должен проходить технический интервал времени не меньше заданного. Известна фиксированная стоимость формирования составов. В качестве целевой функции используется минимизация суммарных взвешенных затрат на доставку всех грузов до пунктов их назначения.

В качестве целевой функции рассмотрена минимизация суммарного взвешенного времени доставки грузов до пунктов назначения. Для задач разгрузки причалов и формирования составов с грузами построена обобщенная математическая модель и сгенерированы псевдореальные данные, соответствующие Дальневосточной железной дороге. Модель была протестирована при помощи оптимизатора Gurobi, а время счета было ограничено одним часом. Большинство примеров малой размерности были решены оптимально. Для других примеров было найдено хорошее решение достаточно быстро (за несколько минут), а остальное время оптимизатор доказывал оптимальность данного решения. Для решений, оптимальность которых доказана не была, разница между найденным значением целевой функции и её нижней оценкой не превышала 10%. Стоит отметить, что с большой долей вероятности найденные решения являются оптимальными, несмотря на то, что оптимизатору не удалось доказать это за отведенное время. На примерах малой размерности, которые были решены оптимально, в этом можно убедиться: решения, оптимальность которых была доказана, были найдены за достаточно короткий промежуток времени, после чего (около 90% времени работы оптимизатора) осуществлялось доказательство оптимальности полученного решения.

**Заключение.** В данной работе предложена комплексная модель задач координации мультимодальной доставки железнодорожным и водным транспортом. Совместное рассмотрение задач в рамках общей модели позволяет получить более качественное решение, учитывающее как особенности задачи разгрузки кораблей, так и особенности формирования составов на железной дороге. Проведённый вычислительный эксперимент на псевдореальных данных, соответствующих размерности практических задач, показал, что при ограничении времени счёта в 60 минут погрешность целевой функции не превышает 10%, что позволяет эффективно использовать данную модель применительно к реальным задачам.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, НТУ «Сириус», ОАО «РЖД» и Образовательного Фонда «Талант и успех», проект № 20-38-51010.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Flavia M. M., Marcello S. The Berth Allocation Problem: A Strong Formulation Solved by a Lagrangean Approach // *Transportation Science*. 2007. Vol. 41. P. 265–280.
2. De Oliveira R. M., Mauri G. R., Lorena L. A. N. Clustering search for the berth allocation problem // *Expert Syst. Appl.* 2012. Vol. 39. No. 5. P. 5499–5505
3. Lujan E., Vergara E., Rodriguez-Melquiades J., Jimenez-Carrion M., Sabino-Escobar C., Gutierrez F. A fuzzy optimization model for the berth allocation problem and quay crane allocation problem with n quays // *J. of Mar. Sc. and Eng.* 2020. Vol. 9. Paper 152.
4. Correcher J. Models and algorithms for berth allocation problems in port terminals. Spain: Universitat de Valencia, 2017.
5. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования. М.: ИПУ РАН, 2012. 92 с.
6. Белоусов Ф.А., Неволин И.В., Хачатрян Н.К. Моделирование и оптимизация планов грузовых железнодорожных перевозок, выполняемых транспортным оператором // *Бизнес-информатика*. 2020. Т. 14. № 2. С. 21–35.

---

Morozov N.Yu., Grishin E.M., Pravdivets N.A. (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow). **Models of the problem of multimodal transportation on the example of a transportation point from sea to railway**

A complex mathematical model is proposed for coordinating the delivery of goods by sea with subsequent transshipment to the railroad, which includes two subtasks: the berth distribution problem (BAP) and the problem of train formation. The joint solution of these interrelated tasks makes it possible to take into account all the restrictions in the process of solving and find a solution, taking into account both the optimization of transshipment in the seaport and the technical features of the railway. The developed model was tested on the generated pseudo-real data using the Gurobi optimizer.

В. В. ЦЫГАНОВ

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

## ОБУЧЕНИЕ ДИХОТОМИЧЕСКОМУ РАНЖИРОВАНИЮ И УПРАВЛЕНИЮ В ДВУХУРОВНЕВОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ С СОВЕТНИКОМ

*Рассматривается двухуровневая динамическая стохастическая организационно-техническая система, состоящая из Центра и дальновидного активного элемента (АЭ). Целью Центра является использование стохастического потенциала АЭ. Однако случайные значения потенциала АЭ неизвестны Центру. Пользуясь этим, АЭ может выбирать состояние, отличное от потенциала, чтобы максимизировать собственную целевую функцию. Для стимулирования АЭ к раскрытию своего потенциала в каждом периоде, Центр создает организационную структуру, включающую менеджера и его советника. При этом в механизме функционирования системы используется процедура обучения менеджера дихотомическому ранжированию АЭ с использованием рекомендаций советника. Найдены достаточные условия синтеза такого механизма, при котором АЭ полностью использует свой потенциал в каждом периоде. Полученные результаты проиллюстрированы на примере повышения энергоэффективности линейного предприятия филиала ОАО «РЖД».*

**Введение.** Концепция ИНДУСТРИЯ 4.0 создала возможности использования эффективных инструментов искусственного интеллекта (в первую очередь, машинного обучения) для решения задач управления организационно-техническими системами. Традиционно машинное обучение связано с теорией управления в широком смысле (включая идентификацию систем, оптимизацию и другие дисциплины, изучаемые в сообществе специалистов по теории управления). Многие алгоритмы обучения, обеспечивающие достаточную скорость сходимости, были разработаны в XX веке в рамках теории управления [1]. Но дальнейшее развитие машинного обучения в начале XXI века привело к определенному расхождению с теорией управления. Проблема в том, что в «цунами» работ в области машинного обучения очень мало строгих математических доказательств [1]. Это расхождение в последние годы стало предметом обсуждения в сообществе специалистов по теории управления и обучения на тему «Существует ли разрыв между управлением и обучением?» [2]. Чтобы ответить на этот вопрос при управлении организационно-техническими системами, необходимо учитывать человеческий фактор. Основное направление повышения эффективности трудовых ресурсов в условиях изменений связано с раскрытием внутренних резервов и ресурсов производственных систем за счет активизации их работников. Для этого разрабатываются такие теоретические направления, как теория активных систем и теория организационного управления [3]. Важное место в них занимают математические модели адаптивных, самообучающихся и самоорганизующихся активных систем [4]. Следующий шаг связан с включением в механизмы управления организационно-техническими системами моделей человеко-машинного обучения. Такая модель включена, например, в систему управления бизнесом [5].

Предлагаемый доклад посвящен исследованию, с использованием строгих математических рассуждений и доказательств, возможности использования машинного обучения с учителем для управления двухуровневой динамической стохастической активной системой. На верхнем её уровне находится Центр, а на нижнем - дальновидный активный элемент (АЭ). Целью Центра является использование стохастического потенциала АЭ. Однако случайные значения потенциала АЭ Центру неизвестны. Пользуясь неинформированностью Центра, АЭ может выбирать состояние, отличное от потенциала, чтобы максимизировать собственную целевую функцию. Для стимулирования АЭ к раскрытию своего потенциала в каждом периоде, Центр создает организационную структуру, включающую менеджера и его советника. При этом в механизме управления активной системой используется процедура обучения дихотомическому

ранжированию АЭ. Необходимо найти условия синтеза такого механизма управления с одновременным обучением менеджера, при котором АЭ полностью использует свой потенциал.

**Постановка задачи.** Пусть  $p_t$  – случайная величина, характеризующая максимальные возможности (потенциал) АЭ в периоде  $t$ ,  $p_t \in D \subset R_+^1$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Асимметричная информированность.** Будем предполагать, что АЭ узнает свой потенциал  $p_t$  перед началом периода  $t$ . Центру же известно лишь, что  $p_t \in D$ . В таких случаях говорят об асимметричной информированности элементов системы [6]. Центр заинтересован в использовании неизвестного ему потенциала  $p_t$ . Для этого Центр назначает стимул АЭ, зависящий от показателя деятельности (состояния) АЭ  $y_t$ , наблюдаемого Центром,  $y_t \leq p_t$ . Однако АЭ, зная потенциал  $p_t$ , может выбрать свое состояние  $y_t$ ,  $y_t \leq p_t$ , так, чтобы получать больше стимулов. Поэтому Центру необходимо создать механизм, обеспечивающий  $y_t = p_t$ . Рассмотрим синтез такого механизма на основе обучения дихотомическому ранжированию.

**Дихотомическое ранжирование** предполагает, что Центр присваивает АЭ ранг  $k$ ,  $k = \overline{1, 2}$ , путем отнесения  $y_t$  одному из двух доменов  $D_1$  и  $D_2$ ,  $D_1 \cup D_2 = D$ . Именно, при  $y_t \in D_k$  Центр присваивает АЭ ранг  $k$ ,  $k = \overline{1, 2}$ . Неправильное ранжирование связано с рисками. Обозначим:  $l_{12}$  — риск ошибочного присвоения АЭ ранга 2 (тогда как АЭ достоин ранга 1);  $l_{21}$  — риск ошибочного присвоения АЭ ранга 1 (тогда как АЭ заслужил ранг 2). При этом требуется процедура обучения ранжированию, которая минимизирует математическое ожидание этих рисков, в условиях неполной информированности Центра. Решения в Центре принимает неопытный менеджер, которого поддерживает советник, дающий в периоде  $t$  совет

$$C(y_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \geq q \\ 0, & \text{если } y_t < q \end{cases}, \quad q > 0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где  $C(\bullet)$  — процедура поддержки,  $q$  — параметр, используемый советником. Получив совет  $C(y_t)$ , менеджер в периоде  $t$  использует, с целью обучения, процедуру стохастической аппроксимации [4] для формирования будущего значения параметра решающего правила

$$a_{t+1} = A(a_t, y_t) = a_t - \gamma_t [a_t - 0.5 - l_{12} + (l_{12} + l_{21})C(y_t)], \quad \gamma_t > 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t < \infty, \quad a_0 = c^0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Кроме того, в периоде  $t$  менеджер использует параметр  $a_t$  для определения ранга АЭ

$$r_t = R(y_t, a_t) = \begin{cases} 2, & \text{если } y_t \geq a_t \\ 1, & \text{если } y_t < a_t \end{cases}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $R(\bullet)$  — процедура ранжирования. В том же периоде  $t$  менеджер определяет стимул АЭ

$$s_t = S(r_t) \in R^1, \quad S(r_t) \uparrow r_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где  $S(\bullet)$  — процедура стимулирования, при которой стимул АЭ ( $s_t$ ) монотонно возрастает (не убывает) с рангом АЭ ( $r_t$ ). Совокупность процедур поддержки  $C(\bullet)$  (1), аппроксимации  $A(\bullet)$  (2), ранжирования  $R(\bullet)$  (3) и стимулирования  $S(\bullet)$  (4) образует механизм функционирования рассматриваемой активной системы  $\Sigma = (C, A, R, S)$ .

**Выбор АЭ** зависит от дисконтированной суммы текущих и будущих стимулов АЭ

$$V_t = \sum_{\tau=t}^{t+\theta} \rho^{\tau-t} s_{\tau}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где  $\rho$  — коэффициент дисконтирования,  $\theta$  — количество периодов, учитываемых АЭ. Предположим, что, выбирая состояние  $y_t$ , АЭ руководствуется принципом максимального гарантированного результата, зная, что  $p_{\tau} \in D$  и  $0 \leq y_{\tau} \leq p_{\tau}$  в будущем периоде  $\tau$ ,  $\tau = \overline{t+1, t+\theta}$ . Тогда АЭ выбирает  $y_t$  так, чтобы увеличить гарантированно значение (5):

$$w_t(y_t) = \min_{p_{\tau} \in D, \tau=t+1, t+\theta} \min_{0 \leq y_{\tau} \leq p_{\tau}, \tau=t+1, t+\theta} V_t, \quad 0 \leq y_t \leq p_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

Множество оптимальных выборов АЭ  $y_t^*$ , максимизирующих (6), имеет вид:

$$W_t(\Sigma, p_t) = \{0 \leq y_t^* \leq p_t \mid w_t(y_t^*) \geq w_t(y_t), 0 \leq y_t \leq p_t\}. \quad t=0,1,\dots$$

**Оптимальный синтез и построение механизма функционирования активной системы.**

Цель Центра — максимальное использование потенциала АЭ:  $y_t^* = p_t$ ,  $t = 0,1,\dots$ . Предположим, что справедлива гипотеза благожелательности АЭ по отношению к Центру: если  $p_t \in W_t(\Sigma, p_t)$ , то  $y_t^* = p_t$ ,  $t=0,1,\dots$ . Это означает, что АЭ занижает  $y_t$  только в том случае, если это ему выгодно.

**Теорема.** Для того, чтобы АЭ использовал потенциал в каждом периоде:  $y_t^* = p_t$ ,  $t = 0,1,\dots$ , достаточно механизма  $\Sigma = (C, A, R, S)$ .

**Пример: механизм повышения энергоэффективности предприятия филиала ОАО «РЖД».** В ОАО «РЖД» создана многоуровневая система управления энергопотреблением [7]. Энергоэффективность линейных предприятий, расположенных на нижнем (территориальном) уровне ОАО «РЖД», контролируют на региональном уровне топливно-энергетические центры железных дорог — филиалов ОАО «РЖД» (НТЭЦ). Рассмотрим модель иерархической системы управления энергоэффективностью на региональном и территориальном уровне ОАО «РЖД» на основе механизма  $\Sigma = (C, A, R, S)$ . В этой модели роль АЭ играет линейное предприятие железной дороги, а роль Центра - НТЭЦ. Менеджер НТЭЦ наблюдает за фактической энергоэффективностью предприятия  $y_t^*$ , но не знает истинные его возможности (потенциал)  $p_t$ . Принятию им решений способствует советник, дающий рекомендации  $S(y_t^*)$ ,  $t=0,1,\dots$ . С помощью (1) и (2), менеджер формирует параметр решающего правила  $a_{t+1}$ . Согласно (3), при  $y_t^* \geq a_t$  предприятие считается эффективным (ранг  $r_t = 2$ ) и поощряется. И наоборот, при  $y_t^* < a_t$  предприятие считается неэффективным (ранг  $r_t = 1$ ) и наказывается. Любое из этих решений связано с определенным риском. При первом решении возникает риск ( $l_{12}$ ) того, что менеджер ошибочно поощряет неэффективное предприятие. При втором решении возникает риск ( $l_{21}$ ) того, что менеджер ошибочно наказывает эффективное предприятие.

При этом параметр  $a_t$  играет роль нижнего предела энергоэффективности  $y_t$ , при достижении которого предприятие поощряется в периоде  $t$ . Кроме того, согласно (1) и (2), чем выше энергоэффективность  $y_t$ , тем ниже параметр  $a_t$  на будущий период  $\tau$ ,  $\tau = t+1, t+\theta$ . Но, согласно (3), этот параметр  $a_t$  играет роль порогового значения эффективности  $y_t$ , при достижении которого предприятие получает более высокий ранг ( $r_t = 2$ ) в периоде  $t$ . Следовательно, предприятию становится легче получить более высокий стимул в периоде  $\tau$ , даже при меньшей реализации случайного потенциала  $p_t$ ,  $\tau = t+1, t+\theta$ . Иными словами, с повышением энергоэффективности  $y_t$ , предприятие получает не только более высокий ранг и стимул в текущем периоде. Также снижаются пороговые значения, достижение которых необходимо для более высоких рангов и стимулов в будущем. Это дополнительно заинтересовывает предприятие в раскрытии потенциала энергоэффективности, т.е. в выборе  $y_t^* = p_t$ . Этот пример иллюстрирует прозрачность механизма  $\Sigma = (C, A, R, S)$ , а также практическую применимость положений теоремы.

**Заключение.** Доказанная теорема и практический пример показывают, что разработанный механизм управления с обучением дихотомическому ранжированию  $\Sigma = (C, A, R, S)$  может быть инструментом поддержки принятия решений в двухуровневой организационно-технической системе в условиях неопределенности. Такой механизм мотивирует активный элемент (линейное предприятие) повышать свою эффективность до максимально достижимого уровня в условиях изменений. Это дает возможность менеджеру организации эффективно обучаться с помощью советника и принимать оптимальные решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fradkov A. Early history of machine learning. Berlin: 21st IFAC World Congress. 2020. # 3204.
2. Recht B. Reflections on the learning-to-control renaissance. Berlin: 21st IFAC World Congress. 2020. # 4707.
3. Burkov V. Gubko M. Kondratiev V. Korgin N. and Novikov D. Mechanism design and management. Mathematical methods for smart organizations. New York: NOVA Publishers, 2013.
4. Tsyganov V. Designing adaptive information models for production management. 2019. *Procedia CIRP*. Vol. 84. P. 1088–1093.
5. Tsyganov V. Tutoring mechanisms of business management. Moscow: 21st IEEE Intern. Conf. on Business Informatics. 2019. P. 60–67.
6. Auster S. Asymmetric awareness and moral hazard. *Games and Economic Behavior*. 2013. Vol. 82. P. 503–521.
7. **Цыганов В.В., Адамец Д.Ю.** Комплекс механизмов управления разработкой и внедрением энергоэффективных средств и технологий на железнодорожном транспорте / Труды 7-й научно-техн. конф. «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование». М.: НИИАС, 2018. С.214-219.

V.V.Tsyganov (V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow)

#### **Learning for dichotomic ranking and control in a two-level active system with advisor**

A two-level dynamic stochastic organizational system is considered, consisting of the Center and a far-sighted active element (AE). The purpose of the Center is to use the stochastic potential of the AE. However, random values of the AE potential are unknown to the Center. Taking advantage of the uninformedness of the Center, the AE can choose a state different from the potential in order to maximize its own objective function. In order to encourage AE to reveal its potential in each period, the Center creates an organizational structure that includes a manager and his adviser. At the same time, the mechanism of functioning of the organizational system uses the procedure of dichotomous ranking of AEs based on the adviser's instructions. Stochastic approximation is used to determine the optimal parameter of the decision rule. The problem of asymmetric awareness of the manager, adviser and AE about the potential is formulated. A set of AE choices is determined that maximizes its target function for a given mechanism of the organizational system functioning. Sufficient conditions for the synthesis of such a mechanism are found, under which the AE fully uses its potential in each period. The results obtained are illustrated by the example of increasing the energy efficiency of a linear enterprise of a branch of Russian Railways.

## Секция 4

# ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

А. В. ЕЛИЗАРОВА, Г. А. САИТОВА, И. А. ЯКОВЛЕВ  
(Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа)

## ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ЗАРЯДА АККУМУЛЯТОРНОЙ БАТАРЕИ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*В работе предлагается использование гибридного метода для оценки состояния заряда аккумуляторной батареи, обеспечивающего наиболее эффективное функционирование по сравнению с существующими алгоритмами. Определена проблема и разработана архитектура гибридного метода.*

**Введение.** В автономных системах автоматического управления, где источником питания является аккумуляторная батарея необходимо с особой точностью оценивать её состояние заряда, так как в критических ситуациях это может повлиять на успешный исход событий. На данный момент существуют два подхода к оценке состояния заряда: использование электрохимической модели аккумулятора и представление его в виде эквивалентной электрической схемы.

Электрохимическая модель [1] сложна в реализации, так как содержит в себе множество эмпирических констант и большое количество математических операций над числами с плавающей запятой, из-за чего применение этого способа осложнено в большинстве микроконтроллеров. Однако, он даёт приемлемую точность при соблюдении всех условий.

Представление аккумулятора в виде эквивалентной электрической схемы [2] является более простым вариантом, однако теряет в точности по сравнению с электрохимической моделью. На практике применяется именно этот подход с одним и более методами оценки состояния заряда аккумулятора. Существует ряд исследований, в которых рассматривается эффективность комбинаций разных методов оценки состояния заряда [3, 4]. В зависимости от условий эксплуатации и характера нагрузки эффективность методов меняется, и на определённых участках более точную оценку даёт менее сложный алгоритм.

В работе предлагается использование гибридного метода в задаче оценки состояния заряда аккумуляторной батареи в системах автоматического управления, эффективность которого обеспечивается за счёт оптимальной комбинации различных существующих методов оценки. Помимо классических методов алгоритм включает возможность применения интеллектуальных, таких как нейронные сети [5, 6]. Это позволит повысить точность, сохранив общую ресурсоёмкость неизменной.

### Гибридный метод оценки состояния заряда аккумуляторной батареи

#### *Формулировка задачи*

Основной задачей является определение архитектуры метода оценки состояния заряда аккумуляторной батареи так, чтобы на вход системе управления подавались параметры напряжения ( $U$ ), потребляемого тока ( $I$ ) и температуры ( $T$ ) батареи, а на выходе была спрогнозированная оценка состояния заряда, на основе которой система управления могла бы принять решение о дальнейшем перераспределении энергетических ресурсов. При этом эффективность метода должна быть выше существующих. Под эффективностью метода понимать обратное произведение среднеквадратичной ошибки прогнозирования и количества выполненных простых математических операций.

### Решение задачи

В системе управления блок гибридного метода располагается в зоне прогнозирования (Рис. 1). На вход поступает вектор числовых значений параметров напряжения, тока и температуры  $\{U_t, I_t, T_t\}$  в момент времени  $t$ . После вычислений и преобразований входного вектора гибридным методом прогнозируется оценка состояния заряда батареи  $\hat{y}_t$ , которая поступает в зону принятия решения, где на основе неё происходит установка нового состояния объекта управления  $s_t$ . Принимаемая оптимальным одно из возможных состояний, задаваемых вектором  $\vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , в зоне принятия решения генерируется задающий сигнал управления  $g(t)$ , который через регулятор поступает на вход объекта управления в скорректированной форме  $u(t)$ .

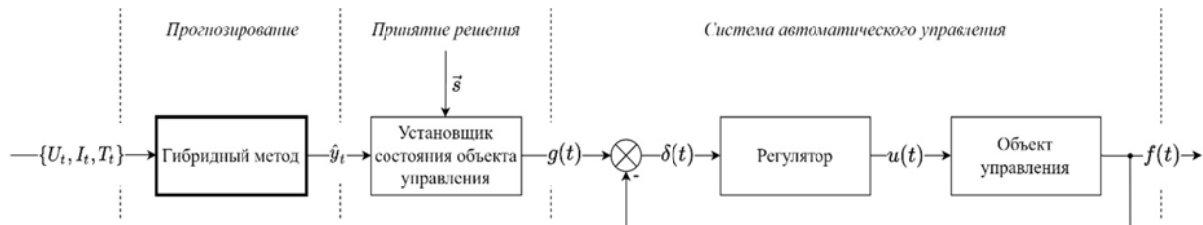


Рис. 1. Гибридный метод в системе автоматического управления

Гибридный метод не является самостоятельным методом прогнозирования. Это инструмент, позволяющий наилучшим образом реализовать, заложенные в него алгоритмы прогнозирования. В общем случае архитектуру гибридного метода можно представить в виде задающей части с заложенными в неё методами прогнозирования и регулирующей части (Рис. 2). Корректировщик параметров рекуррентно обновляет матрицы и вектора обеих частей на каждом шаге выполнения алгоритма. Оптимизатор ресурсоёмкости дирижирует методы прогнозирования и при возможности отключает наименее эффективные на ограниченном участке процесса. Реализующий механизм выполняет одностороннее преобразование поступающего на него вектора спрогнозированных оценок состояния заряда с методов прогнозирования в скаляр.

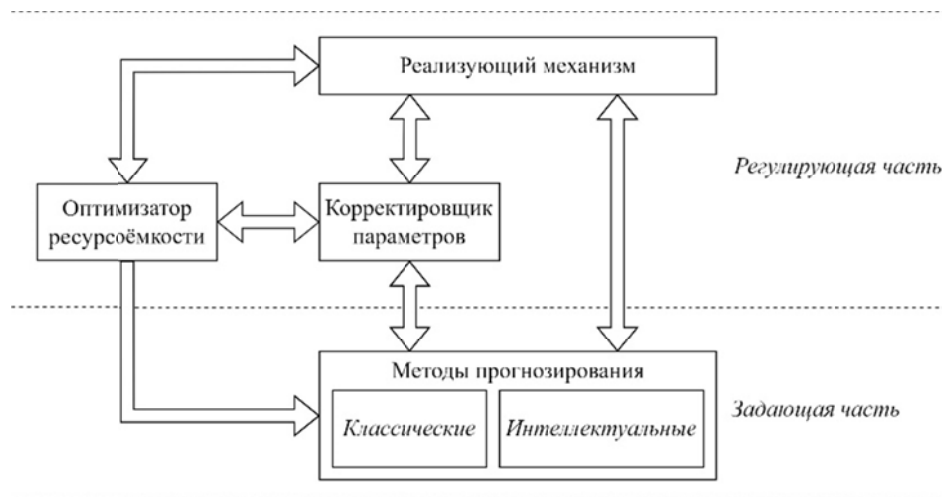


Рис. 2. Архитектура гибридного метода

Таким образом предполагается теоретическая эффективность гибридного метода. Однако необходимо уделить должное внимание реализации регулирующей части. Иначе придётся пожертвовать разнообразием методов прогнозирования задающей части, что неизбежно приведёт к понижению эффективности всего гибридного метода, а целесообразность его применения станет под вопросом.

Функциональное взаимодействие элементов гибридного метода отображает преобразование вектора входных параметров в спрогнозированную оценку состояния заряда аккумуляторной батареи (Рис. 3). В методы прогнозирования поступают вектор параметров состояния аккумуляторной батареи  $\{U_t, I_t, T_t\}$ , реальное значение состояния заряда на предыдущем шаге  $y_{t-1}$  и вектор оценок состояния заряда с методов прогнозирования на предыдущем шаге  $X_{t-1} \in R^{1 \times n}$ . На



выходе блока методов прогнозирования новый вектор оценок  $X_t$  поступает на реализующий механизм. Также на реализующий механизм поступает ошибка прогнозирования на предыдущем шаге  $\varepsilon_{t-1} = \hat{y}_{t-1} - y_{t-1}$ . Реализующий механизм в расчёте использует вектор скорректированных параметров на предыдущем шаге  $P_{t-1} \in R^{n \times 1}$ . В процессе корректировки вектора параметров используется вектор ошибок прогнозирования  $E_{t-1} = X_{t-1} - y_{t-1}$ , который представляет ошибку каждого из встроенных методов прогнозирования как разность вектора спрогнозированных оценок на предыдущем шаге с реальной оценкой состояния заряда на предыдущем шаге. На выходе блока реализующего механизма получается спрогнозированное состояние заряда аккумуляторной батареи  $\hat{y}_t$ .

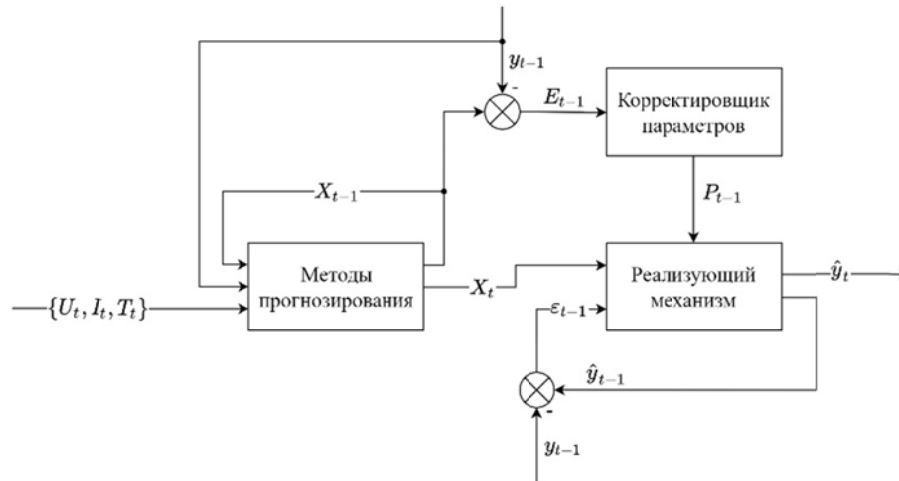


Рис. 3. Функциональное взаимодействие элементов гибридного метода

**Заключение.** Таким образом, сформулирована задача разработки гибридного метода и определена его концепция. В дальнейшем следует определить методы прогнозирования, входящие в алгоритм, и их математические модели, а также определить параметры, нуждающиеся в корректировке, составить алгоритмы оптимизации методов прогнозирования и реализующего механизма.

Изложенная концепция гибридного метода даёт основания полагать, что возможность её применения не заканчивается на задаче оценки состояния заряда аккумуляторной батареи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Uddin K. et al. Characterising lithium-ion battery degradation through the identification and tracking of electrochemical battery model parameters //Batteries. – 2016. – Т. 2. – №. 2. – С. 13.
2. He H., Xiong R., Fan J. Evaluation of lithium-ion battery equivalent circuit models for state of charge estimation by an experimental approach //energies. – 2011. – Т. 4. – №. 4. – С. 582-598.
3. Jiang C. et al. Extended Kalman Filter based battery state of charge (SOC) estimation for electric vehicles //2013 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC). – IEEE, 2013. – С. 1-5.
4. Park J. H. et al. Real-time state of charge estimation for each cell of lithium battery pack using neural networks //Applied Sciences. – 2020. – Т. 10. – №. 23. – С. 8644.
5. Елизарова А.В., Яковлев И.А. Оценка состояния заряда аккумулятора на базе нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешним входом // Материалы XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами», 6-9 сентября 2021 г. – Москва: ИПУ РАН, 2021. – С. 224-232.
6. Саятова Г.А., Елизарова А.В., Яковлев И.А. Алгоритм системы управления аккумуляторной батареей в автономном необитаемом подводном аппарате // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2022) [Электронный ресурс]: труды Международной научно-технической конференции / под ред. С.А. Прохорова. – Электрон. текстовые и граф. дан.– Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2022. – С. 213-217.

I.A.Yakovlev, A.V.Elizarova, G.A.Saitova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa). **Hybrid method for estimating the state of charge of a battery in automatic control systems**

The paper proposes the use of a hybrid method for estimating the state of charge of the battery, which provides the most efficient operation compared to existing algorithms. The problem is defined, and the architecture of the hybrid method is developed.

С. А. КОЧЕТКОВ

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**РЕКУПЕРАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОТРАНСПОРТНОМ СРЕДСТВЕ**

*В данной работе рассматривается задача управления энергией рекуперации электрического транспортного средства с асинхронным тяговым электроприводом. При движении по наклонной поверхности асинхронный двигатель может переходить в генераторный режим с отдачей энергии в бортовую сеть. Рассмотрен синтез обратной связи, обеспечивающей управление процессом генерации энергии с поддержанием заданного значения напряжения бортовой сети и отдаваемой мощности в предположении, что все переменные пространства состояний измеряются, параметры системы и нагрузки известны.*

**Введение.** В работе [1–3] рассматривается транспортное средство с одним асинхронным электродвигателем с короткозамкнутым ротором в качестве тягового привода. В качестве бортовой системы питания используется аккумуляторная батарея в комплексе со сглаживающим конденсатором емкостью  $C$ . Преобразование напряжения от аккумулятора осуществляется с помощью трехфазного силового инвертора с шестью транзисторами, с использованием которого свободные концы фазных обмоток подключаются либо к общему проводу, либо к плюсу аккумулятора. Существует много способов управления таким тяговым приводом в режиме двигателя [1–5], чего нельзя сказать о законах, обеспечивающих регулирование входного напряжения и зарядного тока аккумуляторной батареи в генераторном режиме [6, 7]. В статье рассмотрен синтез закона управления, обеспечивающего регулирование входного напряжения ключевого преобразователя (выходного напряжения асинхронного генератора) при определенных условиях движения транспортного средства.

**Постановка задачи.** Дифференциальные уравнения объекта управления во вращающейся системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left[ \frac{3}{2} p k_r \psi_d I_q + M_g \right], \\ \omega_\psi &= p\omega + k_r R_r \frac{I_q}{\psi_d}, \\ \frac{du_0}{dt} &= -\frac{u_0}{R_L C} - \frac{3(I_d u_{ud} + I_q u_{uq})}{4C}, \\ \dot{\psi}_d &= \frac{1}{T_r} (-\psi_d + L_m I_d), \\ \dot{I}_d &= -\frac{k_s}{T_s} I_d + \omega_\psi I_q + \frac{k_r}{\sigma L_s T_r} \psi_d + \frac{u_0}{2} \frac{u_{ud}}{\sigma L_s}, \\ \dot{I}_q &= -\omega_\psi I_d - \frac{k_s}{T_s} I_q - p\omega \frac{k_r}{\sigma L_s} \psi_d + \frac{u_0}{2} \frac{u_{uq}}{\sigma L_s}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_s, L_r, L_m$  – приведенные индуктивности статора, ротора и их взаимная индуктивность соответственно,  $R_s, R_r$  – сопротивления статора и ротора,  $p$  – число пар полюсов,  $k_r = \frac{L_m}{L_r}$ ,

$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ ,  $T_r = \frac{L_r}{R_r}$ ,  $T_s = \frac{\sigma L_s}{R_s}$ ,  $k_s = 1 + \frac{L_m^2}{L_r^2} \frac{R_r}{R_s}$ ,  $J$  – приведенный момент инерции транспортного средства,  $\omega$  – угловая скорость вращения ротора,  $\omega_\psi$  – угловая скорость вращения поля ротора,  $M = (3/2) k_r p \psi_d I_q$  – крутящий момент генератора,  $M_g$  – внешний крутя-

щий момент,  $\psi_d$  – потокосцепление ротора,  $I_d, I_q$  – компоненты вектора тока статора,  $u_{ud}, u_{uq}$  – компоненты вектора напряжения статора,  $u_0$  – напряжение на конденсаторе. Предполагается, что известны параметры  $k_s, k_r, T_s, L_s, T_r, \sigma, L_m, L_r, C, J, R_L$ , переменные  $\omega, u_0, \psi_d, I_d, I_q$  доступны для измерения.

В статье рассматривается особая ситуация движения транспортного средства. Предполагается, что транспортное средство движется по наклонной поверхности с неизвестным постоянным крутящим моментом внешнего генератора

$$M_g = \text{const} > 0. \quad (2)$$

В статье ставится задача регулирования напряжения аккумуляторной батареи при поддержании заданного тока нагрузки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_0 - u_0^*| = 0, \quad (3)$$

где  $u_0^* = \text{const} > 0$  – желаемый уровень заряда батареи или напряжения конденсатора.

**Синтез алгоритма управления.** Согласно математической модели системы, с объектом связаны три подсистемы. Самая медленная подсистема соответствует механической переменной  $\omega$ , скорость изменения потока ротора выше  $\psi_d$ , чем темпы изменения угловой скорости, а токовый контур наиболее динамичный по отношению к управляющим воздействиям. При синтезе закона управления данная иерархия используется для обеспечения сходимости ошибки регулирования к нулю с заданными темпами.

Поскольку рассматривается частный случай движения аппарата с постоянным моментом внешнего генератора (2), постольку стационарное решение для компонент вектора потока ротора, вектора тока статора и вектора управления также будет постоянным. Цель состоит в том, чтобы найти это решение в соответствии с моделью объекта (1) и использовать его для управления с обратной связью в токовом контуре, чтобы обеспечить стремление реальных значений компонент вектора тока статора к желаемым величинам. Далее стационарные решения для пространственного вектора состояния системы (1) обозначаются символом \*. Компоненты вектора тока статора должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить постоянный отрицательный момент для компенсации внешнего положительного момента (2).

Известно [1, 2], что момент асинхронного двигателя в генераторном режиме отрицателен, и, так называемая, переменная скольжения  $s$ , которая представляют собой относительную разность между угловой скоростью потока ротора и угловой скоростью ротора (с учетом числа пар полюсов) тоже отрицательна

$$s = \frac{\omega_\psi - p\omega}{\omega_\psi} = \frac{k_r R_r}{\omega_\psi} \frac{I_q}{\psi_d} < 0.$$

Для обеспечения отрицательного значения скольжения  $s$  искомые значения компонент вектора статора выбираются с разными знаками, например, для определенности установившиеся значения компоненты  $I_d^*$  и угловой скорости вращения поля ротора  $\omega_\psi^*$  принимаются равными

$$I_d^* = \frac{2\hat{M}_g}{3pk_r L_m |I_q^*|}, \quad \omega_\psi^* = p\omega^* - k_r R_r \frac{|I_q^*|}{L_m |I_d^*|} = p\omega^* - \frac{3pk_r^2 R_r (I_q^*)^2}{2\hat{M}_g}, \quad I_d^* > 0, I_q^* < 0, \quad (4)$$

где  $\omega^*$  – установившееся значение угловой скорости вращения асинхронного двигателя,  $\hat{M}_g$  – оценка внешнего момента генератора, которая может быть получена с помощью наблюдателя состояния.

Подстановка выражений (4) в уравнения системы (1) с учетом, что  $I_d^* = \psi_d^* / L_m$  позволяет определить компоненты управляющих воздействий

$$\begin{aligned}
 u_{ud}^* &= \left( k_s R_s - \frac{k_r L_m}{T_r} \right) \frac{2 |I_d^*|}{u_0} + \left( p \omega^* - \frac{3 p k_r^2 R_r (I_q^*)^2}{2 \hat{M}_g} \right) \frac{2 \sigma L_s |I_q^*|}{u_0}, \\
 u_{uq}^* &= \left( p \omega^* - \frac{3 p k_r^2 R_r (I_q^*)^2}{2 \hat{M}_g} \right) \frac{2 \sigma L_s |I_d^*|}{u_0} - \frac{2 k_s R_s}{u_0} |I_q^*| + \frac{2 p \omega^* k_r L_m}{u_0} |I_d^*|.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Для решения поставленной задачи (3) необходимо выбрать компоненты вектора тока в соответствии с уравнением баланса мощности

$$- \frac{3(I_d^* u_{ud}^* + I_q^* u_{uq}^*)}{4} = \frac{(u_0^*)^2}{u_0 R_L}, \tag{6}$$

согласно которому в установившемся режиме напряжение на аккумуляторной батарее изменяется согласно уравнению

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{u_0}{R_L C} \left( -1 + \frac{(u_0^*)^2}{u_0^2} \right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t) = u_0^*.$$

Из выражений (5)–(6) может быть записано уравнение для компоненты  $I_q^*$  желаемого значения тока статора

$$(I_q^*)^4 + \frac{2}{3} \left( \hat{M}_g \omega^* - \frac{(u_0^*)^2}{R_L} \right) \frac{(I_q^*)^2}{k_s R_s} - \frac{4 \hat{M}_g}{9 p^2 k_r^2 L_m^2 k_s} = 0,$$

решение которого с учетом (4) позволяет вычислить задающие воздействия для контура обратной связи

$$\begin{aligned}
 (I_q^*)^2 &= \frac{1}{3 k_s R_s} \left( \frac{(u_0^*)^2}{R_L} - \hat{M}_g \omega^* \right) + \frac{1}{3 k_s R_s} \sqrt{\left( \hat{M}_g \omega^* - \frac{(u_0^*)^2}{R_L} \right)^2 + \frac{4 \hat{M}_g R_s^2 k_s}{p^2 k_r^2 L_m^2}}, \quad I_q^* = -\sqrt{(I_q^*)^2}, \\
 I_d^* &= \frac{2 \hat{M}_g}{3 p k_r L_m |I_q^*|}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Управляющие входы  $u_{ud}, u_{uq}$  выбраны так, чтобы обеспечить экспоненциальную сходимость переменных  $I_d, I_q$  к задающим воздействиям (7) с помощью модификации вихревого алгоритма [8]

$$\frac{u_0}{2} \frac{u_{ud}}{\sigma L_s} = v_d, \dot{v}_d = -\text{sat}_d(\alpha_d v_d) - M_{2d} \text{sign}(\bar{I}_d); \quad \frac{u_0}{2} \frac{u_{uq}}{\sigma L_s} = v_q, \dot{v}_q = -\text{sat}_q(\alpha_q v_q) - M_{2q} \text{sign}(\bar{I}_q),$$

где  $M_{id} = \text{const} > 0, M_{iq} = \text{const} > 0 (i = \overline{1,2}), \alpha_d = \text{const} > 0, \alpha_q = \text{const} > 0, \bar{I}_d = I_d - I_d^*, \bar{I}_q = I_q - I_q^*, \text{sign}(\cdot)$  – функция знака,  $\text{sat}(\cdot)$  – функция насыщения

$$\text{sat}_j(x) = \begin{cases} M_{1j}, & x \geq 1; \\ x, & -1 < x < 1; \\ -M_{1j}, & x \leq -1. \end{cases} \quad j = \{d, q\}$$

**Заключение.** В работе была рассмотрена задача регулирования выходного напряжения силовой электроустановки транспортного средства. Для случая постоянного внешнего возбуждающего момента были получены соотношения для задающих воздействий токового контура, с помощью которых в контуре обратной связи обеспечивается уравнение баланса мощности генератора и нагрузки в установившемся режиме. Случай произвольного внешнего момента требует более детального рассмотрения, и подобная постановка задачи является направлением дальнейших исследований.

*Работа проводилась при поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных исследований № 20-01-00363А*

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonhard W. Control of Electrical Drives. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
2. Marino R., Tomei P., Verrelli C. Induction Motor Control Design. London: Springer, 2010.
3. Dodds J.S., Utkin V.A., Vittek J. Sensorless Induction Motor Drive with Independent Speed and Rotor Magnetic Flux Control, Part I, Theoretical Background. *J. Electrical Eng.* 1998. Vol. 49. P 186–193.
4. Harnefors L., Hinkkanen M. Luomi J. Reduced-Order Flux Observers With Stator-Resistance Adaptation for Speed-Sensorless Induction Motor Drives. *IEEE transactions on power electronics.* 2010. Vol. 45. № 5. P. 1173–1183.
5. Utkin V.I., Guldner J. Shi J. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. London: Taylor and Francis, 2009.
6. Marra E., Pomilio J. Self-Excited Induction Generator Controlled by a VS-PWM Bidirectional Converter for Rural Applications. *IEEE Trans. on Ind. Applications.* 1999. Vol. 35. № 4. P. 877–883.
7. Ahmed T., Nishida K., Nakaoka M. Advanced Control of PWM Converter With Variable-Speed Induction Generator. *IEEE Trans. On Ind. Applications.* 2006. Vol. 42. № 4. P. 934–945.
8. Kochetkov S. A., Utkin V. A. Invariance in Systems with Unmatched Perturbations. *Autom. Remote Control.* 2013. Vol. 74. № 7. P. 1097–1127.

---

S.A.Kochetkov (V.A. Trapeznikov Institute of control sciences of RAS, Moscow). **Energy recuperation in electric vehicle**

In this paper, the problem of recuperation energy of an electric vehicle with an asynchronous traction electric drive is considered. During motion along an inclined surface, an asynchronous motor can switch to a generator mode with energy generation to the on-board electric network. The synthesis of feedback providing control of the power generation process with regulation the specified value of the on-board power supply voltage level and output current is considered under the assumption that all state space variables are measured, the system and load parameters are known.

Р. Ю. ПОРЦЕВ, А. В. МАКАРЕНКО  
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ СВЁРТОЧНЫХ НЕЙРОСЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ

*В работе проведён сравнительный анализ функциональных характеристик элементарных двухслойных свёрточных нейросетей с различными функциями активации при решении задачи классификации шумовых сигналов трёх типов: нормальный, равномерный, экспоненциальный. Исследованы вопросы обучаемости нейросетей и качества их функционирования. Кроме того, исследована устойчивость нейросетей к загрязнению входных данных по модели запыления канала/сенсора.*

**Введение.** Сложность интеллектуальных систем управления и доля их цифровых реализаций неуклонно растёт. В их алгоритмическом ядре всё чаще применяются модели на основе методов машинного обучения, в том числе искусственные нейронные сети [1]. Помимо классической ситуации различения детерминированных сигналов на фоне мешающих случайных помех, встречаются приложения, оперирующие непосредственно шумовыми сигналами, например, в задачах управления городом при распознавании шума окружающей среды [2-4], в задачах управления технологическим процессом при диагностике неисправностей подшипников [5], при обнаружении утечек из магистральных трубопроводов [6], в задачах специальной тематики при распознавании подводных акустических целей [7] и т.п. Для подобных шумовых сигналов, в отличие от детерминированных, вопросы эффективности и механизмов принятия решения нейросетями систематически не исследовались. Настоящая работа посвящена исследованию в этом направлении и является прямым продолжением работы авторов [8], при этом исследуются более сложные архитектуры – двухслойные свёрточные нейросети и 3 функции активации: ReLU [1], LeakyReLU [1], SELU [9].

**Описание задачи. Набор данных.** Введём в рассмотрение псевдослучайные последовательности трёх типов вероятностных распределений:  $\mathcal{N}$  – нормального,  $\mathcal{U}$  – равномерного,  $\mathcal{E}$  – экспоненциального. Выбор данных типов распределений обусловлен рядом соображений, представленных в [8].

Ранее, например, в работе [10], уже исследовался вопрос построения эффективного классификатора на основе нейронной сети для указанных выше распределений шумов. А в работе [8] было показано, как задача классификации указанных шумовых сигналов успешно решается простейшими однослойными свёрточными нейронными сетями. В продолжение исследований, как и в работе [8] будем рассматривать стандартизованные последовательности, т.е. с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, и также на вход классификатора будем подавать непосредственно «сырые» данные.

Набор данных состоит из стандартизованных последовательностей в 1 024 отсчёта, разбитых на неперекрывающиеся выборки: обучающая – 75 000 сэмплов на класс, тестовая – 25 000 сэмплов на класс.

**Модель загрязнённых данных.** С целью оценивания устойчивости нейросетей, проведем эксперимент по их функционированию на загрязнённых данных. При этом эксперимент будем проводить на предварительно обученных сетях (на чистых данных). Стоит отметить, что выбор сетей, обученных на чистых данных, для целей эксперимента предназначен для имитации условий априорной неопределённости при принятии решений. В качестве модели загрязнения примем наличие импульсных помех в канале связи и/или на сенсоре, связанных с запылением канала и/или сенсора. Формально данная модель описывается выражением:

$$x_{dk} = \begin{cases} 0 & k \in K', \\ x_k & \text{иначе,} \end{cases} \quad \alpha' = \frac{\|K'\|}{K}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1)$$

где  $K'$  – некоторое количество отсчётов в последовательности в псевдослучайном порядке (без повторов), которое заменяется нулями;  $\alpha'$  – уровень загрязнения данных. Далее возможны две

ситуации: 1) – данные как есть поступают на вход классификатора  $x_d$ ; 2) – данные дополнительно стандартизируются  $\hat{x}_d$ .

**Архитектура нейросетей.** Для проведения исследования будем рассматривать двухслойные свёрточные нейросети с  $n$  свертками в первом слое,  $m$  свертками во втором слое и с полносвязным слоем с 3 нейронами (по числу классов) на выходе. В каждом свёрточном слое варьируются (а) количество сверток  $n = \overline{1,3}$  и  $m = \overline{1,3}$  (б) 3 функции активации: ReLU, LeakyReLU, SELU, таким образом, рассматриваются 9 архитектур и 9 комбинаций функций активации, всего 81 вариант нейросетей. В выходном полносвязном слое применяется функция активации SoftMax [1]. Для обучения будем использовать подход одноклассовой классификации и минимизировать функцию потерь  $L$  в виде категориальной кросс-энтропии [1].

**Результаты. Обучение нейросетей.** Обучение нейросетей проводилось на Keras Framework [11] с Google TensorFlow [12] версии 2.5.0. Каждая архитектура инициализировалась пятью разными вариантами весов, задаваемых через параметр seed генератора псевдослучайных чисел. Каждый из инициализированных вариантов обучался семьёй оптимизаторами в течение 100 эпох каждый, в сумме 35 попыток обучения. Далее, отбирались 2 наилучшие сети (top-2) по объединённому тренировочному и тестовому набору для каждого варианта по правилу  $\{\max F_1, \min L\}$ , где  $F_1$  – метрика  $F_1$  [1],  $L$  – значение функции потерь.

ReLU-ReLU	x1	x2	x3	ReLU-LeakyR	x1	x2	x3	ReLU-SELU	x1	x2	x3	ReLU-ReLU	x1	x2	x3	ReLU-LeakyR	x1	x2	x3	ReLU-SELU	x1	x2	x3
1x	17	11	5	1x	0	0	0	1x	0	0	0	1x	3	8	7	1x	6	10	19	1x	11	13	24
2x	19	6	6	2x	0	0	0	2x	0	0	0	2x	1	7	18	2x	10	17	23	2x	19	22	23
3x	8	1	0	3x	0	0	0	3x	0	0	0	3x	3	11	20	3x	12	24	23	3x	19	21	26
LeakyR-ReLU	x1	x2	x3	LeakyR-LeakyR	x1	x2	x3	LeakyR-SELU	x1	x2	x3	LeakyR-ReLU	x1	x2	x3	LeakyR-LeakyR	x1	x2	x3	LeakyR-SELU	x1	x2	x3
1x	0	1	0	1x	0	0	0	1x	0	0	0	1x	5	12	23	1x	0	7	12	1x	12	18	23
2x	6	0	0	2x	0	0	0	2x	0	0	0	2x	3	14	26	2x	4	14	20	2x	18	21	22
3x	6	1	0	3x	0	0	0	3x	0	0	0	3x	5	10	25	3x	5	19	20	3x	18	22	22
SELU-ReLU	x1	x2	x3	SELU-LeakyR	x1	x2	x3	SELU-SELU	x1	x2	x3	SELU-ReLU	x1	x2	x3	SELU-LeakyR	x1	x2	x3	SELU-SELU	x1	x2	x3
1x	0	0	0	1x	0	0	0	1x	1	0	0	1x	2	16	20	1x	8	12	17	1x	6	14	19
2x	2	0	0	2x	0	0	0	2x	1	0	0	2x	1	13	20	2x	15	17	22	2x	10	22	26
3x	2	0	0	3x	0	0	0	3x	0	0	0	3x	7	17	24	3x	14	19	21	3x	17	23	25

Рис. 1. Количество нейросетей со значением метрики  $F_1 = 0$  (а) и  $F_1 = 1$  (б) в зависимости от архитектуры и функций активаций (рисунки состоят из 9-ти палеток с указанными функциями активации в первом и втором слое, в палетке ячейки соответствуют конкретной архитектуре нейросети: номер строки соответствует кол-ву сверток в первом слое, номер столбца – кол-ву сверток во втором слое)

На рис.1 показано распределение «плохих» сетей с  $F_1 = 0$  (см. рис.1а) и «хороших» сетей с  $F_1 = 1$  (см. рис.1б) в зависимости от архитектуры и функций активаций в свёрточных слоях. На рис.1а выделяются сети с комбинацией функций активаций ReLU-ReLU, у которых больше всего неудачных попыток обучения. Это связано с тем, что сети с функций ReLU сильно зависят от начальной инициализации весов, из-за которых данные могут «зануляться». Тогда как архитектуры с LeakyReLU и SELU демонстрируют большее количество «хороших» сетей с  $F_1 = 1$ . Также на рис.1б хорошо просматривается зависимость «хороших» сетей от архитектуры: «чем больше свёрток, тем лучше», причём для всех комбинаций функций активаций.

ReLU-ReLU	x1	x2	x3	ReLU-LeakyR	x1	x2	x3	ReLU-SELU	x1	x2	x3
top1	2,03E-06	1,59E-07	3,19E-08	top1	1,33E-05	2,07E-08	4,82E-08	top1	1,92E-06	9,16E-07	5,75E-08
top2	0,009295	3,51E-07	1,27E-06	top2	1,96E-05	9,40E-07	1,09E-07	top2	3,29E-06	8,79E-07	5,86E-08
top1	3,42E-08	3,94E-08	9,66E-10	top1	1,03E-07	8,03E-09	5,12E-09	top1	2,70E-08	7,35E-08	8,44E-09
top2	0,000458	8,65E-07	1,23E-08	top2	1,05E-07	1,74E-08	6,34E-09	top2	1,49E-07	2,53E-07	1,02E-08
top1	1,26E-06	1,66E-08	3,07E-10	top1	5,37E-08	6,43E-09	4,05E-09	top1	3,32E-08	9,42E-09	3,65E-08
top2	1,01E-06	2,52E-08	6,58E-10	top2	1,05E-07	7,16E-09	8,99E-09	top2	3,75E-08	2,15E-08	4,11E-08
LeakyR-ReLU	x1	x2	x3	LeakyR-LeakyR	x1	x2	x3	LeakyR-SELU	x1	x2	x3
top1	6,44E-07	4,78E-08	2,53E-09	top1	1,91E-04	3,60E-07	2,14E-07	top1	1,16E-06	7,27E-09	3,03E-08
top2	1,11E-06	7,83E-08	3,60E-09	top2	0,000164	1,09E-06	4,62E-07	top2	2,87E-06	3,15E-08	3,96E-08
top1	9,29E-07	1,69E-08	1,81E-09	top1	1,80E-06	1,14E-07	5,10E-09	top1	2,78E-08	9,63E-09	5,76E-09
top2	0,000487	4,75E-08	5,36E-09	top2	2,52E-06	4,42E-07	1,17E-08	top2	4,27E-08	1,77E-08	6,38E-08
top1	2,27E-06	1,28E-08	1,46E-09	top1	2,37E-05	6,84E-08	1,91E-09	top1	6,70E-08	6,21E-09	4,02E-09
top2	2,84E-06	8,19E-08	1,69E-09	top2	1,67E-04	7,72E-08	6,95E-09	top2	9,06E-08	3,67E-08	1,98E-08
SELU-ReLU	x1	x2	x3	SELU-LeakyR	x1	x2	x3	SELU-SELU	x1	x2	x3
top1	1,34E-06	2,06E-08	1,01E-09	top1	1,22E-06	3,30E-07	1,24E-08	top1	2,71E-05	6,52E-09	6,24E-09
top2	0,00389	2,81E-08	6,01E-09	top2	3,97E-06	4,54E-07	5,54E-08	top2	4,44E-05	1,24E-08	1,05E-08
top1	1,50E-06	1,00E-07	1,21E-10	top1	5,33E-07	5,02E-08	2,68E-09	top1	2,23E-08	7,20E-09	3,78E-09
top2	0,003825	1,06E-07	2,03E-10	top2	6,16E-07	2,57E-07	7,05E-09	top2	5,47E-08	1,02E-08	9,93E-09
top1	3,66E-07	3,16E-09	5,21E-10	top1	7,39E-07	6,25E-08	8,90E-11	top1	3,80E-08	1,80E-09	5,05E-09
top2	1,15E-06	1,83E-08	5,93E-10	top2	9,66E-07	2,81E-07	2,45E-10	top2	3,58E-08	1,53E-08	6,29E-09

Рис. 2. Значения функции потерь  $L$  по тестовому набору для top-2 нейросетей в зависимости от архитектуры и функций активаций (структура расположения палеток и ячеек такая же, как на рис. 1, однако каждая ячейка содержит 2 значения для top1 сети и top2 сети соответственно)

**Top-2.** Далее перейдём к анализу top-2 сетей. Практически все обученные нейросети из top-2 имеют максимальное значение метрики  $F_1 = 1$ , за исключением 4-х значений, которые отличаются в 5 знаке после запятой, поэтому на рис.2 представлены только значения функции потерь  $L$ . На рис.2 сильнее всего выделяется зависимость  $L$  от архитектуры, при этом большую роль играет второй свёрточный слой. Это согласуется с правилом, что «чем сложнее структура сети и у неё больше признаков для формирования решения, тем больше её обобщающая способность». Лучший показатель  $L \approx 8,9 \cdot 10^{-11}$  имеет сеть с 3-мя свёрточными нейронами в первом и втором слоях и функциями активации SELU-LeakyReLU.

	sgd	rmsprop	adagrad	adadelat	adam	adamax	nadam
top1	0	36	0	0	9	18	18
top2	1	21	0	0	14	23	22

Рис. 3. Распределение оптимизаторов по top-2

Рассмотрим, с помощью каких оптимизаторов обучились сети из top-2. На рис.3 представлено распределение оптимизаторов по top1 и top2 сетям. Среди top1 на первом месте, как и в эксперименте [8], оказался оптимизатор *rmsprop* – 36 из 81, на втором *adamax* и *nadam* – по 18, на третьем *adam* – 9. С сетями из top2 ситуация меняется, на первом месте *adamax* – 23, на втором *nadam* – 22, на третьем *rmsprop* – 21, далее *adam* – 9 и *sgd* – 1. Примечательно, что оптимизаторы *adagrad* и *adadelat* не оказались среди top-2.

**Устойчивость нейросетей к загрязнению данных.** В результате проведённого эксперимента по загрязнению данных по модели (1) были получены графики деградации качества функционирования сетей (зависимость  $F_1$  от уровня  $a'$ ), однако для удобства сравнения нейросетей использовалась интегральная нормированная оценка устойчивости к загрязнению данных  $F_1^d$  как относительная площадь под кривой деградации (по сути, является средним значением  $F_1$ ). На рис.4а легко видеть, что сети с функцией активацией ReLU во втором слое устойчивее к загрязнению данных, только среди таких сетей присутствуют сети со значением  $F_1^d > 0,6$ , включая и сети с высокой устойчивостью  $F_1^d > 0,9$ . Максимальный показатель  $F_1^d \approx 0,970$  имеет сеть с 3-мя свёрточными нейронами в первом и втором слоях и функциями активации SELU-ReLU.

	ReLU-ReLU				ReLU-LeakyR				ReLU-SELU					ReLU-ReLU				ReLU-LeakyR				ReLU-SELU			
	x1	x2	x3		x1	x2	x3		x1	x2	x3			x1	x2	x3		x1	x2	x3		x1	x2	x3	
top1	1x	0,517	0,635	0,126	1x	0,068	0,513	0,060	1x	0,076	0,082	0,095	top1	1x	0,291	0,283	0,177	1x	0,172	0,271	0,112	1x	0,110	0,120	0,150
top2	1x	0,555	0,631	0,526	1x	0,065	0,048	0,063	1x	0,077	0,097	0,088	top2	1x	0,357	0,279	0,269	1x	0,164	0,085	0,118	1x	0,105	0,138	0,133
top1	2x	0,699	0,650	0,696	2x	0,088	0,125	0,056	2x	0,146	0,082	0,151	top1	2x	0,340	0,273	0,179	2x	0,226	0,162	0,137	2x	0,211	0,137	0,212
top2	2x	0,551	0,929	0,132	2x	0,176	0,070	0,072	2x	0,234	0,091	0,117	top2	2x	0,232	0,254	0,164	2x	0,222	0,144	0,151	2x	0,326	0,142	0,193
top1	3x	0,656	0,165	0,909	3x	0,145	0,096	0,081	3x	0,205	0,080	0,066	top1	3x	0,305	0,191	0,172	3x	0,247	0,175	0,159	3x	0,288	0,119	0,145
top2	3x	0,535	0,654	0,133	3x	0,150	0,121	0,070	3x	0,094	0,088	0,096	top2	3x	0,321	0,276	0,176	3x	0,276	0,156	0,112	3x	0,278	0,176	0,164
	LeakyR-ReLU	x1	x2	x3	LeakyR-LeakyR	x1	x2	x3	LeakyR-SELU	x1	x2	x3		LeakyR-ReLU	x1	x2	x3	LeakyR-LeakyR	x1	x2	x3	LeakyR-SELU	x1	x2	x3
top1	1x	0,613	0,946	0,195	1x	0,155	0,112	0,070	1x	0,068	0,088	0,080	top1	1x	0,423	0,252	0,229	1x	0,277	0,157	0,152	1x	0,227	0,143	0,126
top2	1x	0,610	0,937	0,062	1x	0,149	0,075	0,064	1x	0,067	0,085	0,079	top2	1x	0,429	0,260	0,111	1x	0,270	0,173	0,103	1x	0,195	0,138	0,128
top1	2x	0,605	0,643	0,941	2x	0,150	0,076	0,078	2x	0,070	0,093	0,063	top1	2x	0,423	0,276	0,186	2x	0,225	0,182	0,176	2x	0,201	0,144	0,121
top2	2x	0,338	0,079	0,963	2x	0,130	0,125	0,064	2x	0,076	0,069	0,085	top2	2x	0,299	0,183	0,161	2x	0,219	0,152	0,102	2x	0,189	0,145	0,126
top1	3x	0,615	0,085	0,102	3x	0,095	0,073	0,068	3x	0,079	0,077	0,074	top1	3x	0,436	0,312	0,306	3x	0,138	0,147	0,177	3x	0,190	0,132	0,131
top2	3x	0,618	0,955	0,058	3x	0,046	0,073	0,067	3x	0,084	0,061	0,091	top2	3x	0,439	0,257	0,113	3x	0,603	0,259	0,235	3x	0,207	0,153	0,161
	SELU-ReLU	x1	x2	x3	SELU-LeakyR	x1	x2	x3	SELU-SELU	x1	x2	x3		SELU-ReLU	x1	x2	x3	SELU-LeakyR	x1	x2	x3	SELU-SELU	x1	x2	x3
top1	1x	0,524	0,659	0,060	1x	0,130	0,133	0,070	1x	0,098	0,066	0,060	top1	1x	0,303	0,271	0,097	1x	0,144	0,161	0,143	1x	0,151	0,115	0,104
top2	1x	0,155	0,485	0,062	1x	0,131	0,120	0,117	1x	0,158	0,083	0,062	top2	1x	0,335	0,267	0,096	1x	0,152	0,159	0,147	1x	0,142	0,127	0,106
top1	2x	0,520	0,086	0,068	2x	0,292	0,128	0,090	2x	0,085	0,082	0,090	top1	2x	0,299	0,114	0,152	2x	0,209	0,173	0,141	2x	0,290	0,119	0,154
top2	2x	0,158	0,081	0,968	2x	0,391	0,126	0,134	2x	0,091	0,076	0,065	top2	2x	0,339	0,106	0,180	2x	0,190	0,161	0,173	2x	0,210	0,137	0,124
top1	3x	0,617	0,272	0,970	3x	0,134	0,128	0,067	3x	0,089	0,071	0,060	top1	3x	0,425	0,181	0,162	3x	0,153	0,161	0,121	3x	0,222	0,120	0,121
top2	3x	0,521	0,208	0,065	3x	0,114	0,107	0,058	3x	0,115	0,079	0,067	top2	3x	0,306	0,186	0,112	3x	0,144	0,171	0,125	3x	0,352	0,160	0,104

Рис. 4. Интегральная нормированная оценка устойчивости к загрязнению данных top-2 нейросетей без дополнительной стандартизации данных  $F_1^d$  (а) и с дополнительной стандартизацией данных  $\hat{F}_1^d$  (б) в зависимости от архитектуры и функций активаций (структура расположения палеток и ячеек такие же, как на рис.2)

В ситуации с дополнительной стандартизацией данных значения интегрированной нормированной оценки устойчивости  $\hat{F}_1^d$  в большинстве вариантов сетей сдвигается к некоторому значению, в частности медианное значение по всем вариантам составляет  $\text{median}(\hat{F}_1^d) \approx 0,172$ . Это связано с тем, что при увеличении уровня загрязнения данных  $a'$  дополнительная стандартизация сильнее меняет вид распределения, по сравнению с обычными пропусками данных.



**Заключение.** В работе проведено исследование двухслойных свёрточных нейросетей с разным числом свёрток и разными функциями активации в слоях в задаче распознавания шумовых сигналов трёх типов: нормального, равномерного, экспоненциального. В результате проведённого сравнительного анализа обученных нейросетей было показано, что усложнение структуры нейросети положительно влияет как на её обучаемость, так и на её качество. Это согласуется с тем, что «чем сложнее структура сети и у неё больше признаков для формирования решения, тем больше её обобщающая способность». Однако если проводить сравнение с результатами по однослойным сетям из [8], то обучаемость двухслойных сетей хуже, особенно это заметно при использовании функции активации ReLU, тогда как архитектуры с LeakyReLU и SELU имели большее количество «хорошо» обученных сетей, при этом лучший показатель  $L \approx 8,9 \cdot 10^{-11}$  имеет сеть с комбинацией SELU-LeakyReLU.

Также был проведён эксперимент по функционированию обученных нейросетей на загрязнённых данных, который показал что сети с ReLU во втором слое устойчивее к загрязнению данных, при этом максимальный показатель  $F_1^d \approx 0,970$  имеет сеть с комбинацией SELU-ReLU. В дальнейшем для лучшего понимания функционирования обученных нейросетей планируются дополнительные исследования в части анализа их механизмов принятия решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A., Deep Learning. Cambridge: MIT press, 2016.
2. Cao, J., Cao, M., Wang, J. et al. Urban noise recognition with convolutional neural network. *Multimed Tools Appl* 78, 29021–29041 (2019).
3. Mushtaq, Z. and Su, S.F. Environmental sound classification using a regularized deep convolutional neural network with data augmentation. *Applied Acoustics*, 167, p.107389, 2020.
4. Khamparia, A., Gupta, D., Nguyen, N. G., Khanna, A., Pandey, B., & Tiwari, P. Sound classification using convolutional neural network and tensor deep stacking network. *IEEE Access*, 7, 7717-7727, 2019.
5. Q. Jiang, F. Chang and B. Sheng, "Bearing Fault Classification Based on Convolutional Neural Network in Noise Environment," in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 69795-69807, 2019.
6. A. V. Makarenko. Deep learning algorithms for signal recognition in long perimeter monitoring distributed fiber optic sensors // 2016 IEEE 26th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), Sept 2016, pp. 1–6.
7. Yang H, Li J, Shen S, Xu G. A Deep Convolutional Neural Network Inspired by Auditory Perception for Underwater Acoustic Target Recognition. *Sensors*; 19(5):1104, 2019.
8. Portsev R.J., Makarenko A.V. Convolutional neural networks for noise signal recognition // *Proceedings of MLSP2018*. Aalborg, Denmark: IEEE, 2018. P. 1-6, <http://ieeexplore.ieee.org/document/8516920>.
9. Klambauer, G., Unterthiner, T., Mayr, A., & Hochreiter, S. Self-normalizing neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 30, 2017.
10. S. Tiwari, A.K. Singh, and V.P. Shukla. Statistical moments based noise classification using feed forward back propagation neural network // *International Journal of Computer Applications*, vol. 18, no. 2, pp. 36-40, March 2011.
11. Keras: The Python Deep Learning library, <https://keras.io/>
12. TensorFlow is an end-to-end open source platform for machine learning, <https://www.tensorflow.org/>

---

R.J. Portsev, A.V. Makarenko (V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow)  
**Comparative analysis of the functional characteristics of elementary two-layer convolutional neural networks for noise signal recognition**

The paper presents a comparative analysis of the functional characteristics of elementary two-layer convolutional neural networks with different activation functions in solving the problem of classifying noise signals of three types: normal, uniform, exponential. The issues of learningability of neural networks and the quality of their functioning are investigated. In addition, the resistance of neural networks to input data contamination by simulated channel/sensor cut-off was studied.

А.Ю. ИСХАКОВ  
(Институт проблем управления РАН, Москва)

## ВЫЯВЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ В ПОВЕДЕНИИ СУБЪЕКТА ДОСТУПА ПРОМЫШЛЕННОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ

*Современный уровень развития информационных технологий и их проникновение в промышленные системы автоматизации и управления несет не только новые возможности для управления технологическими процессами предприятия, но и новые угрозы и риски информационной безопасности. При обеспечении информационной безопасности информационно-управляющих систем для объектов критической инфраструктуры важно обеспечивать функционал контроля за действиями субъектов доступа.*

*В докладе рассматриваются существующие подходы к выявлению аномалий и приводится краткий обзор разрабатываемого решения по выявлению отклонений в поведении субъекта доступа в промышленных системах автоматизации и управления.*

**Введение.** В последние годы наблюдается совершенствование технологий кибератак, отличающихся скрытностью за счет мимикрии под легитимные процессы и субъекты доступа. Особую озабоченность вызывают случаи, когда это позволяет злоумышленникам нарушать работу систем, автоматизирующих критически важные процессы – от автоматизированных систем управления промышленных предприятий (АСУ ТП) до систем жизнеобеспечения населенных пунктов. Существующие подходы к обеспечению информационной безопасности АСУ ТП являются недостаточными ввиду особенностей архитектуры и свойств программно-аппаратного обеспечения их элементов. В настоящее время методы защиты подобных систем не проработаны в должной мере, в том числе в подсистемах проверки субъектов доступа в критически важных объектах. При этом важно отметить, что характер ущерба от нарушения безопасности информации в промышленных системах автоматизации и управления (ПСАиУ) существенно отличается.

Предлагаемый доклад посвящен обзору основных составляющих разрабатываемого методико-алгоритмического обеспечения по выявлению отклонений, позволяющего учитывать не только статические параметры окружения, но и факт и характер взаимодействия субъекта с другими субъектами системы.

**Основные подходы к выявлению аномалий.** Проведенный анализ по теме исследования позволяет сделать вывод, что на сегодня не существует универсального решения задачи обнаружения внутренних угроз с помощью поиска отклонений в деятельности пользователей. Наиболее популярными являются следующие методы: системы обнаружения на основе правил [2], на основе графов [3] и методы, основанные на машинном обучении [4]. Методы машинного и глубокого обучения [5] всё чаще применяются для решения задачи обнаружения внутренних угроз. В контексте машинного обучения задача выявления внутренних угроз формулируется как задача обнаружения аномалий, которые в зависимости от методов способны выявить как атаки по известному сценарию, так и новые типы атак [6]. Выявление аномалий сводится к задаче детектирования выбросов в наборе данных. Задача выявления атак по известному сценарию чаще решается эффективнее и быстрее, но в настоящее время создать универсальные сценарии в ПСАиУ не представляется возможным в том числе ввиду отсутствия общедоступных наборов данных.

**Усиленная проверка легитимности операций.** Реализуемая система выявления отклонений в поведении субъекта ПСАиУ основывается на массиве большого объема входных данных, анализируемых с помощью различных методов машинного обучения. Адаптивную аутентификацию субъектов управления предлагается реализовать счет сочетания многокомпонентного профиля оператора (включающего набор признаков, извлекаемых из систем управления событиями и систем поведенческого анализа) и применением нейросетевого анализа слабоструктурированных данных (генерируемых пользователем запросов к дочерним компонентам системы). Подобный подход позволит исходя из оценки риска угрозы при нетипичном поведении

пользователя относительно его многокомпонентного профиля, адаптивно подбирать набор и тип факторов, требуемых для аутентификации в режиме реального времени.

На рисунке 1 представлена общая структура разрабатываемого решения [7].

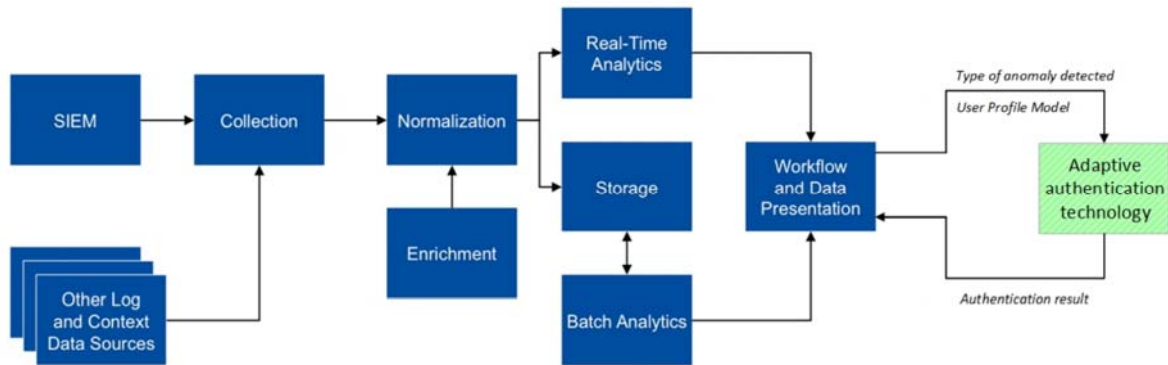


Рис. 1. Архитектура разрабатываемого решения для выявления отклонений в действиях пользователей

В качестве источников данных предлагается использовать нормализованные структуры данных из SIEM-систем и других хранилищ, агрегирующих журналы доступа. Поведенческий анализ выполняется с помощью анализа следующих факторов аномального поведения:

- координаты спутниковых навигационных систем (в случае применения мобильных устройств ввода данных / авторизации субъектов);
- анализ запрещенных ключевых фраз с помощью встроенных диктофонов мобильных устройств ввода данных;
- анализ видеоряда (нарушения границ перемещений и взаимодействия, в том числе внутри контролируемой зоны объекта);
- подозрения на инциденты с существующих систем защиты информации;
- данные сетевых служб (ip/mac-адреса устройств подключения, объем трафика, попытки обхода межсетевых экранов);
- анализ программного окружения (браузер, user-agent...);
- fingerprint-методы.

Для анализа данных применяются неконтролируемые алгоритмы выявления аномалий. Подобные классы методов не требуют заранее размеченных данных, что позволяет значительным образом упростить интеграцию в инфраструктуру промышленных систем автоматизации. Так как эти методы не требуют предобработки специалистами, они способны работать в режиме реального времени и осуществлять поиск отклонений.

Как и в случае с общепризнанными сегодня алгоритмами аутентификации планируется применять дифференцированный подход к выбору оптимального признакового пространства, позволяющего повысить достоверность отождествления пользователей с имеющимися записями в базе данных субъектов доступа, применяемого в сервисе аутентификации. В частности, в одном из исследований руководителя заявленного проекта "Повышение защищенности сервисов аутентификации путем проведения дополнительной идентификации с использованием оптимального признакового пространства" были опубликованы результаты подбора наиболее эффективного набора характеристик, необходимых для адаптивной процедуры идентификации. Однако, в приведенном исследовании критерии оптимального кортежа признаков: 1) исходили из специфичных требований, предъявляемых к IoT-инфраструктуре 2) подбирались с учетом разработки подсистемы идентификации в качестве дополнительного механизма, позволяющего повысить достоверность отождествления существующего сервиса аутентификации. В данном проекте задача усложняется в первую очередь тем, что в качестве исходной берется следующая посылка - целевая группа идентифицируемых субъектов заведомо пытается обеспечить маскирование своей личности, применяя при этом различные средства анонимизации. В связи с этим для поиска новых подходов к идентификации в ходе выполнения данного проекта предлагается расширить ранее разработанную членами авторского коллектива комплексную модель субъекта доступа путем обеспечения возможности учета корреляции информативных метрик многоком-

понентного профиля виртуального пользователя с регистрируемыми событиями в SIEM-комплексах (оценка семантического сходства данных в разнородных событиях).

**Заключение.** Значение совершенствования подходов к выявлению отклонений в поведении субъекта доступа промышленной системы автоматизации обусловлено необходимостью решения проблемы обеспечения информационной безопасности критической инфраструктуры, внимание к которой уделяется со стороны государства в части реализации Стратегии национальной безопасности Российской Федерации. Современные промышленные системы автоматизации и управления отличаются высоким уровнем цифровизации. Однако, использование информационных технологий в подобного рода комплексах помимо положительного эффекта влечет за собой не только новые возможности для автоматизации и управления технологическими процессами предприятия, но и новые угрозы и риски ИБ.

Анализ представленных в докладе источников данных позволяет разрабатывать новые алгоритмические решения, способствующие повышению защищенности учетных записей субъектов ПСАиУ от компрометации в том числе на ранних стадиях подготовки атак за счет сочетания многокомпонентного профиля оператора (включающего набор признаков, извлекаемых из систем управления событиями и систем поведенческого анализа) и применения нейросетевого анализа слабоструктурированных данных, генерируемых субъектом запросов к дочерним компонентам ПСАиУ.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ №21-71-00125*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Singleton, C.; Hammond, C.; DeBeck, C.; Onut, V.; Zorabedian, J. IBM X-Force Threat Intelligence Index. 2022. [Электронный ресурс]: URL: <https://www.ibm.com/security/data-breach/threat-intelligence> (дата обращения: 23.04.2022).
2. Theoharidou, M.; Kokolakis, S.; Karyda, M.; Kiountouzis, E. The insider threat to information systems and the effectiveness of ISO17799. *Comput. Secur.* 2005, 24, 472–484
3. Eberle, W., Graves, J., & Holder, L. (2011). Insider threat detection using a graph-based approach. *Journal of Applied Security Research*, 6(1), 32-81.
4. Alpaydin, E. *Introduction to Machine Learning*; MIT Press: Cambridge, MA, 2014
5. Yuan, S., & Wu, X. (2021). Deep learning for insider threat detection: Review, challenges and opportunities. *Computers and Security*, 104
6. Al-Mhiqani M. N. et al. A new intelligent multilayer framework for insider threat detection // *Computers & Electrical Engineering*. – 2022. – Т. 97. – С. 107597.
7. Исхаков А. Ю. Адаптивные технологии аутентификации в UEBA-системах // *Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2019)*. - С. 2550-2554.

---

A. Y. Iskhakov (ICS RAS, Moscow). **Detecting deviations in the behaviour of the access subject of an industrial automation system**

The current state of information technology development and its integration into industrial automation and control systems brings not only new opportunities for managing enterprise processes, but also new threats and risks to information security. When ensuring information security of information management systems for critical infrastructure facilities, it is important to ensure the functionality of control over the actions of access subjects.

The report considers existing approaches to detection of anomalies in user actions and gives a brief overview of the solution being developed to detect anomalies in industrial automation and control systems.

А. С. ГУБАНКОВ, Д. Ю. ЮХИМЕЦ  
 (Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН,  
 Институт проблем морских технологий ДВО РАН,  
 Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток,  
 Севастопольский государственный университет, г. Севастополь)

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ЭЛАСТОСТАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВНЕШНИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

*В докладе рассматривается метод идентификации кинематических и эластостатических параметров многозвенных промышленных роботов. Этот метод не требует сложного и дорогостоящего оборудования для высокоточных внешних измерений положения и ориентации рабочего инструмента в декартовой системе координат. Метод дает простые и дешевые средства идентификации параметров, а их реализация позволяет значительно повысить динамическую точность перемещения рабочих органов манипуляторов по пространственным траекториям при выполнении различных технологических операций реального производства. Рассмотрен модельный пример.*

**Введение.** В настоящее время промышленные роботы (ПР) используются не только для выполнения простых транспортных операций, но в качестве основы для создания робототехнических обрабатывающих комплексов [1-3]. Для выполнения указанных операций особое значение имеет точность позиционирования рабочего инструмента (РИ) в абсолютной системе координат.

Реальная точность позиционирования рабочего инструмента ПР в абсолютной системе координат определяется в основном точностью кинематической модели ПР, так как его контроллер определяет положение рабочего инструмента с использованием только этой модели и показаний датчиков углов поворота его приводов. При этом реальная модель ПР может отличаться от модели, используемой контроллером, из-за неточностей изготовления и сборки механических частей ПР. Поэтому способом повысить точность движения РИ ПР является уточнение кинематических параметров модели ПР.

В настоящее время существует большое количество методов калибровки кинематических параметров ПР. Эти методы основаны на использовании внешних высокоточных измерительных устройств [4-7], измеряющих абсолютное положение и ориентацию фланца ПР.

Также для калибровки ПР могут использоваться оптические измерительные системы, измеряющие относительные перемещения фланца ПР [8,9]. В отдельных случаях для определенных моделей ПР могут использоваться специальные калибровочные устройства (калибровочные пластины) или заранее откалиброванный ПР такой же модели [10].

При этом на ПР, используемых для выполнения операций механической обработки устанавливаются тяжелые РИ (фрезеровочный шпиндель), которые создают достаточно большие внешние нагрузки, приложенные к фланцу ПР. В этом случае начинают проявляться эластостатические эффекты, которые обусловлены нежесткостью звеньев ПР и их шарниров. Наличие этих эффектов приводит к дополнительным отклонениям РИ, которые нельзя определить на основе измерения углов поворота приводов ПР. Поэтому для обеспечения точности движения РИ ПР необходимо учитывать не только кинематическую модель ПР, но и модель его эластостатики. Методы определения параметров эластостатической модели ПМ представлены, например, в работах [11,12], которые основаны на использовании внешних измерительных устройств для определения малых отклонений фланца ПР при прикладывании к нему известных сило-моментных воздействий.

Основным недостатком существующих методов калибровки параметров моделей ПМ является необходимость использования дорогостоящих внешних измерительных устройств, а также достаточно сложная процедура вычисления этих параметров. В работе [13,14] был предложен метод идентификации кинематических параметров ПР, не требующий использования какого-либо специализированного оборудования. В этом методе для настройки параметров кинематической модели ПР используются данные от их датчиков углов поворота приводов отдельных степеней подвижности при выходе рабочего органа ПР в одну и ту же точку пространства с раз-

ной ориентацией рабочего органа. Однако указанный метод не учитывает эластостатические эффекты ПР, поэтому в этой работе будет проведена модификация указанного метода для обеспечения возможности одновременной идентификации кинематических и эластостатических параметров ПР.

**Постановка задачи.** В работе будут рассматриваться ПР типа PUMA, которые наиболее распространены в производстве и используются для выполнения технологических операций. Кинематическая модель таких ПР с учетом эластостатических эффектов описывается с помощью уравнений вида [7]:

$$T_f = G(\Phi, Q, \zeta), \quad (1)$$

$$G(\Phi, Q, \zeta) = \prod_{i=1}^6 T_i(\phi_i, q_i, \zeta_i), \quad (2)$$

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos(q_i + \theta_i + \zeta_i) & -\sin(q_i + \theta_i + \zeta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(q_i + \theta_i + \zeta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(q_i + \theta_i + \zeta_i) \\ \sin(q_i + \theta_i + \zeta_i) & \cos(q_i + \theta_i + \zeta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(q_i + \theta_i + \zeta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(q_i + \theta_i + \zeta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $T_f = \begin{bmatrix} R_f & X_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{4 \times 4}$  – матрица однородного преобразования, описывающая положение и ориентацию последнего звена (фланца) ПР в абсолютной системе координат, связанной с основанием манипулятора;  $R_f \in R^{3 \times 3}$  – матрица ориентации фланца ПР в абсолютной системе координат;  $X_f \in R^{3 \times 1}$  – вектор координат фланца ПР в абсолютной системе координат;  $\Phi = [\phi_1^T, \dots, \phi_6^T]^T$ ,  $\phi_i = [a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i]$ ,  $i = \overline{1,6}$  – матрица параметров Денавита-Хартенберга;  $k$  – номер шарнира ПР;  $Q = (q_1, \dots, q_6)^T$  – вектор обобщенных координат (углов поворота приводов) ПР;  $\zeta \in (\zeta_1, \dots, \zeta_6)^T$  – вектор приращений обобщенных координат, обусловленный наличием эластостатических эффектов;  $T_i$  – матрица преобразования Деннавита-Хартенберга.

Модель эластостатики ПР имеет следующий вид [7]:

$$\zeta = K_\zeta J_\zeta^T F, \quad (3)$$

$$J_\zeta = \frac{\partial t(\Phi, Q, \zeta)}{\partial \zeta},$$

где  $t = [\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_A, \delta_B, \delta_C]^T$  – вектор приращений координат и углов ориентации фланца ПР, вызванных наличием эффектов эластостатики;  $K_\zeta = \text{diag}(k_{\zeta_1}, \dots, k_{\zeta_6}) \in R^{6 \times 6}$  – диагональная матрица коэффициентов податливости;  $F$  – вектор внешних сил и моментов, приложенных к фланцу манипулятора.

Управление движением ПР традиционно происходит на основе только его кинематической модели без учета добавок, определяемых моделью эластостатики ПР (3). При этом в качестве кинематических параметров манипуляторов обычно используется матрица  $\tilde{\Phi}$ , соответствующая номинальным геометрическим параметрам, приведенным в технической документации ПР.

Однако точные кинематические параметры  $\Phi$  конкретного ПР могут отличаться от его номинальных параметров  $\tilde{\Phi}$ , вследствие неточности изготовления и соединения его механических элементов, на некоторую малую величину. Эти параметры ПР используются не только для расчета текущего положения и ориентации фланца ПР, но и для расчета вектора  $Q^*$  желаемых углов поворота приводов ПР, позволяющих обеспечить выход РИ ПР в заданное положение с заданной ориентацией. Использование параметров  $\tilde{\Phi}$  приведет к формированию значений  $\tilde{Q}^*$  и отклонению положения фланца ПР в реальности от заданного положения. Такой же эффект будет наблюдаться если при решении обратной задачи кинематики не учитывать эластостатические эффекты.

Таким образом в докладе ставится и решается следующая задача. Пусть имеется ПР типа PUMA, имеющий кинематические и эластостатические параметры, описываемые соответственно матрицами  $\Phi$  и  $K_\zeta$ . Контроллер робота использует для решения его прямой и обратной задачи кинематики матрицу номинальных параметров  $\tilde{\Phi}$  и не учитывает  $K_\zeta$ , что приводит к появлению ошибки  $\varepsilon$  при позиционировании фланца ПР в абсолютной системе координат. Для

уменьшения этой ошибки необходимо разработать метод оценки параметров ПР на основе серии измерений его обобщенных координат.

**Метод идентификации кинематических и эластостатических параметров промышленных роботов.** Для настройки параметров ПР предлагается использовать метод, предложенный в работах [13,14]. Согласно этому методу исходными данными для оценки параметров модели ПР является  $n$  серий измерений векторов  $Q$ . Каждая  $i$ -я серия измерений состоит из  $m_i$  векторов  $Q$ , которые соответствуют положению ПР при выводе с разной ориентацией рабочей точки инструмента в одну и ту же точку  $X^i$ , координаты которой неизвестны. Как правило таким инструментом является остроконечный шуп.

Каждому вектору  $Q_j^i$ ,  $i = (\overline{1, n})$ ,  $j = (\overline{1, m_i})$  можно поставить в соответствие вектор  $\hat{X}_{t,j}^i$  координат рабочей точки инструмента в абсолютной системе координат, который с учетом модели (1)-(2) при использовании оценок матрицы  $\hat{\Phi}$  кинематических параметров ПР и матрицы податливости  $\hat{K}_\zeta$  будет вычисляться по выражению:

$$T_j^i(\hat{\Phi}, Q_j^i, \hat{\zeta}) = \begin{bmatrix} \hat{R}_{f,j}^i & \hat{X}_{t,j}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\prod_{k=1}^{m_i} T_{k,j}^i(\hat{\Phi}_k, q_{k,j}^i, \hat{\zeta}_k)) \hat{T}_{tcp}, \quad (4)$$

где  $\hat{T}_{tcp} = \begin{bmatrix} I & \hat{X}_{tcp} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I \in R^{3 \times 3}$  - единичная диагональная матрица;  $\hat{X}_{tcp}$  - оценка вектора координат рабочей точки инструмента (ТСП – tool center point) в системе координат фланца робота.

Координаты, рассчитанные с помощью (4),  $\hat{X}_{t,j}^i$  будут отличаться от координат реального положения рабочей точки инструмента в силу отличия используемых параметров ПР от их реальных значений. Однако так как рабочий инструмент в каждой серии измерений выводится в одну и ту же точку с неизвестными координатами, то и реальные координаты рабочей точки в одной серии измерений будут совпадать. Этот факт можно использовать для идентификации кинематических параметров манипулятора.

Оценку матрицы  $\hat{\Phi}$  кинематических параметров манипулятора и матрицы  $\hat{K}_\zeta$  коэффициентов податливости можно осуществить, подбирая указанные параметры так, чтобы координаты  $\hat{X}_{t,j}^i$ , вычисленные по модели (1)-(3) с использованием  $\hat{\Phi}$  и  $\hat{K}_\zeta$  для отдельной серии измерений сблизилась на минимальное расстояние. То есть оценку качества идентификации параметров манипулятора можно производить по следующему критерию:

$$\mathfrak{J}(\mathcal{E}, \hat{\Phi}, \hat{k}_\zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i-1} \sum_{k=j+1}^{m_i} (\hat{X}_{t,j}^i - \hat{X}_{t,k}^i)^2. \quad (5)$$

Выражение (5) не содержит реальных координат точек  $X^i$ , поэтому для оценки параметров ПР не требуется использования высокоточных измерительных систем. Таким образом, задача идентификации параметров ПР формулируется следующим образом:

$$\hat{\Phi}, \hat{K}_\zeta = \arg \min_{\Phi, K_\zeta} \square(\mathcal{E}, \hat{\Phi}, \hat{K}_\zeta). \quad (6)$$

Для оценки параметров ПР использовался метод численной оптимизации Ливенберга-Марквардта. Результаты численных экспериментов показали, что ошибки в определении линейных кинематических параметров ПР не превышают 0.025 мм, угловых 0.006°, а ошибка определения величин коэффициентов податливости в основном не превышает 5% (исключение составляет коэффициент  $k_{\zeta 6}$ , ошибка оценки которого составляет 20%). Следует отметить, что идентификация параметра  $k_{\zeta 1}$  возможна только если обеспечить действие известной внешней силы, создающий момент вдоль оси  $z$  абсолютной системы координат. Однако в предложенном способе идентификации сделать это технически сложно. Поэтому разработка метода идентификации этого коэффициента является отдельной задачей, требующей дальнейшего решения.

Таким образом, результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенного метода и возможность одновременной идентификации параметров кинематической модели ПР и коэффициентов податливости без использования внешних измерительных устройств.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Соглашение Минобрнауки РФ № 075-03-2022-104/1 от 31.01.2022, FEFM-2021-0014 № 121111600136-3*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филаретов В.Ф., Зуев А.В., Губанков А.С. Управление манипуляторами при выполнении различных технологических операций. М.: Наука, 2018. 232 с.
2. Филаретов В.Ф., Юхимец Д.А., Зуев А.В., Губанков А.С., Мурсалимов Э.Ш. Разработка метода совмещения трехмерных моделей обрабатываемых деталей с их CAD-моделями при наличии деформаций. Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. №3. С. 60-69.
3. Филаретов В.Ф., Юхимец Д.А., Зуев А.В., Губанков А.С. Метод автоматической обработки гибких изделий сложной пространственной формы на основе информации, получаемой от систем технического зрения и их CAD – моделей. Автоматизация в промышленности. 2016. №12. С. 53-58.
4. Hollerbach J., Khalil W., Gautier M. Model Identification. Springer Handbook of Robotics; Siciliano, B., Khatib, O., Eds. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2016.
5. Ibaraki S., Theissen N.A., Archenti A., Alam M.M. Evaluation of Kinematic and Compliance Calibration of Serial Articulated Industrial Manipulators. Int. J. Autom. Technol. 2021. Vol. 15. P. 567–580.
6. Alici G., Shirinzadeh B. Enhanced Stiffness Modeling, Identification and Characterization for Robot Manipulators. IEEE Transactions on Robotics. 2005. Vol. 21. № 4. P. 554 – 564.
7. Dumas C., Caro S., Mehdi C., Garnier S., Furet B. Joint Stiffness Identification of Industrial Serial Robots. Robotica, Cambridge University Press. 2011. Vol. 30. P. 649-659.
8. Kolyubin S., Paramonov L., Shiriaev A. Robot Kinematics Identification: KUKA LWR4+ Redundant Manipulator Example. Journal of Physics: Conference Series. 2015. Vol. 659. № 012011.
9. Luo R.C., Wang H. Automated Tool Coordinate Calibration System of an Industrial Robot. Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Madrid, Spain. 2018. P. 5592-5597.
10. Soe-Knudsen R., Ostergaard E.H., Petersen H.G. Calibration and programming of robots. US Patent 9833897 B2. Universal Robots A/S. 2017. P. 1-31.
11. Klimchik A., Wu Y., Caro S., Furet B., Pashkevich A. Geometric and elastostatic calibration of robotic manipulator using partial pose measurements. Advanced Robotics. 2014. Vol. 28. № 21. P. 1419-1429.
12. Klimchik A., Ambiehl A., Garnier S., Furet B., Pashkevich A. Efficiency evaluation of robots in machining applications using industrial performance measure. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. Vol. 48. P. 12–29.
13. Gubankov A., Yukhimets D. Development and Experimental Studies of an Identification Method of Kinematic Parameters for Industrial Robots without External Measuring Instruments. Sensors. 2022. Vol. 22. № 3376. <https://doi.org/10.3390/s22093376>
14. Губанков А.С., Юхимец Д.А., Климчик А.С. Способ калибровки кинематических параметров многостепенных манипуляторов. Патент РФ № 2719207. Бюл. № 11, 2020.

---

A.S.Gubankov, D.A.Yukhimets (Institute of automation and control processes, Vladivostok; Institute of marine technology problems, Vladivostok; Far Eastern federal university, Vladivostok). **Development of a method for identifying kinematic and elastostatic parameters of industrial robots without the use of external measuring devices**

The report discusses the method of identification of kinematic and elastostatic parameters of multilink industrial robots. This method does not require complex and expensive equipment for high-precision external measurements of the position and orientation of the end effector in the Cartesian coordinate system. The method provides simple and cheap means of identifying parameters, and their implementation makes it possible to significantly increase the dynamic accuracy of the movement of manipulator end effectors along spatial trajectories when performing various technological operations of real production. A model example is considered.



Е.М. ГРИШИН, А.А. ЛАЗАРЕВ, Е.Г. МУСАТОВА  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ ПОЛИГОНОВ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

*Рассмотрена задача движения поездов через границу двух полигонов железной дороги. Необходимо найти кратчайший путь от начальной точки на первом полигоне до конечной точки на втором. На первом полигоне времена и скорость движения поезда известны и постоянны, в то время как на втором полигоне времена движения могут быть увеличены. Введены определения радиуса устойчивости граничной точки двух полигонов, и получены формулы их вычисления. Значение введенного радиуса устойчивости характеризует предел возмущения, при котором существует кратчайший путь, проходящий через заданную граничную точку.*

**Введение.** Рассмотрена задача составления маршрута поезда при движении через границу двух полигонов. Полигоны железной дороги представляют собой участки путей с собственной дирекцией и диспетчерами. Каждый диспетчер обладает полной информацией только о том полигоне, на котором работает. Данные относительно соседних полигонов известны неточно. По этой причине при составлении маршрута поезда, проходящего через несколько полигонов, могут возникать ситуации, когда, например, поезд поступает на ремонтируемый путь, и время движения увеличивается.

В работе предлагается оценка устойчивости граничной точки двух полигонов относительно возмущений, возникающих на втором полигоне. Необходимо минимизировать общее время движения поезда от начальной точки до конечной. Так как диспетчер на одном полигоне не обладает полной информацией относительно второго, предлагается метод оценки устойчивости решения, позволяющий учитывать изменения на втором полигоне. Введены определения радиуса устойчивости граничной точки двух полигонов, характеризующие предел возмущений, при которых будет существовать оптимальный путь, проходящий через определенную граничную точку.

В научной литературе предлагаются различные подходы к оценке устойчивости. Так, например, в [1] авторами рассматривается задача построения робастного циклического расписания движения поездов на основе базового расписания. Для оценки допустимых вариаций входных параметров были предложены методы определения радиуса устойчивости [2,3] – минимального значения допустимых интервалов изменения входных данных, при которых полученное решение остается оптимальным. Другой подход касается определения устойчивости всей задачи в целом. Работа [4] является одной из первых, посвященных определению радиуса устойчивости задачи дискретной оптимизации. Автором исследуется задача коммивояжера, для решения которой выводится формула вычисления радиуса устойчивости, характеризующего максимальные возмущения, при которых не появляются новые оптимальные решения. Метод вычисления радиуса устойчивости задачи поиска кратчайшего пути на графе предложен в [5].

В отличие от вышеописанных подходов, в данной работе предлагается введение радиуса устойчивости не конкретного решения или задачи в целом, а устойчивости характеристики решения. В качестве такой характеристики в рассматриваемой задаче выступает граничная точка полигона, поскольку именно выбор граничной точки полигона, через которую проходит поезд, определяет дальнейшую стратегию движения поезда на втором полигоне.

**Описание транспортной системы.** Пусть есть два граничащих полигона железной дороги. Задана станция отправления поезда, расположенная на первом полигоне и конечная станция на втором полигоне. Времена движения по всем участкам пути первого полигона заданы точно. Это означает, что известными методами можно определить оптимальные пути из начальной вершины до каждой из граничных точек двух полигонов. Необходимо построить кратчайший путь от станции отправления до станции назначения.

Будем рассматривать граф, вершины которого соответствуют станциям, а ребра – участкам железной дороги. Обозначим за  $A$  входные данные, определяющие время движения поезда по

каждому из участков железной дороги, а через  $B$  – возмущенные входные данные. Тогда вектор  $B - A$  характеризует возмущения входных данных. Исходные и возмущенные данные будем представлять в виде векторов, где каждая координата соответствует продолжительности движения по некоторому участку пути. Векторы  $A$  и  $B$  могут иметь только неотрицательные элементы, более того,  $B - A \geq 0$ , так как невозмущенные входные данные  $A$  соответствуют минимальному возможному времени движения и не могут быть уменьшены.

Определим при невозмущенных входных данных  $A$  множество оптимальных путей от станции отправления до станции назначения и обозначим это множество через  $T(A)$ . Будем полагать, что все оптимальные пути проходят через одну и ту же граничную точку  $H$ . Обозначим через  $\phi(H)$  все пути, проходящие через ту же граничную точку  $H$ , что и кратчайшие пути из  $T(A)$ . Через  $\bar{\phi}(H)$  обозначим все остальные возможные пути, которые не проходят через  $H$ .

Рассмотрим некоторый путь  $\tau$  от станции отправления до станции назначения, проходящий через произвольную граничную точку. Без ограничения общности будем считать, что участок пути из начальной точки в граничную (на первом полигоне) в каждом из рассматриваемых путей выбирается как кратчайший. Обозначим через  $p(\tau, A)$  длину этого участка пути. Тогда  $p(\tau, A)$  одинаково для всех путей, проходящих через одну и ту же граничную вершину. Пусть  $l(\tau, A)$  – длина участка пути  $\tau$  от граничной точки двух полигонов до конечной станции (на втором полигоне). Таким образом, полная длина некоторого пути  $\tau$  выражается как  $p(\tau, A) + l(\tau, A)$ .

**Радиус устойчивости.** Введем область  $D_r(A) = \{B: \|B - A\| \leq r, B - A \geq 0\}$ . В качестве нормы будем рассматривать чебышевскую. Область  $D_r(A)$  является областью устойчивости, если для любого  $B \in D_r(A)$  выполнено

$$T(B) \cap \phi(H) \neq \emptyset. \quad (1)$$

Радиусом устойчивости  $\rho_s(A)$  граничной точки  $H$ , через которую проходят все оптимальные пути из  $T(A)$ , будем называть

$$\rho_s(A) = \max \{r: \forall B \in D_r(A), T(B) \cap \phi(H) \neq \emptyset\}. \quad (2)$$

Радиус устойчивости характеризует максимальное возмущение входных данных  $B - A$  такое, что оптимальный путь при таком возмущении будет лежать во множестве  $\phi(H)$ , т.е. будет проходить через ту же самую граничную точку полигонов. Другими словами, если норма вектора возмущений  $B - A$  не превосходит радиус устойчивости  $\|B - A\| \leq \rho_s(A)$ , то через вершину  $H$  будет проходить хотя бы один оптимальный путь. Для радиуса устойчивости граничной точки  $H$ , определяемого по (2), доказана формула его вычисления:

$$\rho_s(A) = \max_{\tau \in \phi(H)} \min_{\tau' \in \bar{\phi}(H)} \frac{(p(\tau', A) + l(\tau', A)) - (p(\tau, A) + l(\tau, A))}{|\tau| - |\tau \cap \tau'| - 1}. \quad (3)$$

В некоторых случаях важно знать не допустимое возмущение на отдельных участках пути, а суммарное значение сразу на всех возможных путях. Тогда можно ввести иное определение радиуса устойчивости, характеризующее значение, на которое можно увеличить продолжительности движения участков путей из множества  $\phi(H)$  в совокупности так, что при возмущении оптимальный путь будет принадлежать этому же множеству. Назовем такое определение радиусом устойчивости граничной точки  $H$  в совокупности и обозначим через  $\rho_g(A)$ . Такое определение радиуса устойчивости соответствует норме  $L_1$ , определяемой для векторов входных данных и возмущения, как  $\|A\| = \sum_{a_k \in A} |a_k|$ , где  $a_k$  – исходное время движения по участку  $k$ .

Для радиуса устойчивости граничной точки в совокупности для нормы  $L_1$  доказана следующая формула его вычисления:

$$\rho_g(A) = \sum_{\tau \in \phi(H)} \max\{0, \min_{\tau' \in \bar{\phi}(H)} (p(\tau', A) + l(\tau', A)) - (p(\tau, A) + l(\tau, A))\}. \quad (4)$$

В случае, если существуют несколько оптимальных путей при входных данных  $A$ , которые проходят через несколько граничных точек полигонов, то радиус устойчивости каждой из них равен 0.

**Заключение.** В работе для задачи движения поездов через границу двух полигонов были введены понятия радиуса устойчивости граничной точки двух полигонов и радиуса устойчивости в совокупности. Полученные формулы вычисления радиуса устойчивости позволяют оценить максимальную вариацию входных данных, при которых оптимальный маршрут поезда будет проходить через ту же граничную точку, что и при невозмущенных входных данных.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ-РЖД-СИРИУС 20-38-51010.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maróti, G. A branch-and-bound approach for robust railway timetabling. *Public Transp.* 2017. V.9. P. 73–94.
2. Sotskov Y., Tanaev V., Werner F. Stability Radius of an Optimal Schedule: A Survey and Recent Developments. *Industrial Applications of Combinatorial Optimization. Applied Optimization.* 1998. P. 72–108.
3. Sotskov Y., Wagelmans A., Werner F. On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule. *Annals of Operations Research.* 1998. V.83. P. 213–252.
4. Леонтьев В. Устойчивость задачи коммивояжера. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1975. Т. 15. №5. С. 1298–1309.
5. Гордеев Э. Н. Устойчивость решения в задаче о кратчайшем пути на графе. *Дискретная математика.* 1989. Т. 1. №. 3. С. 39–46.

E.M.Grishin, A.A.Lazarev, E.G.Musatova (V. A. Trapeznikov Institute of Control Science RAS, Moscow). **Stability radius of in the problem of train movement across the border of two railway polygons**

The problem of trains moving via the boundary of two railway polygons is considered. The shortest path from the initial station on the first polygon to the final station on the second polygon has to be found. On the first polygon the transit times are known and constant, while on the second polygon the transit times can be increased. The definitions of the stability radius of the boundary point of the two polygons are introduced, and formulas for their calculation are presented. The value of the introduced stability radius characterizes the limit of perturbation at which there exists the shortest path passing through a certain boundary point.

А.А. ЛАЗАРЕВ  
(Институт проблем управления РАН, Москва)

## МЕТРИКИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

*Рассматривается фундаментальная проблема построения метрик для задач теории расписаний. На основе метрик разработан подход нахождения за полиномиальное время приближенного решения с минимальной гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции.*

**Введение.** Каждая математическая теория так или иначе использует расстояние между объектами исследования. В непрерывной математике вопрос метризации пространства достаточно проработан. В дискретной математике этот вопрос остается во многом открытым. Для задач теории расписаний необходимость построения метрик была вызвана необходимостью оценки значений целевой функции и построении приближенных решений с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции. Доклад посвящен вопросам построения метрик для задач теории расписаний и разработке качественно нового подхода, названного - метрическим.

**Метрический подход.** Идею метода покажем на фундаментальной классической задаче теории расписаний одного прибора. На приборе необходимо обслужить  $n$  работ. Прерывания и одновременное обслуживание нескольких работ запрещено. Каждой работе  $j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$  заданы:

$r_j$  – момент поступления в систему, т. е. момент времени, ранее которого работа  $j$  не может быть начата обслуживаться;

$p_j$  - продолжительность обслуживания;

$d_j$  - директивный срок, к которому желательно завершить обслуживание.

Необходимо заметить, что директивный срок может быть и нарушен, т.е. окончание обслуживания работы может быть и после директивного срока.

Через  $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  будем обозначать перестановку элементов множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждая перестановка фактически однозначно задает расписание обслуживания работ. Через  $C_j(\pi)$  будем обозначать момент завершения обслуживания работы  $j$  при расписании  $\pi$ . Пусть  $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ , тогда

$$C_{j_1}(\pi) = r_{j_1} + p_{j_1},$$

$$C_{j_k}(\pi) = \max\{C_{j_{k-1}}(\pi), r_{j_k}\} + p_{j_k}, k = 2, 3, \dots, n.$$

Задача заключается в нахождении расписания  $\pi^*$ , при котором значение целевой функции  $\max_{j \in N}\{C_j(\pi) - d_j\}$  принимает наименьшее значение, т.е.

$$L_{max} = \min_{\pi} \max_{j \in N}\{C_j(\pi) - d_j\}. \quad (1)$$

В теории расписаний введена трехпозиционная нотация [1]. Данная задача обозначается как  $1|r_j|L_{max}$ . Задача (1) является  $NP$  – трудной в сильном смысле [2, 3].  $NP$  – трудность в сильном смысле означает, что для данной задачи нельзя построить пресвдополиномиальный алгоритм решения в парадигме, что  $P \neq NP$ .

Для данной задачи выделены полиномиально разрешимые подслучаи:

1.  $r_j = const, j = 1, 2, \dots, n$ . Трудоемкость алгоритма Джексона  $O(n \log n)$  операций [4];
- 1'.  $d_j = const, j = 1, 2, \dots, n$ . Небольшая модификация алгоритма Джексона приводит к решению данной подзадачи за  $O(n \log n)$  операций;
2.  $p_j = const, j = 1, 2, \dots, n$ . Эта подзадача решается за  $O(n^2 \log n)$  операций [5];
3.  $d_j = r_j + p_j + const, j = 1, \dots, n$ . Данная подзадача решается за  $O(n^3 \log n)$  операций [6];
- 3'.  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n; r_1 + p_1 \geq r_2 + p_2 \geq \dots \geq r_n + p_n$ . Данная подзадача также решается за  $O(n^3 \log n)$  операций [6];
- 3".  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n; d_1 - \alpha p_1 - \beta r_1 \geq d_2 - \alpha p_2 - \beta r_2 \geq \dots \geq d_n - \alpha p_n - \beta r_n$ , где  $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, +\infty)$ . Небольшая модификация алгоритма [6] позволяет решать подзадачу за  $O(n^3 \log n)$  операций [7]. Необходимо отметить, что модификация алгоритма из [6] поз-

воляет строить Парето-оптимальное множество по критериям  $\min_{\pi} \max_{j \in N} \{C_j(\pi) - d_j\}$  и  $\min_{\pi} \max_{j \in N} \{C_j(\pi)\}$  за  $O(n^3 \log n)$  операций [6].

4. Если существует такая константа  $\beta$ , что  $r_j \in [d_j - p_j - \beta, d_j - \beta]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Оптимальное решение данной подзадачи находится за  $O(n^2 \log n)$  операций [8].

Таким образом, для исследуемой  $NP$  – трудной в сильном смысле задачи существуют не тривиальные полиномиально разрешимые подслучаи. Необходимо максимально эффективно использовать ранее полученные знания для решения исследуемой задачи в общем случае.

Все полиномиально разрешимые случаи задачи удовлетворяют системе линейных неравенств:

$$XR + YP + ZD \leq H,$$

где  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ ,  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ ,  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$  и  $X, Y, Z$  – матрицы размерности  $k \times n$ , а  $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$  –  $k$ -мерный вектор (верхний индекс обозначает операцию транспонирования).

**Теорема 1.** [6]. Пусть  $A$  и  $B$  два примера задачи  $1|r_j|L_{max}$ , тогда

$$0 \leq L_{max}^A(\pi^B) - L_{max}^A(\pi^A) \leq \rho(A, B),$$

где  $\pi^A$  и  $\pi^B$  – оптимальные расписания примеров  $A$  и  $B$ .

$$\rho(A, B) = \rho_r(A, B) + \rho_d(A, B) + \rho_p(A, B),$$

$$\rho_r(A, B) = \max_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\} - \min_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\},$$

$$\rho_d(A, B) = \max_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\} - \min_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\},$$

$$\rho_p(A, B) = \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

Функция  $\rho(A, B)$  удовлетворяет всем аксиомам метрики. Кроме того, функция  $\rho(A, B)$  является сепарабельной относительно параметров  $r_j, p_j, d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , что позволяет сформулировать задачу линейного программирования.

Таким образом, чтобы наиболее эффективно использовать ранее полученное знание (полиномиально разрешимые алгоритмы), необходимо будет решить следующую задачу линейного программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^d - y^d + x^r - y^r) + \sum_{j \in n} x_j^p \rightarrow \min \\ y^d \leq d_j^A - d_j^B \leq x^d, j = 1, 2, \dots, n, \\ y^r \leq r_j^A - r_j^B \leq x^r, j = 1, 2, \dots, n, \\ -x_j^p \leq p_j^A - p_j^B \leq x_j^p, j = 1, 2, \dots, n, \\ 0 \leq x_j^p, j = 1, 2, \dots, n, \\ XR^B + YP^B + ZD^B \leq H. \end{array} \right.$$

Данный подход был применен также к задачам суммарного критерия [9], затем применен для задач нескольких приборов с отношениями предшествования между работ [6].

**Заключение.** Для  $NP$  – трудных задач теории расписаний построены метрики. На основе метрик разработан метод, названный метрическим, с помощью которого можно находить за полиномиальное время наилучшее приближенное решение с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 20-58-S52006 МНТ\_a.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey// Ann. Discrete Math. 1979. V. 5. P. 287 - 326.

2. Brucker P., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Complexity of machine scheduling problems // Math. Cent. Afd. Math. Beslisk. Amsterdam. 1975. BW 43. - 29p.
3. Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P. Complexity of machine scheduling problems // Annals of Discrete Mathematics. 1977. No 1, P. 343-362.
4. Jackson J.R. Scheduling a production line to minimize maximum tardiness // Los Angeles, CA: University of California. 1955, Manag. Sci. Res. Project. Research Report. No 43.
5. Simons B.B. A fast algorithm for single processor scheduling // Proceedings of the 19<sup>th</sup> Annual Symposium on Foundations of Computer Science. New York. Ann. Arbor. Mich. 1978. P. 246-252.
6. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019. – 408 с.
7. Lazarev A.A., Arkhipov D.I. Minimization of the Maximal Lateness for a Single Machine // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 4. P. 656-671.
8. Hoogeveen J.A. Minimizing maximum promptness and maximum lateness on a single machine // Math. Oper. Res. 1996. Vol.21. P. 100-114.
9. Lazarev A.A., Sologub A.A., Korenev P.S. A metric for total tardiness minimization // Automation and remote control. 2017. Vol.78, No. 4. C.732-740.

---

A.A. Lazarev (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow). **Metrics for problem of scheduling theory**

Metrics are constructed for NP-hard problems of scheduling theory. On the basis of metrics, a method called metric has been developed, with the help of which it is possible to find the best approximate solution in polynomial time with a guaranteed absolute error of the objective function.

А.В. ДАВЫДОВ, А.А. ЛАРИОНОВ, Н.В. НАГУЛ  
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова, г. Иркутск)

## ПРОВЕРКА НАБЛЮДАЕМОСТИ РЕГУЛЯРНОГО ЯЗЫКА С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

*Предлагается новый, основанный на оригинальном методе автоматического доказательства теорем, подход к проверке свойства наблюдаемости формального языка, описывающего ограничения на поведение логической дискретно-событийной системы (ДСС). Необходимость проверки наблюдаемости возникает при построении супервизорного управления для ДСС в случае, когда не все события являются наблюдаемыми. Подход предполагает представление логической ДСС с помощью позитивно-образованной формулы (ПОФ). Для проверки наблюдаемости используется ПОФ, включающая компоненты описания системы и заданных ограничений. В процессе вывода полученной формулы в исчислении ПОФ устанавливается причина нарушения наблюдаемости, и полученные знания могут быть использованы для модификации системы и требований к ней.*

**Введение.** В статье рассматривается задача теории супервизорного управления (ТСУ) [1] для дискретно-событийных систем (ДСС), возникающая, когда в системе наблюдается только часть событий. В этом случае, чтобы определить, может ли формальный язык, описывающий ограничения на функционирование ДСС, гарантироваться супервизором, проводятся проверки свойств управляемости и наблюдаемости языка. Формальные языки возникают, когда дискретная система представляется конечным автоматом, переходы которого из состояния в состояние помечаются буквами некоторого алфавита. Тогда последовательности переходов образуют слова, а совокупность всех таких слов образует язык. Каждый переход связан с событием, происходящим в системе, поэтому язык описывает поведение системы с высокоуровневой, или символической, точки зрения. Эта парадигма естественным образом охватывается подходом к изучению ДСС, основанным на автоматическом доказательстве теорем (АДТ). В частности, мы используем технику АДТ в исчислении позитивно-образованных формул (ПОФ).

Истоки исчисления ПОФ как полного метода для АДТ можно найти в [2], [3], [4], а подробное обсуждение его характеристик и возможностей представлено в [5]. Основные преимущества исчисления раскрываются в основанном на ПОФ прувере, компьютерной программе, используемой для АДТ. При использовании пруверов возникают известные трудности, например, прувер делает слишком много избыточных или не относящихся к делу шагов, и ему приходится хранить слишком много информации в своей базе данных. Кроме того, правила вывода и шаги вывода могут быть разного размера. Зачастую пруверы выбирают ложный путь поиска вывода из-за недостаточной фокусировки. В отличие от многих логических исчислений, лежащих в основе теоретической базы современных пруверов, таких как Vampire [6], nanoCoP [7], E [8], особенности исчисления ПОФ позволяют исключить или значительно уменьшить перечисленные выше трудности. Более того, формализм ПОФ предоставляет удобные средства для представления и обработки знаний.

Несмотря на интенсивное изучение с 1980-х [9, 10] в ТСУ все еще остается много открытых проблем, особенно касающихся частично-наблюдаемых и децентрализованных ДСС, из-за сложности алгоритмов анализа и построения управления. Подходы из других областей математики могут помочь уменьшить эту сложность и расширить применимость ТСУ в практических сферах. В частности, АДТ на основе исчисления ПОФ можно успешно использовать для решения некоторых важных задач ТСУ. В то время как управляемость уже изучалась методом, основанным на ПОФ [11], в данной статье представлен подход к проверке свойства наблюдаемости регулярного языка.

**Наблюдаемость в супервизорном управлении ДСС.** Самый распространенный и удобный способ представления ДСС - конечные автоматы, которые рассматриваются как генераторы цепочек событий, или слов, образующих так называемый язык описания поведения системы. В

[12] была создана теория супервизорного управления для ДСС как генератора формального языка. Пусть  $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m)$  – логическая дискретно-событийная система, где  $Q$  – множество состояний  $q$ ;  $\Sigma$  – множество событий;  $\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$  – функция переходов;  $q_0 \in Q$  – начальное состояние;  $Q_m \subset Q$  – множество маркированных состояний. Пусть  $L(G)$  обозначает язык, генерируемый  $G$ :  $L(G) = \{w: w \in \Sigma^* \text{ и } \delta(w, q_0) \text{ определено}\}$ , а  $L_m(G)$  обозначает язык, маркированный  $G$ :  $L_m(G) = \{w: w \in L(G) \text{ и } \delta(w, q_0) \in Q_m\}$ . Если выделено множество  $\Sigma_c \subseteq \Sigma$  управляемых событий, супервизор как средство управления ДСС способен препятствовать возникновению событий из  $\Sigma_c$  с целью ограничить поведение системы в некоторых заданных рамках, определяемых регулярным языком, например,  $K$ .

Пусть  $G$  частично наблюдаема, и функция наблюдения определена как натуральная проекция  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma_o$ , которая стирает события, принадлежащие множеству  $\Sigma \setminus \Sigma_o$  ненаблюдаемых событий. Пусть  $\bar{K}$  обозначает множество всех префиксов слов из  $K$ . Язык  $K$  наблюдаем (относительно  $L(G)$  и  $P$ ), если  $\forall s, t \in \Sigma^* (P(t) = P(s) \rightarrow (\forall \sigma \in \Sigma (s\sigma \in \bar{K} \ \& \ t\sigma \in L(G) \ \& \ t \in \bar{K} \rightarrow t\sigma \in \bar{K}))$ ). Известно, что условием существования супервизора в случае неполной наблюдаемости событий являются управляемость  $K$  и его наблюдаемость [13]. Для проверки наблюдаемости может быть использовано автоматическое доказательство теорем в исчислении ПОФ.

**Исчисление ПОФ.** Рассмотрим язык первопорядковых логических формул, состоящий из формул, построенных из атомарных формул с помощью связок  $\vee, \&, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ , кванторов  $\forall$  и  $\exists$ , а также констант *true* и *false*. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  – множество переменных,  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$  – множество атомарных формул, называемых конъюнктами, и  $\Phi = \{F_1, \dots, F_n\}$  – множество первопорядковых логических формул. Следующие формулы  $\forall x_1 \dots \forall x_k (A_1 \& \dots \& A_m) \rightarrow (F_1 \vee \dots \vee F_n)$  и  $\exists x_1 \dots \exists x_k (A_1 \& \dots \& A_m) \& (F_1 \& \dots \& F_n)$  обозначаются как  $\forall x_1, \dots, x_k A_1, \dots, A_m \{F_1, \dots, F_n\}$  и  $\exists x_1, \dots, x_k A_1, \dots, A_m \{F_1, \dots, F_n\}$  соответственно. Последние могут быть сокращены следующим образом:  $\forall_X A \Phi$  и  $\exists_X A \Phi$  соответственно. Любое из множеств  $X, A, \Phi$  может быть пустым, в этом случае они могут быть опущены при записи формулы. В формуле  $P = \forall \{F_1, \dots, F_n\}$ ,  $F_i = \exists_{x_i} B_i \{Q_{i1}, \dots, Q_{im}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , называются *базовыми подформулами*  $P$ ,  $B_i$  называются *базами фактов* или просто *базами*,  $Q_{ij}$  называются *подформулами-вопросами*, а корни подформул-вопросов – *вопросами к базам*  $B_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Вопрос вида  $\forall_X A$  (без каких-либо потомков) называется *целевым вопросом*.

Для краткости мы приводим неформальное описание правила вывода исчисления ПОФ (формальное определение можно найти в [3]). Правило вывода  $\omega$  применяется к подформулам-вопросам, конъюнкты корневых узлов которых (назовем их  $A$ ) “поглощаются” базовым конъюнктом с необходимой подстановкой  $\Theta$ . Если такое “поглощение”, т.е. подстановка  $\Theta$ , найдено, то производится преобразование по правилу  $\omega$ , при котором все непосредственно следующие узлы за  $A$  смещаются уровнем ниже с применением подстановки  $\Theta$ . Любая конечная последовательность формул  $F, \omega F, \omega^2 F, \dots, \omega^n F$ , где  $\omega^s F = \omega(\omega^{s-1} F)$ ,  $\omega^1 = \omega$ ,  $\omega^n F = \forall$ , называется *выводом*  $F$  в исчислении ПОФ (с аксиомой  $\forall$ ).

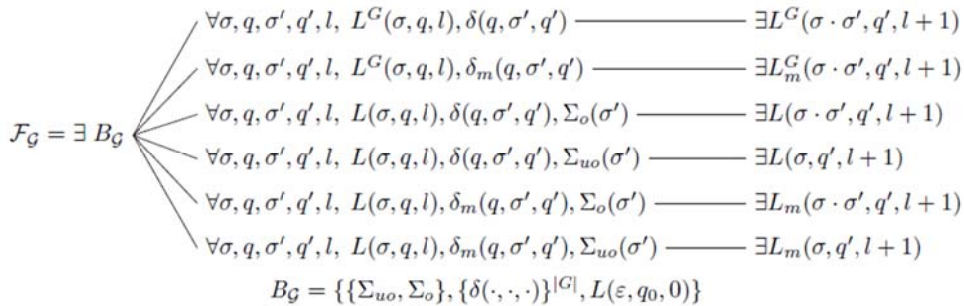


Рис. 1. ПОФ, представляющая частично-наблюдаемую ДСС

Общая форма ПОФ, моделирующей построение регулярного языка конечным автоматом при частичном наблюдении событий, представлена на рис. 1. Она имеет базу  $B_G = \{L(\varepsilon, S_0, 0)\}$ ,



$L_m(\varepsilon, S_0, 0), \delta(S_1^i, \sigma^i, S_2^i), \delta_m(S_1^i, \sigma^i, S_2^i), \Sigma_c(\sigma^p), \Sigma_{uc}(\sigma^q), \Sigma_o(\sigma^u), \Sigma_{uo}(\sigma^v)$ , описывающую структуру генератора  $G$ , и вопросы, показанные на рис. 1.

**Проверка наблюдаемости.** Пусть задан генератор  $G$ , соответствующий рассматриваемой системе, и автомат  $H$ , задающий спецификацию  $K$  на функционирование  $G$ . Покажем, как логический вывод в исчислении ПОФ может применяться для проверки наблюдаемости языка спецификации  $K$ . Для этого будем использовать ПОФ, представленную на рис. 2:

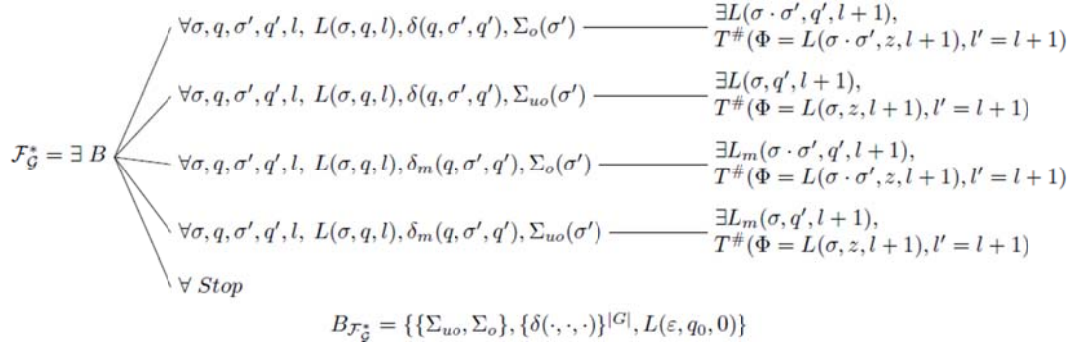


Рис. 2. ПОФ, использующая подвывод для проверки свойства наблюдаемости

Процедура проверки наблюдаемости выглядит следующим образом:

Этап 1. Составление базы ПОФ  $F_G^*$ . Как и база ПОФ  $F_G$ , она описывает генератор  $G$ . Параметру  $\Phi$  присваивается предикат  $L()$  из соответствующего вопроса  $F_G$ , а  $l'$  в этом случае выбирается как следующее за  $l$  значение, т.е.  $l'$  равно  $l + 1$ .

Этап 2. Построение ПОФ  $F_K^*$ , представляющей генератор языка спецификации, по аналогии с ПОФ на рис. 2. Формула  $F_K^*$  аналогична формуле  $F_G$  за исключением базы, где описывается автомат, порождающий язык спецификации, и параметров  $\Phi$  и  $l$ , которые будут обновляться перед началом вывода этой формулы.

Этап 3. Запуск вывода формулы  $F_G^*$ . Назовем его выводом верхнего уровня. При каждом ответе на вопрос в выводе верхнего уровня обновляются параметры  $\Phi$  и  $l'$  запускается подвывод формулы  $F_K^*$ . Результатом этого подвывода могут быть два возможных значения: пустое множество, если подвывод заканчивается ответом на целевой вопрос  $\forall z \Phi$ , или константа  $Stop$ , если подвывод завершается из-за исчерпания возможных вариантов подстановок. Последнее доказывает выполнимость формулы, а это означает, что язык спецификации не обладает свойством наблюдаемости.

Этап 4. Вывод верхнего уровня никогда не будет завершен, если спецификация наблюдаема. Если подвывод возвращает константу  $Stop$ , она автоматически добавляется в базу  $F_G^*$  и ответ на целевой вопрос неизбежен. Если возвращается пустое множество, то поиск вывода продолжается: делается попытка ответить на следующий вопрос, запускается следующий подвывод, и так далее. Следовательно, необходимо прекратить поиск вывода через некоторое заданное количество шагов  $N$ . Таким образом, алгоритм останавливается после  $N$  шагов поиска вывода формулы  $F_G^*$  или после ответа на целевой вопрос формулы  $F_G^*$ , что означает, что тестируемая спецификация не наблюдаема.

**Заключение.** Мы описали подход к решению одной из важных задач в теории супервизорного управления ДСС, основанный на использовании логических формул первого порядка языка ПОФ. Знания, накопленные в базе ПОФ в процессе логического вывода, могут быть использованы для решения различных задач ТСУ, включая модификацию спецификаций, рациональный выбор событий, требующих наблюдения, и построение супервизоров. Дальнейшая работа предполагает исследование модульных ДСС, построение децентрализованных супервизоров и реализацию временной логики для ТСУ с помощью исчисления ПОФ. Полученные результаты будут встроены на разные уровни иерархической системы управления мобильными роботами.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-07-00397а*

ЛИТЕРАТУРА

1. Cassandras C.G., Lafortune S. Introduction to Discrete Event Systems. Springer US, 2008. 782 pp.
2. Vassilyev S.N. Machine synthesis of mathematical theorems. The Journal of Logic Programming. 1990. Vol. 9. P. 235–266.
3. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федунев Е.А., Федосов Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами. Москва: Физматлит, 2000. 352 с.
4. Davydov A., Larionov A., Cherkashin E. On the calculus of positively constructed formulas for automated theorem proving. Automatic Control and Computer Sciences. 2011. Vol. 45. P. 402–407.
5. Larionov A., Davydov A., Cherkashin E. The calculus of positively constructed formulas, its features, strategies and implementation. International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, 2013. P.1023-1028.
6. Kovacs L., Voronkov A. First-order theorem proving and vampire. In: N. Sharygina, H. Veith. Eds., Computer Aided Verification, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 2013. P. 1-35.
7. Otten J. Nanocop: A non-clausal connection prover. Proceedings of the 8th International Joint Conference on Automated Reasoning. 2016. Vol. 9706, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, P. 302–312.
8. Schulz S., Cruanes S., Vukmirović P., Faster, higher, stronger: E 2.3. Proc. of the 27th CADE, Natal, Brasil, no. 11716 in LNAI, Springer, 2019. P. 495–507.
9. Seatzu C., Silva M., Schuppen J. H. Control of discrete-event systems: Automata and petri net perspectives. London: Springer, 2013.
10. W.M. Wonham, K. Cai. Supervisory Control of Discrete-Event Systems, Springer International Publishing, 2019.
11. Davydov A., Larionov A., Nagul N. On Checking Controllability of Specification Languages for DES. 43rd International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO), Opatija, Croatia, 2020, P. 1151-1156.
12. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory control of a class of discrete event processes. SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25. P. 206–230.
13. Lin F., Wonham W.M. On observability of discrete-event systems. Information Sciences. 1988. Vol. 44, no. 3. P. 173–198.

---

A.V. Davydov, A.A. Larionov, N.V. Nagul (ISDCT SB RAS, Irkutsk). **Observability check of a regular language using automatic theorem proving**

A new approach, based on the original method of automatic theorem proving, is proposed for checking the observability property of a formal language that describes constraints on the behavior of a logical discrete-event system (DES). The need to check observability arises when constructing supervisory control for DES in the case when not all events are observable. The approach involves the representation of a logical DES using a positively constructed formula (PCF). To check the observability, the PCF is used, which includes the components of the system description and given constraints. In the process of deriving the resulting formula in the PCF calculus, the reason for the violation of observability is established, and the knowledge gained can be used to modify the system and requirements for it.

Д. Г. АРСЕНЬЕВ, В. П. ШКОДЫРЕВ  
(Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург)

## ЭВОЛЮЦИЯ КИБЕРНЕТИКИ: СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ЗНАНИЯХ

*С позиции эволюционного развития рассмотрены современные тренды развития кибернетики как науки об управлении. Выделены ключевые направления, включающие интеллектуализацию, формирования иерархических сетевых структур, самоорганизации и саморазвития систем управления. Внимание фокусируется на аспектах интеллектуализации систем управления как систем, основанных на знаниях.*

*Предлагается подход к формированию базы знаний системы управления как ключевого элемента интеллектуализации. Выделены модели формализации онтологической структуры концептуальных систематизированных знаний управления, ориентированных на классы задач управления. Вводится понятие графа знаний управления как одной из наиболее общих логико-семантической моделей формализации знаний.*

**Введение.** Эволюция кибернетики как науки об управлении, ее общих принципах, закономерностях и связях процессов управления, тесно связана с развитием общества, его технологического оснащения и теми вызовами, которые сопровождают его развитие [2,6]. Одним из примеров такого вызова может служить противоречие между огромными потоками данных, накапливаемых в производственных процессах, в частности – в системах промышленной автоматизации и контроля в виде данных объективной измерительной информации, поступающей с датчиков и различных средств измерений технологического оборудования, а с другой – необходимостью их оперативного анализа с целью извлечения полезной информации и принятия оперативных управляющих решений. Ошибки в задержке анализа такой информации и принятии решений нередко становятся причиной серьезных нештатных ситуаций, аварий и катастроф [1, 12].

**Тренды эволюции кибернетики.** Одним из базовых принципов, открывающих возможность осмысления перспективных направлений в создании концепции систем управления нового поколения, является поиск аналогий в поведении и эволюции развитии сложных биологических и кибернетических систем, применяющих различные способы обработки и использования информации в целях познания и адаптации к постоянно меняющимся воздействиям окружающей среды. По сути, вопрос состоит в поиске аналогов процесса эволюции эффективно функционирующих и развивающихся живых организмов для построения кибернетических систем, использующих механизмы искусственного интеллекта при формировании и достижения цели путем поддержки целенаправленных форм поведения [1–2]. Выработанный для этого природой принцип эволюционного развития наглядно отражает общие закономерности эволюционного совершенствования в организации, а точнее – в самоорганизации сложных систем [4]. Анализ подобных закономерностей позволяет сформулировать общие механизмы построения и функционирования информационных кибернетических систем с точки зрения принципов обработки информации, информационного обмена с другими системами и внешней средой, включая механизмы управления и развития. Такой подход, основанный на использовании фундаментальных законов эволюции и механизмов развития, послужил основой формирования и последующего развития нового перспективного междисциплинарного направления в исследовании информационных управляющих систем, известного как «эволюционная кибернетика» [1–2].

Авторы выделяют три стратегических направления современного развития кибернетики [5, 16–17]. Первое и наиболее активно развивающееся в настоящее время связано с *интеллектуализацией управляющих систем* и комплексов. Ключевым моментом в определении «интеллектуальности» становится способность системы извлекать, аккумулировать и применять знания как одну из базовых сущностей искусственного интеллекта, позволяющей системе функционировать под автономным управлением, воспринимать окружающую среду и существовать в ней в течении продолжительного времени, адаптируясь к изменениям и достигая поставленной цели. Способность формировать знания и проводить на основании них рассуждения позволяет

интеллектуальной системе самой вырабатывать более эффективные стратегии действий в условиях непрерывного изменения внешних воздействий, отсутствия или неполноты информации, влияния возмущающих факторов [9, 11]. Это соответствует базовому принципу *единства интеллекта и деятельности в сложных системах*, использующих интеллект как регулятор эффективной деятельности в поведении сложных систем [13].

Второе стратегическое направление связано с активным распространением *принципа иерархической сетевой организации* и *группового управления* распределенными объектами, процессами и системами, образующими среду распределенного искусственного интеллекта. Определяющим в данном случае является приоритет координационных – горизонтальных интерактивных связей над вертикальными «чисто конкурирующими» стратегиями в сложных интегрированных системах. Кибернетические решения предполагают в этом направлении прежде всего создание полноценной связанной многоагентной системы, включающей связь между агентами управления (Vehicle-to-Vehicle,) и между каждым агентом и внешней окружающей ее инфраструктурой (Vehicle-to-Infrastructure,). Подобное возникновение горизонтальных взаимосвязей кооперации и координации между отдельными когнитивными единицами играет ключевую роль в процессе формирования многоуровневых интегрированных структур с элементами стратегий группового управления [7].

Третье стратегическое направление связано с использованием принципов самоорганизации и развития. Это обусловлено ключевыми принципами функционирования сложной (по Г.Хакену и И.Пригожину) гибридной системы, эволюционирующее развитие которой опирается на фундаментальные процессы взаимодействия между ее компонентами, прежде всего кооперации и координации [9].

**Интеллектуальное – управление, основанное на знаниях.** Ключевым элементом интеллектуальной системы управления становится база знаний управления [11, 14]. Учитывая чрезмерно большой контекст толкования понятия знаний и базы знаний для различных предметных областей, авторы ограничиваются толкованием базы знаний систем управления как формализованной совокупности основополагающих систематизированных правил управления, обеспечивающих перевод контролируемого объекта или процесса управления из текущего  $S_t$  в заданное целевое состояние  $S_C$  в соответствии с выбранной стратегией и критериями качества [10, 12]. Анализ современных трендов системного анализа показывает, что одним из перспективных подходов к формализации стратегий управления системной динамикой может стать аппарат логико-математического моделирования поведения систем, передающий через формальную семантику смысл естественных или формальных языков. В наиболее общем случае такая онтологическая структуры может быть формализована как граф знаний, который определяется упорядоченной тройкой

$$Ont = \{\mathcal{E}, \mathcal{R}, \mathcal{F}\},$$

представляющей наборы семантически структурированных реляционных данных, связывающих предикатами  $\mathcal{R}$  отношений множества сущностей – объектов предметной области  $\mathcal{E}$  с наборами фактов  $\mathcal{F}$ , формально интерпретирующими их смысловое понимание с точки зрения причинно-следственных связей [18]. Применительно к понятию формального графа знания управления в такой онтологии под множеством предметных сущностей можно понимать множество классов задач управления, а под наборами фактов интерпретации – возможные концептуальные решения задач в форме стратегий или моделей управления в соответствии с заданными целевыми функциями и критериями качества управления.

В качестве примера можно рассмотреть класс задач ситуационного управления  $\mathcal{E}_{S_C}$ , когда в качестве объекта управления выступает некоторая ситуация, идентифицируемая сценарием  $S_C$  ее развития, объектами предметной области  $\mathcal{E}$  можно считать все возможное множество сценариев  $\{S_k\}_{k=1}^{n_r} \in \mathcal{E}$ , рассматриваемых как объекты управления заданной предметной области [3]. Тогда формализованную структуру знаний управления можно интерпретировать как форму реагирования системы управления, представленную оператором  $\mathcal{F}_\pi$ , на текущую ситуацию, т.е. как некоторую стратегию  $\pi(S_t, U)$ , характеризующую перевод классов состояний  $s_j$  управляе-

мого объекта, отображая его текущее состояние в некоторое управляющее действие  $u_j$ , модель управления рассматривается

$$\mathcal{R}_{Sc}: \mathcal{E}_{Sc} \rightarrow \mathcal{F}_\pi$$

в которой концепция управления  $\mathcal{F}_\pi$  реализуется в виде некоторой выбранной стратегии управления. В этом случае синтаксическая структура стратегии управления сценарием  $Sc_t$  формально может задаваться множеством троек, которые ставятся в соответствие множеству возможных действий :

$$\pi(U_r) \equiv \{\{S_k\}_{k_r=1}^{n_r}, U_r, S_j\},$$

где обозначено  $\{S_k\}_{k_r=1}^{n_r}$  как множество исходных («входных») состояний и  $S_j$  - «выходное» состояние, которое должно быть достигнуто при успешном выполнении действия  $U_r$  [8]. Соответственно, система формирования последовательности управляющих сигналов.  $\{u_j\} \in U$ , задающих стратегию управления  $\pi(U)$ , формально представляемую оператором  $F$ :

$$\mathcal{F}_\pi: s_k \rightarrow s_{k+1} = \varphi(s_r, U),$$

приводящее к новому состоянию  $s_j(k+1)$ . При этом все множество возможных действий  $U_r$ , рассматриваемых как возможные стратегии управления, формируют условие  $U_r \in \pi(U_r)$ .

Важным развитием базы знаний интеллектуального управления является введение логико-семантического моделирования стратегии управления, отражающих семантику правил принятия управляющих решений. В наиболее общем случае формализованное представление правил принятия решений можно рассматривать как логико-лингвистическую составляющую модели базы знаний, формально записываемую как множество управляющих решений или правил принятия решений  $R^{(i)}, i = 1, \dots, m$  вида:

$$R^{(i)}: \text{If } (s_1 \text{ is } LS_{1,j_1} \ \& \ s_2 \text{ is } LS_{1,j_2} \ \& \ \dots \ \& \ s_j \text{ is } LS_{n,j_m}) \ \text{Then } (y \text{ is } r_j),$$

где  $m$  – количество правил,  $s_1, s_2, \dots, s_n$  – входные переменные лингвистической модели,  $y$  – выходная переменная лингвистической модели,  $r_i$  – числовой параметр, который используется для параметризации управляющего решения [ ]. Наиболее распространенной в этом случае является модель системы с нечеткой логикой поведения, определяемой как система с  $n$  входными переменными управляемого состояния  $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , определяемая на входной области рассуждений  $\mathbf{LS} = LS_1 \times LS_2 \times \dots \times LS_n$  и одной выходной переменной  $\mathbf{Y}$ , определенной на выходной области рассуждений  $\mathbf{LY}$ . Переходя от нечеткой модели к четкой параметризации, система оперирует значениями параметрами  $s_{ij}$  состояния  $S_i$  и выходной переменной  $Y$  с параметрами  $u_j$ .

**Заключение.** Развитие концепции интеллектуализации систем управления как систем, основанных на знаниях, ставит сложную задачу формирования эффективного математического аппарата формализации знаний управления, составляющих основу базы знаний интеллектуальной системы. Ключевой в данном случае становится задача разработка релевантной модели формализации базы знаний как совокупности основополагающих систематизированных правил стратегий управления. Предложенный в работе подход к формализации модели как графа знаний управления, дополняющий ее возможности классом логико-математического моделирования, позволяет расширить функциональные возможности базы знаний, в том числе за счет учета семантики в выборе правил принятия управляющих решений.

*«Исследования выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению «Передовые цифровые технологии» СПбПУ (соглашение № 075-15-2020-934 от 17.11.2020).*

*“The research is partially funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of World-class Research Center program: Advanced Digital Technologies (contract No. 075-15-2020-934 dated 17.11.2020)”*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рассел С., Норвиг П., Искусственный интеллект: современный подход, 2 изд.// Пер.с англ. – М. Изд.дом «Вильямс», 2006.
2. Редько В.Г. Эволюционная кибернетика. М., Наука, 2001.
3. Троцкий Д.В., Городецкий В.И. Сценарная модель знаний и язык описания процессов для оценки и прогнозирования ситуаций. Труды СПИИРАН, Вып.8, 2009.
4. Турчин В.Ф. Феномен науки. Кибернетический подход к эволюции. М.,Наука, 1993.
5. Шкодырев В.П. Киберфизические системы как технологическая платформа синергетической интеграции .. – в Сб. Системный Анализ в проектировании и управлении. Труды XXIV международной научной и учебно-практической конференции, СПб, 2020.
6. Четвертая промышленная революция. Целевые ориентиры развития промышленных технологий и инноваций. Информационный документ. Всемирный экономический форум, Швейцария, 2019
7. D.Arseniev, V.Shkodyrev, K.Yagafarov, The Model of a Cyber-Physical Systems for Hybrid Renewable Energy Station Control, Computer Science, ICCPS, 2019,
8. D.Arseniev, D.Baskov, V.Shkodyrev. Graph Model Approach to Hierarchy Control Networks, - in Lecture Notes in Networks and System, 95, Cyber-Physical Systems and Control, Springer (2020) За 2021
9. Fu K.S., "Learning Control Systems and Knowledge-based Control Systems: an Intersection of Artificial Intelligence and Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no. 1, 1971, pp. 70-72.
10. Hanafi Mohamed Yassine, Viacheslav P. Shkodyrev, Optimal Production Manufacturing Based on Intelligent Control System. International Conference on Technological Transformation: A New Role for Human, Machines and Management , Technological Transformation: A New Role For Human, Machines And Management , TT 2020, (<https://link.springer.com/conference/tt> )
11. John H. Painter . Knowledge-Based Control, - Texas A&M University, February 18,2010 at 14:24:05 EST from IEEE Xplore.
12. Khokhlovskiy, V.N., Potekhin, V.V., Shkodyrev, V.P., Knowledge based control of energy installations under uncertain conditions Annals of DAAAM and Proceedings of the International DAAAM Symposium, 2018, 29(1), p. 0582–0586
13. Leonid I. Perlovsky, Vyacheslav P. Shkodyrev Physics of Mind – A Cognitive Approach to Intelligent Control Theory in Lecture Notes in Networks and System, 95, Cyber-Physical Systems and Control, Springer (2020)
14. Minsky M., "A Framework for Representing Knowledge," The Philosophy of Computer Vision, McGraw-Hill, 1975, pp. 211-277.
15. Oscar Castillo, Li Xu, Sio-Long Ao. Trends in Intelligent Systems and Computer Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer 2008
16. Shkodyrev V., Technical Systems Control: From Mechatronics to Cyber-Physical Systems , in In book Smart Electromechanical Systems (pp.3-6), 2016,
17. Shkodyrev V, Wenjia Ma, Intelligent Cyber Physical Systems for Industrial Oil Refinery, International Conference on Technological Transformation: A New Role for Human, Machines and Management , Technological Transformation: A New Role For Human, Machines And Management , TT 2020, (<https://link.springer.com/conference/tt>)
18. Shaoxiong Ji, Shirui Pan, Erik Cambria, Pekka Marttinen, Philip S. Yu, A Survey on Knowledge Graphs: Representation, Acquisition and Applications. Fellow, IEEE IEEE Trans on Automatic Control, vol. AC- 1, 2002;

---

D.G.Arseniev, V.P.Shkodyrev (Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University , St. Petersburg, Russia). **Evolution of Cybernetics: Knowledge-Base Control Systems**

Modern trends in the development of cybernetics as a science of control are considered from the standpoint of evolutionary development. Key areas are identified, including intellectualization, the formation of hierarchical network structures, self-organization and self-development of control systems. Attention is focused on the aspects of intellectualization of control systems as knowledge-based systems.

An approach is proposed to the formation of the knowledge base of the control system as a key element of intellectualization. Models of formalization of the ontological structure of the conceptual systematized knowledge of management, oriented towards classes of management tasks, are singled out. The concept of a control knowledge graph is introduced as one of the most general logical-semantic models of knowledge formalization..

А. Д. КУЛАКОВА, В. А. ГАЛКИН, А. В. МАКАРЕНКО  
(Институт проблем управления РАН, Москва)

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЦВЕТОВОЙ КАЛИБРОВКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ПРЕЦИЗИОННЫХ СИСТЕМАХ МАШИННОГО ЗРЕНИЯ

*В настоящей работе разработана оригинальная свёрточная нейронная сеть, выступающая в роли аппроксиматора между искаженным и истинным цветовыми пространствами изображений, получаемых с цифровых фото- и видеокамер. Применяемый подход позволяет производить цветовую калибровку изображений при широком варьировании условий освещения. Точность полученной модели по взвешенной  $L_2$ -метрике в RGB пространстве составляет 24.72. Кроме того, для обученной модели проведен анализ векторов цветовых сдвигов.*

**Введение.** Современные инструменты фото и видео съемки подвержены искажению цветопередачи. Каждая комбинация фотоаппарата, объектива и света создают уникальную передачу цвета. Цвет на изображении может варьироваться от различных условий съемки, таких как источник света и спектральная чувствительность камеры [1, 2]. Существует широкий ряд задач, в которых цвет целевого объекта является ключевым признаком [3, 4]. Одной из таких задач является классификация сельскохозяйственных объектов по их спектральным характеристикам, в частности сортировка плодов растений на предмет их спелости.

Целью данной работы является повышения качества и устойчивости решения задачи цветовой коррекции цифровых изображений. Алгоритмическим ядром выбранного подхода является глубокая сверточная нейронная сеть, выступающая в качестве универсального аппроксиматора в задаче регрессии между наблюдаемым и эталонным цветами.

**Обзор методов.** Выделяют три основные группы методов цветокоррекции: методы адаптивной гамма-коррекции [5–7], методы сопоставления гистограмм распределений цветов [8–10], а так же методы, основанные на поиске отображения наблюдаемых искаженных цветов в истинные [11–13].

Методы гамма-коррекции направлены на исправление контраста на изображении и часто используются в работе с фотографиями, полученными под водой [14]. Выравнивание гистограмм используется в задачах сшивки нескольких изображений [8–10], так как для применения данного метода необходимо изображение, распределение цветов которого считается референсным. Методы третьей группы нацелены на поиск функциональной зависимости между цветами с фотографии и эталонными. Зачастую для аппроксимации зависимости используются регрессионные модели, в частности: полиномиальная [11], корневая полиномиальная регрессия [13], линейная регрессия, гомография и другие [12].

В настоящее время широкую применимость получили глубокие нейронные сети, одной из основных особенностей которых являются универсальные аппроксимационные свойства [15]. Решение задачи цветокалибровки с их помощью не стала исключением. В работе [4] нейронная сеть используется для аппроксимации заранее рассчитанных матриц цветокоррекции с помощью многомерной линейной регрессии в пространстве RGB. Целью цитируемой работы является повышение производительности алгоритма, а не точность решения задачи цветокоррекции относительно известных алгоритмов. Нейронная сеть в работе [4] применяется для решения задачи классификации матриц цветовой коррекции, что приводит к дискретизации пространства, а как следствие к снижению точности цветовой калибровки.

**Формализация задачи.** В основе предлагаемого решения лежит использование цветовой мишени (см. рис. 1), референсные цвета клеток которой априорно известны. Требуется на основе соответствия референсных и имеющихся искаженных значений цветов восстановить истинные на всей фотографии, а также на соответствующем подмножестве. Математически задачу цветокоррекции можно сформулировать следующим образом. Пусть  $X$  – спектральные характеристики мишени



Цветовая мишень

с исходной фотографии, а  $Y$  – референсные значения цветов. Существует, но неизвестно и под-  
лежит определению отображение  $f: X \rightarrow Y$ .

**Исходные данные.** Исходные для поставленной задачи данные представляют собой сово-  
купность фотографий наблюдаемой сцены и цветовой мишени, причем для каждого подмноже-  
ства снимков объектов соответствует только одна фотография мишени. Съёмка сцены и соот-  
ветствующей калибровочной мишени производилась с использованием одного устройства и в  
первом приближении идентичными условиями освещенности.

**Методология и эксперимент.**

**Набор данных.** Используемое цветовое пространство — sRGB (standart Red Green Blue).  
Входом сети является совокупность из 49-ти изображений (см. рис. 2., первые 48 из которых  
предназначены для изображений клеток цветовой мишени с фотографии. Они фиксируются  
для соответствующей фотографии/подмножества фотографий или конкретных условий осве-  
щения. Для предсказания истинных цветов на всей фотографии, в качестве 49-го входа предпо-  
лагается подача изображения бегущим окном. При обучении в качестве 49-го изображения бер-  
ется случайная область одной из 48 клеток. Таким образом, входная размерность сети –  
 $147 \times 29 \times 29$ . Каждое из 49 изображений имеет раз-  
мер  $29 \times 29$  и имеет 3 цветовых канала. Выходная  
размерность сети равна  $147 \times 1 \times 1$ . Стоит отметить,  
что размер 49-го изображения –  $3 \times 3$  пикселя, по-  
этому для него применяется padding до требуемого  
размера  $29 \times 29$ .

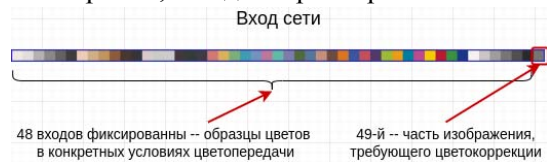


Рис. 2. Иллюстрация входа сети

С каждого изображения снимается 48 цен-  
тральных областей и столько же случайных (предназначенных для 49-го входа сети). Таким  
образом, с одной палетки формируются 48 обучающих образцов для подмножества  $X$  обучаю-  
щей выборки. В качестве обучающего подмножества  $Y$  используются образцы соответствую-  
щих референсных цветов.

**Нейронная сеть.** Была разработана архитектура сверточной нейронной сети с 5-ю слоями свер-  
ток, размерами:  $64 \times 3 \times 3$ ,  $32 \times 3 \times 3$ ,  $16 \times 3 \times 3$ ,  $8 \times 3 \times 3$  и  $147 \times 1 \times 1$ , соответственно. В качестве функций  
активации скрытых слоёв использовалась ReLU, выходная функция активации – линейная.

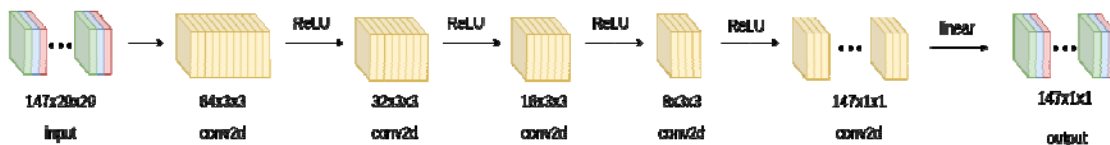


Рис. 3. Архитектура сети

**Обучение сети.** Обучающая выборка разделена на тренировочный и валидационный наборы  
в соотношении 75% и 25%, соответственно. Размер обучающей выборки составил 6 720 сэмп-  
лов. Обучение длилось 200 эпох с размером батча 50, использовался оптимизатор Adam. В  
качестве функции потерь применена сумма квадратов ошибок. Начиная с 54-й эпохи происхо-  
дило итерационное уменьшение шага learning rate, см. рис. 4.

**Анализ результатов.** В качестве оценивающей метрики  
использовалась взвешенная L2-норма:

$$\begin{cases} \|\Delta C\| = \sqrt{2\Delta R^2 + 4\Delta G^2 + 3\Delta B^2}, & \text{если } \frac{R_1+R_2}{2} < 128 \\ \|\Delta C\| = \sqrt{3\Delta R^2 + 4\Delta G^2 + 2\Delta B^2}, & \text{если } \frac{R_1+R_2}{2} \geq 128 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Delta R = R_1 - R_2$ ,  $\Delta G = G_1 - G_2$ ,  $\Delta B = B_1 - B_2$ ,  $(R_1, G_1, B_1)$  и  $(R_2, G_2, B_2)$  — значения сравниваемых цветов.

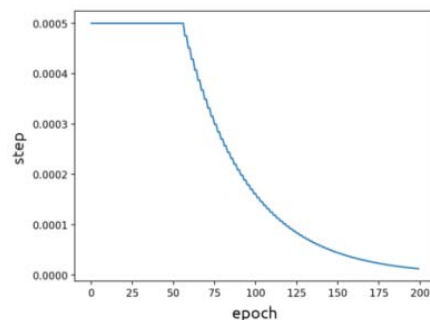


Рис. 4. График значений learning rate



Точность нейронной сети на выборках данных

Набор данных / результат	Значение функции потерь	Значение метрики
Тренировочный	0.0053	24.6520
Валидационный	0.0052	24.7232

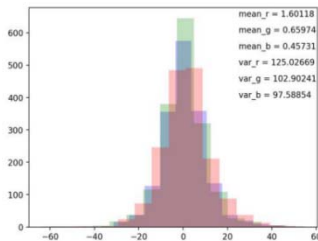


Рис. 5. Гистограмма остатков

присвоен цвет, характеризующий референсный. В полученном цветовом кубе в точке (0, 0, 0) расположен черный цвет, в координатах (1, 1, 1) — белый. Также, был проведен анализ отклонений векторов сдвига по трем углам (для каждого канала) от вектора, направленного строго на белый цвет, см. рис. 7. Таким образом, по результатам векторного анализа видно, что модель предсказывает цвета, в основном отклоняющиеся только по яркости. Т.е. по сути, синтезированная модель цветоизотропна, что является весьма положительным фактом.

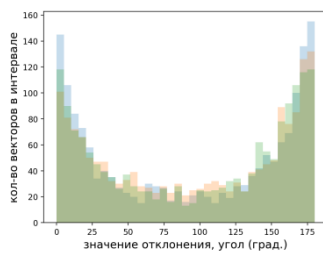


Рис. 7. Гистограмма отклонений по углу векторов сдвига от вектора, направленного на белый

Проведен анализ остатков модели по данным предсказаний для целевого 49-го выхода нейросети, см. рис. 5 (масштаб значений [0, 255]). Закон распределения по каждому из каналов близок к нормальному с математическим ожиданием в окрестности нуля.

Проведен также анализ сдвига предсказаний сети в используемом цветовом пространстве, см. рис. 6: построены векторы отклонений ответов сети от корректных значений цветов в кубе, представляющем цветовое пространство RGB. Векторам отклонений

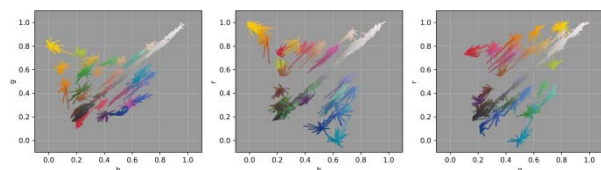


Рис. 6. Проекции векторов отклонений в RGB

**Сравнительный анализ.** Был проведен сравнительный анализ точности представленного нейросетевого подхода с линейной регрессией в пространстве RGB [16] и двумя регрессиями в HSV (линейной и полиномиальной) [17] по упомянутой выше метрике (1).

Сравнение алгоритмов по взвешенной l2-метрике

Лин. Регрессия (RGB)	Лин. Регрессия (HSV)	Полином. Регрессия (HSV)	Нейронная сеть (RGB)
30.61	52.94	40.78	24.72

Из данных таблицы 2 видно, что модель представленная в настоящей работе является лидером по качеству функционирования.

**Заключение.** В ходе работы было представлено и проанализировано решение задачи цветовой коррекции цифровых изображений на основе сверточной нейронной сети. Проведен сравнительный анализ нейросетевой модели с регрессионными, в ходе которого установлено, что представленный в настоящей работе алгоритм показывает лучшие результаты. В качестве возможных направлений дальнейших исследований выделим следующие задачи: получение расширенного обучающего датасета и обучение представленной сети на нём, проведение более детального анализа разработанного решения, в том числе оценку алгоритма с помощью более однородной в контексте цветового различия метрики, например, CIEDE2000.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Dougherty. Digital image processing for medical applications. Cambridge University Press, 2009.
2. Andresen C. G., Tweedie C. E., Loughed V. L. Climate and nutrient effects on Arctic wetland plant phenology observed from phenocams //Remote Sensing of Environment. – 2018. – Т. 205. – С. 46-55.
3. Hernández-Hernández, J.L.; García-Mateos, G.; González-Esquivá, J.M.; Escarabajal-Henarejos, D.; Ruiz-Canales, A.; Molina-Martínez, J.M. Optimal color space selection method for plant/soil segmentation in agriculture. Comput. Electron. Agric. 2016, 122, 124–132.
4. Abdalla A. et al. Color calibration of proximal sensing RGB images of oilseed rape canopy via deep learning combined with K-means algorithm // Remote Sensing. – 2019. – Т. 11. – No. 24. – С. 3001.
5. Veluchamy M., Subramani B. Image contrast and color enhancement using adaptive gamma correction and histogram equalization //Optik. – 2019. – Т. 183. – С. 329-337.
6. Cao G. et al. Contrast enhancement of brightness-distorted images by improved adaptive gamma correction //Computers & Electrical Engineering. – 2018. – Т. 66. – С. 569-582.
7. Mahmood A. et al. An adaptive image contrast enhancement technique for low-contrast images //IEEE Access. – 2019. – Т. 7. – С. 161584-161593.
8. Ding C., Ma Z. Multi-camera color correction via hybrid histogram matching //IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. – 2020. – Т. 31. – №. 9. – С. 3327-3337.
9. NIU H., LU Q., WANG C. *Color correction based on histogram matching and polynomial regression for image stitching* // 2018 IEEE 3rd International Conference in Image, Vision and Computing (ICIVC). – IEEE, 2018. – С. 257-261.
10. Niu Y. et al. Visually consistent color correction for stereoscopic images and videos //IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. – 2019. – Т. 30. – №. 3. – С. 697-710.
11. Kamarudin N. D. et al. Performance Comparison of Colour Correction and Colour Grading Algorithm for Medical Imaging Applications //International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – Т. 7. – №. 4.33. – С. 353-356.
12. F. FANG et. al., *Colour Correction Toolbox*, In Proc. 13th AIC Cong., PP.13-18 (2017).
13. Finlayson G. D., Mackiewicz M., Hurlbert A. Color correction using root-polynomial regression //IEEE Transactions on Image Processing. – 2015. – Т. 24. – №. 5. – С. 1460-1470.
14. Zhang W. et al. Color correction and adaptive contrast enhancement for underwater image enhancement //Computers & Electrical Engineering. – 2021. – Т. 91. – С. 106981.
15. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function, Mathematics of Control Signals and Systems. 1989. Vol. 2. No. 4. Pp. 303-314.
16. Кулакова А.Д., Галкин В.А., Макаренко А.В. Метод цветовой калибровки изображений в задачах интеллектуального машинного зрения (на примере изображений получаемых в условиях промышленных теплиц) / Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). Москва-Звенигород: ИПУ РАН, 2021. С. 213-223.
17. Кулакова А.Д., Галкин В.А., Макаренко А.В. Метод цветовой калибровки изображений в задачах интеллектуального машинного зрения в цветовом пространстве HSV / Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ "Радиотехника и компьютерные технологии" (Москва, 20121). Москва - Долгопрудный - Жуковский: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2021. С. 60-72.

---

A.D.Kulakova, V.A.Galkin, A.V.Makarenko (Institute of Control Sciences of RAS, Moscow). **Development and research of a neural network model for colour calibration of images in precision machine vision systems.**

In this paper, an original convolutional neural network has been developed, acting as an approximator between the distorted and true colour spaces of images obtained from digital photo and video cameras. The applied approach allows for colour calibration of images with a wide variation of lighting conditions. The accuracy of the obtained model according to the weighted L2 metric in RGB space is 24.72. In addition, the analysis of colour shift vectors was carried out for the trained model.

О.А. МИЛОСЕРДОВ, А.В. МАКАРЕНКО  
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН)

## РАЗРАБОТКА НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МУЛЬТИКЛАССОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ МЕТКАМИ (НА ПРИМЕРЕ ЗАБОЛЕВАНИЙ И ПАТОЛОГИЙ ТОМАТОВ)

*В работе исследован вопрос применимости легковесных свёрточных нейронных сетей для решения классификационной задачи машинного зрения в режиме мультиклассовой классификации с множественными метками. В качестве тестового объекта выступают томаты. Классификатор имеет 26 целевых выходов (7 – заболевания, 18 – патологии). На вход нейросети подается до 20-ти фотографий различных частей одного растения. Важной особенностью данной работы является формирование датасета в условиях реальной работы персонала теплицы, что сопровождается высоким уровнем артефактов в исходных данных. Для наиболее распространенных отклонений от нормы удалось добиться качества классификатора 0.74-0.97 по мере  $F_1$ .*

**Введение.** Актуальным направлением научных исследований являются вопросы автоматического выявления, классификации и локализации болезней различных сельскохозяйственных культур по их фотоизображениям. По последним оценкам Продовольственной и сельскохозяйственной организации объединенных наций [1] ежегодно до 40% мирового урожая сельскохозяйственных культур теряется из-за вредителей. Ежегодно болезни растений обходятся мировой экономике более чем в 220 миллиардов долларов, а инвазивные насекомые – не менее чем в 70 миллиардов долларов. Это приводит к огромным экономическим потерям и дефициту продовольствия во многих частях мира. Поэтому очень важно иметь возможность разрабатывать системы, способные выявлять такие заболевания.

В данной работе предлагается оригинальный подход к решению задачи мультиклассовой классификации с множественными метками, на основе легковесной нейронной сети в качестве классификатора. Нейронная сеть обучена и протестирована на основе датасета, полученного в реальных условиях промышленных теплиц по выращиванию томатов, и охватывающего все фенологические фазы развития растений от их высадки и до момента корчевания.

**Постановка задачи и обзор существующих решений.** Последние годы развитие глубоких свёрточных нейронных сетей позволило использовать их во многих сферах медицины, промышленности, IT индустрии и, конечно, сельского хозяйства. Активно решаются задачи распознавания заболеваний по фотографиям. Например, в работе [2] строят классификатор для решения задачи распознавания заболеваний на листьях яблони. Исследуются стандартные эталонные модели, такие как VGG16, ResNet101 и DenseNet 161, EfficientNet, дающие точность до 0,962. Главная идея работы в использовании современной идеи полуконтролируемого обучения Noisy Student, что позволяет повысить качество до 0,982. Стоит отметить, что датасет состоит из 1 820 фотографий, в которых присутствует всего 2 заболевания и их комбинация.

В работе [3] исследуются различные методы глубокого обучения и фреймворк Entropy-ELM для распознавания болезней листьев огурца. Предлагаемая структура протестирована на расширенном наборе данных листьев огурца и достигла точности 98,48%. Авторы сообщают что на каждый класс у них собрано всего 100-150 изображений, поэтому они используют различные техники аугментации для увеличения датасета.

В обзорах [4, 5] даётся определение проблемы обнаружения болезней и вредителей растений, проводится сравнение с традиционными методами обнаружения болезней и вредителей растений. Описываются исследования по обнаружению болезней и вредителей растений, основанные на глубоком обучении, а также суммируются преимущества и недостатки каждого метода. Вводятся общие наборы данных и сравнивается эффективность существующих исследований.

В работе [6] предлагается использование капсульных нейронных сетей. Последний свёрточный слой в CapPlant заменен современным капсульным слоем, чтобы включить ориентационные и относительные пространственные отношения между различными объектами растения на изображении для более точного прогнозирования заболеваний. Предлагаемая архитектура

тестируется на наборе данных PlantVillage, содержащем более 50 000 изображений зараженных и здоровых растений. Результаты экспериментов на разработанной модели достигли общей точности по  $F_1 = 93,07\%$ .

Рассмотренные работы обладают рядом недостатков, основным из которых является отсутствие комплексного подхода к фотографированию растений в реальных промышленных условиях, а также отсутствием перекрёстного анализа комплекса заболеваний. Подобные решения нельзя применить, например, в мобильных роботах, способных автоматически собирать данные в полях и теплицах, в том числе потому, что они основаны на нейронных сетях с большим количеством весов. Поэтому задача данной работы исправить недостатки существующих решений, разработать методику комплексного сбора данных и предложить легковесную нейронную сеть, решающую задачу мультиклассовой классификации с множественными метками патологий и заболеваний томатов, произрастающих в теплицах.

**Данные.** Ранее нами была выявлена некорректность типового широко распространенного подхода использования классификации для определения патологий заболеваний растений. Для выявления патологии растений необходимо получить комплексную информации о всём растении в целом, а не изолированно по отдельных его частям. В связи с этим нами была разработана методика и требования к сбору исходных данных для построения датасета, позволяющая комплексно анализировать объекты исследования (растения, животные и т.д.), при минимальных трудозатратах специалистов по сбору данных.

Исходный набор данных формировался в условиях промышленных теплиц на юге России с октября 2020 по январь 2022 при различных фенологических фазах развития растений и с различным уровнем проявления симптомов заболеваний, причём ракурс съёмки активно варьировался. Итоговый объём данных составил более 100 000 фотографий, по более чем 2 400 уникальным растениям. То есть одно растение представлено более чем 40 фотографиями его различных частей. Датасет включает в себя более 40 уникальных заболеваний, патологий развития и других отклонений от нормы. В данной работе мы рассматриваем лишь 26 из них. Критерием отбора было наличие отклонений более чем на 10-ти растениях в датасете.

Новая концепция сбора данных позволила использовать комбинации фотографий одного растения для аугментации представления растения на входе нейронной сети. За счет чего можно расширить обучающую и тестовую выборки в разы. Отличительной чертой данной работы является постановка задачи в рамках мультиклассовой классификации с множественными метками, так как зачастую заболевания и патологии комбинируются и могут присутствовать одновременно как на одной части растения, так и на различных частях одного растения.

Данные были разбиты на обучающую и тестовую выборки таким образом, что фотографии одного растения могли попасть только в одну из выборок. Таким образом в обучающую выборку попали 2 057 растений и 324 в тестовую. Использование комбинаций различных фотографий одного растения позволило расширить датасет с 2 381 уникального растения до 66 546 различных представлений этих растений. Представление растения это 20 фотографий различных частей растения, включающих в себя цветы, плоды, листья, стебли и так далее.

**Классификатор и процесс обучения.** Типичное решение для классификации изображений строится на основе трех последовательных слоев: сверточный слой – *Conv2D*, пакетная нормализация – *BatchNorm*, функция активации – *ReLU* или *LeakyRelu*. Назовем такую последовательность ячейкой (см рисунок 1а). В данной работе мы заменили свертку *Conv2D* на *SeparableConv2D* [7] которая состоит из двух шагов. Первая часть *SeparableConv2D* — это пространственная свертка по глубине, которая действует отдельно на каждый входной канал. Этот шаг уменьшает количество операций и экономит вычислительную мощность. Вторая часть — точечная свертка, предназначенная для микширования выходных каналов.

В данной работе на вход нейронной сети одновременно подаются 20 фотографий, представляющие одно растение, поэтому для предобработки такого большого числа фотографий используется мультиголовая подсеть с общими весами (*Multihead*), которая состоит из 4-х последовательно соединенных ячеек. Затем ячейки соединяются в последовательности (между ячейками может быть встроено слой субдискретизации – *MaxPooling* [8]), чтобы сформировать экстрактор признаков нейронной сети. На выходе нейронной сети, после использования операции глобального сжатия

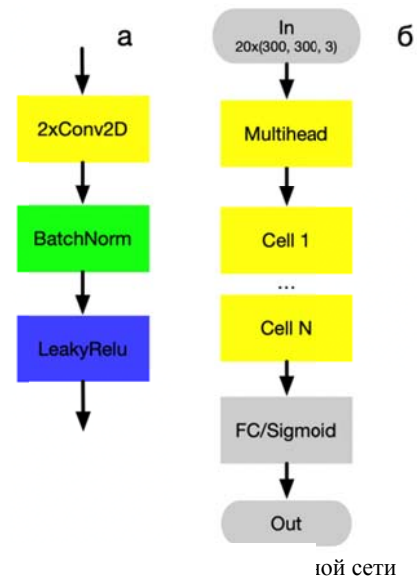
(*global average pooling*) идет полносвязный слой и 26 функций сигмоид для решения задачи сепарабельности (рис. 1, б). Отличительной особенностью такой архитектуры является ее малый размер (всего 227 000 весов), что позволяет имплементировать её в мобильных роботах.

Нейронная сеть обучалась с помощью оптимизатора Adam в течение 50-ти эпох с использованием стратегии понижения скорости обучения каждые 5-10 эпох. Для обучения использовались 4 карты Titan RTX, что позволило увеличить размер мини пакета до 48-ми сэмплов. Для борьбы с переобучением использовалась техника *dropout* [8], а для стабилизации процесса обучения производилась инъекция шума в вектор признаков внутри сети.

В результате обучения нейросеть точнее всего (по  $F_1$  мере) классифицирует растения с тремя патологиями, как наиболее широко представленные в датасете: пролиферация листа  $F_1 = 0.97$  (2 192 растения), недостаток цинка  $F_1 = 0.83$  (1 317 растений), недостаток марганца  $F_1 = 0.74$  (797 растений). Распознавание здоровых растений осуществляется с  $F_1 = 0.8$  (129 растений), однако, надо учитывать, что в каждом представлении растения из 20 фотографий всего несколько бывают с отклонениями, в остальном же это здоровые части растения. Такие отклонения от нормы как непрогретые верхушки, старый лист, коленца, израстания, магниевый хлороз, поражение белокрылкой, механические повреждения и неизвестный хлороз тип 1 – показали достаточно низкое качество классификации от 0.32 до 0.62 по мере  $F_1$ . Число растений, представляющих каждый класс, варьируется от 25 до 470. Остальные 15 классов показали качество ниже 0.3 по мере  $F_1$ , а именно: бактериальный рак, поражение совкой, мучнистая роса, низкая влажность, недостаток калия, недостаток железа, нарушение климатического режима, магниевый некроз, поражение туюй, патология неизвестно, вершинная гниль, ожог после листовой обработки, недостаток фосфора, липкий налет, непрогретые верхушки. Причем последние 8 отклонений от нормы не распознались вовсе.

Большая часть классов оказалась плохо распознаваемой. Это может быть связано с малым количеством растений, так как для классов с числом растений меньше 700 качество резко падает и становится неудовлетворительным. Решением данной проблемы в первом приближении может стать внедрение аугментации за счет разрезания изображения на 2-4 части. Также подобное поведение нейронной сети может быть вызвано отсутствием предобработки изображений. Исследование нейронной сети и использование таких механизмов как GradCam должно помочь в выявлении ошибок нейронной сети и выработки стратегии по их купированию.

**Заключение.** В работе предложен оригинальный подход к решению задачи мультиклассовой классификации с множественными метками, на основе легковесной нейронной сети в качестве классификатора, на примере патологий и заболеваний томатов, выращиваемых в условиях промышленных теплиц. Кроме того, разработан оригинальный подход к сбору данных, основанный на комплексном «описании фотопортрета» растения. Причём собрано более 100 000 фотографий в условиях реальной работы агротехнического персонала теплицы. На вход нейронной сети подается 20 фотографий различных частей растения, что позволяет нейронной сети комплексно оценивать состояние растения. Предложенная архитектура нейронной сети основана на сверточных слоях, легковесна и может быть имплементирована в мобильного робота. Результаты решения задачи мультиклассовой классификации с множественными метками для наиболее распространенных отклонений от нормы доходят до 0.97 по мере  $F_1$ . Однако для большей части классов результаты оказались неудовлетворительными. Повышение качества распознавания на малочисленных классах является целью наших дальнейших исследований.



## ЛИТЕРАТУРА

1. IPPC Secretariat. 2021. Scientific review of the impact of climate change on plant pests – A global challenge to prevent and mitigate plant pest risks in agriculture, forestry and ecosystems. Rome. FAO on behalf of the IPPC Secretariat. <https://doi.org/10.4060/cb4769en>
2. Keh, S. S. (2020). Semi-Supervised Noisy Student Pre-training on EfficientNet Architectures for Plant Pathology Classification. arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2012.00332>
3. Khan, M.A.; Alqahtani, A.; Khan, A.; Alsubai, S.; Binbusayyis, A.; Ch, M.M.I.; Yong, H.-S.; Cha, J. Cucumber Leaf Diseases Recognition Using Multi Level Deep Entropy-ELM Feature Selection. Appl. Sci. 2022, 12, 593. <https://doi.org/10.3390/app12020593>
4. A. Kamilaris and F. Prenafeta-Boldu, “Deep learning in agriculture: A survey,” Computers and Electronics in Agriculture, vol. 147, p. 7090, Apr. 2018. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compag.2018.02.016>
5. Liu, J., Wang, X. Plant diseases and pests detection based on deep learning: a review. Plant Methods 17, 22 (2021). <https://doi.org/10.1186/s13007-021-00722-9>
6. Samin, O. B., Omar, M., & Mansoor, M. (2021). CapPlant: a capsule network based framework for plant disease classification. PeerJ. Computer science, 7, e752. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.752>
7. L. Sifre and S. Mallat, “Rigid-motion scattering for texture classification,” CoRR, vol. abs/1403.1687, 2014.
8. I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, “Deep learning,” 2016, book in preparation for MIT Press. [Онлайн]. Доступ: <http://www.deeplearningbook.org>

---

O.A. Miloserdov, A.V. Makarenko (Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia). **Neural network model design for solving the problem of multi-class multi-label classification (by the example of tomatoes diseases and pathologies)**

In this paper, the issue of applicability of lightweight convolutional neural networks for solving the multilabel multiclass classification problem of machine vision is investigated. Tomatoes are used as a test object. The classifier has 26 target outputs (7 diseases, 18 pathologies). Up to 20 photographs of various parts of one plant are fed to the input of the neural network. An important feature of this work is the formation of a dataset in the conditions of real work of the greenhouse staff, which is accompanied by a high level of artifacts in the original data. Classifier achieves quality of 0.74-0.97 in measure F1 for the most common deviations from the norm.

Секция 5**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ**

Д. Н. ФЕДЯНИН

(Институт проблем управления РАН, Москва)

**ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ ПЕРЕВОЗЧИКАМИ,  
ВЫБИРАЮЩИМИ РАСПИСАНИЕ ОТПРАВЛЕНИЯ**

*Мы рассматриваем игру с выбором расположения на замкнутой ориентированной окружности, что соответствует выбору моментов времени в сутках. Над игрой надстраивается модель транспортной сети с пассажирами и перевозчиками. Построена такая сетевая многоагентная модель с множеством вокзалов, связанных скоростью движения составов и расстояниями между ними. Пассажиры предполагаются неинформированными о расписании и нетерпеливыми. В работе приведен анализ построенной модели.*

**Введение.** В литературе известны модификации следующей игровой задачи: два игрока независимо и одновременно выбирают вещественное число от 0 до 1. Выигрыш вычисляется так: если числа совпали, то каждый получает по 0.5, если числа разные, то игрок получает выигрыш равный мере множества точек, расстояние от которых до выбранного им числа меньше, чем расстояние до числа, выбранного соперником. Эту игру предложил Даунс [1] и затем Хотеллинг развил ее модификацию, дополнив ее ценовой конкуренцией. Обе эти модели экономического взаимодействия стали весьма популярны в конце XX и остаются интересными и в начале XXI века для тестирования новых концепций равновесий, например [2]. Сейчас они относятся к очень широкому классу игр, где частью стратегии является выбор точки на плоскости или в пространстве, например, к нему принадлежат игры Вороного [3]. Мы рассматриваем игру из класса игр с выбором расположения. Ее отличие в том, что мы ее рассматриваем на ориентированной окружности, что соответствует выбору моментов времени в сутках. Мы интерпретируем это как выбор времени отправления от платформы, причем предполагаем, что автобус отправляется в одни и те же моменты времени каждый день. Такая регулярность и приводит к окружности. Другой особенностью является ориентированность, в обычной пространственной модели Даунса это соответствовало бы наличию в городе только автомобильной дороги, движение по которой возможно только в одном направлении. В нашей интерпретации это соответствует невозможности пассажира уехать поездом, ушедшим 5 минут назад. Однако заметим, что если других поездов нет, то пассажир может подождать 23 часа 55 минут и все-таки уехать поездом, который в нашей модели отождествляется с тем, на который пассажир не успел.

**Неформальное описание модели.** Модель состоит из трех слоев – модели транспортных путей между городами, модели поведения пассажиров и модели поведения перевозчиков. Для простоты модель транспортных путей задается графом сколь угодно большой пропускной способности, также и средства перевозки предполагаются достаточно просторными, чтобы это не ограничивало возможности по размещению в них пассажиров. Пассажиры прибывают на все станции равномерно в течение дня и с одинаково равномерно распределенными целями - городами, в которые они хотели бы попасть. Пассажиры предполагаются нетерпеливыми и неинформированными о расписании.

Нетерпеливыми и неинформированными о расписании пассажиры способны понимать приближаются они к своей цели или нет, но какой именно перевозчик и по какому именно маршруту они не знают, поэтому предлагается следующий наивный алгоритм их поведения – они садятся на первый же пришедший транспорт, следующая станция маршрута которого приближает их к цели. Таким образом, кажется, что тот перевозчик, транспорт которого приезжает чаще – тот перевозит больше пассажиров. Однако заметим, что если перевозчиков два и интер-

валы отправления их транспорта одинаковые, то в зависимости от расписания – может оказаться, что первый перевозчик перевозит почти 100% пассажиров, а может – что второй перевозит почти 100% пассажиров. Забегая вперед отметим, что на Рис. 2 справа показан как раз один из этих крайних случаев.

Такие пассажиры естественным образом расширяют модели выбора маршрутов для перемещения между городами в работах [4, 5]. В этих публикациях анализируются два алгоритма – ждать когда прямого поезда или уехать на первом пришедшем, чтобы в дальнейшем сделать еще пересадку. Если бы расписание было известно, то для выбора такого маршрута было бы достаточно просто сравнить расписания, как часто и происходит в информационных системах. При этом при отсутствии такого знания выбор первого отправляющегося транспорта выглядит рациональным, так как заведомо сокращает расстояние до пункта назначения. Такой алгоритм вместе с генетическими алгоритмами относится к важному классу Anytime [6]. Его ценность в получении значимых результатов даже при завершении работы в случайный момент времени.

Отметим, что хотя предположение о неинформированности о расписании по мере развития геоинформационных систем становится менее применимым для многих повседневных задач, однако при забастовках как в Германии или во Франции [7] расписание приобретает стохастический характер с неизвестными вероятностными распределениями. Аналогичная ситуация характерна для перемещения беженцев или во время стихийных бедствий и эпидемией типа COVID-19, когда неизвестно когда и какие методы ограничения передвижения будут применяться тем или иным правительством. Более того, более сложные модели, учитывающие ограниченную емкость транспортных средств или наличие приоритетов приоритетов, а в более общем случае любую ярко выраженную стохастичность, также приводят к важности моделей, где расписания неизвестны. Поведение перевозчиков моделируется игрой.

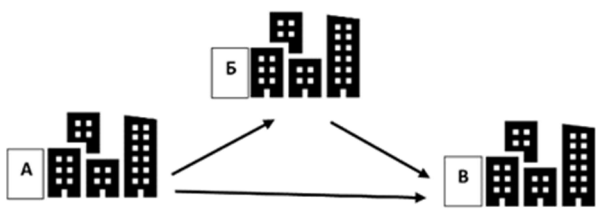


Рис. 1. Схематическое изображение расположения городов и дорог между ними для примера задачи

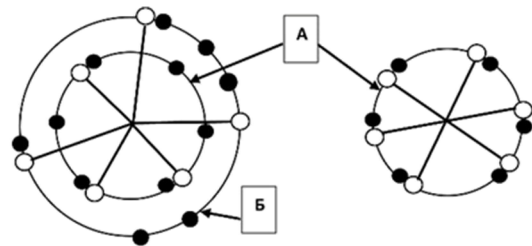


Рис. 2. Схематическое описание примеров условий задач и возможного решения для посадки только в городе А (слева) и при возможности посадки в городах А и Б (справа)

На рисунке 2 изображен 24-часовой циферблат, на котором схематично показаны постановка и решение следующих задач.

1. Построить расписание, состоящее из 6 моментов отправления из города А в город В с посещением города Б, но без остановки в городе Б, максимизирующего вероятность использования именно этого маршрута нетерпеливыми неинформированными пассажирами, следующими из города А в город В. Конкурирующим считать заданное расписание (отмечено на циферблате черными точками), другого транспортного средства, следующего напрямую из города А в город В. Схематическое описание представлено на рис. 1 справа.
2. Построить расписание, состоящее из 6 моментов отправления из города А в город В с посещением города Б, с остановкой в городе Б, максимизирующего вероятность использования именно этого маршрута нетерпеливыми неинформированными пассажирами, следующими из города А в город В. Конкурирующими считать два маршрута с заданными расписаниями других транспортных средств: следующего напрямую из города А в город В, и следующего из города Б в город В. Расписание первого отмечено на внутреннем циферблате черными точками, а расписание второго – на внешнем также черными точками. При этом внешний циферблат повернут против часовой стрелки на время, необходимое транспортному средству, чье расписание оптимизируется, для перемещения из города А в город Б. Схематическое описание представлено на рис. 1 слева.



**Формальное описание модели.** Пусть

$$G_r = \langle V, E, T, M \rangle, G_m = \langle N, X, F \rangle, \quad (1)$$

где  $G_r$  – транспортный граф,  $V$  – множество его вершин,  $E \subseteq V \times V$  – множество ребер,  $T: E \rightarrow R$  – длительность перемещения по ребрам (скорость всех транспортных средств считаем равной максимально разрешенной),  $M_i$  – множество ребер составляющих маршрут  $i$ -го перевозчика, причем начало первого ребра, считается началом маршрута,  $G_m$  – игра, где  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество перевозчиков,  $X_i: V \rightarrow K_i$ , причем количество отправок транспортных средств перевозчика  $i$  с вокзала в  $K_i$ , не зависит от вокзала,  $X_i$  – время отправления в начале маршрута  $i$ -го перевозчика,  $F_i$  – функция выигрыша  $i$ -го перевозчика. Мы будем неявно предполагать, что все перевозчики являются конкурентами друг другу в доставке агентов из любого заданного города, где они оказывают услуги, до некоторого выделенного целевого города Б. Функция  $F_i$  равна сумме по всем городам маршрута  $i$ -го перевозчика из которых его транспортное средство отправляется в сторону целевого города Б мер множеств точек на ориентированных окружностях (соответствующих городам), таких, что расстояние до времени отправления любого из транспортных средств  $i$ -го перевозчика меньше, чем расстояние до времени отправления любого из транспортных средств любого другого перевозчика, либо, если расстояния совпадают, то каждый из перевозчик с минимальным расстоянием получает пропорциональную часть от меры всех таких точек. В общем случае равновесия Нэша для соответствующей игры в нормальной форме в чистых стратегиях нет. Причина в том, что выгодно установить время отправления за сколь угодно малую величину до отправления конкурентов. И если игра симметрична по количеству отправок в день и маршрутам, то чистых стратегий нет. При этом если рассмотреть игру как игру в развернутой форме, хотя второй игрок имеет преимущество, однако если игра не симметрична и количество отправок у первого игрока больше, то второй игрок не сможет снизить до почти нуля выигрыш первого, более того у первого существует стратегия, максимизирующая его выигрыш выбором равномерного распределения времен отправления.

**Результаты.** Для математического моделирования этой многоагентной системы разработан вычислительно быстрый алгоритм поиска наилучших ответов для выбора расписания для игроков при фиксированном транспортном графе, а также начат анализ равновесий в смешанных стратегиях и представляющих интерес частных случаях. Найдены частные свойства.

**Заключение.** Значительное количество упрощающих предположений позволило построить и исследовать простую, но масштабируемую модель конкурентного взаимодействия перевозчиков, изменяющих расписания, конкурирующих за неинформированных о расписании и нетерпеливых пассажиров. Перспективное направление исследования – последовательное ослабление упрощающих предположений модели и расчеты на реальных данных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Downs A. An economic theory of political action in a democracy. The journal of political economy. 1957. P. 135–150.
2. Исаков М.Б., Исаков А.Б. Полное решение задачи Хотеллинга: концепция равновесия в безопасных стратегиях для игры определения цен. Журнал новой экономической ассоциации. 2012. Т. 13, № 1.
3. Ahn H.-K., Cheng S.-W., Cheong O., Golin M., Van Oostrum R. Competitive facility location: the voronoi game. Theoretical Computer Science. 2004. 310(1-3). P. 457–467.
4. Zalozhnev A.Yu., Polozhishnikov V.B. Trajectory planning for rail freight shipping. Proceedings of the CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC). New York: IEEE, 2018.
5. Babikov V.M., Zalozhnev A.Yu., Polozhishnikov V.B. Control Algorithms for Large-Scale Railway Network Logistics. Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). New York: IEEE, 2019.
6. Zilberstein, S. Using anytime algorithms in intelligent systems. AI magazine 17.3.1996. P. 73-73.
7. URL: <https://www.telesureenglish.net/news/France-Strikers-Shut-Down-Trains-for-3rd-Time-in-2-Months-20160426-0010.html> (дата посещения - 9.05.2022)

D.N.Fedyanin (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **Game model of competition between transport companies choosing a departure schedule**

We consider a location-based game. Its novelty is that it is played on a closed oriented circle, which corresponds to the choice of time points in a day. We develop this model by a transport network where there are routes and a uniform flow of passengers. Passengers are assumed to be uninformed about the schedule and impatient. The paper analyzes the constructed model.

А. Г. ЧЕНЦОВ, П. А. ЧЕНЦОВ

(Институт математики и механики УрО РАН, Уральский Федеральный Университет, г. Екатеринбург)

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ: ДВУХЭТАПНЫЙ ВАРИАНТ

*Рассматривается задача маршрутизации перемещений с условиями предшествования и функциями стоимости, зависящими от списка заданий. Предполагается, что множество всех заданий разбито в сумму двух подмножеств. Требуется, чтобы выполнение заданий из первого подмножества было завершено раньше, чем начнется выполнение заданий из второго подмножества. Требуется построить оптимальный маршрутный процесс, включающий перестановку индексов заданий (собственно маршрут), траекторию и точку старта. Построен оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ в конкретной постановке, отвечающей задаче, связанной с листовой резкой на машинах с ЧПУ зонами. Приведено решение модельного примера оптимальной размерности.*

1. Рассматривается задача о посещении непустых конечных множеств (мегаполисов)  $M_1, \dots, M_n$  где  $n \geq 4$ , в объемлющем множестве  $X, X \neq \emptyset$ , произвольной природы. Задано непустое конечное множество  $X^0, X^0 \subset X$ , возможных точек старта. С каждым мегаполисом  $M_j, j = 1, \dots, n$ , связывается непустое отношение

$$M_j, M_j \subset M_j \times M_j,$$

элементами которого являются упорядоченные пары (УП) в виде совокупности пункта прибытия и пункта отправления каждая. На множестве  $\mathbb{P}$  всех перестановок индексов  $1, \dots, n$  задаются ограничения в виде условий предшествования. Одно из этих условий выделим для специального рассмотрения: определены индексы мегаполисов первой зоны  $1, \dots, N$ , где  $N$  – натуральное число, для которого  $2 \leq N \leq n - 2$ , и индексы  $N + 1, \dots, n$  мегаполисов второй зоны. Требуется реализовать в первую очередь обслуживание семейства  $\mathcal{M}_1$  всех мегаполисов  $M_1, \dots, M_N$  и лишь после этого приступить к посещению мегаполисов  $M_{N+1}, \dots, M_n$ , образующих в совокупности  $\mathcal{M}_2$ . Итак, правило «обслуживание семейства  $\mathcal{M}_2$  после обслуживания  $\mathcal{M}_1$ » есть вариант условий предшествования, отвечающий представлению основной задачи в виде совокупности предваряющей и финальной задач (кратко,  $\mathcal{M}_1$ -задачи и  $\mathcal{M}_2$ -задачи). По ряду причин данное разбиение заданий на предваряющие и завершающие имеет смысл трактовать как декомпозицию основной задачи. Предполагаем, кроме того, что в  $\mathcal{M}_1$ -задаче и в  $\mathcal{M}_2$ -задаче имеются свои локальные условия предшествования, задаваемые посредством адресных пар «отправитель-получатель»; см. [1, раздел 2]. В результате формируются множества  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  допустимых перестановок индексов  $1, \dots, N$  и  $1, \dots, n - N$  соответственно (имеется в виду допустимость по предшествованию); рассматриваем элементы  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  как допустимые маршруты в задачах для  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  соответственно. Склейки  $\mathcal{A}_1$ - и  $\mathcal{A}_2$ -маршрутов рассматриваем в качестве допустимых маршрутов основной (совокупной) задачи.

С каждым допустимым маршрутом связываем пучок возможных траекторий при перемещении по занумерованным мегаполисам (см. [1, раздел 1]). Триплет, включающий маршрут (перестановку индексов  $1, \dots, n$ ), траекторию и точку старта из множества  $X^0$  называем маршрутным процессом. Рассматриваем задачу на минимум аддитивного критерия в классе маршрутных процессов при вышеупомянутых ограничениях. При формировании аддитивного критерия используются функции стоимости, допускающие зависимость от списка заданий, не выполненных на текущий момент. Построен оптимальный алгоритм (обоснование оптимальности см. в [1]), реализуемый по следующей схеме, использующей элементы декомпозиции исходной  $\mathcal{M}$ -задачи, где  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ , с раздельным решением  $\mathcal{M}_1$ - и  $\mathcal{M}_2$ -задачи; в основе решения этих задач – широко понимаемое динамическое программирование (ДП).

1) Построение множества  $X^{00}$  возможных точек старта в  $\mathcal{M}_2$ -задаче, согласованного с условиями предшествования  $\mathcal{M}_1$ -задачи.

2) Решение по методу ДП  $\mathcal{M}_2$ -задачи при использовании  $X^{00}$  в качестве множества возможных точек старта. Используется реализация ДП в духе [2], восходящая к [3, §4.9] и предусматривающая построение существенных списков заданий, построение слоев пространства позиций и слоев функции Беллмана. Финальный слой этой функции задает функцию экстремума  $\mathcal{M}_2$ -задачи на множестве  $X^{00}$ .

3) В терминах вышеупомянутого финального слоя функции Беллмана формируется терминальная компонента критерия  $\mathcal{M}_1$ -задачи, после чего по схеме ДП [2] осуществляется построение существенных списков заданий, слоев пространства позиций и слоев функции Беллмана в  $\mathcal{M}_1$ -задаче. Финальный слой этой функции, реализуемый как функция на  $X^0$ , определяет критерий задачи на минимум, экстремум которой совпадает с экстремумом в (полной)  $\mathcal{M}$ -задаче, а точка старта  $x^0$ , его доставляющая, используется при построении решения  $\mathcal{M}_1$ -задачи.

4) Фиксируя  $x^0$ , решаем  $\mathcal{M}_1$ -задачу, включая построение маршрута (перестановки индексов) и траектории. На данной траектории фиксируем финишную точку  $x^{00}$ .

5) С использованием ДП в реализации [2] строится оптимальное решение  $\mathcal{M}_2$ -задачи (в виде пары маршрут-траектория) со стартом в  $x^{00}$ .

6) Осуществляется склеивание найденных на этапах 4), 5) решений посредством отдельного склеивания маршрутов и траекторий. Полученная склейка, дополняемая точкой  $x^0$ , является оптимальным маршрутным процессом в  $\mathcal{M}$ -задаче.

В связи с применением ДП при решении задачи коммивояжера – прототипа исследуемой (более сложной) задачи маршрутизации – отметим работы [4,5] (см. также метод ветвей и границ в [6] и монографии [7-9]). Настоящее исследование ориентировано на задачи, связанные с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ (см. [10,11] и др.). Пример решения такой задачи рассматривается ниже.

2. При построении алгоритма в качестве  $X$  использовался достаточно большой прямоугольник на плоскости (лист). Предполагается заданным раскройный план; указаны контуры деталей, подлежащие резке. Совокупность деталей (а, следовательно, и совокупность всех контуров) разделена на две зоны, отвечающие свойством  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  общей постановки. Рассматриваем случай, когда в  $\mathcal{M}_1$  включены длинномерные [11, с. 46] детали и, возможно, какие-то другие детали с тем, чтобы обеспечить разбиение совокупной задачи в систему подзадач умеренной размерности (длинномерные детали, а, точнее, их заготовки, в наибольшей степени подвержены тепловым деформациям при термической резке). Оставшиеся детали связываем с семейством контуров  $\mathcal{M}_2$ . Условия предшествования определяем правилом: для каждой детали резка ее внутренних контуров должна предшествовать резке внешнего (см. [11, §1.3.2]); аналогичное правило выдерживается в отношении вложенных деталей (см. правило 2 в [11, с.40]). Функции стоимости, участвующие в формировании аддитивного критерия, соответствуют [2, раздел 6]. В частности, предусмотрены специальные «тепловые допуски», нарушение которых штрафует, что приводит к появлению функций стоимости с зависимостью от списка заданий. Сами мегаполисы получают дискретизацией эквидистант контуров и (см. [2, раздел 6]) выделением для каждого контура УП, элементами которых являются всякий раз точка врезки и точка включения инструмента. Внешние перемещения осуществляются «быстро» – в режиме холостого хода, перемещения, связанные с резкой, – в режиме рабочего хода.

**Вычислительный эксперимент.** Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i5-11300H с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 11 (64-bit). Для разработки программы был использован язык C++, компилятор MinGW и интерфейсная библиотека Qt.

Количество контуров – 52, количество деталей – 20, количество адресных пар – 39. Все контура разделены на два кластера. Первый в левой части листа, второй в правой. В примере использовались тепловые ограничения, описанные в [2]. Именно, область завершения реза имеет длину 150 мм и ширину 50 мм. Пороговое значение для использования штрафа равно 0,3 от площади завершения реза. Полученный результат счета 122,383. В значении отсутствуют штрафы, из чего следует, что условия, связанные с тепловым расширением, выполнены. Время счета: 12 мин. 36 сек. На рис. 1. приведен результат работы алгоритма.

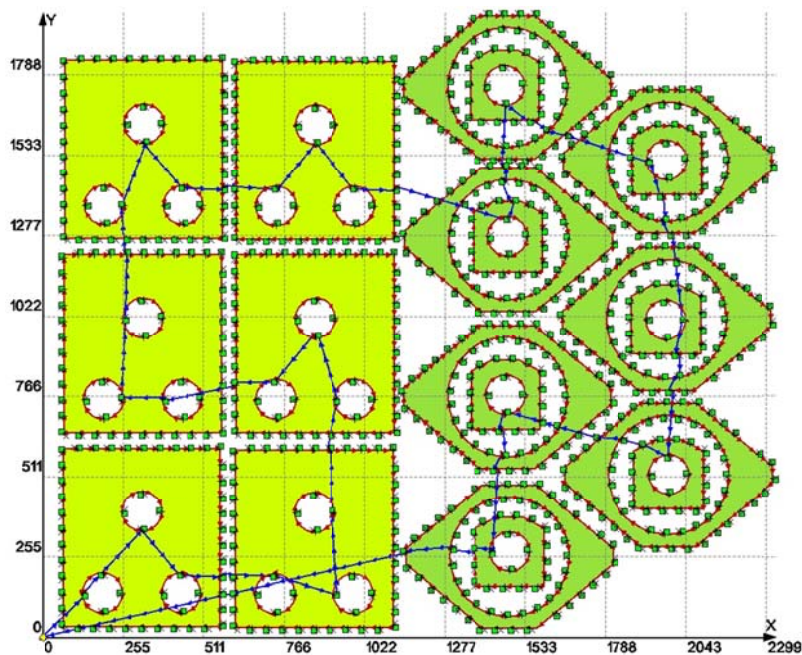


Рис.1. Результат работы алгоритма для примера с двумя кластерами

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т.27. №137. С.95–124.
2. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 96–117.
3. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 238 с.
4. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т.9. С. 219-228.
5. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир. 1964. Т. 9. С. 202-218.
6. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т.1 (Вып. 1) С. 94-107.
7. Gutin G., Punnen A.P. The Traveling Salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002. 850 p.
8. Cook W. J. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. Princeton University Press, 2012. 228 p.
9. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ. 2016. 216 с.
10. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика, 2009. Т. 13, № 2 (35). С. 280-286.
11. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.

A.G.Chentsov (IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg), P.A.Chentsov (IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg). **Dynamic programming in the routing problem: two-stage option.**

The routing problem with precedence conditions and cost functions depending on the list of tasks is considered. It is assumed that the set of all tasks is divided into the sum of two subsets. It is required that the execution of jobs from the first subset be completed before the execution of jobs from the second subset begins. It is required to build an optimal route process, including a permutation of task indices (the route), a trajectory and a starting point. An optimal algorithm has been constructed, implemented on a PC in a specific formulation, corresponding to the problem associated with zones sheet cutting on machines with CNC. The solution of a model example of perceptible dimension is given.

Е.Е. ВАСИЛЬЕВА, А.В. ЛЕОНИДОВ  
(Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва,  
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный)

Ш.А. ЗАКАРИЯЛОВ  
(Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный)

## СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ / СВЯЗЫВАНИЕ В БИНАРНОЙ ИГРЕ ИЗИНГА

*Анализируется динамическая игра с зашумленным бинарным выбором (игра Изинга) стратегических агентов. Для полного графа показано, что учет стратегических соображений приводит к эффективному усилению взаимодействия (снижению шума) по сравнению с игрой близоруких агентов. На основе явного решения уравнения Беллмана для случая полного графа показано, что стратегические агенты способны прийти к консенсусу в более широком диапазоне значений шума, чем близорукие. Показано, что выводы сохраняются при использовании методов обучения с подкреплением для анализа той же игры на полном графе. Изучены результаты обучения с подкреплением в игре Изинга с зашумленным бинарным выбором на графе с произвольной топологией.*

**Введение.** Социально-экономическое взаимодействие считается одним из ключевых факторов, объясняющих сложность наблюдаемых социально-экономических систем и их эволюции. Именно поэтому разработка методов его количественного описания имеет важное значение [1]. В частности, эффекты, возникающие в результате взаимодействия агентов, изучаются в рамках зашумленных игр многих агентов с дискретным выбором [2–4]. Для формулировки зашумленной игры с дискретным выбором необходимо описать пространство стратегий игроков (бинарные, троичные и т. д.), распределение шума и топологию графа взаимодействий. Наибольшее внимание в литературе уделяется случаю бинарного выбора [2, 4–8]. При этом, при описании распределения шума распределением Гумбеля могут быть проведены глубокие параллели со статистической физикой магнетиков [9–11].

Ясно, однако, что описанная выше эквивалентность физических моделей и моделей социально-экономических систем не может быть универсальной. Одним из аспектов, которые потенциально могут отличать спины в магнетике от агентов социально-экономических систем, является то, что последние, в общем случае, являются дальновидными. Иными словами, их решение может быть основано не только на текущем состоянии системы или ее истории, но также может зависеть от их прогноза возможного развития системы в будущем. Этот аспект принятия решений человеком лежит в основе анализа повторяющихся игр в теории игр [12]. Однако, насколько известно авторам, эффекты стратегического принятия решений ранее не изучались в литературе, посвященной зашумленным играм с дискретным выбором.

В настоящем докладе будет описан феномен эффективного усиления взаимодействия/уменьшения шума ввиду учета стратегического мышления агентов в игре Изинга с бинарным выбором. Отсюда прямо следует, что дальновидные агенты способны приходиться к консенсусу в более широком диапазоне значений шума, чем близорукие.

**Игра Изинга стратегических агентов.** Динамическая игра Изинга изучаемая в настоящем докладе формулируется следующим образом. Рассматривается взаимодействие  $N$  игроков, находящихся в узлах графа, описываемого матрицей связности  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ . Пространство состояний каждого игрока  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$  описывается двумя возможными стратегиями  $s_i = \pm 1$ . Игра развивается в дискретном времени  $t = 1, \dots, T$ . В каждый момент времени полное описание системы задается конфигурацией стратегий всех игроков  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$ . Начальное состояние системы описывается некоторой конфигурацией  $\mathbf{s}(0)$ . Система эволюционирует в результате пересмотра стратегий агентами ( $\mathbf{s}_i(t-1) \rightarrow \mathbf{s}_i(t)$ ), при этом в каждый момент времени только одному случайно выбранному агенту выпадает шанс пересмотреть свою стратегию.

**Игра близоруких агентов на полном графе.** В игре близоруких агентов на полном графе процесс пересмотра стратегии игроком  $i$  основывается на оценке величины полезности/выплаты  $U_i^{mp}(s_i, \mathbf{s}_{\{-i\}}(t), \varepsilon_{s_i(t)})$  от выбора стратегии  $s_i$  следующего вида

$$U_i^{mp} (s_i, \mathbf{s}_{-i}(t), \varepsilon_{s_i}(t)) = J \left( \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} s_j(t) \right) s_i + \varepsilon_{s_i}(t), \quad (1)$$

где константа  $J$  определяет силу взаимодействия (связывания) агентов,  $\mathbf{s}_{-i}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_{i-1}(t), s_{i+1}(t), \dots, s_N(t))$  – вектор стратегий всех игроков, кроме игрока  $i$ ,  $\varepsilon_{s_i}(t)$  – зависящая от выбранной игроком  $i$  стратегии величина шума (случайного вклада). В текущем докладе будут представлены результаты для случая, когда шум описывается нормальным распределением с параметрами  $\mathcal{N} \left( 0, \sigma \equiv \frac{1}{\beta} \right)$ .

Введем обозначение для информационного множества агента  $i$  в момент времени  $t$ :

$$\Phi_i(t) = (\mathbb{I}_i(t), s_i(t-1), m_{-i}(t), \varepsilon_{\pm 1}^i(t)), \quad (2)$$

где  $\mathbb{I}_i(t)$  – функция-индикатор равная 1, если агенту  $i$  выпал шанс пересмотреть стратегию, и 0 иначе,  $m_{-i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} s_j$ .

$$U_i^{mp} (s_i, \Phi_i(t)) = \begin{cases} U_i^{mp} (s_i, m_{-i}(t), \varepsilon_{s_i}(t)), & s_i = \pm 1, \text{ если } \mathbb{I}_i(t) = 1 \\ U_i^{mp} (s_i(t-1), m_{-i}(t), \varepsilon_{s_i(t-1)}(t)), & \text{если } \mathbb{I}_i(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

**Игра стратегических агентов на полном графе.** Действия стратегического игрока основываются не только на величине его текущего выигрыша/полезности, но и на его ожиданиях относительно будущих выигрышей. Поэтому мы предполагаем, что процесс пересмотра стратегии стратегическим игроком  $i$  основывается на оценке величины полезности/выплаты  $U_i(s_i, \Phi_i(t))$  от выбора стратегии  $s_i$  следующего вида

$$U_i(s_i, \Phi_i(t)) = U_i^{mp}(s_i, \Phi_i(t)) + \gamma U_i^{st}(s_i, \Phi_i(t)). \quad (4)$$

При этом стратегический вклад  $U_i^{st}(s_i, \Phi_i(t))$  в полезность имеет следующий вид

$$U_i^{st}(s_i, \Phi_i(t)) = \mathbb{E}(\sum_{\tau=t+1}^T \gamma^{\tau-t-1} U_i^{mp}(s_i(\tau), \Phi_i(\tau)) \mid s_i(t) = s_i, \Phi_i(t)). \quad (5)$$

Стратегия (выбор) агента  $i$  в момент времени  $t$  определяется следующим соотношением

$$s_i(t) = \begin{cases} \arg \max_{s_i'} U_i(s_i', \Phi_i(t)), & \mathbb{I}_i(t) = 1 \\ s_i(t-1), & \mathbb{I}_i(t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

**Стратегическое охлаждение/связывание на полном графе.** Для случая полного графа предложен способ явного точного вычисления оптимальных траекторий решений агентов посредством решения соответствующего уравнения Беллмана.

На полном графе компактное представление усредненной эволюции системы может быть дано в терминах набора вероятностей  $\{p_{s_i}(m_{-i}, t)\}$  того, что игрок  $i$  выберет стратегию  $s_i$  при заданной величине  $m_{-i}$ . Для случая близоруких агентов данные вероятности имеют вид

$$p_+^{mp}(m_{-i}) \equiv p_{s_i=1}^{mp}(m_{-i}) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}[\beta J m_{-i}]) \quad (7)$$

Для стратегической игры показано, что при  $\gamma < 0.85$  аналогичные вероятности хорошо описываются следующим соотношением

$$p_+(m_{-i}, t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}[\beta J \left( 1 + \gamma \frac{c(t)}{2J} \right) m_{-i}] \right), \quad (8)$$

где  $c(t)$  – некоторый зависящий от времени положительный коэффициент. Таким образом, стратегическое принятие решения приводит к введению следующей модификации

$$(\beta J)_{\text{eff}} = \beta J \left( 1 + \gamma \frac{c(t)}{2J} \right). \quad (9)$$

Такая модификация может интерпретироваться как одно из следующих альтернативных явлений:

- стратегическое связывание, приводящее к увеличению константы связывания  $J \rightarrow J \left(1 + \gamma \frac{c(t)}{2J}\right)$ ;
- стратегическое охлаждение, приводящее к снижению шума  $\beta \rightarrow \beta \left(1 + \gamma \frac{c(t)}{2J}\right)$ .

Результаты оценки  $p_+(m_{-i}, t)$  и  $(\beta J)_{\text{eff}}$  при фиксированных значениях параметров модели приведены на Рис. 1 и 2 соответственно.

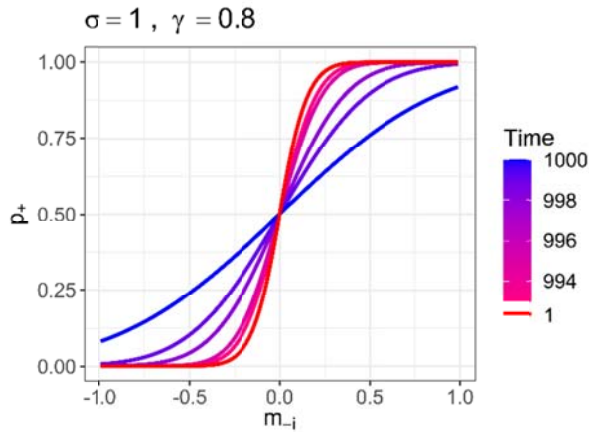


Рис. 1. Эволюция вероятности  $p_+(m_{-i}, t)$

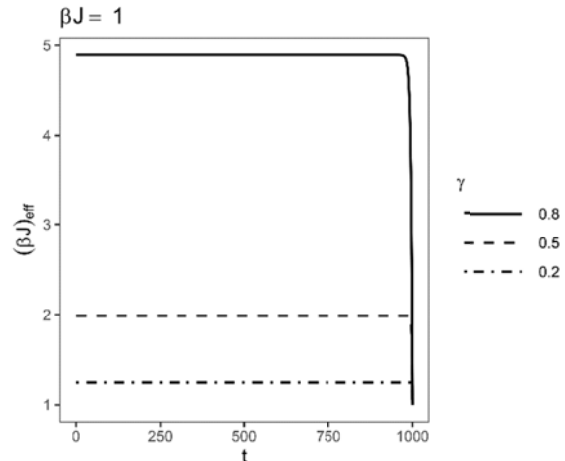


Рис. 2. Эволюция  $(\beta J)_{\text{eff}}$  при различных значениях параметра  $\gamma$

**Игра на графе с произвольной топологией.** На графе с произвольной топологией невозможно предложить явный способ решения уравнения Беллмана. Поэтому в докладе будет предложен альтернативный взгляд на рассмотренную выше игру – взгляд с позиции обучения с подкреплением.

Показано, что, во-первых, в ходе обучения при игре на полном графе агенты приходят к стратегиям, близким к полученным в результате точного решения уравнения Беллмана. Во-вторых, алгоритмы обучения с подкреплением могут быть применены для анализа игры на графе с произвольной топологией. Такой подход позволяет изучать влияние топологии графа на характеристики эволюции системы в игре Изинга предусмотрительных агентов.

**Заключение.** В докладе описан эффект стратегического охлаждения/связывания в игре Изинга. Данный эффект заключается в эффективном росте силы взаимодействия/ снижении шума при переходе от анализа игры близоруких агентов к анализу взаимодействия стратегически-мыслящих игроков. Обсуждается связь между эволюцией системы в данной игре и результатами применения алгоритмов обучения с подкреплением к аналогичной системе взаимодействующих агентов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Blume, L. E., Durlauf, S. N. The interactions-based approach to socioeconomic behavior. Working papers from Wisconsin Madison - Social Systems. 2000. № 1.
2. Brock, W. A., Durlauf, S. N. Discrete choice with social interactions. The Review of Economic Studies. 2001. Vol 68. №2. P. 235-260.
3. Durlauf, S. N., Ioannides, Y. M. Social interactions. Annu. Rev. Econ. 2010. Vol. 2. № 1. P. 451-478.
4. Blume, L., Durlauf, S. Equilibrium concepts for social interaction models. International Game Theory Review. 2003. Vol 5. № 3. P. 193-209.
5. Ioannides, Y. M. Topologies of social interactions. Economic Theory. 2006. Vol. 28. № 3. P. 559-584.
6. Leonidov, A., Savvateev, A., Semenov, A. G. Quantal response equilibria in binary choice games on graphs. arXiv preprint. 2019. arXiv:1912.09584.
7. Leonidov, A., Savvateev, A., Semenov, A. G. QRE in the Ising Game. CEUR Workshop Proceedings. 2020. P. 87-91.
8. Leonidov, A., Savvateev, A., Semenov, A. G. Ising Game on Graphs. arXiv preprint. 2021. arXiv:2108.00824.
9. Durlauf, S. N. How can statistical mechanics contribute to social science? Proceedings of the national academy of sciences. 1999. Vol. 96. № 19. P. 10582-10584.

10. Durlauf, S. N. Statistical mechanics approaches to socioeconomic behavior. The economy as an evolving complex system II. CRC Press, 2018. P. 81-104.
11. Bouchaud, J. P. Crises and collective socio-economic phenomena: simple models and challenges. Journal of Statistical Physics. 2013. Vol. 151. № 3. P. 567-606.
12. Fudenberg, D., Tirole, J. Game theory. MIT press, 1991.

---

A.V. Leonidov, E.E. Vasilyeva (LPI, Moscow, MIPT, Dolgoprudny), Sh.A. Zakariyalov (MIPT, Dolgoprudny). **Strategic stiffening/cooling in the Ising game**

The dynamic noisy binary choice (Ising) game of forward-looking agents is analysed. For the case of complete graph it is shown that strategic considerations lead to effective interaction strengthening (noise reduction) as compared to the myopic game. By explicitly resolving Bellman equation for the case of complete graph we show that strategic agents are able to come to consensus in the wider range of noise values than myopic ones. We show that the conclusions hold when the same game is analyzed using reinforcement learning methods. The results of reinforcement learning in the noisy binary choice Ising game on a graph with an arbitrary topology are studied.



О.В. РУССКОВ, С.Э. САРАДЖИШВИЛИ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

## ТЕОРИЯ ИГР В ЭНЕРГЕТИКЕ. НАСТРОЙКА ПРОГНОЗНОЙ МОДЕЛИ

*Кратко описано применение теории игр в прогнозной модели неравномерного электропотребления крупного металлургического предприятия. Показаны причины применения описанного инструментария. Рассмотрена настройка параметров модели для уменьшения погрешности прогноза и роста эффекта от её применения.*

**Введение.** В энергетической отрасли основными временными рядами являются ряды производства и потребления энергоресурсов. Учитывая бурное развитие цифровых технологий, в частности, на оптовом рынке электроэнергии и газа, необходимость точного прогнозирования подобных временных рядов будет только увеличиваться [1]. Самыми популярными моделями прогнозирования [2] сейчас являются нейросетевые [3] и авторегрессионные [4]. Однако, при возрастании неравномерности или волатильности ряда происходит значительный рост погрешности прогнозирования [5]. Поэтому разработка методов и моделей прогнозирования неравномерных рядов является важной научно-технической и производственной задачей [6]. Предлагаемый доклад посвящен прогнозированию неравномерного электропотребления с помощью теории игр, метод и алгоритм которого ранее описаны в научной литературе [7].

**Метод прогнозирования часового электропотребления на основе теории игр.** Наиболее часто встречающимися и научно значимыми в энергетике временными рядами являются временные ряды, связанные с производством и потреблением электроэнергии (мощности) на оптовом рынке (ОРЭМ) [8]. Выявив наличие смежных временных рядов цен, необходимо проанализировать возможность их прогнозирования и дальнейшей формализации их связи с временным рядом электропотребления. Формирование каждого из основных анализируемых параметров – соотношений значений цен и объемов неравномерного электропотребления (план, факт) – является недетерминированным экспериментом, в котором из двух взаимоисключающих исходов может быть реализован только один. Следовательно, для формального описания процесса реализации исходов этих экспериментов допустимо применять инструментарий теории вероятностей [9]. Кроме того, субъекты ОРЭМ в каждый час соревнуются друг с другом, подавая заявки РСВ, поэтому при описании этого соревнования допустимо применение теории игр [10]. Сам принцип электронного аукциона РСВ порождает конфликт интересов игроков, поскольку их прогнозные заявки могут быть не приняты рынком [1]. Прогнозные значения электропотребления на будущие сутки в рамках аукциона напрямую влияют на значения смежных рядов цен, которые, в свою очередь, влияют на значения электропотребления. Игра участников ОРЭМ является последовательной некооперативной игрой с ненулевой суммой и неполной информацией [11]. Чтобы минимизировать погрешность прогноза электропотребления, следует решить задачу выбора величины и направления корректировки предварительного прогноза из множества альтернатив (рис. 2).



Рис. 1. Выбор прогнозного значения из множества альтернатив

Все факторы, влияющие на ход игры участников ОРЭМ [7], показаны на рис. 2.

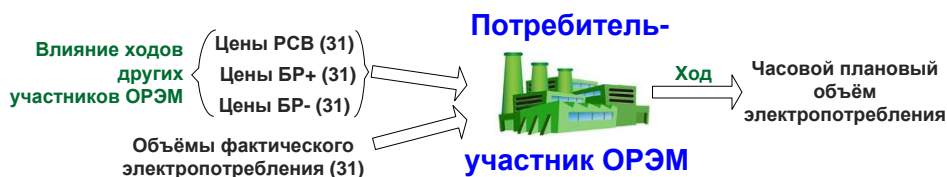


Рис. 2. Взаимосвязь ходов участников ОРЭМ

Поскольку объемы отклонений можно выразить в их стоимости, задачу принятия решения можно привести к однокритериальной, что упрощает её решение [12]:

$$\left\{ \sum_{i=1}^N (S_{PCB+BP}^i + C_{откл} \cdot |V_i|) < \sum_{i=1}^N (S_{PCB+BP}^{*i} + C_{откл} \cdot |V_i^*|) \right\}, \quad (1)$$

где  $S_{PCB+BP}^i$  - стоимость часового электропотребления и  $V_i$  - объём отклонений после корректировки прогноза неравномерного ряда,  $S_{PCB+BP}^{*i}$  - стоимость и  $V_i^*$  - объём отклонений до корректировки,  $i$  - номер часа,  $N$  - число часов в отчётном периоде.

Вероятность формирования каждого типа соотношений цен РСВ и БР рассчитывается на основе актуальной статистики. Модель сравнивает вероятности получения выгоды или риска убытка при разных альтернативах прогнозных значений электропотребления.

**Настройка параметров прогнозной модели.** Пользователь имеет возможность самостоятельно настраивать параметры модели при экспериментах. Одни из основных параметров модели является длительность выборки статистических данных. Экспериментально доказано, что повышение числа суток не приводит к снижению погрешности прогноза; необходимой и достаточной длительностью являются период, равный 31 суткам [11]. Это объясняется тем, что такая длительность выборки входных данных модели учитывает сезонность данных, соответствует размеру отчётного периода в энергетике и, следовательно, содержит актуальные значения и тренды. Другим важным параметром модели является отношение положительной и отрицательной частей целевой функции. Положительная часть положительной целевой функции [7] характеризует достижение прибыли:

$$F_{1+} = V \cdot (P_1 \cdot \Delta_0 + P_1 \cdot P_2 \cdot \Delta_1 + C_{откл}), \quad (2)$$

где  $P_1$  - вероятность формирования соотношения цен типа 0;  $V$  - величина корректировки прогнозного значения;  $P_2$  - вероятность, того что фактическое значение будет больше прогнозного;  $\Delta_0, \Delta_1$  - средняя разница цен для соотношений типов 0 и 1 соответственно;  $C_{откл}$  - цена отклонений в анализируемом интервале [7].

Отрицательная часть характеризует получение возможного убытка [7]:

$$F_{1-} = -V \cdot (P_2 \cdot \Delta_1 + P_1 \cdot P_2 \cdot \Delta_0 + 2 \cdot P_2 \cdot C_{откл}) \quad (3)$$

В зависимости от отношения  $F_{1+}$  к  $F_{1-}$  принимается решение о необходимости проведения корректировки прогнозного значения. В процессе экспериментов установлено, что наибольшее значение целевой функции, соответствующей получению максимальной выгоды при прогнозировании, соответствует отношению, равному 1.1 (рис. 3).

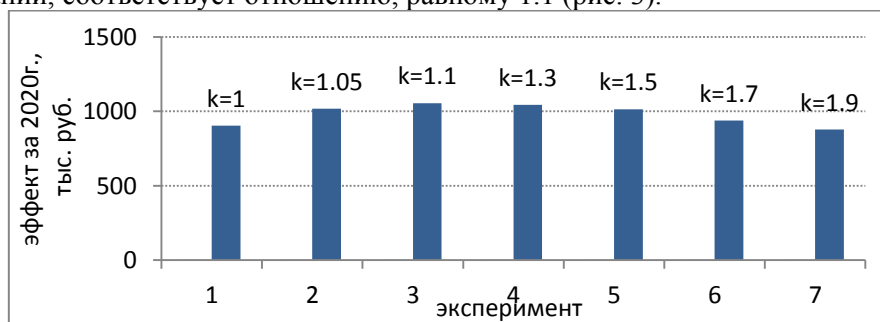


Рис. 3. Влияние коэффициента отношения выгода/убыток на получаемый эффект

Знак корректировки зависит от преобладания соответствующей целевой функции (положительной или отрицательной), а значения корректировки соответствуют максимальному эффекту, полученному в результате экспериментов.

**Внедрение.** Модель реализована в виде программного комплекса на языке C++. Эксперименты проводятся в режиме ретро-прогноза. В режиме онлайн прогноза программа используется в отделе главного энергетика крупного металлургического предприятия юга России. Внедрённая прогнозная модель позволяет уменьшить погрешность неравномерного

электропотребления крупного металлургического предприятия на 5,9% по сравнению с нейросетевой моделью, предложенной энергосбытовой компанией (рис. 5).

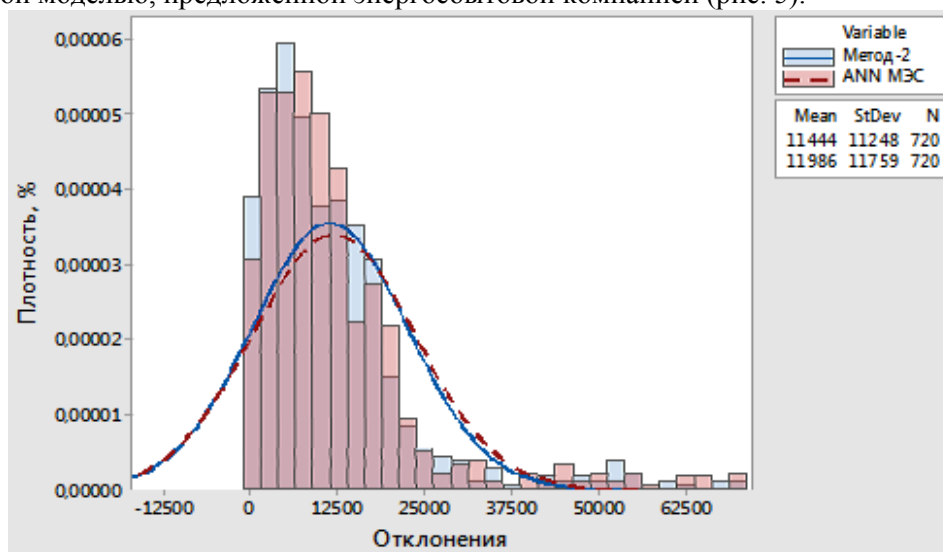


Рис. 4. Гистограмма распределения отклонений факт-прогноз

**Заключение.** Несмотря на то, что вышеописанная прогнозная модель позволяет преодолеть затруднения существующих моделей (в частности, нейросетевых и авторегрессионных) при прогнозировании неравномерного электропотребления, её авторами ведётся непрерывная работа по её более точной настройке и улучшению. Кроме того, имеются планы по доработке прогнозной модели для её применения на фондовых рынках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регламент рынка на сутки вперёд ОРЭМ [электронный ресурс]. - <https://www.np-sr.ru/ru/regulation/joining/reglaments/1970> (дата доступа 16.06.2022).
2. Чучуева И.А. Модель прогнозирования временных рядов по выборке максимального подобия: дис. ... канд. техн. наук. - М. - 2012. - 155 с.
3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М.: ООО «И. Д. Вильямс». - 2006. - 1104 с.
4. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Книга 1. В 2-х кн. М.: Финансы и статистика, 1986. — 366 с.
5. Маклюев Б.И., Ёч В.Ф. Взаимосвязь точности прогнозирования и неравномерности графиков электропотребления // Электрические станции. - 2005. - № 5, с. 64-67.
6. Руссков О.В., Сараджишвили С.Э. Ограничения математических моделей в прогнозировании неравномерных временных рядов и пути их преодоления // Национальная ассоциация учёных (НАУ). - 2014. - № 4. - С. 55-59.
7. Руссков О.В., Сараджишвили С.Э. Методический подход к прогнозированию неравномерного временного ряда // Современная наука. Естественные и технические науки. - 2021. - № 4.
8. Реестр субъектов оптового рынка электроэнергии и мощности [электронный ресурс]. - <https://www.np-sr.ru/ru/market/wholesale/registry/index.htm> (дата доступа 16.06.2022).
9. Russkov O.V., Saradgishvili S.E. The method of planning the energy consumption for electricity market . *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 90 (2017) 012068. – 2017. – DOI: 10.1088/1755-1315/90/1/012068
10. фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М. – 1974.
11. Руссков О.В., Сараджишвили С.Э. Применение теории игр для моделирования неравномерного электропотребления с целью оптимизации процесса работы промышленного предприятия на оптовом рынке // Труды национальной научно-технической конференции «Компьютерное Моделирование (КОМОД-2016)». – СПбПУ. – 2016. – с. 171-185.
12. Russkov O.V., Saradgishvili S.E. A digital method for correcting planned electric energy consumption as a step to the Energy net market. *SHS Web of Conf.* Volume 44. – 2018.

O.V.Russkov, S.E.Saradgishvili, (Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg) **Game theory in Energetics. Setting up the forecasting model**

**Abstract.** The application of game theory in the predictive model of uneven power consumption of a large metallurgical enterprise is briefly described. The reasons for the use of the described tools are shown. The adjustment of the model parameters to reduce the forecast error and increase the effect of its application is considered.

## Секция 6

## НАБЛЮДАТЕЛИ И ФИЛЬТРЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

А.Н. ЖИРАБОК, КИМ ЧХУН ИР  
(Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток)

А.В. ЗУЕВ  
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток)

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ  
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

*Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых дискретными линейными моделями, при наличии внешних возмущений и шумов измерений. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной сложности, не чувствительный или минимально чувствительный к внешним возмущениям, который оценивает нижнюю и верхнюю границы значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Минимальная чувствительность достигается использованием сингулярного разложения.*

**Введение.** Задача построения интервальных наблюдателей активно исследуется последние годы, решения получены для различных классов систем [1-3]. В этих работах, как правило, определяется оценка множества допустимых значений всего вектора состояния, в то время как теоретический и практический интерес представляет соответствующая оценка только для заданной линейной функции вектора состояния. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя полной размерности, а класс систем, для которых такой наблюдатель может быть построен, расширится.

В работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых дискретными линейными моделями, работающих в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

**Основные модели.** Рассмотрим систему, описанную дискретной линейной моделью

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + L\rho(t), \quad y(t) = Hx(t) + v(t), \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F$ ,  $G$  и  $H$  – постоянные матрицы;  $L$  – известная матрица размера  $n \times q$ ;  $\rho(t) \in R^q$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения на систему,  $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$ ;  $v(t) \in R^l$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений,  $\|v(t)\| \leq v_*$ .

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\bar{z}(t)$  границы известной линейной функции вектора состояния, заданной матрицей  $M$  в виде  $z(t) = Mx(t)$ , для которых при всех  $t \geq 0$  справедливо неравенство  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ , понимаемое покомпонентно.

Решение задачи основывается на модели минимальной размерности, оценивающей переменную  $z(t)$ :

$$x_*(t+1) = F_*x_*(t) + J_*Hx(t) + G_*u(t) + L_*\rho(t) \quad z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t), \quad (2)$$

где  $x_* \in R^k$  – вектор состояния наблюдателя,  $k$  – размерность модели,  $F_*$ ,  $J_*$ ,  $G_*$ ,  $L_*$ ,  $H_z$  и  $Q$  – матрицы, подлежащие определению. Предполагается, что векторы  $x(t)$  и  $x_*(t)$  связаны матрицей  $\Phi$ :  $x_*(t) = \Phi x(t)$ . Известно, что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют следующим уравнениям [4]:

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad G_* = \Phi G, \quad L_* = \Phi L, \quad (3)$$

Представим второе уравнение в (2) вместе с  $z(t) = Mx(t)$  в виде

$$M = H_z \Phi + QH = (H_z \quad Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad (4)$$

что эквивалентно условию

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Наилучшим с точки зрения величины интервала  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  является решение, не чувствительное к возмущению  $\rho(t)$ , которое, как известно, имеет вид  $\Phi L = 0$  [4].

**Построение модели.** Матрица  $F_*$  ищется в идентификационной канонической форме:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В отличие от непрерывного случая, когда для обеспечения устойчивости собственные числа матрицы должны иметь отрицательные вещественные части, в дискретном они по модулю не должны превосходить единицу; для рассматриваемой матрицы они равны нулю. Кроме того, требование метцлеровости матрицы  $F_*$  заменятся условием  $F_* \geq 0$ , справедливым для (6).

Решение задачи осуществляется на основе уравнения [4]

$$(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0, \quad (7)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

матрица  $V^{(k)}$  обеспечивает построение модели (2),  $L^{(k)}$  – нечувствительность ее к возмущениям, т.е. условие  $\Phi L = 0$ .

Для построения модели из (7) при минимальном  $k$  определяется строка  $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$ , затем на основе соотношений

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k} H,$$

полученных из (3) и (6), строится матрица  $\Phi$ . Далее проверяется условие (5), выполнение которого означает, что матрица  $M$  может быть выражена через  $(\Phi^T \quad H^T)^T$  и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную  $z = Mx$ ; матрицы  $H_z$  и  $Q$  определяются из алгебраического уравнения (4) и  $G_*$  – из (3). Если условие (5) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (7).

**Построение интервального наблюдателя.** Наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*^+ &= F_* \underline{x}_* + J_* y + G_* u - |J_*| E_k v_*, \\ \bar{x}_*^+ &= F_* \bar{x}_* + J_* y + G_* u + |J_*| E_k v_*, \\ \underline{z} &= H_z \underline{x}_* + Qy, \quad \bar{z} = H_z \bar{x}_* + Qy, \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $E_k$  –  $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц; матрица  $|J_*|$  составляется из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы  $J_*$ ; по предположению  $x_*(0) \in [\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0}]$  для некоторых известных векторов  $\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0} \in R^n$ . По аналогии с [1] для векторов  $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^k$  и  $k \times k$ -матриц  $A^{(1)}, A^{(2)}$  отношения  $x^{(1)} \leq x^{(2)}$  и  $A^{(1)} \leq A^{(2)}$  понимаются поэлементно.

**Теорема.** Пусть  $H_z \geq 0$  и  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , тогда для интервального наблюдателя (8) выполняются соотношения  $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$  и  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  для всех  $t \geq 0$ .

Одним из главных в теореме является условие  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , которое для системы (8) дает  $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$  и  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  для всех  $t \geq 0$ . Отсутствие обратных связей в (8) и устойчивость матрицы  $F_*$  позволяют утверждать, что эти неравенства будут выполняться для некоторого  $t > 0$  и при невыполнении условия  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , поскольку начальные условия «забываются» при  $t \geq k$ .

**Робастное решение.** Если условие (7) не выполняется при всех  $k < n$ , необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель.

Из (7) следует, что задача минимизации вклада возмущения в модель сводится к минимизации нормы  $\|(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k)L^{(k)}\|_F$  при выполнении условия

$$(\Phi_1 \quad -J_1 \quad -J_2 \quad \dots \quad -J_k)V^{(k)} = 0. \quad (9)$$

Для решения этой задачи предлагается найти все линейно независимые решения уравнение (9) вида  $(\Phi_1^{(j)} \quad -J_1^{(j)} \quad \dots \quad -J_k^{(j)})$  для некоторой фиксированной размерности  $k$ . Все эти решения сводятся в матрицу  $W$

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_1^{(1)} & -J_2^{(1)} & \dots & -J_k^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_1^{(N)} & -J_1^{(N)} & -J_2^{(N)} & \dots & -J_k^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Задача состоит в определении вектора  $w = (w_1, \dots, w_N)$ , который дает минимум нормы  $\|wW\|_F$ .

Для решения этой задачи найдем сингулярное разложение матричного произведения  $WL^{(k)}$  в виде  $WL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$ , где  $U_L$  и  $V_L$  – ортогональные матрицы,

$$\Sigma_L = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_c) \quad 0) \quad \text{или} \quad \Sigma_L = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_c) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$c = \min(N, ks)$ ,  $s$  – число столбцов матрицы  $L$ ,  $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_c$  – сингулярные числа матрицы  $WL^{(k)}$ , упорядоченные по возрастанию. Выберем первый транспонированный столбец матрицы  $U_L$  в качестве вектора весовых коэффициентов  $w = (w_1, \dots, w_N)$  и примем

$$(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) = wW.$$

Определением матриц  $G_* = \Phi G$  и  $L_* = \Phi L$  завершается синтез модели (2), минимально чувствительной к возмущениям.

Из-за появления слагаемого  $L_*\rho(t)$  в модели (2) динамика интервального наблюдателя корректируется следующим образом:

$$\underline{x}_*^+ = F_*\underline{x}_* + J_*y + G_*u - |J_*|E_k v_* - |L_*|E_k \rho_*,$$

$$\bar{x}_*^+ = F_*\bar{x}_* + J_*y + G_*u + |J_*|E_k v_* + |L_*|E_k \rho_*.$$

Нетрудно видеть, что искомый результат следует из теоремы и очевидного дополнительного неравенства  $|L_*|E_k \rho_* \pm L_*\rho(t) \geq 0$ .

**Заключение.** В работе решена задача построения интервальных наблюдателей для дискретных линейных систем, работающих в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений, получены соответствующие расчетные соотношения. Возможное направление дальнейших исследований – учет параметрической неопределенности системы (1).

*Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22-29-01303).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Д.В. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2016. № 2. С. 5-49.
2. Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L. Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. V. 14. P. 721-740.
3. Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E. Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // Proc. XII-th Inter. Sympos. «Intelligent Systems», INTELS'16. Moscow, Russia, 2016. P. 499-504.
4. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 18–35.

---

A.N. Zhirabok, Kim Chung Il (Far Eastern Federal University, Vladivostok), A.V. Zuev (Institute of Marine Technology Problems, Vladivostok). **Interval observer design for discrete linear systems with uncertainties**

The problem of interval observer design for systems described by discrete linear models under external disturbances and measurement noises is considered. Relations enable designing interval observers of minimal dimension are given. Such observers are insensitive or minimal sensitive to the disturbances and estimate low and upper bounds of the prescribed linear function of the system state vector. Minimal sensitivity is achieved by using singular value decomposition.

И. Р. БЕЛОВ

(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Москва)

## «О СВЯЗИ ПРЕДЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ АНИЗОТРОПИЙНОГО ОЦЕНИВАТЕЛЯ С ФИЛЬТРОМ КАЛМАНА»

*В данном докладе представлен анализ сходимости анизотропийного оценителя к фильтру Калмана в пространстве состояний при стремлении параметра анизотропии  $\alpha$  к 0. На основании результатов анализа получено решение задачи максимизации параметра анизотропии для анизотропийного оценителя для линейных дискретных стационарных систем с ограничением на отклонение следа ковариационной матрицы ошибки фильтрации от аналогичной величины для фильтра Калмана. Решение задачи фильтрации представлено в виде системы условий ограниченности отклонения следа ковариационной матрицы, сформулированных в виде леммы.*

**Введение.** Задача фильтрации является одной из наиболее актуальных задач в прикладной математике еще с начала XX века. Это связано с тем, что для оптимального с точки зрения определенного критерия управления состоянием той или иной технической системы во многих задачах необходимо наличие корректных данных о ее текущем состоянии и состоянии в прошлые моменты времени. Эти данные довольно часто являются неполными и зашумленными в силу сложности устройства и динамики состояния большинства технических объектов, наличия внешних факторов, воздействующих на объект и шумов в измерениях, которые приходят с сенсоров, датчиков и т.д. Вследствие этого возникает необходимость в построении оптимальной оценки состояния системы или некоторой связанной с объектом величины, которую можно использовать при решении задач управления. Одним из видов задач построения таких оценок являются задачи фильтрации.

Методы решения задач фильтрации во многом определяются свойствами внешних возмущений, действующих на систему, и шумов в измерениях. Эта информация в полном объеме чаще всего недоступна исследователю, поэтому вводятся предположения о свойствах системы и внешних возмущений. К примеру, в задачах  $H_2$ -теории [1],[2] вводится предположение, что входное возмущение является гауссовским белым шумом. Это идеализированный вариант возмущения и потому в практическом применении полученный  $H_2$ -фильтр может оказаться недостаточно эффективным. Однако подобные фильтры достаточно просты в реализации. Одним из известных примеров является фильтр Калмана [3]. Другим известным классом задач фильтрации являются  $H_\infty$ -фильтры [4]. [5], которые строятся на основе предположения о наихудшем сценарии входного возмущения, которое обеспечивает максимальное значение среднеквадратичного коэффициента усиления системы объекта. Основными недостатками данного подхода являются консервативности и высокая энергозатратность.

Вследствие наличия существенных недостатков у  $H_2$ - и  $H_\infty$ -теорий фильтрации, было опубликовано большое количество научных работ по поиску новых подходов решения задач оптимальной фильтрации для линейных дискретных систем с постоянными и переменными матрицами, с детерминированными и стохастическими параметрами. Одним из известных примеров являются работы по анизотропийной теории [6],[7],[8],[9], которая была представлена в 90-е годы прошлого столетия. Одним из основных понятий этой теории является анизотропия случайного вектора, которую можно рассматривать как меру отклонения распределения данного вектора от стандартного гауссовского распределения. Данное понятие позволяет описывать случайные внешние возмущения с неизвестными стохастическими характеристиками. Другим понятием данной теории является анизотропийная норма, равная максимальному значению среднеквадратичного коэффициента усиления системы по всем внешним случайным возмущениям с анизотропией, ограниченной сверху заданной величиной. В [8] показано, что анизотропийная норма при стремлении параметра анизотропии к нулю принимает значение масштабированной  $H_2$ -нормы, а при стремлении параметра анизотро-



пии к бесконечности – к  $H_\infty$ -норме. Таким образом, анизотропийную теорию можно считать обобщением  $H_2$ - и  $H_\infty$ -теорий.

В данной работе представлен анализ свойств анизотропийного фильтра при стремлении параметра анизотропии к нулю. Получены зависимости матриц анизотропийного фильтра от параметра анизотропии  $a$ , а также ковариационной матрицы ошибки фильтрации состояния и оцениваемого выхода. На основании результатов анализа получено решение задачи анизотропийной фильтрации при наличии ограничения на отклонение следа ковариационной матрицы ошибки фильтрации от следа ковариационной матрицы ошибки фильтра Калмана.

В основной части доклада представлено решение задачи анализа свойств анизотропийного фильтра в виде формул зависимости матриц фильтра и ковариационных матриц от параметра анизотропии  $a$ , а также лемма об условиях ограниченности следа ковариационной матрицы ошибки фильтрации. В заключении представлено описание результатов, полученных при рассмотрении поставленной задачи анализа и направления дальнейших исследований по данной тематике.

**Основная часть.** Объектом рассмотрения является линейная дискретная стационарная система следующего вида:

$$F \sim \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \\ z(k) = x(k), \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \quad (1)$$

где матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$  и  $D \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$  при  $k = 0, 1, \dots$  являются детерминированными и постоянными, а начальное состояние системы  $x(0) = 0$ .

Задача фильтрации заключается в построении линейного стационарного фильтра вида

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = \hat{x}(k) + M(y(k) - C\hat{x}(k)), \end{cases} \quad (2)$$

где  $K$  и  $M$  являются неизвестными матрицами фильтра.

Для построения анизотропийного фильтра критерием качества является анизотропийная норма системы в ошибках фильтрации. В первую очередь, необходимо получить реализацию системы в ошибках фильтрации. Для этого воспользуемся введённым ранее обозначением  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ . Получаем систему в ошибках фильтрации следующего вида

$$T_{\tilde{z}w} \sim \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (A - KC)\tilde{x}(k) + (B - KD)w(k), \\ \tilde{z}(k) = (I - MC)\tilde{x}(k) - MDw(k). \end{cases} \quad (3)$$

Предполагается, что последовательность векторов  $w(k)$  является гауссовской стационарной последовательностью, генерируемой линейной дискретной стационарной системой, которая характеризуется функцией спектральной плотности  $\hat{G}\hat{G}^* = (I - q\hat{F}^*(w)\hat{F}(w))^{-1}$  и имеет следующий вид:

$$G \sim \begin{cases} x(k+1) = (A + BL)x(k) + B\Sigma^{1/2}v(k), \\ w(k) = Lx(k) + \Sigma^{1/2}v(k), \end{cases} \quad (4)$$

где матрицы  $L$  и  $\Sigma$  выражаются в терминах решения  $R$  уравнения Риккати вида

$$\begin{aligned} R &= A^T R A + qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L, \\ L &= \Sigma (B^T R A + qD^T C), \\ \Sigma &= (I_m - B^T R B - qD^T D)^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

и матрица  $A + BL$  является асимптотически устойчивой. В работе используются следующие обозначения

$$\mathcal{A} = A - KC, \mathcal{B} = B - KD, \mathcal{C} = I_n - MC, \mathcal{D} = -MD. \quad (6)$$

Предположим, что при малом значении параметра  $a$  матрицы  $P$ ,  $R$ ,  $\Sigma$ ,  $L$ ,  $K$ ,  $M$  а также параметр  $q$  являются функциями от параметра  $a$  следующего вида:

$$\begin{aligned} P(a) &= P_0 + \Delta_P(a), R(a) = R_0 + \Delta_R(a), \Sigma(a) = \Sigma_0 + \Delta_\Sigma(a), \\ L(a) &= L_0 + \Delta_L(a), K(a) = K_0 + \Delta_K(a), M(a) = M_0 + \Delta_M(a) \\ q(a) &= q_0 + \Delta_q(a), \mathcal{A}(a) = \mathcal{A}_0 - \Delta_K(a)C, \mathcal{B}(a) = \mathcal{B}_0 - \Delta_K(a)D, \\ \mathcal{C}(a) &= \mathcal{C}_0 - \Delta_M(a)C, \mathcal{D}(a) = \mathcal{D}_0 - \Delta_M(a)D. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $P(0) = P_0$ ,  $R(0) = R_0$ ,  $\Sigma(0) = \Sigma_0$ ,  $L(0) = L_0$ ,  $K(0) = K_0$ ,  $M(0) = M_0$  и  $q(0) = q_0$  соответствуют случаю нулевого параметра анизотропии  $a = 0$  фильтра.

Подставив выражения матричных и скалярных функций (7) в выражения для средней анизотропии и уравнения Риккати (5) с учетом (3),(4),(6), получаем следующий вид функции  $P(a)$  ковариационной матрицы ошибки фильтрации:

$$P(a) = P_0 + \Delta_P(a), \Delta_P(a) \doteq f_P(a)\Delta_P, f_P(a) \sim \sqrt{\frac{4\xi}{m}}, \quad (8)$$

где матрицы  $P_0$  и  $\Delta_P$  являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} P_0 &= (A - K_0C)P_0(A - K_0C)^\top + (B - K_0D)(B - K_0D)^\top, \\ K_0 &= (AP_0C^\top + BD^\top)(CP_0C^\top + DD^\top)^{-1}, \\ \Delta_P &= \mathcal{A}_0\Delta_P\mathcal{A}_0^\top - \mathcal{A}_0P_0C^\top(CP_0C^\top + DD^\top)^{-1}C\Delta_P\mathcal{A}_0^\top - \mathcal{A}_0\Delta_P C^\top(CP_0C^\top + DD^\top)^{-1}CP_0\mathcal{A}_0^\top - \\ &\quad - \mathcal{B}_0D^\top(CP_0C^\top + DD^\top)^{-1}C\Delta_P\mathcal{A}_0^\top - \mathcal{A}_0\Delta_P C^\top(CP_0C^\top + DD^\top)^{-1}D\mathcal{B}_0^\top + \mathcal{A}_0P_0\mathcal{A}_0^\top\Phi^\top\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^\top + (10) \\ &\quad + \mathcal{A}_0P_0C_0^\top\mathcal{D}_0\mathcal{B}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^\top\Phi\mathcal{A}_0P_0\mathcal{A}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{D}_0^\top\mathcal{C}_0P_0\mathcal{A}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^\top\Phi\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{D}_0^\top\mathcal{D}_0\mathcal{B}_0^\top \end{aligned}$$

Получив выражение для матрицы  $\Delta_P$ , можно решить задачу выпуклой оптимизации о максимизации параметра  $a$  анизотропийного оценителя, удовлетворяющего неравенству  $tr(\Delta_P(a)) \leq \varepsilon$ . Данное неравенство преобразуется к форме матричных неравенств относительно неизвестного параметра  $a$  и матриц фильтра.

**Заключение.** Получены выражения (7)-(9) зависимости матриц фильтра и ковариационной матрицы ошибок фильтрации от параметра анизотропии  $a$ . Также решена задача выпуклой оптимизации, заключающаяся в максимизации параметра  $a$  анизотропийного оценителя при ограничении на отклонение следа ковариационной матрицы ошибки фильтрации от его значения для фильтра Калмана. В дальнейшем планируется решение аналогичных задач для нестационарных систем и систем с мультипликативными шумами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Karina A. Barbosa, Carlos E. de Souza, Alexandre Trofino. Robust  $\mathcal{H}_2$ -Filter Design Via Parameter-Dependent Lyapunov Functions // IFAC Proceedings Volumes, 35(1), 2002. pp.371-376.
2. C.E. de Souza, L. Xie. Robust  $\mathcal{H}_2$ -filtering, Control and Dynamic Systems, Academic Press. 1994. Vol.65. pp.323-377.
3. R.E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. ASME Transactions, vol. 82, part D (Journal of Basic Engineering), 1960.
4. C.E. de Souza, U. Shaked, M. Fu. Robust  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal. IEEE Trans. Signal Processing, Mar. 1995. Vol. 43. pp.709-719.

5. M.J. Grimble, A.E. Sayed. Solution of the  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal linear filtering problem for discrete-time systems. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, July 1990. Vol. 38. pp.1092-1104.
6. A.V. Semyonov, I.G. Vladimirov, A.P. Kurdyukov. Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  optimization.// Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, 1994. Vol. 3. pp. 2249-2250.
7. I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 179—184.
8. I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov. State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$  - optimization problem. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 427-432.
9. И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, А.В. Семенов. Асимптотика анизотропной нормы линейных стационарных систем. Автоматика и Телемеханика, 1999. №3.

---

I.R. Belov (V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia). **The connection between anisotropy-based estimator limit case and Kalman filter.**

In this paper, the state-space analysis of anisotropy-based filter's convergence to Kalman filter when the anisotropy parameter tends to 0. Based on analysis results, the anisotropy-based estimator's  $\alpha$ -parameter maximization problem with covariance matrix trace's limitations has been solved. The problem is the convex optimization problem and its solution is presented in the paper as lemma with matrix inequalities.

Д. В. КРАСНОВ, А. В. УТКИН  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

*В узкой постановке рассматривается проблема синтеза физически реализуемых наблюдателей состояния для нелинейных одноканальных систем. Предполагается, что модель объекта представима в треугольном виде «вход–выход», в которой имеются параметрические и внешние несогласованные возмущения, а выходная переменная не измеряется. Формулируются условия, при которых можно восстановить выходную и другие неизмеряемые переменные без дополнительной идентификации имеющихся неопределенностей. Для допустимых случаев предложен метод проектирования редуцированных робастных наблюдателей с кусочно-линейными обратными связями.*

**Введение.** Рассматривается проблема конструирования наблюдателей состояния для нелинейных систем с одним входом и одним выходом, в которых относительный порядок равен размерности вектора состояния. Такие системы можно представить в треугольной (по составу аргументов функций в каждом уравнении) форме «вход–выход». Этот вид удобен для синтеза и обратной связи при решении задачи слежения, и наблюдателя состояния для оценивания неизмеряемых переменных, когда только выходная (регулируемая) переменная измеряется, а все параметрические неопределенности и внешние возмущения являются согласованными, т.е. действуют по входу в последнем уравнении [1–3].

В данной работе исследуется мало изученный в теории, но распространенный на практике случай, когда выходная (регулируемая) переменная следящей системы по тем или иным причинам не может быть измерена [4], комплект датчиков не полный, а параметрические и внешние возмущения не являются согласованными. Задача наблюдения регулируемой и других неизмеряемых переменных рассматривается в узкой постановке. Это означает, что в контур обратной связи не вводятся идентификаторы неизвестных параметров и генераторы внешних возмущений. Цель состоит в том, чтобы для треугольной системы «вход–выход» сформулировать условия, необходимые для построения физически реализуемого наблюдателя состояния, которые зависят не только от структурных свойств наблюдаемости, но и от каналов действия параметрических и внешних возмущений. Научная новизна состоит в выделении практически значимого класса нелинейных одноканальных систем с несогласованными возмущениями, в которых задача оценивания неизмеряемых переменных состояния осуществима без дополнительной идентификации имеющихся параметрических и внешних возмущений. Разрешимость поставленной задачи связана с наличием в модели объекта дифференциальных уравнений относительно измеряемых переменных, правые части которых не зависят от параметрических и внешних возмущений, но в них присутствуют по отдельности неизмеряемые переменные. Для решения задачи наблюдения в допустимых случаях разработан редуцированный наблюдатель состояния специальной структуры с кусочно-линейными управляющими воздействиями [5–7]. Такой наблюдатель строится как копия этих уравнений, в которых неизмеряемые переменные состояния трактуются как неопределенные ограниченные входы и оцениваются с помощью управляющих воздействий наблюдателя. При этом допускается неопределенность дифференциальных уравнений относительно неизмеряемых переменных состояния. Предлагаемый подход, который обеспечивает заданную точность оценивания за конечное время, принципиально отличается от традиционных методов построения редуцированных наблюдателей на основе дифференциальных уравнений неизмеряемых переменных [8–9], которые в узкой постановке реализуемы только при полной определенности всей модели объекта управления.

**Описание проблемы.** Рассматривается нелинейная одноканальная система, представимая в треугольной аффинной форме «вход–выход»

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + \eta_i(t), \quad i = 1, n-1; \quad \dot{x}_n = f_n(x) + \eta_n(t) + bu, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subset R^n$  – вектор состояния,  $x_1(t) \in R$  – регулируемый выход,  $u \in R$  – управление (вход),  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1})$  – функционально и параметрически определенные выражения, удовлетворяющие условиям Липшица,  $b$  – известная константа; в выражениях  $\eta_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  сосредоточены все неопределенности модели объекта и внешние возмущения. Обратим внимание, что в некоторых уравнениях системы (1) эти члены могут отсутствовать. Действующие члены предполагаются ограниченными по модулю известными константами:

$$|\eta_i(t)| \leq H_i, i = \overline{1, n}, t \geq 0. \quad (2)$$

Выполнение условий

$$\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) / \partial x_{i+1} \neq 0, i = \overline{1, n-1}, x \in X, b \neq 0 \quad (3)$$

означает, что система (1) наблюдаема относительно выхода при отсутствии возмущений, а выход управляем относительно входа. В данной работе рассматривается проблема наблюдаемости неизмеряемого выхода  $x_1(t)$  при действии возмущений. Предполагается, что для системы (1)–(3) уже выбрана обратная связь по всем переменным состояния, обеспечивающая отслеживание выходной переменной допустимого сигнала  $g(t)$ . С учетом (2) и заданной области начальных значений это позволяет установить диапазоны изменения переменных состояния в замкнутой системе в процессе регулирования. В частности, можно априори получить расчетные оценки для области изменения функциональных выражений

$$|f_i(x_1, \dots, x_{i+1})| \leq \bar{F}_i, \left| \frac{d}{dt} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) \right| \leq \bar{F}_i, x(t) \in X, t \geq 0. \quad (4)$$

В узкой постановке, когда идентификация неизвестных параметров и построение генераторов внешних возмущений не предусмотрены или не возможны, имеются два варианта синтеза следящей системы. Первый вариант [2, 5] рекомендуется для систем (1)–(4) с гладкими неопределенностями. Такие системы при выполнении условий  $f_i, \eta_i \in C^{n-i}, i = \overline{1, n-1}$  и  $g(t) \in C^n$  представимы в каноническом базисе смешанных переменных. Это – функции от переменных состояния, внешних воздействий и их производных. Для их оценивания достаточно измерений  $x_1(t)$  и  $g(t)$ , при этом наблюдатель смешанных переменных строится на основе канонической системы, а с помощью динамической обратной связи можно обеспечить  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = g(t)$ . Вто-

рой вариант [10] предназначен для систем (1)–(4), в которых функции  $\eta_i(t), \dot{g}(t)$  не являются гладкими. Тогда при измерении  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  и  $g(t)$  с помощью статической обратной связи можно обеспечить заданную точность ошибки слежения.

При неполном комплекте датчиков возможность оценивания переменных состояния, необходимых для синтеза обратной связи, зависит от структуры наблюдаемости системы (1) и отсутствия возмущений  $\eta_j(t) \equiv 0$  в конкретных  $j$ -х уравнениях. Условия построения физически реализуемых наблюдателей представлены в следующем разделе.

**Основной результат.** Пусть для системы (1)–(4) применим первый вариант синтеза обратной связи, но при этом регулируемая переменная  $x_1(t)$  не измеряется. Сформулируем условия ее наблюдаемости независимо от внешних возмущений.

*Лемма.* Если в системе (1)–(4) найдется  $i$ -е уравнение,  $i = 2, \dots, n$ , такое что: 1)  $\eta_i(t) \equiv 0$ , 2)  $\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) / \partial x_1 \neq 0, x \in X$ ; 3)  $x_{i+1}(t)$  измеряется ( $x_{n+1}(t) \equiv 0$ ); 4)  $x_i(t)$  измеряется или наблюдается независимо от возмущений [3]; 5)  $x_2(t), \dots, x_{i-1}(t)$  или не являются аргументами функции  $f_i$ , или измеряются, или наблюдаются независимо от возмущений, то тогда для оценивания  $x_1(t)$  можно построить физически реализуемый редуцированный наблюдатель.

Условия, сформулированные в лемме, продиктованы треугольным видом рассматриваемой системы (1) и ее структурой (3). В самом простом случае, когда  $x_i(t)$  и все наличные аргумен-

ты функции  $f_i$  измеряются (кроме  $x_1(t)$ ),  $\eta_i(t) \equiv 0$ , то тогда оценку  $x_1(t)$  можно получить с помощью кусочно-линейного управляющего воздействия наблюдателя первого порядка, построенного на основе  $i$ -го уравнения системы (1) в виде

$$\dot{z} = v, \quad v = \text{msat}(l\varepsilon) = \begin{cases} m\text{sign}(\varepsilon), & |\varepsilon| > 1/l, \\ ml\varepsilon, & |\varepsilon| \leq 1/l, \quad m, l = \text{const} > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $z, v \in R$  – переменная состояния и управляющее воздействие наблюдателя. Система относительно ошибки наблюдения  $\varepsilon = x_i - z \in R$  имеет вид:  $\dot{\varepsilon} = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - v$ . Синтез наблюдателя состоит в выборе параметров  $m, l$  управления (5) так чтобы стабилизировать с заданной точностью за заданное время  $T > 0$  ошибку наблюдения и ее производную

$$|\varepsilon(t)| \leq \delta, |\dot{\varepsilon}(t)| \leq \Delta \Rightarrow f_i(t) \approx v(t) \pm \Delta, \quad 0 < t \leq T. \quad (6)$$

Неравенства для выбора параметров управления (5), обеспечивающие (6), получим с помощью второго метода Ляпунова [5–7]. С учетом измерений  $x_i(t)$  установим начальное значение наблюдателя  $z(0) = x_i(0) \Rightarrow \varepsilon(0) = 0 \Leftrightarrow |\varepsilon(0)| \leq 1/l$ . Тогда можно обеспечить  $|\varepsilon(t)| \leq 1/l$  при  $t \geq 0$  с помощью выбора амплитуды управления (5) с учетом (4) в виде

$$m > F_i \Rightarrow \varepsilon \dot{\varepsilon} = \varepsilon(f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - m\text{sign}(\varepsilon)) \leq |\varepsilon|(F_i - m) < 0. \quad (7)$$

При  $|\varepsilon| \leq 1/l$  уравнения относительно ошибки наблюдения и ее производной имеют вид

$$\dot{\varepsilon} = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - ml\varepsilon, \quad \ddot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - ml\dot{\varepsilon}.$$

Виртуальные переменные  $\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)$  сойдутся в заданные области (6) за конечное время, если

$$\begin{aligned} l \geq F_i / (m\delta) &\Rightarrow \varepsilon \dot{\varepsilon} = \varepsilon(f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - ml\varepsilon) \leq |\varepsilon|(F_i - ml|\varepsilon|) < 0 \Rightarrow |\varepsilon| \leq \delta; \\ l \geq \bar{F}_i / (m\Delta) &\Rightarrow \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\frac{d}{dt} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) - ml\dot{\varepsilon}) \leq |\dot{\varepsilon}|(\bar{F}_i - ml|\dot{\varepsilon}|) < 0 \Rightarrow |\dot{\varepsilon}| \leq \Delta. \end{aligned} \quad (8)$$

В итоге при одновременном выполнении условий (7)–(8) можно получить оценку неизмеряемой переменной  $x_1(t)$  с помощью управляющего воздействия наблюдателя (5):

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) \approx v \Rightarrow x_1(t) \approx \tilde{x}_1(t) = h(v, x_2, \dots, x_{i+1}), t \geq T, \quad (9)$$

где  $h(v, x_2, \dots, x_{i+1})$  – решение уравнения  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) = v$  относительно  $x_1$ , которое существует в силу второго условия леммы  $\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) / \partial x_1 \neq 0$ .

Прокомментируем четвертое и пятое условия леммы для общего случая, когда переменные  $x_2(t), \dots, x_{i-1}(t)$ , являющиеся аргументами функции  $f_i$ , а также  $x_i(t)$ , не измеряются, но наблюдаемы независимо от возмущений. Условия построения для них физически реализуемых наблюдателей аналогичны условиям, сформулированным в лемме для наблюдаемости  $x_1(t)$ . Например, если в системе (1)–(4)  $x_2(t)$  измеряется, то при выполнении условий  $\eta_j(t) \equiv 0$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$ ,  $k \leq i - 1$  на основе  $j$ -х уравнений можно построить физически реализуемые наблюдатели для оценивания  $x_3(t), \dots, x_{k+1}(t)$  аналогично (5)–(9). Если условия леммы выполнены и оценка  $x_1(t)$  может быть получена (9), то тогда в первом варианте синтеза она используется для настройки наблюдателя смешанных переменных [2, 5]. Для второго варианта синтеза системы слежения после восстановления  $x_1(t)$  нужно восстановить также все остальные неизмеряемые переменные состояния. Условия построения для них физически реализуемых наблюдателей с использованием измеряемых (наблюдаемых) переменных проверяются аналогично. В частности, если  $\eta_1(t) \equiv 0$ , то тогда имеется возможность оценивания  $x_2(t)$ ; если при этом  $\eta_2(t) \equiv 0$ , то и  $x_3(t)$  и т.д.

**Заключение.** Для оценивания неизмеряемой выходной переменной  $x_1(t)$  была применена методика оценивания внешних возмущений без использования динамического генератора возмущений [6]. Редуцированный наблюдатель (5) был построен на основе  $i$ -го уравнения системы (1), удовлетворяющего условиям леммы. Первое уравнение системы (1) в построениях не использовалось и допускалась его неопределенность  $\eta_1(t) \neq 0$ . Данный подход полностью отличается от метода построения стандартного редуцированного наблюдателя [8, 9], который в данной ситуации физически не реализуем.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 20-01-00363А*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003. 282 с.
2. Краснов Д.В., Уткин А.В. Наблюдатель пониженного порядка для оценивания смешанных переменных в системах слежения при действии внешних несогласованных возмущений. Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. №12. С. 1682–1694.
3. Краснова С.А., Уткин А.В. Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных систем при действии внешних несогласованных возмущений. Проблемы управления. 2014. №6. С. 22–30.
4. Бусурин В.И., Горшков Б.Г., Коробков В.В. Волоконно-оптические информационно-измерительные системы. М.: Изд-во МАИ, 2012. 167 с.
5. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности Управление большими системами. 2017. Выпуск 69. С. 29–49.
6. Краснова С.А. Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей. Управление большими системами. Вып. 76. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 6–25
7. Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 37-68.
8. Luenberger D.V. Observers of multivariable systems. IEEE Trans. Autom. Control. 1966. Vol. AC-11. No. 2. P. 190–197.
9. Afri C., Andrieu V., Bako L., Dufour P. State and parameter estimation: a nonlinear Luenberger observer approach. IEEE Trans. Autom. Control. 2017. Vol. 62. No. 2. P. 973–980.
10. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables. IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50. No. 1. P. 1042–10147.

---

D.V.Krasnov, A.V.Utkin . (ICS RAS, Moscow). **Physically realizable state observers for SISO nonlinear systems with disturbances**

In a narrow formulation, the problem of synthesis of physically realizable state observers for nonlinear single input single output systems is considered. It is assumed that the plant model can be represented in a triangular form "input-output", in which there are parametric and external disturbances, and the output variable is not measured. Conditions are formulated under which it is possible to restore the output and other unmeasured variables without additional identification of the existing uncertainties. For admissible cases, a method for designing reduced robust observers with piecewise linear feedbacks is proposed.

В. А. УТКИН

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СЛЕЖЕНИЕ В НЕМИНИМАЛЬНО ФАЗНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НЕЛОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕНЕРАТОРА ЗАДАНИЯ

*Рассматривается задача слежения за заданным сигналом в линейных неминимально фазных многомерных системах в условиях сигнальной неполной информации о векторе состояния модели объекта управления и генератора заданий. В отличие от известных подходов предполагается, что на вход генератора заданий подается неизвестный сигнал, позволяющий в реальном времени изменять поведения генератора заданий. Для информационного обеспечения в реализации предлагаемых алгоритмов используются наблюдатели состояний на основе теории скользящих режимов и глубоких обратных связей.*

**Введение.** Рассматривается проблемы решения задачи слежения выходными переменными за задающими воздействиями в многомерных системах с неустойчивой нулевой динамикой. В известных подходах к решению этой задачи [1, 2] рассматривая задающие сигналы в качестве внешних возмущений, эта задача может быть сведена к задаче обеспечения инвариантности к внешним возмущениям относительно выходных переменных, в частности, в рамках теории скользящих режимов и глубоких обратных связей [3].

Следует отметить, что применительно к неминимально фазным системам возникает дополнительная задача обеспечения устойчивости (ограниченности) вектора состояний подсистемы нулевой динамики, которая имеет эффективное решение только для случая, когда задающие сигналы порождаются динамическим генератором заданий известной структуры. Различные предположения о структуре генератора задания, например в [4,5], так или иначе, сводятся к решению задачи идентификации генератора заданий. Неизменность структуры генератора заданий ограничивает класс задающих сигналов и в данной работе предложено расширение этого класса за счет подачи управляющего входа на генератор задания. Данная ситуация может быть описана как корректировка задающих сигналов в реальном времени. Тот факт, что управляющий вход генератора заданий есть постоянная величина, позволяет дать следующую трактовку работы системы: после изменения уровня управляющего входа система должна отработать это воздействие и только после этого уровень управляющего сигнала может быть изменен. В отличие от регулирования с постоянным заданием в данном случае задание порождается динамическим генератором задания с заданным постоянным управляющим сигналом на его входе.

В условиях сигнальной неопределенности в работе предложены наблюдатели для оценивания вектора состояния объекта управления и генератора задания вместе с неизвестным управляющим входом на основе наблюдателей с использованием скользящих режимов и глубоких обратных связей [6].

**Описание проблемы.** Рассматривается многомерная линейная система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y_1 = Dx, \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t), y_1(t) \in R^m$  – вектор состояния, управляющих воздействий и выходных (измеряемых и регулируемых) переменных соответственно, пара  $(A, B)$  – управляемая, пара  $(D, A)$  наблюдаемая,  $\text{rank} B = \text{rank} D = m$ .

Для системы (1) ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей асимптотическую сходимость выходной переменной  $y_1(t)$  к заданному сигналу  $\eta_1(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \quad e_1(t) = y_1(t) - \eta_1(t) \quad (2)$$

в предположении, что заданный сигнал порождается динамической моделью вида

$$\dot{w} = Ww + G\varphi(t), \quad \eta_1 = R w, \quad (3)$$



где  $w(t) \in R^l$ ,  $\eta_1(t) \in R^m$ ,  $W_{l \times l}$ ,  $G_{l \times m}$ ,  $R_{m \times l} = const$ , пара  $(R, W)$  наблюдаемая,  $\varphi = const \in R^m$  - произвольная вектор-функция времени.

Предполагается, что для измерения доступен вектор выходных переменных состояния  $y_1$  и выходная переменная генератора задания  $\eta_1(t)$ .

**Основной результат.** Приведем решение поставленной задачи слежения (2) на основе метода динамической компенсации в условиях параметрической определенности систем (1) и (3) и в предположении, что векторы  $x$ ,  $w$  и  $\varphi$  доступны для измерения.

Введем невырожденную замену переменных  $\bar{x} = x - R_0 w$ , где  $x \in R^n$ , матрица  $R_0 \in R^{n \times l}$  удовлетворяет уравнению  $DR_0 = R$ , и запишем систему (1) в виде

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + A(R_0 w + G\varphi) - R_0[Ww + G\varphi], \quad e_1 = D\bar{x}. \quad (4)$$

Задача слежения сводится к задаче стабилизации выхода системы (4).

Выберем управление в виде

$$u = K_0 \bar{x} + L_0 w + G_0 \varphi, \quad (5)$$

так, чтобы в замкнутой системе (4)–(5)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} + BL_0 w + AR_0 w - R_0 W w + (BG_0 - R_0 G) \varphi \quad (6)$$

матрица  $\bar{A}_0 = (A + BK_0)$  была гурвицевой (с произвольно назначаемым спектром в силу управляемости исходной системы), элементы матриц  $L_0$  и  $G_0$  определяются далее.

Представим вектор состояния системы (6) в виде суммы компонент  $\bar{x} = \bar{x}_s + M_0 w$ , где  $\dot{\bar{x}}_s = \bar{A}_0 \bar{x}_s$ , матрица  $M_0$  определяется далее, откуда следует

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x}_s + M_0 (Ww + G\varphi), \quad (7)$$

а уравнение (6) примет вид:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x}_s + (\bar{A}_0 M_0 + BL_0 + AR_0 - R_0 W) w + (BG_0 - R_0 G) \varphi \quad (8)$$

$$e_1 = D(\bar{x}_s + M_0 w). \quad (9)$$

Задачу слежения по выходным переменным решает выбор матриц  $M_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$ , удовлетворяющих матричным алгебраическим уравнениям, получаемых приравниванием членов уравнений (7) и (8), содержащих вектор состояний генератора задания (3) и равенство нулю коэффициента перед входами генератора заданий. Дополнительным условием является принадлежность матрицы  $M_0$  ядру выходного отображения  $D$  в уравнении (9):

$$\bar{A}_0 M_0 + BL_0 + (AR_0 - R_0 W) = M_0 W, \quad DM_0 = 0, \quad (10)$$

причем матрица  $G_0$  находится в явном виде:

$$BG_0 - R_0 G = M_0 G \Rightarrow G_0 = B^+(M_0 + R_0)G. \quad (11)$$

Выбор матриц, удовлетворяющих соотношениям (10), (11) решает задачу слежения (2)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x}_s, \quad e_1 = D\bar{x}_s. \quad (12)$$

Сделаем ряд замечаний и ограничений по применению приведенного алгоритма синтеза задачи слежения (2), которые будут сняты в данной работе:

1. Компенсация воздействия вектора  $\varphi$  с помощью комбинированной обратной связи (5) возможна тогда и только когда выполняются условия принадлежности пространств

$\text{Im} R_0 G \subset \text{Im} B$ , где  $\text{Im}(M)$  - образ матрица  $M$ . В этом случае существует матрица  $\Lambda_{m \times n}$  такая, что выполняется соотношение  $\Lambda R_0 G = I_{m \times m}$ .

Выделяется класс генераторов задания, для которых условия согласования выполняются.

2. Вообще говоря, выбор матрицы замкнутой системы  $\bar{A}_0$  определяет поведение всего вектора состояния, в то время как в задаче слежения, как правило, предъявляются требования к переходному процессу выходных переменных  $e_1(t)$ .

В предположении, что исходная система автономна [2] (или, другими словами, известен вектор относительных степеней), предложен метод автономного управления каждым выходом системы с заданным спектром замкнутой подсистемы.

3. Для реализации управления (5) требуется информация о векторе состояния системы (1) и генератора задания (3), а также произвольной вектора  $\varphi$ .

Проблема получения указанных сигналов решается с использованием наблюдателей состояния и возмущений в рамках теории скользящих режимов и глубоких обратных связей.

**Заключение.** В работе предложено расширение класса задающих воздействий за счет подачи на вход генератора заданий управляющего воздействия. Предложено решения задачи слежения в предположении, что для измерения доступны только выходные переменные на основе теории асимптотических наблюдателей на скользящих режимах и глубоких обратных связей.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 20-01-00363А*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. Уонем У. М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
3. Уткин В. А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями. Автоматика и телемеханика. 2001. №11. С. 73–94.
4. R. Marino and G.L. Santosuosso Regulation of Linear Systems With Unknown Exosystems of Uncertain Order. IEEE Trans. On Automatic Control. 2007. Vol. 52, No. 2, P. 352-359.
5. Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике. Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 62–81.
6. Краснова С. А., Уткин В.А., Михеев Ю.В. Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем. Автоматика и телемеханика. 2001. №2. С. 43 – 63.

---

V. A. Utkin (ICS RAS, Moscow). **Tracking in non-minimal phase linear systems with functional uncertainty of the generator of given signals**

The problem of tracking a given signal in linear non-minimally phase multidimensional systems under conditions of signal incomplete information about the state vector of the control object model and the task generator is considered. In contrast to the known approaches, it is assumed that an unknown signal is applied to the input of the task generator, which allows changing the behavior of the task generator in real time. State observers based on the theory of sliding modes and deep feedbacks are used for information support in the implementation of the proposed algorithms.

А. А. КАБАНОВ

(Севастопольский государственный университет, г. Севастополь)

А.В. ЗУЕВ

(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток)

В.Ф. ФИЛАРЕТОВ

(Севастопольский государственный университет, г. Севастополь,  
Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток)

А.Н. ЖИРАБОК

(Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток)

## РАЗРАБОТКА ПОДХОДА К СИНТЕЗУ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*В докладе решается задача разработки и исследования подхода к синтезу наблюдателей для оценки величин внешних возмущений в системах, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Построение искомым наблюдателей предложено осуществлять на основе решения вспомогательной задачи оптимального управления для динамической системы, в которой роль неизвестной вектор-функции, описывающей действующие возмущения, выполняет некоторое вспомогательное управление, которое должно обеспечить минимум функционалу невязки. Результаты моделирования подтвердили работоспособность синтезированных с помощью предложенного подхода наблюдателей.*

**Введение.** Задача построения наблюдателей для оценки величин внешних возмущений активно исследуется последние годы, решения получены для различных классов систем [1–4]. Один из распространенных подходов к решению этой проблемы основан на наблюдателях, работающих в скользящем режиме [3, 5]. Но существующие требования к построению указанных наблюдателей накладывают ряд ограничений на класс систем, для которых они могут быть разработаны.

В данном докладе для решения задачи оценки внешних возмущений предлагается новый подход, основанный на методах оптимального управления.

**Постановка задачи.** Рассмотрим класс технических систем, описываемых линейной моделью вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода, соответственно;  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $D \in R^{n \times q}$  и  $C \in R^{l \times n}$  – известные постоянные матрицы;  $d(t) \in R^q$  – вектор-функция, описывающая возмущения: при их отсутствии  $d(t) = 0$ , при появлении внешнего возмущения  $d(t)$  становится неизвестной функцией времени.

Пусть известна история измерений  $y(t)$  фазовых переменных  $x(t)$  системы (1) на интервале  $t \in [t_0, t_f]$ , на котором система управляется некоторым законом, который, не умаляя общности, можно представить в виде  $u(t) = G(y, t)$ .

В работе ставится задача разработки метода построения наблюдателей для величины элементов вектора  $d(t)$ . Задача состоит в нахождении по измерениям  $y(t)$  такой аппроксимации  $d_*(t, t_f)$  неизвестного возмущения, что  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} d_*(t, t_f) = d(t)$ .

**Вспомогательная задача оптимального управления.** Для решения рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для системы [6]

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az + B_v v(t) + Bu(t), & z(t_0) &= x_0, \\ y_z(t) &= Cz(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где функция  $v(t)$  рассматривается как вспомогательное управление; матрица  $B_v \in R^{n \times w}$  определяет в каких уравнениях предполагается выявлять возмущение. В случае если известна матрица  $D \in R^{n \times q}$ , то следует принять  $B_v = D$  (далее будем считать, что  $B_v = D$ ). В противном случае  $B_v$  заполняется так, что элемент  $[B_v]_{i,j} = 1$ , если предполагаем, что возмущение  $j$  возникает в уравнении  $i$ , остальные элементы заполняются нулями.

Роль неизвестной вектор-функции  $d(t)$ , описывающей внешние возмущения в (1), в системе (2) выполняет вспомогательное управление  $v(t)$ , которое выбирается так, чтобы перевести систему (2) из произвольного состояния  $z(t_0) = x_0$  в состояние  $y_z(t_f) = y(t_f)$  при  $t_f \rightarrow \infty$  и при этом минимизировать функционал невязки

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e^T Q e + v^T R v) dt \rightarrow \min_v, \quad (3)$$

где  $e(t) = y_z(t) - y(t) \in R^l$  – вектор невязки,  $Q \in R^{l \times l}$  – положительно-полуопределённая матрица;  $R \in R^{m \times m}$  – положительно определенная матрица;  $T$  – символ транспортирования.

Задача оценки величины действующего возмущения состоит в том, чтобы как можно более точно восстановить по измерениям  $y(t)$  движение  $z(t)$  вспомогательной системы (2), т.е. нужно построить оптимальное в смысле (3) управление  $v(t)$  и порождаемую им траекторию системы (2) такие, что  $\|y_z(t) - y(t)\| \rightarrow 0$ ,  $\|v(t) - d(t)\| \rightarrow 0$  при  $t_f \rightarrow \infty$ .

**Решение вспомогательной задачи оптимального управления.** По сути задача (2), (3) является задачей построения линейно-квадратичного управления для следящей системы с возмущениями. Приведем ее решение.

Для задачи (2), (3) запишем Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (z - x)^T C^T Q C (z - x) + \frac{1}{2} v^T R v + \lambda^T (Az + Dv + Bu),$$

определим оптимальное управление

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \Rightarrow Rv + D^T \lambda = 0 \Rightarrow v = -R^{-1} D^T \lambda, \quad (4)$$

а также составим уравнения для сопряженной переменной и переменной состояния:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Rightarrow Az + Dv + Bu = Az - DR^{-1} D^T \lambda + Bu, \quad z(t_0) = x_0, \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z} \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda - C^T Q C z + C^T Q C x. \end{aligned}$$

Последнее соотношение можно записать в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -DR^{-1} D^T \\ -C^T Q C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ C^T Q C x \end{bmatrix} y. \quad (5)$$

Рассмотрим общий случай ненулевых граничных условий  $z(t_0) \neq 0$ ,  $z(t_f) \neq 0$ . С учетом линейности системы (5) предположим, что состояние и сопряженная переменная линейно связаны зависимостью вида

$$z(t) = M(t) \lambda(t) + g(t), \quad (6)$$

где  $M(t)$  – невырожденная матрица,  $g(t)$  – некоторая вектор-функция. Отметим, преобразование (6) называют преобразованием Риккати, оно эффективно при вычислении плохо обусловленных двухточечных краевых задач [7]. Аналогичный подход используется в [8, 9] для специфических задач терминального управления.

Подставим (6) в (5) и получим

$$v(t) = -R^{-1}D^T M(t)^{-1}(z(t) - g(t)),$$

$$(-\dot{M}(t) + AM(t) + M(t)A^T - DR^{-1}D^T + M(t)C^T QCM(t))\lambda(t) =$$

$$= \dot{g}(t) - Ag(t) - Bu(t) - M(t)C^T QCg(t) + M(t)C^T Qy(t).$$

Перенеся члены второго уравнения в левую часть, имеем

$$(-\dot{M}(t) + AM(t) + M(t)A^T - DR^{-1}D^T + M(t)C^T QCM(t))\lambda(t) -$$

$$\dot{g}(t) - Ag(t) - Bu(t) - M(t)C^T QCg(t) + M(t)C^T Qy(t) = 0.$$

Последнее соотношения должно быть справедливо для любого значения  $\lambda(t)$ , что приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= AM(t) + M(t)A^T - DR^{-1}D^T + M(t)C^T QCM(t), \\ \dot{g}(t) &= Ag(t) + Bu(t) + M(t)C^T QCg(t) - M(t)C^T Qy(t). \end{aligned} \quad (7)$$

При  $t = t_0$  из (6) имеем  $z(t_0) = M(t_0)\lambda(t_0) + g(t_0)$ , а поскольку  $\lambda(t_0)$  не известна, то для удовлетворения начальных условий нужно принять  $M(t_0) = 0$ ,  $z(t_0) = g(t_0)$ .

При  $t = t_f$  из (6) имеем  $z(t_f) = M(t_f)\lambda(t_f) + g(t_f)$ , а поскольку  $\lambda(t_f)$  также является неизвестным, то для удовлетворения граничных условий также следует принять  $M(t_f) = 0$ ,  $z(t_f) = g(t_f)$ .

Подставляя (7) в (4), окончательно для управления  $v(t)$  имеем:

$$v(t) = -R^{-1}D^T M(t)^{-1}(z(t) - g(t)). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (2), получаем следующее выражение для искомого наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) - DR^{-1}D^T M(t)^{-1}(z(t) - g(t)) + Bu(t), \quad z(t_0) = x_0, \\ y_z(t) &= Cz(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $M(t)$  и  $g(t)$  определяются как решение уравнений (7) с начальными условиями  $M(t_0) = 0$ ,  $z(t_0) = g(t_0)$ . Устойчивость наблюдателя (9) может быть обеспечена за счет введения обратной связи по сигналу  $e(t) = y_z(t) - y(t)$ .

**Результаты моделирования.** Предложенный метод демонстрируется на решении задачи оценки величины внешнего моментного воздействия, действующего на колесо мобильного робота [10]. На рис. 1 приведены результаты оценки величины возникающего возмущения предложенным наблюдателем, а на рис. 2 – графики состояния системы и диагностического наблюдателя. Анализ полученных результатов показывает работоспособность предложенного метода.

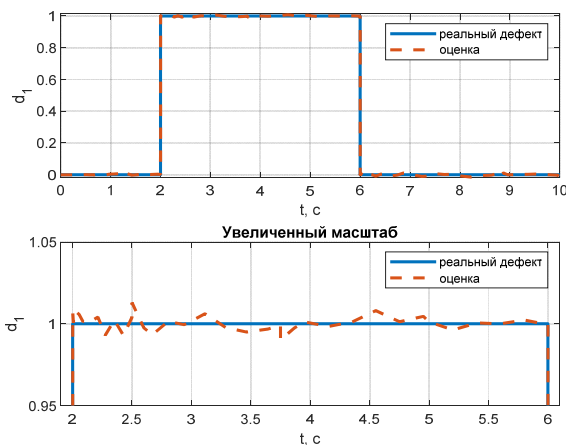


Рис.1. Результат работы наблюдателя при появлении внешнего моментного воздействия в форме прямоугольного импульса

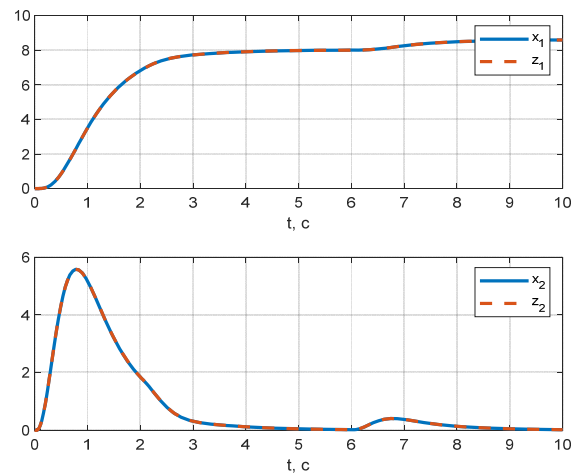


Рис.2. Графики состояния системы и диагностического наблюдателя

**Заключение.** В работе решена задача идентификации возмущений в системах, описываемых линейными динамическими моделями. В отличие от популярных методов решения этой задачи предлагаемый подход позволяет расширить класс систем, для которых задача идентификации может быть решена.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00392, <https://rscf.ru/project/22-19-00392/>.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Edwards C., Spurgeon S. On the development of discontinuous observers // *Int. J. Control*. 1994. Vol. 59. P. 1211–1229.
2. Hou M., Pugh A.C., Muller P.C. Disturbance decoupled functional observers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. Vol. 44. Iss. 2. P. 382–386.
3. Yan X., Edwards C. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observers // *Automatica*. 2007. Vol. 43. P. 1605–1614.
4. Nguyen A.N., Basit B.A., Choi H.H., Jung J.-W. Disturbance Attenuation for Surface-Mounted PMSM Drives Using Nonlinear Disturbance Observer-Based Sliding Mode Control // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 86345–86356.
5. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // *Автоматика и телемеханика*. 2020. № 2. С. 18–35.
6. Кабанов А.А., Крамарь В.А., Зуев А. В., Филаретов В.Ф., Жирабок А.Н. Идентификация дефектов в приводах на основе методов оптимального управления // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2022. № 1. С. 192–204.
7. Mufti I.H., Chow C.K., Stock F.T. Solution of ill-conditioned linear two-point boundary value problems by the Riccati transformation // *SIAM Rev.* 1969. Vol.11. No.4. P.616–619.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши *Прикладная теория оптимального управления*. М.: Мир, 1972. 544 с.
9. Naidu D.S. *Optimal control systems*. Electrical Engineering Handbook, Florida, Boca Raton: CRC Press, 2003. 275 p.
10. Kim S., Kwon S. Nonlinear Optimal Control Design for Underactuated Two-Wheeled Inverted Pendulum Mobile Platform // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2017. Vol. 22. Iss. 6. P. 2803–2808.

---

A. A. Kabanov (Sevastopol State University, Sevastopol, Russia), A. V. Zuev (Institute of Marine Technology Problems FEB RAS, Vladivostok, Russia), V. F. Filaretov (Sevastopol State University, Sevastopol, Russia, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia), A. N. Zhirabok (Far East Federal University, Vladivostok, Russia). **The development of an approach to the synthesis of observers for the evaluation of disturbances in linear systems based on optimal control methods**

The report solves the problem of developing and researching an approach to the synthesis of observers for estimating the magnitude of external disturbances in systems described by linear differential equations. The construction of the desired observers is proposed to be carried out on the basis of solving an auxiliary optimal control problem for a dynamic system in which the role of an unknown vector function describing the active perturbations is performed by some auxiliary control, which should provide a minimum to the residual functional. The simulation results confirmed the operability of the observers synthesized using the proposed approach.

## Секция 7

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ СПБГУ:  
ОТ КИБЕРНЕТИКИ К ИСКУССТВЕННОМУ ИНТЕЛЛЕКТУ

М.М. АНИКУШИН, А.О. РОМАНОВ  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, МУЛЬТИУСТОЙЧИВОСТЬ И СКРЫТЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

*Рассматривается подход к построению инерциальных многообразий для бесконечномерных динамических систем на основе знакопеременных квадратичных функционалов Ляпунова. В приложениях для уравнений с запаздыванием нейтрального типа построение таких функционалов можно проделать с помощью недавно полученного варианта частотной теоремы. Это даёт общий взгляд на серию работ по уравнениям с малым запаздыванием Ю.А. Рябова, Р.Д. Драйвера и К. Чиконе и их недавнему обобщению С. Чэнем и Дж. Шенем, а также развитие работ Р.А. Смита.*

*Обсуждаются приложения теории для аналитико-численного исследования прикладных моделей с запаздыванием. В докладе рассмотрены двумерные инерциальные многообразия в модели запаздывающего осциллятора Суареса-Шопфа для Эль-Ниньо при параметрах, для которых в результате гомоклинических бифуркаций возникают скрытые и неустойчивые периодические орбиты, а также даются следствия такого исследования, приводящие к обнаружению асинхронных периодических колебаний (как скрытых, так и самовозбуждающихся) в модели Дж. Ву и Х. Ся для кольцевого массива линий передач без потерь.*

**Введение.** Инерциальные многообразия, будучи конечномерными инвариантными подмногообразиями в фазовом пространстве, экспоненциально быстро притягивающими все траектории системы (и, в частности, содержащими глобальный аттрактор), играют важную роль в исследовании бесконечномерных систем. В нашей работе [1] предлагается абстрактный подход к построению инерциальных многообразий на основании использования знакопеременных квадратичных функционалов Ляпунова. В приложениях такие функционалы строятся с помощью различных вариантов частотной теоремы [2,3], которая предоставляет эффективно проверяемые (частотные) условия существования квадратичных функционалов. Во многих частных случаях эти условия улучшают уже известные и полученные из других соображений условия. Мы отсылаем читателя к нашим работам [4,5,6,7] для различных приложений.

Недавно полученный одним из авторов вариант частотной теоремы [2] позволяет исследовать уравнения с запаздыванием нейтрального типа. В частности, такой подход даёт единый взгляд на результаты работ Ю.А. Рябова, Р.Д. Драйвера и К. Чиконе [8] по уравнениям с малым запаздыванием и их недавнего развития в работе С. Чэня и Дж. Шеня [9] для уравнений нейтрального типа. Общий взгляд на эти результаты, представленный в [2], показывает, что их условия вытекают из частотного неравенства Р.А. Смита [10], результаты которого также включаются в наш подход.

В докладе рассматриваются приложения общей теории к аналитико-численному исследованию некоторых прикладных моделей с запаздыванием, где возникает мультиустойчивость и скрытые колебания. Мы отсылаем читателя к обзорам Д. Дудковского и др. [11], а также Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова [12] для обсуждения теории скрытых колебаний и её приложений к исследованию конечномерных систем.

В частности, наша абстрактная теория может быть применена для обнаружения двумерных инерциальных многообразий в модели Суареса-Шопфа для Эль-Ниньо, что позволяет исследо-

вать возникновение в системе скрытых и неустойчивых периодических орбит в результате гомоклинических бифуркаций, а также влияния малого периодического шума на модель. Далее, опыт исследования скалярной модели Суареса-Шопфа можно применить к выявлению асинхронных периодических (как скрытых, так и самовозбуждающихся) колебаний в модели Дж. Ву и Х. Ся для кольцевого массива линий передач без потерь, описываемой системой скалярных уравнений с запаздыванием нейтрального типа.

**Описание прикладных моделей.** Рассмотрим осциллятор Суареса-Шопфа, описываемый скалярным уравнением с запаздыванием [13]:

$$\dot{x}(t) = x(t) - \alpha x(t - \tau) - x^3(t),$$

где  $\alpha \in (0,1)$  и  $\tau > 0$  суть параметры. Нас будет интересовать область в пространстве параметров, при которых пара симметричных состояний равновесия устойчива (область ниже синей кривой на Рис. 1). Оказывается, что с помощью численной оценки области диссипативности (грубая аналитическая оценка недостаточна – требуется построение более тонких инвариантных областей) можно показать существование двумерных инерциальных многообразий в модели. Это дает подтверждение существованию продолжения двух скрытых кривых (оранжевая и зеленая кривые на Рис. 1), существование которых можно строго обосновать в малой окрестности параметра  $(\tau, \alpha) = (1,1)$  (см. [7]). В области между зеленой и синей кривыми в системе существует устойчивая симметрическая периодическая орбита, ограничивающая глобальный аттрактор и притягивающая траектории с достаточно далекими начальными данными. На оранжевой кривой возникает гомоклиническая траектория, которая бифурцирует либо в одну неустойчивую симметрическую периодическую орбиту (при движении к зеленой кривой), что делает притягивающий цикл скрытым от состояний равновесия, либо в пару неустойчивых периодических орбит (при движении к синей кривой), что делает притягивающий цикл самовозбуждающимся из нулевого состояния равновесия. На зеленой кривой симметричные устойчивая и неустойчивая орбиты сталкиваются (седлоузловая бифуркация), что приводит к их исчезновению и градиентному поведению в области ниже зеленой кривой.

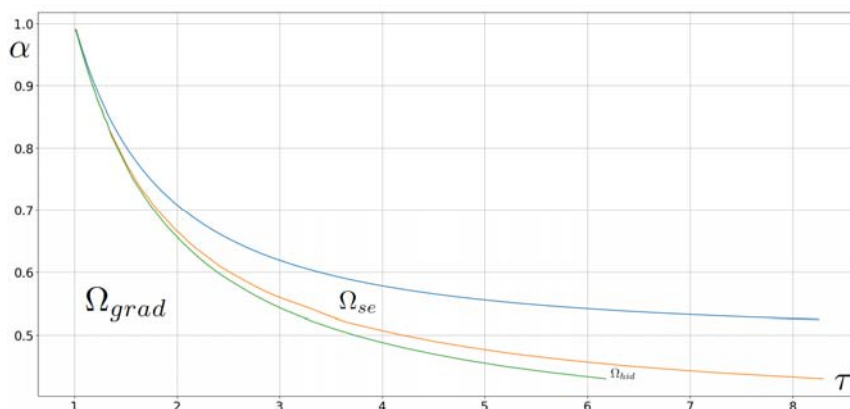


Рис 1. Кривые, разграничивающие области в пространстве параметров модели Суареса-Шопфа. Взято из [7]

Опыт исследования осциллятора Суареса-Шопфа можно применить к изучению модели кольцевого массива линий передач без потерь, предложенной в работе Дж. Ву и Х. Ся [14]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D(q)x_t^k] &= -ax^k(t) - bqx^k(t - \tau) - g(x^k(t)) + qg(x^k(t - \tau)) \\ &+ dD(q)[x_t^{k+1} - 2x_t^k + x_t^{k-1}], \text{ где } k=1 \dots N \pmod{N}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau, b, q, d > 0$  суть положительные параметры, знак параметра  $a$  не предполагается определенным и  $D(q)\phi = \phi(0) - q\phi(-\tau)$  для всякой непрерывной на отрезке  $[-\tau, 0]$  функции  $\phi$ . Для  $g(x) = x^3$  и малых  $q$  и  $d$  эта система близка к системе из  $N$  не связанных осцилляторов Суареса-Шопфа. Использование этой идеи приводит к обнаружению в модели скрытых или самовозбуждающихся асинхронных колебаний. Вопрос о возможности существования асинхронных колебаний в системе был поставлен в монографии С. Го и Дж. Ву [15]. Отметим, од-



нако, что физически значимые параметры в модели должны удовлетворять определенным соотношениям, которые не выполняются для найденных нами параметров. Тем не менее, наши результаты показывают нетривиальность вопроса о существовании асинхронных колебаний для физически значимых параметров, а также их возможной связью с мультиустойчивостью и скрытыми колебаниями в системе.

**Заключение.** Теория инерциальных многообразий в синтезе с численными методами позволяет исследовать сложное поведение в бесконечномерных системах, в частности возникающих из уравнений с запаздыванием, и сформировать гипотезы для исследования моделей более тонкими аналитическими методами.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ (проект 22-11-00172)*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Anikushin M.M. Inertial manifolds and foliations for asymptotically compact cocycles in Banach spaces. arXiv preprint, arXiv:2012.03821v3 (2022)
2. Anikushin M.M. Frequency theorem and inertial manifolds for neutral delay equations. arXiv preprint, arXiv:2003.12499v5 (2022)
3. Anikushin M.M. Frequency theorem for parabolic equations and its relation to inertial manifolds theory. J. Math. Anal. Appl. 505(1) 125454 (2021)
4. Anikushin M.M. Nonlinear semigroups for delay equations in Hilbert spaces, inertial manifolds and dimension estimates. Differ. Uravn. Protsessy Upr. (2022) (to appear)
5. Anikushin M.M. Almost automorphic dynamics in almost periodic cocycles with one-dimensional inertial manifold. Differ. Uravn. Protsessy Upr., 2 (2021) 13–48 (in Russian)
6. Anikushin M. M. A non-local reduction principle for cocycles in Hilbert spaces. J. Differ. Equations, 269(9),6699–6731 (2020)
7. Anikushin M.M., Romanov A.O. Hidden and unstable periodic orbits as a result of homoclinic bifurcations in the Suarez-Schopf delayed oscillator and the irregularity of ENSO. arXiv preprint, arXiv:2102.11711v3 (2022)
8. Chicone C. Inertial and slow manifolds for delay equations with small delays. J.Differ. Equations. 190:2 364–406 (2003)
9. Chen S., Shen J. Smooth inertial manifolds for neutral differential equations with small delays. J. Dyn. Differ. Equ. (2021)
10. Smith R.A. Poincaré-Bendixson theory for certain retarded functional-differential equations. Differ. Integral Equ. 5(1) 213–240 (1992)
11. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems. Phys. Rep. 637 1–50 (2016)
12. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. Int. J. Bifurcat. Chaos. 23:011330002 (2013)
13. Suarez M.J., Schopf P.S. A delayed action oscillator for ENSO. J. Atmos. Sci. 45(21) 3283–3287 (1988)
14. Wu J., Xia H. Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines. J. Differ. Equations, 1 247–278 (1996)
15. Guo S., Wu J. Bifurcation Theory of Functional Differential Equations, Springer (2013)

---

M.M.Anikushin, A.O.Romanov (St. Petersburg State University, St. Petersburg). **Inertial manifolds, multistability and hidden oscillations in neutral delay equations**

We consider an approach for the construction of inertial manifolds for infinite-dimensional dynamical systems based on indefinite quadratic Lyapunov functionals. In applications to neutral delay equations, such functionals can be constructed with the aid of a recently obtained version of the Frequency Theorem. This provides a unified view on a series of works on equations with small delay due to Yu.A. Ryabov, R.D. Driver, C. Chicone and their recent generalization by S. Chen and J. Shen, and also a series of papers by R.A. Smith. We discuss applications of the abstract theory for analytical-numerical studying of applied models with delay. Namely, we give analytical-numerical evidence for the existence of two-dimensional inertial manifolds in the Suarez-Schopf delayed oscillator for ENSO in the region, where hidden and unstable periodic orbits appear as a result of homoclinic bifurcations. Moreover, we further develop these observations to localize asynchronous periodic oscillations (both hidden and self-excited) in the model of J. Wu and H. Xia for a ring array of coupled lossless transmission lines.

А.Л. ФРАДКОВ

(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский государственный университет)

**РОЛЬ МАТЕМАТИКОВ В РАЗВИТИИ КИБЕРНЕТИКИ И ИСКУССТВЕННОГО  
ИНТЕЛЛЕКТА В ЛЕНИНГРАДЕ – САНКТ-ПЕТЕРБУРГЕ:  
ОТ Л.В.КАНТОРОВИЧА И В.А.ЯКУБОВИЧА ДО НАШИХ ДНЕЙ**

*В докладе дается краткое представление о картине зарождения кибернетики и искусственного интеллекта в мире и в СССР в 1940-1950-х гг. Более подробно описывается бурное развитие этих областей в 1950–1960-х гг. в СССР и, в частности, в Ленинграде, начиная с создания в 1956 году секции кибернетики ленинградского Дома Ученых, первым председателем которой стал будущий лауреат нобелевской премии академик АН СССР Леонид Витальевич Канторович.*

*Особое внимание уделяется работам Владимира Андреевича Якубовича и его научной школы по машинному обучению, распознаванию, адаптивным системам, интеллектуальным роботам.*

*Обсуждается роль других математических направлений, возглавлявшихся Г.С. Цейтиным, С.Ю. Масловым, Г.А. Леоновым, В.Ф. Демьяновым, в том числе метод Л.М.Брэгмана и метод MDM (Митчелла-Демьянова-Малоземова).*

**Введение.** В докладе дается представление о развитии кибернетики и искусственного интеллекта в мире и в СССР. В рамках МКПУ дается анонс. Полностью доклад будет сделан 13.10.2022 г. в 19.00 на заседании семинара СПбГУ по оптимизации и машинному обучению (руководитель – В.Н.Малоземов). Семинар проходит дистанционно в Skype (ссылка на группу: <https://join.skype.com/jhGNT8gpLJWz>). Будет доступна запись. Приглашаются все желающие.

Более подробно описывается бурное развитие кибернетики и искусственного интеллекта в 1950-х-1960-х гг в Ленинграде (Санкт-Петербурге), начиная с создания в 1956 году секции кибернетики ленинградского Дома Ученых, первым председателем которой стал удивительный лауреат нобелевской премии академик АН СССР Л.В. Канторович. Организационную деятельность секции вел д.т.н. Л.П. Крайзмер. Это было первое в СССР общественное объединение, посвященное кибернетике.

Конец 1950-х годов и 1960-е годы были годами общественного энтузиазма, вызванного теплотой: большей открытостью и свободами в СССР. Эти годы стали годами бурного развития кибернетики. Кибернетика становилась модным термином, повсюду велись лекции и дискуссии о кибернетике. Новые журналы, новые кафедры, новые семинары по кибернетике были организованы во многих университетах как в СССР, так и за рубежом. Было общее чувство, что кибернетика способна произвести революционные изменения в обществе не только в науке.

В 1956 году в Ленинградский университет пришел 30-летний В.А. Якубович. В 1959 году он организовал лабораторию теоретической кибернетики, на базе которой в 1970 г. была создана кафедра теоретической кибернетики. В том же 1970 году была создана кафедра исследования операций. Ее первым заведующим стал профессор М.К. Гавурин, который по предложению декана перешел на новую кафедру с поста заведующего кафедрой вычислительной математики (которая была создана на матмехе по инициативе Л.В. Канторовича). На вновь созданную кафедру пошли работать, кроме М. К. Гавурина, еще некоторые сотрудники кафедры вычислительной математики, в частности, А. М. Вершик, и группа специалистов по наилучшим приближениям: В. Н. Малоземов (лидер этой группы), В. М. Белых и В. А. Даугавет. На новую кафедру перешел И. В. Романовский, который продолжал заведовать лабораторией в НИИММе и привлек к преподаванию ряд сотрудников лаборатории. Среди них особенно большую роль играл выпускник упоминавшейся специализации Л. М. Брэгман, принявший у И. В. Романовского курс экстремальных задач и существенно обновивший его программу (подробности см. на сайте кафедры исследования операций <http://kio-math.spbu.ru/>). В ЛГУ в 1960-е работала плеяда блестящих математиков в различных областях кибернетики и искусственного интеллекта. Упомянем только математических логиков: Г.С. Цейтин (1959) – машинный перевод текстов, С.Ю. Маслов (1964) – автоматическое доказательство теорем.

Особую роль сыграли работы В.А. Якубовича и его научной школы по машинному обучению, распознаванию, адаптивным системам, интеллектуальным роботам. В докладе кратко излагаются ключевые математические результаты пионерских работ В.А.Якубовича [1–3] в области искусственного интеллекта (по машинному обучению, распознаванию, адаптивным системам, роботам). По этой тематике В.А. Якубовичем было опубликовано 45 статей с 1963 по 1977 г., всего

105 статей в 1963–1977 гг., из них 55 статей без соавторов. В числе первых монографий в СССР по распознаванию, обучению и адаптивному управлению были книги [4–5].

На кафедре теоретической кибернетики были предложены оригинальные алгоритмы отделения точки и многогранника, используемые для распознавания и машинного обучения, в частности алгоритм Б.Н. Козинца [6]. Почти в то же время на кафедре исследования операций также был предложен оригинальный алгоритм решения этой задачи – метод МДМ (Митчелла-Демьянова-Малоземова) [7–8].

Значительную роль сыграл метод поиска пересечения системы выпуклых множеств, предложенный Л.В. Брэгманом в 1965 году [9]. Заметим, что статья [9] была представлена в журнал Доклады АН СССР Л.В. Канторовичем. В последующей статье [10] Л.М. Брэгман обобщил свой метод и ввел полезную при доказательстве функцию – меру расстояния до решения. В дальнейшем эта функция стала называться дивергенцией Брэгмана (Bregman divergence). Метод Брэгмана (Bregman method) в последние годы нашел многочисленные применения в машинном обучении, решении численных задач функционального анализа, обработки изображений, данных томографии, геофизических данных и т.д. Число ссылок на статью [10] в Скопусе уже превысило 1500, а число статей с «именным» цитированием Bregman в заголовке статьи в сентябре 2022 г. составило 915 статей. Отметим, что число именных цитирований нобелевского лауреата Л.В. Канторовича составляет 1177 статей.

Подводя итог, можно сказать, что работы ученых математико-механического факультета СПбГУ (ЛГУ) внесли значительный вклад в развитие кибернетики и искусственного интеллекта в России и в мире. Дополнительные сведения о них можно найти в работах [11–16].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А. «Обучение машин распознаванию образов» Методы вычислений, II, Изд-во ЛГУ, 1963. (Вестник СПб университета, Математика, Механика, Астрономия, Ч. I 2021, Т.8, Вып.4, С.625-639, Ч. II – 2022, Т.9, Вып.1, С.94-112)
2. Якубович В.А. . Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств ДАН СССР. 1966. Т.166. №6. С.1308--1312.
3. Якубович В.А. К теории адаптивных систем // ДАН СССР, 1968, No.3. С.518—522.
4. Фомин В.Н. Математическая теория обучающихся опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ. 1976.
5. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
6. Козинец Б.Н. Об одном алгоритме обучения линейного перцептрона, Выч.техника и вопросы программирования 1964
7. Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника // Вестник ЛГУ. 1971. № 19. С. 38-45.
8. Малозёмов В. Н. МДМ методу — 40 лет. Вестник Сыктывкарского ун-та, 15, 2012.
9. Брэгман Л. М. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования Докл. АН СССР, 1965, 162:3, 487–490. (предст. Л.В.Канторович).
10. Брэгман Л. М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. ЖВМ и МФ, 1967, 7:3, 620–631.
11. Fradkov A.L. Early History of Machine Learning. IFAC-PapersOnLine, Volume 53, Issue 2, 2020, pp.1385-1390.
12. Фрадков А.Л. Машинное обучение и искусственный интеллект в работах В.А.Якубовича. Вестник СПб университета, Математика, Механика, Астрономия, 2021,Т.8, Вып.4., С.620-624.
13. Фрадков А.Л. В.А. Якубович - основоположник кибернетики и искусственного интеллекта в Ленинграде-Санкт-Петербурге (видеозапись доклада на Семинаре СПбМО по истории математики 17.06.2021 18:00, СПб) [http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=30909&option\\_lang=](http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=30909&option_lang=) (Дата обращения 18.10.2021).
14. Lipkovich M. Yakubovich's method of recursive objective inequalities in machine learning. IFAC-PapersOnLine, Vol. 55, Is. 12, 2022.
15. Fradkov A.L. Lyapunov-Bregman functions for speed-gradient adaptive control of nonlinear time-varying systems. IFAC PapersOnLine Vol. 55, Is. 12, (2022), pp. 544-548.
16. Сайт семинара В.Н. Малоземова по оптимизации и машинному обучению (записи докладов, книги, лекции и др. материалы) <http://oml.cmlaboratory.com/>

A.L. Fradkov (IPME RAS, St. Petersburg State University, St. Petersburg). **The role of mathematics in the development of cybernetics and artificial intelligence in Leningrad - Saint Petersburg: from L.V.Kantorovich and V.A.Yakubovich to the present days**

The report gives a brief idea of the picture of the emergence of cybernetics and artificial intelligence in the world and in the USSR in the 1940s-1950s. The rapid development of these areas in the 1950s-1960s in the USSR and, in particular, in Leningrad (Academician of the Academy of Sciences of the USSR Leonid Vitalievich Kantorovich. Particular attention is paid to the works of Vladimir Andreevich Yakubovich and his scientific school on machine learning, pattern recognition, adaptive systems, intelligent robots. The role of other mathematical directions, headed by G.S. Tseitin, S.Yu. Maslov, G.A. Leonov, V.F. Demyanov, including the method of L.M. Bregman and the MDM method (Mitchell-Demyanov-Malozemov).

И. Г. БУРОВА, Ю. К. ДЕМЬЯНОВИЧ  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

## МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ И СЖАТИЕ ЦИФРОВЫХ ПОТОКОВ

*Качественная и быстрая обработка потоков числовой информации в современном мире невозможна без участия в этом процессе элементов искусственного интеллекта и технологий машинного обучения. Обработка числовой информации – это неотъемлемая часть процесса аппроксимации функций, решения многих задач и различных управлений.*

*Среди задач, связанных с решением динамических систем, следует особо выделить в решения краевых задач, в том числе интегро-дифференциальных уравнений, систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, как первого, так и второго рода.*

Задача адаптивного сжатия цифрового потока  $u = \{u_0, u_1, \dots, u_{M+1}\}$ , ассоциированного с сеткой узлов  $\Xi: \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{M+1}$  всегда остается актуальной. При этом сжимаемый цифровой поток можно считать сеточной функцией,  $u_i = u(\xi_i)$ . Сжатие производится таким образом, чтобы по полученному результату можно было восстановить исходный цифровой поток с заданной точностью. Сжатие обычно сводится к удалению ряда узлов сетки вместе с соответствующими значениями сеточной функции. Критерии точности могут быть различными, но они всегда связаны с аппроксимационным аппаратом восстановления. Если  $U$  — множество однотипных потоков, то естественно использовать обучаемую систему  $R$ . Обучение этой системы на небольшом числе потоков позволяет получить такое укрупнение сетки, которое дает требуемую точность для всех потоков множества  $U$ . Это приводит к значительной экономии ресурсов вычислительной системы.

Предположим, что система  $R$  имеет входы  $r_s, s = 0, 1, \dots, n$ . Вход  $r_0$  предназначен для вектора параметров ("весов"), а остальные входы  $r_{s'}$  — для сжимаемых потоков,  $s' = 1, \dots, n$ . Процесс обучения системы  $R$  состоит в том, что на ее вход подается группа из  $n$  потоков в параллельном режиме. Результатом обучения является сетка  $\{x_j\}, j = 0, 1, \dots, K + 1$ , такая что  $X \subset \Xi$ . Роль пороговой функции играет критерий точности, который в общем случае формулируется в терминах псевдомеры (см. [1]).

Опишем кратко автономную работу одного модуля ("нейрона")  $N$  системы  $R$ , а затем поясним, как они взаимодействуют друг с другом для получения "весовых параметров" системы, т.е. узлов сетки  $X$ . Итак, исходными данными для модуля ("нейрона")  $N$  служат вектор параметров ("весов")  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M+1}\}$  и вектор  $u \in U$ . Результатом работы модуля являются сетка  $X$  и сужение функции  $u(\xi)$  на эту сетку.

Для конструирования модуля  $N$  используем алгоритм, представленный доказательством теоремы 1 из работы [1]. С помощью этого алгоритма по исходным данным  $\Xi$  и  $u$  рекуррентно (шаг за шагом) получим сетку  $X$ , которая является результатом при работе модуля в автономном режиме.

Теперь будем считать, что система  $R$  состоит из  $n$  параллельно работающих модулей ("нейронов")  $N_s, s = 1, 2, \dots, n$ . Будем считать, что множество  $U$  состоит из векторов вида  $u = \{u_0, u_1, \dots, u_{M+1}\}$ . Пусть в каждый модуль загружен вектор "весов"  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M+1}\}$ . Предположим, что из множества  $U$  выбраны  $n$  векторов  $u^{(s)}, s = 1, 2, \dots, n$ . На  $s$ -м модуле будем обрабатывать вектор  $u^{(s)}$  так, чтобы шаги обработки были синхронизированы, т.е.  $i$ -й шаг проводился на всех модулях одновременно. В результате  $i$ -го шага в каждом модуле вырабатывается своя версия значения  $i$ -го узла сетки  $X$ . После  $i$ -го шага модули обмениваются результатами (т.е. упомянутыми версиями) и наименьший из результатов принимается за очередной узел сетки  $X$ . После окончания процесса параллельной обработки рассматриваемых  $n$  потоков считается, что обучение закончено.

Введем необходимые обозначения и сформулируем соответствующие утверждения.

Рассмотрим сетку

$$\Xi: a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = b.$$

Пусть  $c = \xi_i, d = \xi_j, 0 \leq i \leq j \leq M + 1$ . Введем обозначение

$$[[c, d]] = \{\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_j\}. \quad (1)$$

В случае, когда  $e \in \Xi, e = \xi_i, i \leq M$ , положим  $e^+ = \xi_{i+1}$ .

Дискретной псевдомерой назовем функцию множества  $f([[c, d]])$ , определенную на множествах  $[[c, d]]$  вида (1) и обладающую свойствами:

$$f([[c, d]]) \geq 0, f([[c, c]]) = 0, f([[c, d]]) \geq f([[c', d']]) \forall [[c', d']] \subset [[c, d]].$$

Пусть  $\varepsilon^* = \max_{i \in \{0, 1, \dots, M\}} f([\xi_i, \xi_i^+])$ ,  $\varepsilon^{**} = f([[a, b]])$ .

**Теорема 1.** Для любого  $\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**})$  существует натуральное число  $K \leq M$  и сетка  $X : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{K+1} = b$ ,

такие что

$$X \subset \Xi, f([[x_s, x_{s+1}]]) \leq \varepsilon < f([[x_s, x_{s+1}^+]]) \forall s \in \{0, 1, \dots, K-1\}, f([[x_K, b]]) \leq \varepsilon.$$

При этом существует рекуррентный (пошаговый) алгоритм последовательного отыскания узлов сетки  $X$ .

Пусть  $N(f)$  и  $N_{comp} = N_{comp}(f)$  — количество вычислений дискретной псевдомеры  $f$  и количество сравнений в рассматриваемом алгоритме (отметим, что реализация перечисленных операций включают операции присваивания тем или иным вспомогательным переменным. Отдельный учет операций присваивания в данной работе не производится).

**Теорема 2.** Алгоритм для построения адаптивной сетки  $X$  имеет следующие свойства

$$N(f) = N_{comp}(f) = K + M + 2.$$

Для любого отрезка  $[c, d]$  из промежутка  $[a, b]$  рассмотрим отображение  $f_0 : [c, d] \rightarrow R^1$ , обладающее следующими свойствами:

$$f_0([c, d]) \geq 0 \forall [c, d] \subset [a, b], f_0([c, c]) = 0 \forall c \in [a, b], \quad (2)$$

$$f_0([c', d']) \leq f_0([c, d]) \forall [c', d'] \subset [c, d]. \quad (3)$$

Кроме того, предположим, что при любом  $c \in [a, b]$  функция  $\varphi_c(x) = f([c, x])$  аргумента  $x \in [c, b)$  непрерывна:

$$\varphi_c(x-0) = \varphi_c(x+0) \forall x \in [c, b) \forall c \in [a, b]. \quad (4)$$

Отображение  $f_0$  со свойствами (2)–(4) будем называть *непрерывной псевдомерой* на отрезке  $[a, b]$ . Пусть

$$\varepsilon_* = \max_{\xi \in [a, b^-]} f_0([\xi, \xi^+]), \varepsilon_{**} = f_0([a, b]). \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если выполнены предположения (2)–(5), то для любого  $\varepsilon \in (\varepsilon_*, \varepsilon_{**})$  существует натуральное число  $K_0 \leq M$  и сетка  $Y \subset [a, b]$ ,

$$Y : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{K_0} < y_{K_0+1} = b$$

со свойствами

$$f_0([y_s, y_{s+1}]) = \varepsilon \quad \forall s \in \{0, 1, \dots, K_0 - 1\}, f_0([y_{K_0}, b]) \leq \varepsilon.$$

В заключение заметим, что критерии (пороговые функции) в различных модулях могут быть различными. Эта методика применяется для обработки информации, полученной в результате решения уравнений и динамических систем ([2]).

Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы: НШ-4196.2022.1.1., гранта «Современные аналитико-численные методы и искусственный интеллект для анализа регулярной и хаотической динамики» ID Pure 92424538

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dem'yanovich Yuri K. On adaptive Haar approximations of random flows. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 15 P. 72- 79.
2. Burova, I.G. Application local polynomial and non-polynomial splines of the third order of approximation for the construction of the numerical solution of the Volterra integral equation of the second kind. *WSEAS Transactions on Mathematics*. 2021. Vol.20. P. 9-23.

---

I. G. Burova, Yu. K. Dem'yanovich (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia). **Machine Learning and Digital Stream Compression**

In the modern world it is impossible to do high-quality and fast processing of numerical information flows without artificial intelligence and machine learning technologies. The treatment of numerical information is an important part of the approximation of functions. The mentioned process is needed to solve various control problems. Among the problems associated with the solution of dynamic systems, it should be highlighted the solution of boundary value problems. This also includes the solution of integro-differential equations and the solution of Fredholm integral equations of the first and second kind.

The problem of adaptive compression of the digital flow  $u = \{u_0, u_1, \dots, u_{M+1}\}$  associated with the grid of nodes  $\Xi: \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{M+1}$  is always relevant. In this case, the compressible digital flow can be considered as a grid function,  $u_i = u(\xi_i)$ . Such compression is performed in a such way that, based on the result obtained, it is possible to restore the original digital flow with a given accuracy. Compression is usually reduced to the removal of a number of grid nodes and the corresponding values of the grid function. Accuracy criteria can be different, but they are always associated with the recovery approximation apparatus. Let the set  $U$  consist of flows of the same type. For compression of these flows we create a learning system  $R$  obtaining a suitable grid for all flows of set  $U$ .

Suppose that system  $R$  has inputs  $r_s, s = 0, 1, \dots, N$ . The input  $r_0$  is intended for the vector of parameters ("weights"), and the remaining inputs  $r_s$  are for compressible flows,  $s' = 1, \dots, N$ . The learning process of the  $R$  system consists in the fact that a group of  $n$  threads sent to its input in parallel mode. The learning result is a grid  $X = \{x_j\}, j = 0, 1, \dots, K$  such that  $X \subset \Xi$ . The role of the threshold function is played by the accuracy criterion, which is generally formulated in terms of a grid pseudo-measure (see [1]).

Let us briefly describe the autonomous operation of one module ("neuron")  $N$  of the system  $R$ , and then explain how they interact with each other to obtain the "weight parameters" of the system, which are the grid nodes  $x_j$ . So, the initial data for the module ("neuron")  $N$  are the vector of parameters ("weights")  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M+1}\}$  and a vector  $u \in U$ . The output of the module is grid  $X$  and the restriction of the function  $u(\xi)$  to this grid. To construct module  $N$ , we use the algorithm presented by the proof of Theorem 1 from [1]. With the help of this algorithm, according to the initial data  $\Xi$  and  $u$ , we recursively (step by step) obtain grid  $X$ , which is the result of learning.

Now we will assume that system  $R$  consists of  $n$  parallel modules ("neurons")  $N_s, s = 1, 2, \dots, n$ . We assume that set  $U$  consists of the vectors of the form  $u = \{u_0, u_1, \dots, u_{M+1}\}$ . Let each module be loaded with a vector of "weights"  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M+1}\}$  and  $n$  vectors  $u(s), s = 1, 2, \dots, n$ . The  $i$ -th step was carried out on all modules simultaneously. As a result of the  $i$ -th step, each module produces its own version of the value of the  $i$ -th node of grid  $X$ . After the  $i$ -th step, the modules exchange the results (i.e., the mentioned versions) and the smallest of the results is taken as the next grid node of  $X$ . After the end of the parallel processing for the considered  $n$  streams, it is considered that training is completed. In conclusion, we note that the criteria (threshold functions) in different modules can be different. This technique is used to process information obtained as a result of solving equations and systems of dynamical systems (see [2]).

М. ЛИПКОВИЧ

(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург)**МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ ЦЕЛЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ ЯКУБОВИЧА  
В СОВРЕМЕННОМ МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ**

*Алгоритм «Полоска» был разработан В.А. Якубовичем как метод решения систем счетного числа неравенств, возникающих при решении задач адаптивного управления. Также В.А. Якубович разработал подход сведения обучения линейной модели классификации к решению такой системы неравенств, что позволяет рассматривать «Полоску» как алгоритм машинного обучения. В данной работе предложены различные варианты получения системы неравенств, и проведено экспериментальное сравнение полученных алгоритмов с моделью логистической регрессии, показавшее, что «Полоска» обладает преимуществом в скорости сходимости.*

**Введение.** В.А. Якубович хорошо известен своими выдающимися результатами по абсолютной устойчивости [1], [2], адаптивному управлению [3], [4] и оптимизации [5], [6]. Не так широко известно, что В.А. Якубович также работал в области искусственного интеллекта и разработал несколько алгоритмов обучения линейных моделей классификации [7], [8], [9], [10]. Эти алгоритмы относятся к истории искусственного интеллекта и машинного обучения наряду с такими работами, как [11], [12], [13], [14] и многие другие.

Одним из алгоритмов, разработанных Якубовичем, является алгоритм «Полоска» [9]. Этот алгоритм представляет из себя рекуррентный конечно-сходящийся алгоритм решения системы бесконечного числа неравенств. Якубович свел обучение линейного классификатора с квадратичной функцией потерь к решению такой системы неравенств. Параметры модели обновляются итеративно, аналогично градиентному спуску, однако, есть существенные различия. В частности, «Полоска» выполняет больше обновлений: параметры модели обновляются после вычисления каждой частной производной функции потерь.

Целью данного доклада является рассмотрение «Полоски» с современных позиций. Как будет видно из экспериментов, «Полоска» хорошо подходит для онлайн-машинного обучения, обеспечивая более высокую скорость сходимости, чем у традиционных линейных моделей. Будут представлены различные варианты сведения задачи минимизации функции потерь к решению системы неравенств и экспериментальное сравнение предложенных алгоритмов с моделью логистической регрессии.

**Задача классификации.** Рассмотрим постановку задачи бинарной классификации. Предположим, что у нас есть набор пар («датасет»)  $\{(x_i, y_i = s(x_i), i = 1, \dots, m)\}$ , где  $x_i \in R^n$  и  $y_i \in \{-1, 1\}$ ,  $s: R^n \rightarrow Y$  – неизвестная функция. Задача состоит в том, чтобы аппроксимировать функцию  $s$  с помощью заданного набора данных таким образом, чтобы аппроксимация работала хорошо с данными, которые не попали в исходный («тренировочный») набор.

Начнем с описания базового подхода, предложенного в [8] и приведем его вариации в последнем подразделе. Пусть  $\{a_j(x)\}, j = 1, 2, \dots, N, \dots$  – некоторое плотное в  $L^2(R^n)$  множество функций и  $|a_j(x)| \leq \text{const}$ . Будем искать приближение  $s$  в следующем классе функций:

$$\sigma(x) = \text{sign} \left( \sum_{j=1}^N \theta_j a_j(x) \right), \quad (1)$$

где  $\theta_j$  – неизвестные параметры, которые необходимо подобрать в процессе обучения модели,  $N$  – некоторое положительное число,  $\text{sign}$  – функция, которая возвращает 1 для неотрицательных чисел и  $-1$  в противном случае. Введем обозначение:

$$s_N(x, \theta) = \sum_{j=1}^N \theta_j a_j(x).$$

Параметры  $\theta_j$  будут выбираться исходя из условия минимизация квадратичного функционала потерь:

$$Q(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s(x_i) - s_N(x_i, \theta))^2. \quad (2)$$

Дифференцируя (2) по каждому  $\theta_j$  и приравнивая производные к нулю, получаем  $N$  уравнений:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [s(x_i) - s_N(x_i, \theta)] a_j(x_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Уравнения (3) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_{jk}^m \theta_k - \alpha_j^m = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha_j^m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s(x_i) a_j(x_i), \quad \alpha_{jk}^m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{jk}(x_i) a_j(x_i).$$

Теперь заменим все равенства в правой части (4) неравенствами с некоторыми  $\varepsilon^m$ , где  $\varepsilon^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Получим систему неравенств:

$$\sum_{k=1}^N |\alpha_{jk}^m \theta_k - \alpha_j^m| \leq \varepsilon^m, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

Задача обучения классификационной модели свелась к тому, чтобы решить систему неравенств (5). В следующем подразделе сформулируем подход Якубовича к решению (5).

**Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы.** Рассмотрим бесконечную систему линейных неравенств

$$|\langle a_k, \theta \rangle + b_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $a_k, \theta \in R^n, b_k, \varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ . Задача состоит в том, чтобы найти такой вектор  $\theta$ , при котором неравенства (6) выполняются для всех  $k$ , начиная с некоторого индекса. Приведенный ниже итерационный алгоритм был называется «Полоска» [9].

Пусть  $\theta_1$  – начальное приближение искомого  $\theta$ . Введем обозначение  $\eta_k = |\langle a_k, \theta_k \rangle + b_k|$ . Тогда для каждого  $k = 1, 2, \dots$  будем получать новое приближение  $\theta_k$  согласно следующей процедуре:

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \theta_k, & \text{если } |\eta_k| < \varepsilon, \\ \theta_k - \frac{\eta_k}{|a_k|^2} a_k, & \text{если } |\eta_k| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство сходимости алгоритма (7) дается следующей теоремой [9]:

**Теорема 1.** Предположим, что последовательность  $\{a_k\}$  ограничена:  $|a_k| \leq \bar{a} < \infty$  и существует вектор  $\theta_*$  и число  $\rho \in (0, 1/2)$ , такие что

$$|\langle a_k, \theta_* \rangle + b_k| < \rho \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Тогда алгоритм (7) сходится за конечное число шагов, и для числа шагов верна оценка:  $r_0 \leq |\theta_0 - \theta_*|^2 \bar{a}^2 \varepsilon^{-1} (\varepsilon - 2\rho\varepsilon)^{-1}$ .

Доказательство основано на введении функция Ляпунова специального вида.

**Формирование системы бесконечного числа неравенств.** Чтобы применить Теорему 1 к системе (5), необходимо получить из нее бесконечную систему неравенств вида (6). Есть различные способы это сделать, что будет обсуждаться далее. Предположим, что тренировочные образцы будут подаваться в цикле. То есть  $m$  в (5) растет неограниченно и для каждого нового образца будем решать  $N$  нелинейностей вида (5). Легко показать, что коэффициенты  $\alpha_j, \alpha_{jk}$  могут быть пересчитаны с ростом  $m$  рекуррентным образом.

Перенумеруем полученные таким образом неравенства индексом  $h$  и введем обозначение:



$$\delta_h = \sum_{k=1}^N \alpha_{jk}^m \theta_k^h - \alpha_j^m,$$

где  $\theta_k^h$  — значение параметра  $\theta_k$  на шаге  $h$ .

Рассмотрим следующие варианты обновления параметров между итерациями цикла:

- Вычислять выражение в левой части (5) для всех образцов и осуществлять полный пересчет градиента после каждых  $N$  неравенств. Этот вариант аналогичен обычному градиентному спуску. В градиентном спуске параметры обновляются один раз в направлении, противоположному градиенту ошибки на полном датасете, а в «Полоске» параметры обновляются  $N$  раз для каждого прогона тренировочного набора: один раз для каждой компоненты градиента
- Рассматривать неравенства (5) отдельно для каждого образца, иными словами, устанавливать значение параметра  $m$  равным единице после каждых  $N$  неравенств. Такой вариант имеет сходства со стохастическим градиентным спуском. Здесь сохраняется та же разница что и с обычным градиентным спуском: параметры в «Полоске» обновляются чаще. Это свойство, как показали эксперименты имеет недостаток в большем количестве вычислений при работе с разреженными данными высокой размерности, но имеет преимущество в более высокой скорости сходимости
- «Накапливать» градиенты в (5): рассмотреть  $N$  неравенств (5) при  $m = 1$ , затем обновить все параметры  $\alpha_j, \alpha_{jk}$  и рассмотреть  $N$  неравенств (5) при  $m = 2$  и так далее, пока не будут задействованы все образцы обучающей выборки. После этого возможны два варианта алгоритма: либо продолжать увеличивать  $m$  при следующем прогоне датасета, либо снова установить  $m = 1$ . Эксперименты показывают, что в большинстве случаев накопление без сбрасывания  $m$  дает наилучшие результаты

Выбор алгоритма сведения к бесконечной системе неравенств следует осуществлять для каждого отдельного набора данных через перекрестную проверку.

**Результаты экспериментов.** Было произведено сравнение предложенных вариантов алгоритма «Полоска» с логистической регрессией, обученной градиентным спуском и стохастическим градиентным спуском. Приведем результаты сравнений на нескольких наборах данных.

Для оценки качества «Полоски» в парадигме онлайн-машинного обучения был взят набор данных «HIGGS» [15], состоящий из 11000000 образцов с 28 признаками. «Полоска» и логистическая регрессия получали образцы один за другим. На каждый образец осуществлялся прогноз обеими моделями и вычислялось суммарное количество ошибок, накопленное к данному моменту. После этого образец использовался для обновления параметров обеими моделями. Процент результирующих ошибок составил 35,9% для «Полоски» и 37,2% для логистической регрессии, при этом «Полоске» потребовалось меньше итераций.

С целью анализа работы «Полоски» в случае данных с дисбалансом использовался датасет «Seismic Bumps Dataset» [16]. Датасет состоит из 2584 образцов с 20 признаками. Размеры классов 0 и 1 соотносятся как 1 к 14. Значение метрики площадь под кривой у «Полоски» оказалось равным 0.77, а у логистической регрессии с равномерным взвешиванием – 0.78. Качество моделей получилось примерно одинаковым, однако, «Полоске» потребовалось меньше итераций для сходимости.

**Заключение.** Был описан метод В.А. Якубовича обучения линейных классификационных моделей, основанный на сведении минимизации квадратичного функционала потерь к решению системы с бесконечным числом неравенств. Были рассмотрены различные варианты этого сведения и описаны результаты экспериментального сравнения полученных моделей с логистической регрессией.

*Исследование выполнено в ИПМаш РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-00144)*

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Якубович. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. N 6. С. 1304-1307.
2. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
3. В.А. Якубович. К теории адаптивных систем // ДАН СССР. 1968. Т. 182. N 3. С. 518-522.
4. В.А. Якубович. Конечно сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах синтеза адаптивных систем // ДАН СССР. 1969. Т. 189. N 3. С. 495-498.
5. В.А. Якубович. О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре на конечном интервале с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. 1970. Т. 195. N 2. С. 548-551.
6. В.А. Якубович. К абстрактной теории оптимального управления, I // Сибирск. математ. журн. 1977. Т. 18. N 3. С. 685-707.
7. В.А. Якубович. Машины, обучающиеся распознаванию образов // Сборник ВЦ ЛГУ. 1963. Вып. 2. С. 95-131.
8. В.А. Якубович. Некоторые общие теоретические принципы построения обучаемых опознающих систем. I // Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. С. 3-71.
9. В.А. Якубович. Рекуррентные конечно сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. 1966. Т. 166. N 6. С. 1308-1312.
10. Bondarko, V.A., Yakubovich, V.A. The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 1992. vol. 6. P. 141-160.
11. Rosenblatt, F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain // Psychological Review. 1958. vol. 65. no. 6. P. 386-408.
12. В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. Об одном классе алгоритмов обучения распознаванию образов // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. N. 6. С. 937-945.
13. Брегман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для задач выпуклого программирования // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1967. Т.7. N3. С. 630-631.
14. Mitchell, B.F., Demyanov and V.F., Malozemov, V.N. Finding the point of a polyhedron closest to the origin // SIAM Journal of Control. 1974. vol. 12. P. 19-26.
15. Baldi, P., P. Sadowski, and D. Whiteson. Searching for Exotic Particles in High-energy Physics with Deep Learning // Nature Communications. 2014. vol. 5.
16. Sikora M. and Wrobel L. Application of rule induction algorithms for analysis of data collected by seismic hazard monitoring systems in coal mines // Archives of Mining Sciences. 2010. vol. 55. no. 1. P. 91-114.

---

M. Lipkovich, (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg). **Role of Yakubovich's method of recursive objective inequalities in the modern machine learning**

The "Stripe" algorithm was developed by V.A. Yakubovich as a method for solving systems of an infinite number of inequalities that arise in adaptive control problems. V.A. Yakubovich developed an approach to reducing the learning of a linear classification model to solving a system of inequalities. In this paper, various versions of this reduction are proposed and an experimental comparison of the obtained algorithms with traditional machine learning models is carried out, which shows that the "Stripe" can have a higher convergence rate.

М.В. БЛАГОВ, В.Д. КОРОБЕЙНИКОВ  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

## ГЕНЕРАТИВНО-СОСТЯЗАТЕЛЬНЫЕ СЕТИ В УПРАВЛЕНИИ НАГРУЗОЧНЫМ ТЕСТИРОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

*В данной работе рассматривается проблематика управления нагрузочным тестированием программных комплексов. Рассматривается задача тестирования потенциальных возможностей программного комплекса и варианты её решения. Предлагается метод создания профилей нагрузки с использованием генеративно-состязательных сетей, позволяющий эффективно генерировать профили нагрузки с заданными параметрами.*

**Введение.** Нагрузочное тестирование программных комплексов является одним из ключевых этапов при их разработке и приёме. Сбои и отказы программных комплексов из-за недостаточной производительности могут приводить к перерывам в предоставлении критически важных сервисов, недополучению прибыли и потере клиентов. Нагрузочное тестирование — широкая область контроля качества программного обеспечения, включающая в себя проверку поведения программного комплекса при определенной нагрузке, стресс-тестирование, проверки стабильности, отказоустойчивости, восстановления, масштабируемости и потенциальных возможностей [1, 2]. Несмотря на важность нагрузочного тестирования, в процессе разработки многих программных продуктов этой фазе не уделяется достаточного внимания, или она опускается вовсе ввиду сложности и больших трудозатрат на её выполнение [3].

В настоящее время для автоматизации и упрощения нагрузочного тестирования используются различные инструменты [4, 5]. Они позволяют выполнять сценарии нагрузочного тестирования в автоматическом режиме. Однако, по-прежнему вручную определяется профиль нагрузки для создания сценариев проверки и производится управление процессом тестирования в зависимости от полученных результатов. В связи с развитием технологий машинного обучения, появилась возможность их использования для управления процессом определения профиля нагрузки и подготовки тестовых сценариев [6]. Например, в работах [7–9] рассматривается возможность адаптивного тестирования потенциальных возможностей программного комплекса при помощи машинного обучения.

Предлагаемый доклад посвящен применению генеративно-состязательных сетей для управления нагрузочным тестированием и тестирования потенциальных возможностей программного комплекса, предназначенного для обработки HTTP-запросов.

**Управление профилем нагрузки с помощью генеративно-состязательной сети.** Будем использовать генеративно-состязательную сеть [10] для формирования тестовых сценариев, позволяющих вывести комплекс на границу потенциальных возможностей производительности. Рассмотрим программный комплекс для обработки HTTP-запросов, предназначенное для обработки семи различных типов запросов с известными временами отклика и вероятностями ошибок (см. Таблицу 1).

Таблица 1

Характеристики обработки запросов

Запрос	Время отклика, мс.	Вероятность ошибки
1	5	0
2	50	0
3	5	0,05
4	5	0,5
5	50	0,05
6	50	0,5
7	100	0

Для обучения генеративно-состязательной сети используется набор случайных тестовых сценариев, каждый из которых представляется вектором  $(x_1, \dots, x_n)$  целых чисел, где  $n$  — количество типов запросов, которые может обрабатывать тестируемый программный комплекс,

а значения — количество отправляемых запросов данного типа за единицу времени. Для каждого сценария экспериментальным путём определяется среднее время отклика программного комплекса на каждый запрос  $r$  и процент ошибок обработки запросов  $e$ .

Генератор представляет из себя многослойный перцептрон с двумерным входом и 128 нейронами на первых трёх слоях. На выходном слое используются два нейрона и линейная функция активации. Дискриминатор — также четырёхслойный перцептрон с четырёхмерным входом и функцией активации вида «усеченное линейное преобразование». Чтобы избежать переобучения дискриминатора, после первого, второго и третьего скрытых слоев, делается вычеркивание (dropout) части нейронов. Используются следующие функции потерь: логистическая функция потерь бинарной перекрестной энтропии для дискриминатора, которая эффективно наказывает нейронную сеть за ошибки двоичной классификации [11], и среднеквадратическая ошибка для генератора. В качестве метода обновления весов для обеих сетей (генератора и дискриминатора) был выбран алгоритм стохастического градиентного спуска Adam [12]. По завершении процесса обучения, на вход генератору подаётся пара  $(r, e)$ , для которой требуется сгенерировать профиль нагрузки. Полученная модель машинного обучения представляет из себя математическую модель программного комплекса и позволяет эффективно создавать тестовые сценарии для нагрузочного тестирования с заданным временем отклика и процентом ошибок (см. Рис. 1 и Рис. 2), уменьшая трудозатраты на поиск границ потенциальных возможностей программного комплекса.

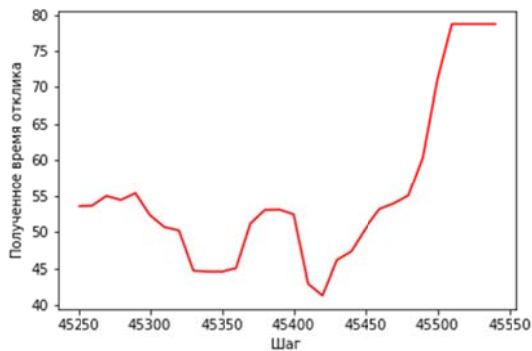


Рис.1. Среднее время отклика на сгенерированном моделью профиле нагрузки

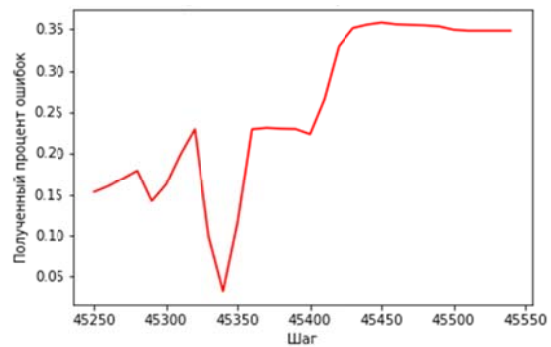


Рис.2. Средний процент ошибок на сгенерированном моделью профиле нагрузки

**Заключение.** Полученные результаты подтверждают перспективность использование моделей машинного обучения для управления процессом нагрузочного тестирования программного обеспечения. Дальнейший интерес для исследования представляет подбор оптимальных методов машинного обучения для решения подобного класса задач.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ НШ-4196.2022.1.1. и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Molyneaux I. The Art of Application Performance. Testing O'Reilly Media, Inc., 2009. 158 с.
2. Microsoft Corporation. Performance Testing Guidance for Web Applications. Microsoft Press; 1st edition, 2007. 221 с.
3. Blokdyk, G. Software performance testing. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2018. 136 с.
4. Hegde, V., & Pallavi. Web Performance Testing: Methodologies, Tools and Challenges. International journal of scientific and engineering research, 2014.
5. Halili E. H. Apache JMeter. Packt Publishing, 2008. 140p.
6. King, T.M., Arbon, J., Santiago, D., Adamo, D., Chin, W., Shanmuga, R. AI for Testing Today and Tomorrow: Industry Perspectives. 2019 IEEE International Conference On Artificial Intelligence Testing (AITest), 2019, стр. 81-88.
7. Helali Moghadam, M. Machine Learning-Assisted Performance Testing. Proceedings of the 2019 27th ACM Joint Meeting on European Software Engineering Conference and Symposium on the Foundations of Software Engineering, 2019, pp. 1187 — 1189.
8. Helali Moghadam, M., Saadatmand, M., Borg, M., Bohlin, M., Lisper, B. An autonomous performance testing framework using self-adaptive fuzzy reinforcement learning. Software Quality Journal. 2022, №30, стр. 127–159.

9. Helali Moghadam, M., Hamidi, G., Borg, M., Saadatmand, M., Bohlin, M., Lisper, B., Potena, P. Performance Testing Using a Smart Reinforcement Learning-Driven Test Agent. 2021. ArXiv:2104.12893.
10. Ganguly, K. Learning Generative Adversarial Networks: Next-generation deep learning simplified. Packt Publishing, 2017. 180 с.
11. Ruby U., Yendapalli V. Binary cross entropy with deep learning technique for image classification //Int. J. Adv. Trends Comput. Sci. Eng. – 2020. – Т. 9. – №. 10.
12. Kingma D. P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization //arXiv preprint arXiv:1412.6980. – 2014.

---

M.V. Blagov, V.D. Korobeinikov (Department of applied cybernetics, Saint Petersburg University). **Generative Adversarial Networks in managing load testing of software systems**

This publication is devoted to the management of load testing of software systems. A problem of capacity testing is considered, along with the approaches to solve it. An effective method to generate load profiles with given parameters by generative adversarial networks is proposed.

М.В. БЛАГОВ, М.Ю. ЛОБАЧЕВ, М.В. ЮЛДАШЕВ, Р.В. ЮЛДАШЕВ  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

Н.В. КУЗНЕЦОВ  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт Проблем Машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург)

Б.И. ШАХТАРИН  
(Московский государственный технический университет, Москва)

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ: ГИПОТЕЗА КАПРАНОВА И СКРЫТЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*Рассматривается классическая система фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора. Для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью специальной замены переменных проведены оценки параметров, гарантирующих отсутствие циклов. Метод основан на интегрировании и последующей сшивке траекторий, что позволяет оптимизировать нахождение точного значения полосы захвата в замкнутой форме.*

**Введение.** Схемы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) являются нелинейными системами управления и широко применяются в глобальных навигационных спутниковых системах, электроэнергетике, системах связи и других приложениях. Одной из первых работ с нелинейным анализом ФАП была работа Ф.Трикоми [1], где он показал, что в двумерной ФАП типа 1 с интегрирующим фильтром глобальная устойчивость (полоса захвата) определяется бифуркационным значением разности частот, при котором рождается сепаратрисный цикл, идущий из седла в седло. Для случая пропорционально-интегрирующего фильтра М.В. Капранов предположил [2], что полоса захвата определяется рождением сепаратрисного цикла (самовозбуждающегося колебания). Позднее в работах Н.А. Губарь, Б.И. Шахтарина и В.М. Сафонова с использованием метода точечных отображений [3] было показано, что гипотеза Капранова неверна и что полоса захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора может определяться рождением полуустойчивого цикла (скрытого аттрактора) [4–6]. Данные работы в виду сложности изложения и ссылок на сторонние работы не были замечены в последующих западных статьях (см., например, [7–11]), где приводились приближённые оценки полосы захвата, полученные с помощью методов гармонического баланса, метода Галёркина и численного моделирования. В результате чего в современной литературе встречаются работы, в которых гипотеза Капранова считается справедливой (см., например, [12, 13]).

Предлагаемый доклад посвящен нелинейному анализу системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора, основанному на специальной замене переменных, приводящей соответствующую двумерную систему ОДУ к одномерному дифференциальному уравнению, с последующими интегрированием и сшивкой траекторий, что позволяет описать нахождение точного значения полосы захвата в замкнутой форме. Аналогичный подход к анализу фазовой плоскости может быть применен для анализа схем Костаса [14] и решения задачи Игана [15].

**Основная часть.** В работе рассмотрена нелинейная математическая модель системы фазовой автоподстройки с пропорционально-интегрирующим фильтром:

$$F(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}, \tau_{1,2} > 0:$$

$$\dot{x} = \frac{-1}{\tau_1 + \tau_2} x + \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} v_e(\theta_e), \dot{\theta}_e = \omega_e^{free} - K_{vco} \left( \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} x + \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} v_e(\theta_e) \right).$$

Нелинейная характеристика  $v_e(\theta_e)$  является периодической кусочно-линейной. С помощью функции Ляпунова в форме Лурье-Постникова удастся показать, что в системе отсутствуют циклы первого рода. На участках линейности функции  $v_e(\theta_e)$  с помощью замены переменных

$$y = \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_2}{kK_{VCO}}} \omega_e^{free} - \sqrt{\frac{K_{VCO}}{k(\tau_1 + \tau_2)}} (x + \tau_2 v_e(\theta_e)), \tau = \sqrt{\frac{kK_{VCO}}{\tau_1 + \tau_2}} t$$

систему (1) можно записать в виде уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = \frac{-1 + K_{VCO} \tau_2 v'(\theta_e)}{\sqrt{k(\tau_1 + \tau_2) K_{VCO}}} + \frac{\frac{-v_e(\theta_e)}{k} + \frac{\omega_e^{free}}{kK_{VCO}}}{y},$$

что позволяет провести аналитическое интегрирование. Сшивая решения на границах линейности  $v_e(\theta_e)$  и приравнивая граничные значения ординат, получаем уравнения, из которых находится полоса захвата. Данный способ позволяет не учитывать время прохождения траекторией участка линейности  $v_e(\theta_e)$ , что сокращает замкнутое описание анализа полосы захвата по сравнению с работами [2–6], а также позволяет определить полосу быстрого захвата.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ (НШ-4196.2022.1.1) и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Tricomi. Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa (in Italian), 2(2):1–20, 1933.
2. М.В. Капранов. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника, N11(12), 1956. с. 37–52.
3. А.А. Андронов, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
4. Н.А. Губарь. Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами. // ПММ, N25(6), 1961. С. 1011–1023.
5. Б.И. Шахтарин. Исследование кусочно-линейной системы ФАП. // Радиотехника и электроника, N8, 1969. С.1415–1424.
6. Сафонов В.М. О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП // Радиотехника. N24(6), 1969. С. 76–80.
7. G.S. Moschytz. Miniaturized RC filters using phase locked loop. Bell System Technical Journal, 44(5), 1965. P. 823–870,
8. W. Lindsey. Synchronization systems in communication and control. Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
9. L. Greenstein. Phase-locked loop pull-in frequency. // IEEE Transactions on Communications, 22(8), 1974. P. 1005–1013,
10. T. Endo. A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops. // Journal of the Franklin Institute, 331(6), 1994. P. 859–902,
11. J.L. Stensby. Phase-Locked Loops: Theory and Applications. Taylor & Francis, 1997.
12. B.A. Harb. Computing the pull-in range of second-order phase locked loops with tanlock and sawtooth phase detectors // Proceedings of the 11th International Conference on Circuits, Systems, Electronics, Control & Signal Processing (CSECS'12). — pp. 27–32.
13. B. A. Harb, A. Al-Ajlouni, A. Eyadeh. A collocation-based algorithm for analyzing bifurcations in phase locked loops with tanlock and sawtooth phase detectors. Mathematical Problems in Engineering, 2018.
14. R.E. Best, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop. // Annual Reviews in Control. 42, 2016. P. 27-49.
15. N.V. Kuznetsov, M.Y. Lobachev, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. The Egan problem on the pull-in range of type 2 PLLs // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 68(4), 2020. P. 1467–1471.

---

M.V. Blagov M.Yu. Lobachev M.V. Yuldashev R.V. Yuldashev (St. Petersburg State University, St. Petersburg), N.V. Kuznetsov (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences), (St. Petersburg State University, St. Petersburg), B.I. Shakhhtarin (Moscow State Technical University, Moscow). **Nonlinear analysis and synthesis of the system phase lock loop: kapranov's hypothesis and hidden oscillations.**

A classical phase locked loop system with a proportional integrating filter and a piecewise linear response of the phase detector is considered. For the resulting system of ordinary differential equations, using a special change of variables, estimates of the parameters that guarantee the absence of cycles are carried out. The method is based on integration and subsequent matching of trajectories, which makes it possible to describe finding the exact value of the swath in a closed form.

М. М. ШУМАФОВ

(Адыгейский государственный университет, г. Майкоп)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ПИРАГАСУ НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*Рассматривается задача о стабилизации по Пирагасу неустойчивых состояний равновесия динамических систем. Предложен алгоритм стабилизации обратной связью с запаздыванием по Пирагасу с периодическим коэффициентом усиления. Такой подход позволяет преодолеть ограничения, возникающие при стабилизации с помощью постоянного коэффициента усиления. Он основан на методе Леонова нестационарной стабилизации.*

**Введение.** Стабилизация неустойчивых состояний равновесия, как и стабилизация неустойчивых орбит, является одной из основных проблем современной теории управления. Особенно эта проблема стала актуальной в связи с задачами стабилизации систем с хаотическим поведением и управлением хаосом. Вопросы стабилизации весьма интенсивно изучались в последние три десятилетия и в настоящее время вызывают большой интерес у исследователей различных специальностей. В течение этого времени опубликовано более тысячи работ, посвященных вопросам стабилизации неустойчивых состояний равновесия или периодических орбит в различных непрерывных и дискретных динамических системах.

Начиная с пионерской работы Э. Отта, С. Гребоги и Дж. Йорка [1] было предложено и развито большое количество различных методов для стабилизации неустойчивых периодических орбит и состояний равновесия, встроенных в странные аттракторы хаотических систем. В [1] было введено понятие «управление хаосом» и на примере дискретной системы Хенона компьютерным моделированием было показано, что достаточно малое входное управление позволяет стабилизировать одну из неустойчивых периодических орбит в странном аттракторе.

В начале 90-х годов прошлого столетия в работах К. Пирагаса [2–4] было заложено новое направление в теории управления: стабилизация хаоса обратной связью с запаздыванием (*time-delayed feedback control*). Пирагасом в [2] был предложен относительно простой и в то же время весьма эффективный метод стабилизации хаоса. Этот метод заключается в том, что управление, которое вводится в систему, представляет собой разность текущего состояния системы и состояния с задержкой во времени, равной или кратной периоду стабилизируемой неустойчивой периодической орбиты, с некоторым постоянным коэффициентом усиления. Работы Пирагаса стимулировали большое количество дальнейших публикаций, посвященных вопросам стабилизации обратной связью с запаздыванием неустойчивых периодических орбит и состояний равновесия в странных аттракторах различных непрерывных и дискретных систем. Метод Пирагаса был успешно применен к задачам стабилизации из различных областей науки и техники. Обзоры результатов работ авторов этих публикаций можно найти, например, в статьях [5–9].

Хотя метод Пирагаса оказался весьма эффективным и мощным средством для стабилизации хаоса, но, тем не менее, было обнаружено, что его возможности ограничены. Это обстоятельство впервые было указано в работах Т. Ушио [10] (для дискретных систем), Х. Накаджима [11] и У. Джаст и др. [12] (для непрерывных систем). Позже аналогичные результаты были установлены для других классов систем в работах [13–17].

Ограничение применения метода Пирагаса для непрерывных систем состоит в том, что никакая неустойчивая периодическая орбита (никакое неустойчивое состояние равновесия) с нечетным числом вещественных мультипликаторов Флоке линеаризованной относительно этой орбиты системы больших, чем единица (нечетным числом положительных собственных значений матрицы Якоби), не может быть стабилизирована обратной связью с запаздыванием и постоянным коэффициентом усиления. Эта проблема "нечетного ограничения" (в англоязычных публикациях "*odd number limitation*") интенсивно обсуждалась во многих работах с целью его преодоления в случае постоянного коэффициента усиления (см., например, обзоры [5–9]). Но удовлетворительного решения так и не было найдено. Предложенные алгоритмы в основном являются приближенными и строго не обосновываются.



В работе Г.А. Леонова [18] разработан основанный на строгих математических выводах алгоритм, позволяющий преодолеть "нечетное ограничение" при стабилизации неустойчивых периодических орбит в непрерывных системах. Алгоритм Леонова основан на методе Пирагаса и методах нестационарной стабилизации линейных систем (развитых в работах Леонова при решении проблемы Брокетта [19]). Управление формируется с помощью запаздывающей обратной связи с периодическим коэффициентом усиления, период которого в шесть раз превышает период стабилизируемого неустойчивого цикла. В [20] алгоритм Леонова был перенесен на дискретный случай, а в [21] этот алгоритм был использован для стабилизации неустойчивых состояний равновесия в непрерывных системах с "нечетным ограничением". В [21] стабилизация осуществляется в случае, когда в правой полуплоскости плоскости комплексного переменного нет комплексных собственных значений матрицы линеаризованной системы, а имеется только нечетное число вещественных собственных значений, а остальные собственные значения расположены в левой полуплоскости. При этом предположении с помощью периодической обратной связи с запаздыванием по Пирагасу преодолевается "нечетное ограничение".

Предлагаемый доклад посвящен рассмотрению общего случая, когда в правой части полуплоскости расположены и комплексные собственные значения наряду с вещественными (число которых нечетно). Предложен алгоритм стабилизации в рассматриваемом общем случае. Данный алгоритм позволяет преодолеть "нечетное ограничение" в задаче стабилизации неустойчивых состояний равновесия в динамических системах.

**Постановка задачи.** Пусть  $x = 0$  является неустойчивым состоянием равновесия системы

$$\dot{x} = f(x) + u \quad \left( x \equiv \frac{dx}{dt} \right) \quad (1)$$

При  $u = 0$ . Здесь  $x$  – вектор состояния,  $u$  – вектор управления.

Предположим, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x = 0$ . Введем в систему (1) нестационарную обратную связь

$$u(t) = K(t)[x(t) - x(t - \tau)], \quad \tau > 0, \quad (2)$$

где  $K(t)$  – некоторая периодическая  $n \times n$ -матрица, которую следует выбрать подходящим образом. Обратная связь вида (2), где  $K(t) \equiv K (= const)$ , была предложена К. Пирагасом [2], а с переменной матрицей  $K(t)$  – Г.А. Леоновым [18]. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = f(x(t)) + K(t)[x(t) - x(t - \tau)]. \quad (3)$$

Линеаризация системы (3) в окрестности точки  $x = 0$  приводит к системе первого приближения

$$\dot{y} = Ay(t) + K(t)[y(t) - y(t - \tau)], \quad (4)$$

где  $A = (Df)(0)$  – матрица Якоби функции  $f$  в точке  $x = 0$  ( $D$  – оператор дифференцирования).

Задача состоит в том, чтобы найти периодическую матрицу  $K(t)$  и число  $\tau$  такие, чтобы нулевое состояние равновесия  $x = 0$  оказалось бы асимптотически устойчивым.

Сформулированная задача решена в [21] в случае, когда все собственные значения  $\lambda(A)$  матрицы  $A$  с  $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$  только вещественны, число их равно  $m$ , где  $m$  – нечетно, а остальные  $n - m$  собственных значений расположены в левой полуплоскости.

**Формулировка основного результата.** Предположим, что матрица  $A$  имеет  $m$  собственных значений  $\lambda(A)$  с  $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$ , среди которых имеется некоторое число  $\ell$  ( $\ell \neq 0$ ) комплексносопряженных пар и ровно  $p$  вещественных собственных значений, где  $p$  нечетно (так что  $p + 2\ell = m$ ), а  $n - m$  собственных значений расположены в открытой левой полуплоскости плоскости комплексного переменного.

При сделанных предположениях имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\theta > 0$  произвольное положительное число и  $\tau = 2\theta$ . Тогда существует кусочно-постоянная периодическая матрица-функция  $K(t)$  периода  $6\theta$  такая, что нулевое состояние равновесия системы (4) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы основано на применении классической теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [22] и теории нестационарной стабилизации, развитой в работах Г.А. Леонова (см. [23] и библиографию в ней).

**Заключение.** Предложен алгоритм стабилизации неустойчивых состояний равновесия динамических систем в общем случае, когда в правой полуплоскости комплексной плоскости расположены как вещественные, так и комплексные собственные значения матрицы линейной части системы, причем число вещественных собственных значений нечетно. Предложенный алгоритм позволяет преодолеть "нечетное ограничение" (*odd number limitation*), возникающее в теории управления при стабилизации систем обратной связью с запаздыванием по Пирагасу с постоянным коэффициентом усиления.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling Chaos. *Phys. Rev. Lett.* A. 1990. P. 1196-1199.
- Pyragas K. Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback. *Phys. Lett.* A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
- Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback. *Phys. Lett.* A. 1995. Vol. 206. P. 323-330.
- Pyragas, K. Applications of Extended Delay Feedback to Control Chaos. *J. Tech. Phys.* 1996. Vol. 37. P. 409-412.
- Fradkov A.L., Evans R.J. Control of Chaos: Some Open Problems. Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, December 2001. P.698-704.
- Tian Yu., Zhu J., Chen Gu. A survey on delayed feedback control of chaos. *Journ. of Contr. Theory and Appl.* 2005. No. 4. P. 311-319.
- Leonov G.A., Shumafov M.M., Kuznetsov N.V. A short survey of delayed feedback stabilization. 1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlin. Syst. S.Petersburg, June 24-26, 2015. P. 716-719.
- Pyragas K. A Twenty-Year of Time-Delay Feedback Control and Recent Developments. Intern. Sympos. on Nonlin. Theory and its Appl. Spain. 2012. P. 683-686.
- Shumafov M.M. Stabilization of unstable steady states of dynamical systems. Part III. Stabilization by time-delayed feedback control. – A Survey. *Вестник Адыгейского государственного университета.* Сер. Естество-матем. и техн. науки. 2016. Вып. 4. С. 13-27.
- Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans. on Circuits Systems.* I. 1996. Vol. 43(9). P. 851-856.
- Nakajima H. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Phys. Lett.* A. 1997. Vol. 232. P. 207-210.
- Just W., Bernard T., Ostheimer M., Reibold E., Benner H. Mechanism of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 203-206.
- Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hövel P., Schöll E. Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.*, 2007. Vol. 98, 114101.
- Just W., Fiedler B., Georgi M., Flunkert V., Hövel P., Schöll E. Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. E.*, 2007. Vol. 76, 026210.
- Hooton E.W., Amann A. An analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems. *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109. 154101.
- Hooton E.W., Amann A. An odd number limitation of extended time-delayed feedback control in autonomous systems. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2013, Vol. 371, 20120463.
- Pyragas K., Pyragas V. Time-Delayed Feedback Control Design Beyond the Odd Number Limitation. *Phys. Rev. E.*, 2013. Vol. 88, 012903.
- Leonov G.A. Pyragas Stabilizability via delayed feedback with periodic control gain. *Systems and Control Letters.* 2014. Vol.69. P.34-37.
- Brockett R. A stabilization problem. In book: Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer, 1999. P. 75-78.
- Леонов Г.А., Звягинцева К.А. Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. Математика, механика и астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 342-353.
- Леонов Г.А., Шумафов М.М. Стабилизируемость неустойчивых состояний равновесия систем по Пирагасу нестационарной обратной связью с запаздыванием. *Автомат. и телемех.*, 2018. № 6. С. 87-98.
- Эльсгольд Л.Э., Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 420 с.

M.M. Shumafov (Adyghe State University, Maykop). **Stabilization of unstable steady states of dynamical systems by Pyragas' periodic delayed feedback control**

The problem of stabilization of unstable steady states by Pyragas' method is considered. An algorithm for stabilization by Peragas' delayed feedback control with periodic gain is proposed. Such approach allows to overcome the limitations imposed by stabilization with a constant gain. It is based on Leonov's nonstationary stabilization method. The obtained algorithm is applicable if the linearised system around the unstable point has any number of eigenvalues with real positive parts including odd number of real ones.

Т.Н. МОКАЕВ, Ф. РАЙТМАНН  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

## УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕРМИНАХ СИМВОЛОВ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СЕТЯХ

*В работе рассматриваются псевдодифференциальные уравнения на общих функциональных пространствах. Класс этих уравнений включает обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегральные уравнения и другие типы уравнений. Получены операторные условия устойчивости в терминах символа, которые можно рассматривать как обобщение известных частотных условий теории абсолютной устойчивости систем управления и использовать для анализа сетевых моделей. Эффективность подхода показана для уравнения Бюргерса, описывающего течение жидкости в тонких каналах.*

**Введение.** Часто в приложениях различные процессы эволюции описываются гибридными системами, которые содержат обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и другие функционально-дифференциальные и интегральные уравнения [1–3]. Для анализа таких систем можно использовать псевдодифференциальные операторы и их символы.

Операторный символьный подход позволяет рассматривать вместо дифференциальных операторов матричные функции для вычисления функционалов Ляпунова и других функционалов для системы. Например, частотные условия в теореме Калмана, Якубовича, Попова, а также в теоремах Г.А. Леонова [4], можно интерпретировать как ограничение передаточных операторов на их символы относительно временной переменной [1]. Для псевдодифференциальных операторов аналогичные условия формулируются в терминах полного символа этих операторов. Символьное условие устойчивости и другие свойства также могут быть получены для псевдодифференциальных уравнений на сетях, в том числе нейронных. В определенном смысле этот подход можно сравнить с квантованием систем со связями в физике [5]. Предлагаемый доклад посвящен исследованию данных аспектов операторного символьного подхода.

**Псевдодифференциальные уравнения на сетях.** Рассмотрим в качестве мотивационного примера для нашего исследования сильно вырожденное уравнение Бюргерса:

$$v_t = a(x)v_{xx} + b(v)v_x, \quad (1)$$

где  $a(x)$  и  $b(x)$  бесконечно непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными,  $a(x) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b(0) = 0$ . Если  $a(x) \equiv a = const > 0$  и  $b(x) \equiv 0$ , мы получаем уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, которое можно рассматривать с помощью параболических методов и аналитических символов. При  $a = 0$  это уравнение можно исследовать гиперболическими методами. Интерпретация уравнения (1) как псевдодифференциального уравнения в шкале банаховых пространств [6] позволяет одинаково рассматривать оба случая, используя теорию символов для непостоянных операторов. Известно, что уравнение Бюргерса в некоторых случаях может быть использовано в задачах гидродинамики вместо уравнения Навье-Стокса [7]. Например, это справедливо, если рассматривать жидкость в трубке с малыми параметрами. Предположим, что у нас есть сеть таких трубок, описывающая динамику кровотока. В некотором мезомасштабе более мелкие сосуды могут быть смоделированы как одномерные объекты [8].

В данном сообщении мы рассмотрим псевдодифференциальные уравнения на сетях, построенных с помощью параметризации одномерных многообразий. Ясно, что некоторые типы нейронных уравнений [9–12], уравнений жидкости [7], уравнений Максвелла в сочетании с уравнениями теплопроводности [2] и общими системами транспортных потоков [13] также могут быть исследованы на таких многообразиях с границей. Это также позволяет использовать для анализа конкретного класса уравнений дополнительные свойства расслоений по многообразию (связность, группа гомологии и т.д.).

Пусть  $(\mathcal{N}, \Gamma, (T))$  – это одномерная сеть с условием трансмиссии  $(T)$  в смысле [6,14]: пусть  $n \in \mathbb{N}$  фиксировано,  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$  непересекающиеся множества,  $\kappa_j: [0,1] \rightarrow \mathcal{N}_j$  для  $j = 1, \dots, n$  биективные отображения. Пусть  $\partial\mathcal{N}_j := \{\kappa_j(s) : s \in \{0,1\}\}$  и  $\Gamma_0 := \cup_{j=1}^n \partial\mathcal{N}_j$ . Элементы  $\gamma \in \Gamma$  называются узлами, множества  $\mathcal{N}_j$  называются ветвями. Определим  $\mathcal{N} := \cup_{j=1}^n \mathcal{N}_j$ . Тогда тройка  $(\mathcal{N}, \Gamma, (T))$  называется *одномерной сетью* (см. рис. 1).

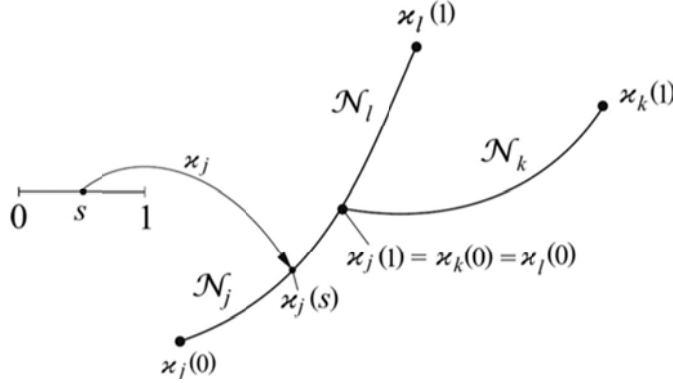


Рис. 1. Одномерная сеть и ее параметризация.

Рассмотрим функции  $v_j: \mathcal{N}_j \rightarrow \mathbb{C}$  и запишем короче  $(v_j): \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $v_j(x) = v_j(\kappa_j(x))$  для  $x \in [0,1]$ . Будем говорить, что  $(v_j)$  удовлетворяет условиям трансмиссии  $(T)$  если  $v_{j_1}(\gamma) = v_{j_2}(\gamma)$  для  $\gamma \in \Gamma$  и  $j_1, j_2$  с  $\gamma \in \mathcal{N}_{j_1} \cap \mathcal{N}_{j_2}$ . Будем писать  $v_j \in C^k(\mathcal{N}_j)$  для  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , если  $v_j \circ \kappa_j \in C^k([0,1])$ . Более того, пусть

$$H^k(\mathcal{N}_j) := \{v: \mathcal{N}_j \rightarrow \mathbb{C} : v \circ \kappa_j \in W^k(0,1)\}$$

и  $H^k(\mathcal{N}) := \prod_{j=1}^n H^k(\mathcal{N}_j)$ . Определим пространство Соболева порядка  $k$  на сети  $(\mathcal{N}, \Gamma, (T))$  с условием трансмиссии  $(T)$  как

$$H_T^k(\mathcal{N}) = \left\{ (v_j) \in H^k(\mathcal{N}) \mid \forall 0 \leq l \leq k-1, \gamma \in \Gamma: \right. \\ \left. v_{j_1}^{(l)}(\gamma) = v_{j_2}^{(l)}(\gamma) \text{ для } \gamma \in \mathcal{N}_{j_1} \cap \mathcal{N}_{j_2}, \text{ если } l \text{ четно, и} \right. \\ \left. \sum_{j: \gamma \in \mathcal{N}_j} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)^l v_j(\gamma) = 0, \text{ если } l \text{ нечетно} \right\}.$$

Теперь предположим, что эволюционное уравнение задано на каждой ветви сети  $(\mathcal{N}, \Gamma, (T))$  как

$$\frac{dv_j}{dt} = a_j(t, x) \partial_x^2 v_j(t) + b_j(t, x) \partial_x v_j(t) + f_j(t), \quad (2)$$

$v_j(t_0) = v_{0,j}, v_j(t) \equiv v_j(t, x), j = 1, \dots, n$  где функции  $a_j(t, x), b_j(t, x) \in C^\infty(I, \mathcal{N}_j)$  и  $b_j$  – вещественнозначная,  $a_j$  – неотрицательная для всех  $j = 1, \dots, n$  и  $I \subset \mathbb{R}$  – компактный интервал. Отметим, что уравнения данного типа аналогичны некоторым уравнениям Фоккера-Планка, возникающим в нейробиологии [15,16]. Предположим, что

$$A(t) := (a_j(t, x))_j \partial_x^2 + (b_j(t, x))_j \partial_x \in \mathcal{L}(H_T^{k+2}(\mathcal{N}), H_T^k(\mathcal{N})) \text{ для } k \in \mathbb{N}_0, t \in I.$$

Известно (см., например, [4]), что задача Коши для  $A(t) \in \mathcal{L}(H_T^{k+2}(\mathcal{N}), H_T^k(\mathcal{N}))$  в шкале  $(H_T^k(\mathcal{N}))_k$  является корректно поставленной. В частности, для любого  $k \in \mathbb{N}_0, v_0 \in H_T^{k+2}(\mathcal{N})$  и для  $f \in C(I; H_T^{k+2}(\mathcal{N}))$  существует единственная функция

$$v = (v_j) \in C(I; H_T^{k+2}(\mathcal{N})) \cap C^1(I; H_T^k(\mathcal{N})),$$

удовлетворяющая (2). При определенных коммутаторных предположениях, для псевдодифференциальных уравнений на сети с операторными символами, зависящими от  $x \in \mathbb{R}^m$ , диссипативность и устойчивость системы соответствует полуограниченности вещественной части символа передаточного оператора. Данный результат получен в [17]. Отметим, что в этой ситуации частотные методы из [18] неприменимы, так как линейные операторы системы зависят от  $x \in \mathbb{R}^m$ .

**Заключение.** В данном сообщении получены операторные условия устойчивости в терминах символа, которые можно рассматривать как обобщение известных частотных условий, в частности условий локальной неустойчивости Г.А. Леонова [4], и использовать для анализа сетевых моделей. Эффективность подхода показана для уравнения Бюргерса, описывающего течение жидкости в тонких каналах.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ (НШ-4196.2022.1.1) и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kudryashova, E.V., Reitmann, V. Contraction analysis of Volterra integral equations via realization theory and frequency-domain methods. AIMS Journals. 2021. (submitted)
2. Popov, S.A., Reitmann, V., Skopinov, S.N. Boundedness and finite-time stability for multivalued doubly-nonlinear evolution systems generated by a microwave heating problem. J. of Math. Sciences, 2022. Vol. 260. № 4. P. 540-554.
3. Reitmann, S., Jung, B., Kudryashova, E.V., Reitmann, V. Classification of point clouds with neural networks and continuum-type memories. In: Proceedings of 17th IFIP Int. Conference, AIAI 2021, Greece, Springer. 2021. P. 505-517.
4. Leonov, G.A., Ponomarenko, D.V., Smirnova, V.B. Frequency-domain methods for nonlinear analysis: Theory and applications. World Scientific. 1996. P. 512.
5. Shabanov, S.V. Quantization of constrained systems and path integral in curvilinear supercoordinates. J. Phys. A. 1991. Vol. 24. P. 1199-1214.
6. Caps, O. Evolution Equations in Scales of Banach Spaces. Teubner Texte zur Mathematik. 2002. P. 309.
7. Pochatkin, M.A. Hausdorff dimension estimates for the trajectory attractor of a coupled system of parabolic and Navier-Stokes equations. (Graduation Thesis), St. Petersburg State University. 2019. (in Russian)
8. Massing, A. 1D-Reduktion thermal signifikanter Aderstränge in der Hyperthermie-Modellierung. (Dipl.-Arbeit), FU Berlin. 2007.
9. Buesing, L., Bill, J., Nessler, B., Maass, W. Neural dynamics as sampling: A model for stochastic computation in recurrent networks of spiking neurons. PLoS Computational Biology. 2011. Vol. 7. № 11. P. 1-22.
10. Eliasmith, C. A unified approach to building and controlling spiking attractor networks. Neural Comput. 2005. Vol. 17. P. 1276-1314.
11. Fabbri, R., Johnson, R., Núñez, C. On the Yakubovich frequency theorem for linear non-autonomous control processes. Discrete & Continuous Dynamical Systems. 2003. Vol. 9. № 3. P. 677-704.
12. Seeholzer, A., Deger, M., Gerstner, W. Stability of working memory in continuous attractor networks under the control of short-term plasticity. PLoS Computational Biology. 2019. Vol. 15, № 4. P. 1-48.
13. Reitmann, S., Schultz, M. Computation of air traffic flow management performance with long short-term memories considering weather impact. Lecture Notes in Computer Science, Springer. 2018. Vol. 11140. P. 532-541.
14. Ali Mehmeti, F. Nonlinear Waves in Networks. Mathematical Research, Band 80, Akademie Verlag GmbH, Berlin. 1994.
15. Brunel, N. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. J. of Computational Neuroscience. 2000. Vol. 8, P. 183-208.
16. Carrillo, J.A., González, M.d.M., Gualdani, M.P., Schonbek, M.E. Classical Solutions for a nonlinear Fokker-Planck equation arising in Computational Neuroscience. Communications in Partial Differential Equations. 2013. Vol. 38. № 3. P. 385-409.
17. Mokaev, T.N., Reitmann, V. Operator symbol and commutator conditions for dissipativity and stability of pseudo-differential equations on networks. 2022. (in progress)
18. Likhtarnikov, A.L. The frequency theorem for pseudodifferential operators with analytic symbols. In: Numerical Methods for Problems of Mathematical Simulation. Leningrad. 1989. P. 80-83. (in Russian)

---

T.N. Mokaev, V. Reitmann (St. Petersburg State University, St. Petersburg). **Operator symbol conditions for stability of pseudo-differential equations on networks**

The paper deals with pseudo-differential equations on general function spaces. The class of these equations includes ODEs, PDEs, integral equations and other types of equations. Operator symbol conditions for stability are derived, which can be considered as generalizations of well-known frequency-domain conditions in absolute stability theory of control systems and can be used to study network models. The effectiveness of the approach is shown for the Burgers' equation describing fluids in thin channels.

Е.В. КУДРЯШОВА, Ф.РАЙТМАНН  
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

*В работе рассматривается использование частотных методов, применяемых для разрешимости операторных уравнений Риккати, для анализа сжимающих свойств класса нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве.*

*Идея состоит в рассмотрении системы управления, порожденной абстрактным обыкновенным дифференциальным уравнением в весовом пространстве Соболева, соответствующей уравнению Вольтерра и обладающей теми же свойствами устойчивости. Эффективность подхода показана на примере гибридной системы управления, включающей уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения.*

**Введение.** Первым шагом в выводе уравнений, описывающих динамическое поведение наблюдений, очень часто является использование интегрального уравнения Вольтерра [1,2,3], которое определяет причинно-следственные свойства или свойства входа-выхода таких наблюдений или временных рядов. Устойчивость, колебательный характер и другие качественные свойства интегрального уравнения Вольтерра можно непосредственно описать с помощью частотных методов, разработанных в [4,5,6,7].

Важные результаты по использованию частотных методов были получены в работах Г.А. Леонова и его соавторов, в частности при исследовании существования периодических решений систем, описывающих процессы бурения [8,9,10].

Однако для других типов динамического поведения, таких как неустойчивость и дихотомия, полезно рассматривать вместе с данным интегральным уравнением Вольтерра связанную с ним реализацию в виде эволюционного уравнения в некоторых функциональных пространствах.

В данной работе мы на языке интегральных уравнений продолжаем исследование бесконечномерных уравнений Вольтерра и, в частности, использование этих результатов для динамики жидкости в трубе и получения достаточных условий возникновения колебаний в такой системе [11–18].

**Существование периодических решений для интегральных уравнений Вольтерра.** В этом разделе мы рассматриваем интегральное уравнение Вольтерра вида

$$z(t) = h(t) + \int_0^t G(t-s)\phi(z(s), s) ds, \quad (1)$$

где  $G(t) \in L(U, Z)$  ( $U, Z$  – гильбертовы пространства) – дважды кусочно-дифференцируемая, удовлетворяет условиям (2.21) и (2.22) из [19] и, следовательно, имеет реализацию в пространстве состояний (2.23) – (2.28б) из [19].

Предположим, что

$$\phi: Z \times R_+ \rightarrow U \quad (2)$$

является непрерывной функцией.

Вместо одной фиксированной нелинейности  $\phi$ , рассмотрим семейство  $N$  непрерывных отображений (2), таких, что для любого  $\phi \in N$  и любого  $h \in D(A)$ , где  $D(A)$  удовлетворяет (2.24) из [19], нелинейное интегральное уравнение (1) имеет единственное решение  $z(\cdot, h, \phi)$  и это решение непрерывно. Предположим также, что существуют линейные ограниченные операторы

$Q_1 = Q_1^* \in L(Z, Z)$ ,  $Q_1 \leq 0$ ,  $Q_2 \in L(U, Z)$  и  $Q_3 = Q_3^* \in L(U, U)$ ,  $Q_3 < 0$ ,  $Q_3^{-1}$  существует, такие, что для любых  $\phi \in N$ , имеем

$$(Q_1 z, z)_Z + 2(Q_2 \phi(z, t), z)_Z + (Q_3 \phi(z, t), \phi(z, t))_U \geq 0, \forall t \geq 0, \forall z \in Z.$$

Наша цель показать существование единственного  $T$ -периодического решения интегрального уравнения Вольтерра, которое притягивает все остальные решения уравнения [19].

Следующая теорема (Теорема 5.1 из [19]) является обобщением конечномерного результата из [20].

**Теорема 1** Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$z(t) = \int_0^t G(t-s) (\phi(z(s)) + f(s)) ds + h(t), \quad (3)$$

где  $f: R \rightarrow Z$  – непрерывная  $T$ -периодическая функция,  $G(t)$  – кусочно-дифференцируемая операторная функция,  $h \in W_{-p}^{1,2}$  и  $\phi \in N$ . Пусть  $\bar{z}(t)$  – решение (3), соответствующее  $\bar{h} \in W_{-p}^{1,2}$ .

Обозначим  $\omega := z - \bar{z}$  и введем нелинейность  $\psi(\omega, t) := \phi(\bar{z}(t) + \omega(t)) - \phi(\bar{z})$ .

Предположим, что  $\phi \in N$  и интегральное уравнение

$$\omega(t) = \int_0^t G(t-s) \psi(\omega(s), s) ds + h(t) \quad (4)$$

удовлетворяет всем условиям Теоремы 4.1 из [19] для любого  $h \in W_{-p}^{1,2}$ . Предположим, что функция  $X(\lambda) := (I - G(\lambda)R)^{-1}$  – аналитическая в полуплоскости  $Re\lambda \geq -\bar{\epsilon}$ , где  $\bar{\epsilon} > 0$ . Тогда существует единственное  $h_* \in W_{-p}^{1,2}$  такое, что соответствующее решение  $z_*$  уравнения (3) при  $h = h_*$  является  $T$ -периодическим. Для любого другого  $h \in W_{-p}^{1,2}$  решение (3) стремится к  $z_*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим интегральное уравнение с возмущением  $f(t)$ :

$$z(t) = h(t) + \int_0^t G(t-s) (\phi(z(s)) + f(s)) ds. \quad (5)$$

Предположим, что  $\phi$  задано

$$z(t) = h(t) + \int_0^t G(t-s) \phi(z(s)) ds, \quad (6)$$

где  $h$  – абсолютно непрерывно, и  $h, \dot{h}$  принадлежат  $L^2(0, \infty; R)$  и  $G_1$  из [19] удовлетворяет неравенству вида

$$|G_1(t)| \leq const e^{-\epsilon_0 t} \quad (7)$$

с некоторым  $\epsilon_0 > 0$  и таким, что  $G_1$  и  $\dot{G}_1$  принадлежат  $L^2(0, \infty; R)$ .

Также, предполагаем, что  $G$  – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству  $0 < G(t) \leq e^{-t}, t > 0$ .

В качестве начальных функций  $h$  в (5) возьмем функции  $h(t) = be^{\epsilon t}, t > 0$ , с различными параметрами  $b > 0$  и  $\epsilon < 0$ . С помощью Python получены численные решения интегрального уравнения (5).

На рис.1 показано асимптотическое поведение решений уравнения (5) для периодической функции возмущения  $f(t) = \sin(t)$  и различных начальных функций  $h(t)$ . На рисунке показано образование притягивающего периодического решения, согласно Теореме 1.

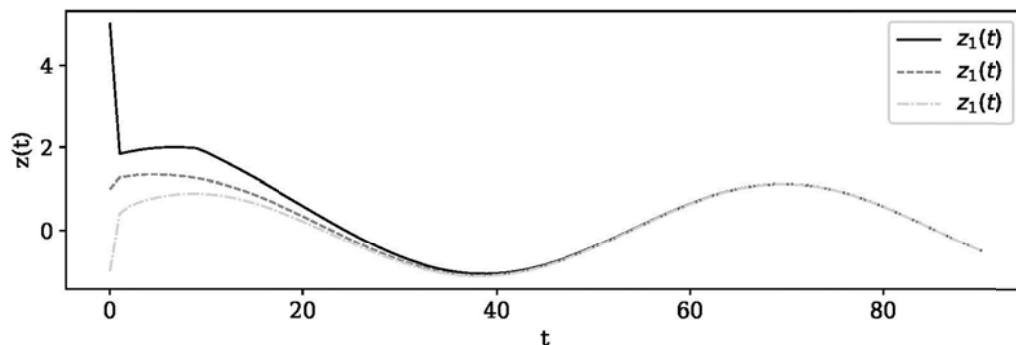


Рис. 1

**Заключение.** В данной работе исследуются устойчивость, неустойчивость и колебательные свойства нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. Основным инструментом



используемого анализа, восходящим к [20], является процедура, связывающая ядро интегрального уравнения с полупотоком в некотором функциональном пространстве и описывающая свойства возможных нелинейностей в интегральном уравнении квадратичными формами в некоторых гильбертовых пространствах.

Для абстрактной эволюционной системы, которую можно рассматривать как уравнение переноса, мы исследуем задачу оптимального управления, используя квадратичные формы для построения функционала стоимости. Преобразования Фурье и уравнение Парсевала позволяют доказать существование оптимального управления, а отсюда и разрешимость некоторого операторного уравнения Риккати. Из-за гиперболического характера задачи переноса, вместо квадратичного уравнения Риккати имеем линейное уравнение Ляпунова для определения функции Ляпунова (см. также [21]).

Эффективность подхода продемонстрирована на примере гибридной системы управления, включающей уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения. Применение Теоремы 1 приводит к скалярному интегральному уравнению, которое показывает существование притягивающего периодического решения для гибридной системы. Результаты статьи могут быть использованы для построения нейронных сетей [15, 16]. Численная схема сокращает время вычислений по сравнению со стандартными схемами. Другими приложениями являются исследование устойчивости [22] и вывод оценок размерности и энтропии на римановых многообразиях [23–26]. В отличие от теории размерности в линейных пространствах, свойства метрического тензора, кривизны, группы гомологии и другие геометрические свойства многообразия оказывают влияние на построение частично сжимающей метрики для оценки размерности.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ НШ-4196.2022.1.1. и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абдалова Ю.А., Райтманн Ф. Анализ устойчивости функциональных уравнений типа Вольтера с помощью метода реализации. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 1683–1691.
2. Banks H. T., Fabiano R. H., Wang Y., Inverse problem techniques for beams with tip body and time hysteresis damping. Mat. Applic. Comp. 1989. № 8. P. 101–118.
3. Tobias T. A., Engelbrekt Yu. K. Inverse problems for evolution equations of the integrodifferential type. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1985. № 49, 4. P. 519–524.
4. Desoer C. A., Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic Press, 1975.
5. Popov V. M. Dichotomy and stability by frequency-domain methods. Proc. IEEE. 1974. № 62. P. 548–562.
6. Смирнова В.Б. Об асимптотическом поведении одного класса систем регулирования с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика. 1973. № 11. С. 5–12.
7. Якубович В. А. К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем. Вестник С.-Петерб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех. и астрон. 1977. № 13. С. 99–118.
8. Kiseleva M., Kondratyeva N., Kuznetsov N., Leonov G. Hidden oscillations in electromechanical systems (Book Chapter). Dynamics and Control of Advanced Structures and Machines, 2016. P. 119–124.
9. Kiseleva M., Kuznetsov N., Leonov G. Theory of differential inclusions and its application in mechanics (Book Chapter). New Perspectives and Applications of Modern Control Theory: In Honor of Alexander S. Poznyak, 2017. P. 219–239.
10. Kiseleva M.A., Kondratyeva N.V., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Hidden oscillations in drilling systems with salient pole synchronous motor. IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. № 11. P. 700–705.
11. Reitmann V. Realization theory methods for the stability investigation of nonlinear infinite-dimensional input-output systems. Mathematica Bohemica. 2011. № 136. P. 185–194.
12. Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B. Convergent Solutions of Ordinary and Functional-Differential Pendulum-Like Equations. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1992. № 11. P. 107–116.
13. Gelig A. Kh., Churilov A. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Birkhauser, Basel, 1998.
14. Halanay A. On the asymptotic behavior of the solutions of an integro-differential equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. № 10. P. 319–324.
15. Reitmann S., Jung B., Kudryashova E.V., Reitmann V. Classification of point clouds with neural networks and continuum-type memories. In: Artificial Intelligence Applications and Innovations (eds. I. Maglogiannis, J. Macintyre and L. Iliadis). IFIP Advances in Information and Communication Technology series. Springer. 2021. Vol.17. P. 627.
16. Reitmann S., Jung B., Kudryashova E., Reitmann V. Observation stability and convergence for neural-type evolutionary variational inequalities. Differentsialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia, 2021. № 2. P. 126–155.
17. Barbu V. Nonlinear Volterra equations in a Hilbert space. SIAM J. Math. Anal. 1975. № 6. P.728–741.

18. Coleman B. D., Gurtin M. E. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*. 1967. № 18. P. 199–208.
19. Kudryashova E.V., Reitmann V. Contraction analysis of Volterra integral equations via realization theory and frequency-domain methods. *Journal of Computational Dynamics*, Special issue "Computation of Lyapunov functions and contraction metrics". Eds. Prof. P. Giesl, Prof. S. Hafstein (accepted).
20. Брусин В. А., Аппарат абстрактных дифференциальных уравнений в исследовании интегральных уравнений типа Вольтерра. *Сибирский математический журнал*. 1977. Т. XVIII. № 6. С. 1246–258.
21. Triggiani R. An optimal control problem with unbounded control operator and unbounded observation operator where the algebraic Riccati equation is satisfied as a Lyapunov equation. *Appl. Math. Lett.* 1997. № 10. P. 95–162.
22. Giesl P. Converse theorems on contraction metrics for an equilibrium. *J. Math. Anal. And Appl.* 2015. № 424. P. 1380–1403.
23. Kruk A. V., Reitmann V., Upper Hausdorff dimension estimates for invariant sets of evolutionary systems on Hilbert manifolds. *Proc. of Equadiff*, Bratislava. 2017. P. 247–254.
24. Kruk A. V., Malykh A. E., Reitmann V. Upper bounds for the Hausdorff dimension and the stratification of an invariant set of an evolution system on a Hilbert manifold. *J. Diff. Equ.* 2017. № 53. P. 1715–1733.
25. Kuznetsov N. V., Reitmann V. *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*. Dedicated to Gennady Leonov. Springer, 2021.
26. Reitmann V., Anikushin M. M., Romanov A. O. Dimension-like properties and almost periodicity for cocycles generated by variational inequalities with delay. *Book of Abstracts, Int. Conf. Equadiff, Leiden*. 2019. P. 90.

---

E.V. Kudryashova, V. Reitmann (St. Petersburg State University, St. Petersburg). **Volterra integral equations for modelling neural networks**

Frequency-domain methods for the solvability of Riccati operator equations are used for the contraction analysis of a class of nonlinear Volterra integral equations in a Hilbert space. The key idea is to consider a control system generated by an abstract ODE in some weighted Sobolev space, which is similar to the Volterra equation and has the same stability properties. The effectiveness of the approach is shown by the example of a hybrid control system that includes partial differential equations and ordinary differential equations.

Т.А. АЛЕКСЕЕВА

(Санкт-Петербургская школа физико-математических и компьютерных наук, департамент математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург)

А.Ю. БЕЛЯЕВ

(Санкт-Петербургский государственный университет, ООО «Арлойд Аутомейшн», Санкт-Петербург)

Н.В. КУЗНЕЦОВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

Т.Н. МОКАЕВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ЦЕН НА СЕТЕВЫХ РЫНКАХ: НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕХНОЛОГИИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

*Прогнозирование динамики цен на сетевых рынках связано с ключевой концепцией в экономике – ожиданиями экономических агентов относительно будущих значений экономических показателей. Мы используем сочетание технологий искусственного интеллекта и метода управления с обратной связью для выявления нерегулярного поведения и подавления хаотического режима в пространственно-временной модели ценообразования на глобальном рынке товаров, представленной отображением Эно. Это улучшает надежность предсказания и настройку экономического механизма для достижения максимальной эффективности принятия решений.*

**Введение.** Ожидания (или убеждения) играют важную роль в экономическом моделировании. Принимая решения, экономические агенты формируют ожидания относительно будущих значений переменных. Поэтому, как правило, в любой динамической экономической модели необходимо моделировать представления людей, например, о будущих ценах. Поскольку поведение экономических систем может носить нерегулярный характер, который проявляется в виде периодической и даже хаотической динамики, то надежность прогнозов в таких случаях существенно снижается, а иногда предсказать будущее становится практически невозможно. В связи с этим выявление критических режимов в экономическом механизме, анализ предельного поведения и стабилизация нерегулярной динамики таких моделей является важной задачей.

В данной работе построена математическая модель ценообразования на глобальном рынке сетевого типа, который может быть представлен в виде одномерной решетчатой пространственно-временной модели. Далее в этой модели проведено исследование ее нелинейной динамики, связанной с формированием цен на локальных рынках, которые моделируются логистическим отображением, и показано, что глобальная динамика цен может быть хаотической. На примере этой модели продемонстрирована эффективность сочетания машинного обучения с подкреплением и метода управления с обратной связью и задержкой по времени, предложенного К. Пирагасом [1], для выявления нестабильных периодических решений и дальнейшего подавления хаотического поведения, что позволяет улучшить прогнозирование ценообразования на рынках товаров и дать рекомендации для оптимального формирования ожиданий экономических агентов.

**Экономическая мотивация и решение задачи прогнозирования и управления.** Одним из естественных экономических механизмов, в котором формируется нерегулярная динамика, является ценообразование на рынках товаров краткосрочного хранения, например, на рынках торговли рыбной и сельскохозяйственной продукцией. Подобные эффекты могут описываться каким-либо из типов паутинообразной модели с нелинейными функциями спроса и/или предложения и различными видами ожиданий экономических агентов (наивными, рациональными, адаптивными) [2–4]. Кроме того, в экономическом контексте интерес может представлять про-

странственно-временное поведение модели, связанное с взаимодействием локальных рынков и их влиянием на глобальное ценообразование, которое может демонстрировать нерегулярную динамику, в том числе хаотическую [5].

**Построение модели и анализ нелинейной динамики.** Эффективным инструментом для моделирования и анализа такого поведения динамических систем в различных областях являются решеточные динамические системы (РДС) [6,7]. В нашей работе конструируется экономика, в которой глобальный рынок состоит из сети локальных рынков, представленных двумя типами чередующихся узлов – рынками с более высоким и более низким предпочтением в потреблении товаров. Это приводит к модели глобальной торговли, в которой стационарный чистый приток товаров на различные типы рынков имеет противоположные направления. В каждом узле  $j$   $d$ -размерной решетки  $\mathbb{Z}^d$  задается конечно-размерная локальная динамическая система в виде отображения  $f_j : M_j \rightarrow M_j$ , где  $M_j \in \mathbb{R}^1 \forall j \in \mathbb{Z}$  (для простоты возьмем  $d=1$ ) – локальное фазовое пространство в узле  $j$  или бесконечная сеть,  $\mathbb{R}^1$  – одномерное евклидово пространство. Динамика глобального рынка может быть описана следующей РДС

$$p_j^{(\tau+1)} = \left( \Phi \left( p^{(\tau)} \right) \right)_j = (1-\alpha)p_j^{(\tau)} + \alpha f \left( p_j^{(\tau)} \right) + \varepsilon \left( p_{j-1}^{(\tau)} - 2p_j^{(\tau)} + p_{j+1}^{(\tau)} \right), \quad (1)$$

где  $\Phi$  – эволюционный оператор,  $\tau$  – время,  $p_j^{(\tau)}$  – цена товара на рынке  $j$ ,  $f \left( p_j^{(\tau)} \right)$  – функция, описывающая динамику цены на локальном рынке (т.е. в узле  $j$ ),  $\alpha \in (0, 1]$  – среднее взвешенное  $p_j^{(\tau)}$  и  $f \left( p_j^{(\tau)} \right)$ ,  $\varepsilon$  – коэффициент диффузии как мера взаимодействия соседних узлов (локальных рынков). Динамика локального рынка в экономическом равновесии и в предположении, что ожидания агентов являются наивными, функция спроса – линейная, функция предложения представлена логистическим отображением, моделируется следующим образом

$$f \left( p_j \right) = 1 - \lambda p_j \left( 1 - p_j \right). \quad (2)$$

Для стационарного решения  $p^{(\tau)} = \{ p_j^{(\tau)} \} = p_j, \forall j \in \mathbb{Z}^+$  модели (1) с учетом направления потоков товаров между узлами (локальными рынками) разных типов и динамики ценообразования на локальных рынках (2) мы получаем следующую модель

$$p_{j+1} = \frac{1}{\gamma_2} \left( -\beta - \gamma_1 p_{j-1} + (2 + \beta(1 + \lambda)) p_j - \beta \lambda p_j^2 \right), \quad (3)$$

где  $p_j$  – цена товара на локальном рынке  $j$ , параметры  $\gamma_1, \gamma_2$  ( $1 < \gamma_1 < \gamma_2$ ) – коэффициенты масштабирования цены в зависимости от направления потока товара на глобальном рынке,  $\lambda \in (0, 4]$  – параметр логистического отображения, описывающего предложение товара на локальном рынке,  $\beta = \frac{\alpha}{\varepsilon}$ . Модель (3) линейным преобразованием  $p_{j-1} \rightarrow d_1 x + d_2, p_j \rightarrow d_1 y + d_2$  может быть сведена к отображению Эно  $H_{a,b} = (a + by - x^2, x)$ , где  $a = a(\gamma_1, \gamma_2, \beta, \lambda)$ ,  $b = b(\gamma_1, \gamma_2) \in (-1, 0)$ ,  $d_1 = a(\gamma_2, \beta, \lambda)$ ,  $d_2 = a(\beta, \lambda)$  – числовые параметры.

Несмотря на достаточно простое аналитическое представление отображение Эно  $H_{a,b}$  обладает богатым спектром нетривиальной динамики, включая мультистабильность и хаотический режим [8], и оставляет обширное поле открытых задач (например, в [9] было исследовано возможное существование скрытых аттракторов [10–12]), которые стимулируют применение все более искусных аналитических и численных приемов и инструментов, основанных на технологиях искусственного интеллекта.

**Прогнозирование и управление на основе машинного обучения с подкреплением и методов Пирагаса.** Поскольку нерегулярная, в том числе хаотическая динамика, нежелательное яв-

ление в экономике, снижающее предсказуемость экономической деятельности, а, следовательно, ее регулирование, то разработка и применение эффективных методов подавления хаоса и приведения динамики модели к устойчивому режиму с помощью малых воздействий являются важными задачами. Впервые эти задачи были сформулированы известными американскими физиками Э. Оттом, К. Гребоджи и Дж. Йорком [13] в 90-е годы прошлого столетия и до сих пор представляют большой интерес. Ключевой идеей различных методов стабилизации хаоса является локализация неустойчивых состояний равновесия или периодических траекторий, вложенных в хаотический аттрактор, с помощью малых возмущений системы в форме специального управления. Одним из известных методов стабилизации неустойчивых периодических орбит является метод К. Пирагаса, основанный на введении в систему обратной связи с запаздыванием. Для корректной работы этого метода требуется вычислить точное значение периода орбиты, правильно подобрать значение коэффициента обратной связи, а также указать начальные данные, из которых стабилизированная неустойчивая периодическая орбита может быть локализована. Поэтому в последнее время активно развиваются различные подходы, связанные с использованием современных методов машинного обучения, в рамках которых проблема стабилизации и поиска соответствующего контроллера ставится в виде задачи оптимального управления, позволяющего максимизировать некоторую величину, называемую вознаграждение, характеризующую изменение состояния динамической системы в результате воздействия на нее управляющего агента. Одним из таких методов является метод *актор-критика* (actor-critic) [14,15], развитый в рамках концепции *обучения с подкреплением* [16]. Являясь расширением подходов градиента политики, в которых модель пытается обучить (оптимизировать) политику, параллельно используя ее для исследования окружения, метод актор-критика заимствует из другого класса методов – методов Q-обучения (Q-learning) – функцию ценности для оценки выбранных действий вместо вознаграждений, выданных непосредственно окружением.

В данной работе представлены результаты применения метода глубокого обучения (т.е. использующего нейронные сети для оптимизации модели актор-критик) для конструирования управления по Пирагасу и стабилизации хаоса в системе (3).

**Заключение.** Выявление нерегулярного режима, в том числе хаотического, и стабилизация этой сложной динамики с помощью управления в моделях экономики существенно улучшает прогнозирование экономических процессов и, тем самым, оптимизирует систему принятия управленческих решений. Значительный прогресс в решении этой нетривиальной задачи возможен за счет применения сочетания технологий искусственного интеллекта – метода Q-обучения, и метода управления с задержкой обратной связи К. Пирагаса. Применение этого подхода к модели ценообразования на глобальном рынке сетевого типа, представленной в нашей работе, показывает его эффективность для задач такого класса, позволяя не только идентифицировать критические состояния и стабилизировать хаотическую динамику, но и продвигаться в тестировании мощных инструментов искусственного интеллекта для формирования рекомендаций для принятия решений в области экономической политики.

*Работа выполнена при поддержке гранта Ведущей научной школы Российской Федерации (НШ-4196.2022.1.1) и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421–428.
2. Hommes C.H. On the consistency of backward-looking expectations: the case of the cobweb. Journal of Economic Behavior and Organization. 1998. Vol. 33. P. 333–362.
3. Goeree J.K., Hommes C.H. Heterogeneous beliefs and the non-linear cobweb model. Journal of Economic Dynamics and Control. 2000. Vol. 24. P. 761–798.
4. Chiarella C., Dieci R., Gardini L. Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents. Journal of Economic Dynamics and Control. 2006. Vol. 30. P. 1755–1786.
5. Kim Y.-I. Stationary global dynamics of local markets with quadratic supplies Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series B-Pure and Applied Mathematics. 2009. Vol. 16. №4. P. 427–441.
6. Afraimovich V. Some Topological Properties of Lattice Dynamical Systems. In: Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems. Lecture Notes in Physics. Springer. 2005. Vol. 671. P. 153–179.

7. Chow S.N. Lattice Dynamical Systems. In: Macki, J.W., Zecca, P. (eds) Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 2003. Vol. 1822. P. 1–102.
8. Feit S.D. Characteristic Exponents and Strange Attractors. Communications in Mathematical Physics. 1978. Vol. 61. P. 249–260.
9. Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. Perpetual points and periodic perpetual loci in maps. Chaos. 2016. Vol. 26. 103103.
10. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. Известия РАН. Теория и Системы управления. 2020. №5. С. 5–27.
11. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion. Eur. Phys. J. Spec. Top. 2015. Vol. 224, P. 1421–1458.
12. Kuznetsov N., Leonov G., Mokaev T., Prasad A., Shrimali M. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system. Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 92. P. 267–285.
13. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos. Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 1196–1199.
14. Watkins C. Learning from Delayed Rewards (Ph.D. thesis). University of Cambridge. 1989.
15. Watkins C., Dayan P. Q-learning. Machine Learning. 1992. Vol. 8. №3–4. P. 279–292.
16. Sutton R., Barto A. Introduction to Reinforcement Learning. Cambridge: MIT press, 1998.

---

T.A. Alexeeva (St. Petersburg school of physics, mathematics, and computer science, Department of mathematics, HSE University, St. Petersburg), A.Y. Belyaev (Department of applied cybernetics, St.Petersburg University; “Arloyd Automation” LLC, St.Petersburg), N.V. Kuznetsov (Department of applied cybernetics, St.Petersburg University; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St.Petersburg), T.N. Mokaev (Department of applied cybernetics, St.Petersburg University, St.Petersburg). **Commodity price forecasting and chaos control in network markets: non-linear analysis and artificial intelligence technologies.**

Forecasting the dynamics of prices in network markets is associated with a core concept in the economics - the economic agents' expectations with respect to the future values of economic indicators. We use a mix of artificial intelligence technologies and a feedback control method to reveal irregular behavior and suppress the chaotic regime in the space-time pricing model in the global market for goods represented by the Henon mapping. This improves the reliability of the prediction and the tuning of the economic mechanism to achieve maximum decision-making efficiency.

Т.А. АЛЕКСЕЕВА

(Санкт-Петербургская школа физико-математических и компьютерных наук, департамент математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург)

Т.Н. МОКАЕВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)

*In memoriam G.A. Leonov – magister et amicus in aeternum*

## УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМОМ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ В МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ/СБЕРЕЖЕНИЯ С ФИСКАЛЬНОЙ ПОЛИТИКОЙ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

*Моделирование механизма потребления/сбережения – одна из центральных задач изучения поведения экономических агентов в различных условиях. Налоговая политика, влияющая на характер поведения агентов, может использоваться для контроля этого механизма. Вместе с тем, возникающая в модели нерегулярная и даже хаотическая динамика, требует введение внешнего управления. Применение эффективного подхода на основе метода управления с обратной связью и эволюционных алгоритмов позволяет стабилизировать нерегулярную динамику, настроить управляющее воздействие и спрогнозировать оптимальные действия агентов.*

**Введение.** Моделирование экономических явлений прежде всего нацелено на описание и анализ конкретных механизмов, которые, с одной стороны, влияют на состояние экономической системы в целом, с другой – представляют самостоятельный интерес для исследования. Одним из таких механизмов является динамический процесс потребления и сбережения экономических агентов (домохозяйств или репрезентативных потребителей) [1] без учета производственной составляющей (т.е. когда доход экономических агентов предполагается заданным экзогенно) [2] при наличии динамически регрессивной фискальной политики, с помощью которой регулируется распределение потребления и сбережений. В этом механизме за счет вмешательства налоговой системы может возникать нерегулярная, в том числе хаотическая динамика, что значительно снижает надежность принятия решений агентами, а также меру воздействия фискальной политики. Поэтому одной из важных задач является выявление нерегулярной динамики и ее стабилизация с помощью дополнительных инструментов управления.

В данной работе показано, что механизм потребления-сбережения в указанных выше условиях может быть реализован в рамках одной из моделей Ресслера [3,4], которая позволяет продемонстрировать различные типы поведения рассматриваемого экономического механизма, прежде всего хаотическую динамику [5,6]. Налоговая политика моделируется как контролирующая компонента, которая может приводить к нерегулярному режиму в случае критического отклонения сбережений от целевого уровня. Тогда включение в модель внешнего управления дает возможность стабилизировать хаотическую динамику и повысить предсказательную силу модели. Эта задача может быть успешно решена путем последовательного применения управления в виде обратной связи с запаздыванием, основанного на методе К. Пирагаса [7], и эволюционных алгоритмов для настройки этого управления.

**Построение модели и стабилизация нерегулярной динамики.** Моделирование поведения экономических агентов в рамках экономики без учета производственной составляющей может опираться на концепцию так называемой эндаумент-экономики [2]. В каждый момент времени потребители получают некоторый доход, который они могут потреблять или сберегать. Предполагается, что процентная ставка в периоде фиксирована, и склонность к сбережению и потреблению изменяется по правилу положительной обратной связи в зависимости от активов потребителей с целью оптимизации (максимизации) их функции полезности (благополучия). Кроме того, каждый потребитель облагается паушальным налогом, который может корректироваться в зависимости от уровня сбережений потребителя. Это означает, что налоговую систему

можно рассматривать как «динамически регрессивную»: потребители, которые сберегают больше в текущий период, столкнутся с более высокими налогами в будущем, а потребители с более высоким потреблением будут ожидать более низких налогов в последующих периодах. Представленный механизм может быть описан следующей моделью Ресслера [3]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - cz + xz,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x$  – сбережения,  $y$  – активы,  $z$  – паушальный налог, который принимается потребителями как заданный; соответственно, параметры (1) означают  $a$  – процентная ставка,  $b$  – управляющий параметр фискальной политики,  $c$  – целевой уровень сбережений. Поведение потребителей в рамках этой модели может демонстрировать хаотическую динамику в распределении активов на потребление и сбережение под влиянием налогового контроля через паушальный налог. Сложный характер динамики может предполагать, в том числе, и наличие скрытых колебаний [8–11]. В этих условиях потребителям сложно предсказать свои действия, а налоговому органу обеспечить стабилизирующую политику. В связи с этим важной задачей является введение дополнительной внешней управляющей функции, которая позволит подавить хаотический режим и улучшить прогнозирование поведения агентов и воздействие фискальной политики. Экономический аспект рассматриваемой проблемы требует тонкой и точной настройки управления с учетом начальных данных и допустимых параметров модели [12]. Поэтому для реализации этой задачи в работе применяется эффективный подход, сочетающий добавление в модель внешней обратной связи с запаздыванием, предложенный К. Пирагасом, что позволяет с помощью малых воздействий стабилизировать неустойчивые периодические орбиты [13,14], и наиболее мощные эволюционные алгоритмы, а именно алгоритмы дифференциальной эволюции (differential evolution, DE) [15] и самоорганизованной миграции (self-organized migration algorithm, SOMA) [16] для тонкой настройки управляющего воздействия соответствующего контроллера. Эволюционные алгоритмы играют здесь ключевую роль как эффективные инструменты поиска оптимальных значений сложных негладких целевых функций, к которому сводится задача настройки параметров управления.

**Заключение.** Представленная модель потребления/сбережения под влиянием фискальной политики позволяет изучить механизм поведения экономических агентов при принятии решений в условиях нерегулярного, в том числе хаотического, режима в рассматриваемой экономике без производственной составляющей. Регуляционные воздействия налоговой системы внутри модели через взаимодействие фискальной политики и паттернов сберегательного поведения потребителей могут быть скорректированы внешним управлением для стабилизации нерегулярной динамики в этом экономическом механизме. В данной работе продемонстрирована эффективность применения методов управления с запаздывающей обратной связью и эволюционных алгоритмов для решения этой задачи.

*Работа выполнена при поддержке гранта Ведущей научной школы Российской Федерации (НШ-4196.2022.1.1). Авторы посвящают эту работу памяти своего учителя Г.А. Леонова, при непосредственном участии которого она была начата, и выражают глубокую признательность многолетнему декану факультета Информационных технологий Университета Ювяскюля и Почетному профессору СПбГУ Пекке Нейттаанмяки, мотивировавшему данное исследование своими идеями о приложении представленных подходов к экономическим задачам*  
<https://youtu.be/zV5MUHK9Q4s?t=5684>

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Attanasio O.P., Banks J. The assessment: household saving – issues in theory and policy. *Oxford Review of Economic Policy*. 2001. Vol. 17. №1. P. 1–19.
2. Evans G.W., Honkapohja S., Mitra K. Anticipated fiscal policy and adaptive learning. *Journal of Monetary Economics*. 2009. Vol. 56. №7. P. 930–953.
3. Rossler O.E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*. 1976. Vol. 57. №5. P. 397–398.
4. **Goodwin R.** Chaotic economic dynamics. Oxford: Clarendon Press, 2019.



5. Leonov G.A., Alexeeva T.A. Lyapunov functions in estimates of attractor dimensions for generalized Rössler systems. *Dokl. Math.* 2015. Vol. 91. P. 5–8.
6. Kuznetsov N.V., Mokaev T.N., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A., Danca M.-F. On lower-bound estimates of the Lyapunov dimension and topological entropy for the Rossler systems. *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52. №18. P. 97–102.
7. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*. 1992. Vol. 170. P. 421–428.
8. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. *Известия РАН. Теория и Системы управления*. 2020. №5. С. 5–27.
9. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2015. Vol. 224, P. 1421–1458.
10. Kuznetsov N., Leonov G., Mokaev T., Prasad A., Shrimali M. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 92. P. 267–285.
11. Leonov G.A., Kiseleva M.A., Kuznetsov N.V., Neittaanmäki P. Hidden oscillations in drilling systems: torsional vibrations. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 2. №1. P. 83–94.
12. Barnett W.A., Bella G., Ghosh T., Mattana P., Venturi B. Shilnikov chaos, low interest rates, and New Keynesian macroeconomics. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2022. Vol. 134. 104291.
13. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Shumafov M.M. A short survey on Pyragas time-delay feedback stabilization and odd number limitation. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48. №11. P. 706–709.
14. Leonov G. A. Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain. *Systems & Control Letters*. 2014. Vol. 69. P. 34–37.
15. **Price K.V.** Differential evolution. In: *Handbook of optimization*. Springer, 2013. P. 187–214.
16. Self-Organizing migrating algorithm: methodology and implementation. Davendra D., Zelinka I. (eds.). Springer, 2016.

---

T.A. Alexeeva (St. Petersburg school of physics, mathematics, and computer science, Department of mathematics, HSE University, St.Petersburg), T.N. Mokaev (Department of applied cybernetics, St.Petersburg University, St.Petersburg). **Controlling the mechanism of irregular dynamics in the consumption/saving model with fiscal policy based on artificial intelligence technologies.**

Modeling the mechanism of consumption/saving is one of the central problems of studying the behavior of economic agents in various conditions. Fiscal policy, which efforts the behavior of agents, can be used to control this mechanism. Meanwhile the irregular and even chaotic dynamics that arise in the model requires to introduce an additional external control. Using an effective approach based on the feedback control method with time-delay and evolutionary algorithms makes it possible to stabilize irregular dynamics, fine-tune the control action, and forecast the optimal behavior of agents.

Н.В. КУЗНЕЦОВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет,  
Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

Е.Д. АКимова

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург)**ЗАДАЧА АНДРОНОВА-ВЫШНЕГРАДСКОГО И ЕЁ ВЛИЯНИЕ НА РАЗВИТИЕ  
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ***Посвящается Александру Александровичу Андронову.**В настоящем докладе будет обсуждаться основополагающий вклад работ А.А. Андропова, первого академика АН СССР по теории управления, в контексте развития теории управления и кибернетики. В частности, будет показана история развития ключевых идей, подходов и методов, предложенных А.А. Андроновым в теории колебаний и теории устойчивости, в том числе связанная с Ленинградской научной школой кибернетики В.И. Якубовича и Г.А. Леонова, а также текущее состояние данной области исследований.*

**Введение.** Классические задачи теории автоматического регулирования связаны с проектированием автоматических регуляторов, которые должны были обеспечить переход динамики объекта управления к рабочему режиму и его устойчивость относительно внешних возмущений. Задачи исследования устойчивости рабочего режима регуляторов были одними из первых, получивших математическую постановку и решение, например, в работах Д.К. Максвелла, И.А. Вышнеградского и А. Стодолы [1], и привели к рождению теории колебаний и теории глобальной устойчивости.

В этом докладе наше внимание будет сосредоточено на основной задаче прямого регулирования, сформулированной Иваном Алексеевичем Вышнеградским в 1877 году [2], её решении, предложенном Александром Александровичем Андроновым и Артемием Григорьевичем Майером в статье 1944 года [3], и влиянии, которое эта задача оказала на становление и дальнейшее развитие теории управления.

**Задача Андропова-Вышнеградского.** И.А. Вышнеградский по праву считается одним из создателей математической теории управления. В своей фундаментальной работе «О регуляторах прямого действия» [2] он исследовал замкнутую динамическую «регулятор + турбина» (см. Рис.1) и с помощью линейного анализа (путём отбрасывания сухого трения) получил условия локальной устойчивости рассматриваемой системы. Данная работа вызвала широкий резонанс, поскольку строго обоснования проведения процедуры линеаризации для исследуемой системы Вышнеградским приведено не было, а также не была строго показана связь полученных результатов с отсутствием колебательных режимов. Позднее были опубликованы работы, показывающие, что возникновение предельных периодических колебаний в системах с сухим трением возможно [4]. Подход, предложенный Вышнеградским, ставился под сомнение и критиковался, например, в работе Н.Е. Жуковского [5]. В течение почти семидесяти лет как российские, так и зарубежные учёные предпринимали попытки приведения строгого доказательства поставленной задачи [5-9], однако результатов, которые бы полностью решали задачу, получить не удавалось.

Уравнения Вышнеградского, описывающие движение регулятора с учетом вязкого и кулоновского трения и динамику машины могут быть записаны в виде

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = y - \frac{1}{2} \text{sign}(\dot{x}), \quad \dot{y} = -x. \quad \#(1)$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  носят название главных параметров теории прямого регулирования, или параметров Вышнеградского.

В начале XX века в СССР систематическое изучение предельных циклов проводилось под руководством А.А. Андропова. Им была разработана математическая теория колебаний, позволявшая объяснить поведение многих нелинейных двухмерных систем [10]. Начиная 1944 года,

Андронов активно занимался применением разработанной им теории колебаний к задачам автоматического регулирования. Одними из первых его результатов стали доказательство достаточности условий Вышнеградского для отсутствия колебаний и глобальной устойчивости рабочего режима, а также осуществление строгого нелокального анализа нелинейной модели (1) регулятора Уатта с сухим трением [3]. Отметим, что успешность доказательства была обусловлена тем, что в указанной работе задача Вышнеградского впервые была рассмотрена в контексте теории нелинейных колебаний. Глобальный анализ, выполненный Андроновым и Майером с помощью теории точечных преобразований, включал в себя довольно трудные и длинные рассуждения, занявшие более сорока страниц [11, 12]. Значимость этих результатов была отмечена при избрании А.А. Андропова в 1946 году действительным членом Академии наук СССР по Отделению технических наук, где он стал первым академиком по теории управления [13].

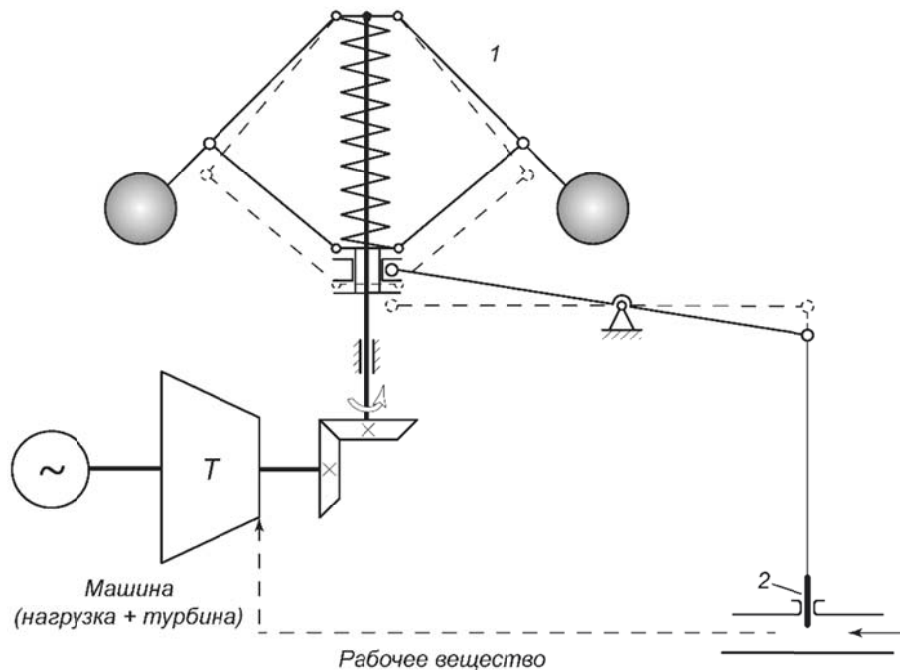


Рис. 1: Регулятор Уатта

**Колебания и глобальная устойчивость систем управления.** Как было показано на примере задачи Андропова-Вышнеградского, анализ глобальной устойчивости разрывных систем управления с помощью аналитических методов зачастую является довольно трудной задачей, в связи с чем в конце XIX – начале XX веков стали разрабатываться различные методы поиска периодических колебаний. Одним из самых распространённых таких методов на момент публикации Андроновым его работ являлся классический метод гармонического баланса (и его модификации). Он является приближённым методом вычисления значений амплитуды и частоты периодических колебаний в нелинейных системах.

Согласно методу гармонического баланса, для глобальной устойчивости системы (1) необходимо, чтобы выполнялись условия  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha\beta > 1$  [14]. Данные условия совпадают с локальным анализом, проведённым И.А. Вышнеградским в [2] и, таким образом, были строго обоснованы Андроновым и Майером в [3]. Стоит отметить, что в некоторых случаях применение метода гармонического баланса ведёт к неправильным выводам о наличии или отсутствии колебаний [15, 16].

Благодаря развитию теории глобальной устойчивости и перенесению классических результатов на случай разрывных систем [17, 18], в настоящее время глобальный анализ системы (1) можно провести с помощью построения разрывной функции Ляпунова:

$$V(x) = \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{\beta} x_1 + x_2 \right)^2 + \frac{1}{8} (2(\beta x_1 - x_3) + \psi(x))^2 + \frac{1}{2\beta} x_2 \psi(x) - \#(2)$$

$$-\frac{1}{2\beta} \int_0^{x_2} \left( 2 \frac{\alpha\beta - 1}{\beta} s + \varphi(s) \right) ds \geq 0,$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 \frac{\alpha\beta - 1}{\beta} x_2 + \varphi(x_2), & \text{если } x_2 \neq 0, \\ 1, & \text{если } x_2 = 0, \quad 2(x_3 - \beta x_1) > 1, \\ -1, & \text{если } x_2 = 0, \quad 2(x_3 - \beta x_1) < -1, \\ 2(x_3 - \beta x_1), & \text{если } x_2 = 0, \quad 2|x_3 - \beta x_1| > 1. \end{cases}$$

Позднее, в 1953 году, А.А. Талем была опубликована работа [19], в которой им была рассмотрена модель, являющаяся обобщением модели регулятора Уатта, описанной Вышнеградским. Таль, следуя результатам, полученным Андроновым и Майером [3, 10], провёл аналогичные рассуждения и получил условия глобальной устойчивости рассматриваемой им модели для некоторых значений параметров.

Также стоит обратить внимание, что если в XX веке для анализа глобальной устойчивости систем управления использовались методы поиска периодических решений, то на данный момент на практике часто применяется численное исследование фазового пространства системы, что в некоторых случаях может приводить к неверным результатам. Так, при численном анализе для определения наличия колебаний производится моделирование решений с начальными данными в окрестности неустойчивого состояния равновесия и исследуется их поведение: такие решения могут притягиваться к устойчивым колебательным режимам – *самовозбуждающимся колебаниям*, другим устойчивым состояниям равновесия или неограниченно возрастать. Однако в фазовом пространстве некоторых систем могут присутствовать *скрытые колебания*, область притяжения которых не пересекается с малыми окрестностями неустойчивых состояний равновесия, что делает невозможным их локализацию с помощью стандартных численных процедур [15].

Ещё одна трудность численного анализа связана с исследованием моделей регуляторов, которые описываются системами дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями: при моделировании решений таких систем разрывная функция часто заменяется на «похожую» гладкую или кусочно-гладкую функцию. В некоторых случаях в фазовом пространстве «сглаженной» системы могут появляться нежелательные скрытые колебания. Подобную ситуацию можно наблюдать, например, в модели регулятора Уатта с сервомотором, которая получается из модели регулятора Уатта добавлением уравнения, описывающего динамику сервомотора [15, 20]. Трудности строгого интегрирования нелинейных систем, а также приближённого и численного анализа наличия колебаний и глобальной устойчивости в таких системах показывает актуальность и важность развития ляпуновских методов глобальной устойчивости для дифференциальных включений [18].

**Заключение.** В настоящем докладе была продемонстрирована важность работ А.А. Андропова в контексте развития теории управления и кибернетики, показана история развития методов исследования систем управления, предложенных А.А. Андроновым, а также показана связь этих методов с деятельностью Ленинградской научной школы кибернетики В.И. Якубовича и Г.А. Леонова.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ (НШ-4196.2022.1.1) и Санкт-Петербургского государственного университета (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вознесенский И.Н., Андронов А.А. О работах Д.К. Максвелла, И.А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин / Теория автоматического регулирования (Линеаризированные задачи). Изд-во АН СССР, Москва, 1949.
2. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия, Изв. Санкт-Петербургского технологического института 1877, С. 21–62.

3. Андронов А.А., Майер А.Г. Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей. Доклады АН СССР, Т. 32, 1944, С. 58–60.
4. Léauté H. Sur les oscillations à longues périodes dans les machines activées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations, 1885.
5. Жуковский Н.Е. Теория регулирования хода машин. Часть I. Типо-литогр. Т-ва И.Н. Кушнерев и Ко., 1909.
6. Mises R. Zur Theorie der Regulatoren, Electrotechnik und Maschinenbau, Т. 26, 1908.
7. Грдина Я.И. К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов. Известия Днепропетровского горного института, т. XV, 1927.
8. Николаи Е.Л. Регулирование машин. Л., 1930.
9. Schmidt W. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
11. Андронов А.А., Майер А.Г., Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. I. Автомат. и телемех., 1947, Т. 8, № 5, С. 314-334.
12. Андронов А.А., Майер А.Г., Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. II. Теория регулятора прямого действия при наличии кулоновского и вязкого трения (продолжение), Автомат. и телемех., 1953, Т. 14, № 5, С. 505–530.
13. Академики, избранные Общим собранием АН СССР 30 ноября 1946 года. Вестн. АН СССР, 1947, Т. 1, С. 83.
14. Kuznetsov N.V., Mokaev R.N., Akimova E.D., Boiko I.M. Harmonic balance method, Tsytkin locus, and LPRS: comparison and counterexamples. IEEE, 2020 European Control Conference (ECC), 2020, P. 781-786.
15. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. Известия РАН. Теория и системы управления, 2020, № 5, С. 5-27.
16. Leonov G.A. and Kuznetsov N.V. On flutter suppression in the Keldysh model. Doklady Physics Vol. 63, №9, 2018, p. 366–370.
17. Леонов, Г.А., Кузнецов, Н.В., Киселева, М.А., Мокаев, Р.Н. Глобальные задачи дифференциальных включений: проблемы Калмана и Вышнеградского, цепи Чуа. Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2017, № 4, С. 1-52.
18. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, Наука, 1978.
19. Таль А.А. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования (с учетом саморегулирования объекта и воздействия по производной регулируемого параметра). Автоматика и телемеханика, 14, 1953.
20. Вышнеградский И.А. О регуляторах непрямого действия. Известия СПб Технологического Института, 1878, С. 1-48.

---

N.V. Kuznetsov (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences), E.D. Akimova (St. Petersburg State University, St. Petersburg). **Andronov-Vyshnegradsky problem and its impact on the development of the control theory.**

Dedicated to A.A. Andronov.

This paper will discuss the fundamental contribution of the works of A.A. Andronov, the first academician of the USSR Academy of Sciences in the field of control theory, in the context of the development of control theory and cybernetics. In particular, it will show the history of development of A.A. Andronov's key ideas, approaches and methods in oscillation theory and stability theory. Furthermore, it will show the connection between those ideas and the Leningrad scientific school of cybernetics, led by V.I. Yakubovich and G.A. Leonov, as well as the current state of the research field.

А.Ю. БЕЛЯЕВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Arloid Automation Ltd, London)

## ТЕХНОЛОГИИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ОТОПЛЕНИЯ, ВЕНТИЛЯЦИИ И КОНДИЦИОНИРОВАНИЯ ВОЗДУХА

*Управление системами отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха (ОВКВ) является достаточно сложной прикладной задачей, как в силу сложного окружения, сложности самих систем управления, так и с точки зрения генерализации (обобщения) решения такой задачи. В данном докладе описан практический метод управления в таких системах, базирующийся на принципах глубокого обучения с подкреплением.*

**Введение.** Системы *отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха* (ОВКВ) активно используются в большинстве современных сооружений разного назначения. Существует множество различных видов и конфигураций такого рода устройств, и еще большее – планировок зданий, в которых они используются. В зависимости от климатических условий, в которых ведется эксплуатация сооружения, затраты на целевое использования устройств ОВКВ могут представлять из себя очень существенные суммы и, кроме прочего, могут потреблять существенные ресурсы для поддержания функциональности. На фоне растущей озабоченности изменением глобальных климатических условий и проблем окружающей среды возможность не только сократить расходы, но и способствовать уменьшению, например, т.н. углеродного следа, является достаточно востребованной областью применения современных технологий управления.

Одним из наиболее современных и обоснованных подходов для разработки универсального метода управления в динамичных системах подобного рода является обучение с подкреплением и, в частности, его подвид, использующий ресурсы современных высокопроизводительных вычислительных систем – *глубокое обучение с подкреплением*. Мы используем глубокое обучение с подкреплением как основной принцип в разработке таких методов. Принцип обучения с подкреплением базируется на трех основных элементах:

1. Окружение, в нашем случае представляющее цифровую копию здания
2. Агент, оперирующий в этом окружении, и которого необходимо обучить принимать наиболее оптимальные действия
3. Связь между окружением и агентом, позволяющая агенту влиять на изменение среды, в которой он оперирует, и, в обратном направлении, получать от среды подкрепление за выполненные действия

С учетом особенностей задачи, мы описываем особенности применения модифицированного метода *асинхронного актор-критика с преимуществом* (*asynchronous advantage actor-critic*) для управления подобными системами с возможностью контроля над режимами такого управления. Мы также демонстрируем на примере управления одним конкретным зданием способность такого метода эффективно выучивать устойчивые политики управления, дающие результат в виде экономии электроэнергии, без потери в уровне комфорта для людей, находящихся в здании. Мы также даем оценку возможности расширения применения подобного метода для управления другого рода систем.

**Глубокое обучение с подкреплением.** Методы из области обучения с подкреплением ориентируются на решения различных задач в процессах, которые можно описать с помощью взаимодействия между агентом и окружением внутри определенной системы. Такие системы называются системами с обратной связью, а их первое удачное описание было получено в виде представления цепи Маркова, в которой будущие состояния (события) зависят только от текущего состояния, а сама последовательность считается случайной [1]. Для систем с дискретным временем и состоянием их можно описать следующим образом:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

В текущем описании  $n$  – номер шага, а  $\{X\}$  – пространство состояний среды.

Таким образом, если использовать агента в качестве управляющей системы, а недетерминистически изменяющееся во времени окружение в качестве системы, имеющей свойства хаотически изменяться во времени, можно представить подобного рода задачи с точки зрения задач управления.

Оптимальное управление достигается с помощью оптимизации методами машинного обучения. В такой задаче оптимизации цель агента - максимизировать ожидаемое суммарное дисконтируемое вознаграждение

$$R = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t,$$

где  $R$  – возврат (return),  $\gamma$  – коэффициент дисконтирования из интервала  $(0,1]$ , штрафующий будущие вознаграждения,  $t$  – шаг окружения,  $r_t$  – вознаграждение в шаге  $t$ .

Получая меньшие вознаграждения, управляющая система получает необходимый сигнал для корректировки параметров, с течением времени оптимизируя конечную политику.

Вместо использования непосредственного вознаграждения от окружения, создающего проблему отложенного вознаграждения [2], в последнее время чаще всего используется функция полезности, основной идеей которой является использование вместо этого ожидаемого вознаграждения [3]. Существует множество подходов, позволяющих добиваться необходимого качества управления, при этом позволяющие обучать модели, не затрачивая огромное количество ресурсов для этого.

Детали и особенности применения методов глубокого обучения с подкреплением для прикладных задач, в том числе и некоторые их недостатки, мы опишем в нашем докладе.

**Задачи управления, решаемые методом обучения с подкреплением.** Существует множество применений обучения с подкреплением для создания управляющих моделей в динамических системах. Многие из них описаны в обобщающих работах крупных коллективов, специализирующихся в том числе и на разработке методов глубокого обучения с подкреплением, в том числе Google Deepmind [4] или OpenAI [5]. Основной фокус таких исследований и разработок лежит в области непрерывного контроля, в которых методы обучения с подкреплением показывают воодушевляющие результаты. Так, модели, разработанные в лаборатории DeepMind, позволили модели ИИ уверенно превзойти человека в шахматах и Го. Также, достаточно крупных успехов удастся достичь и в управлении различными манипуляторами, или, даже, транспортными средствами.

Также методы обучения с подкреплением показывают интересные результаты в направлении обработки естественного языка [6]. В данном случае динамическая система – это процесс обмена между текстовой информацией между пользователем и агентом, или множеством агентов.

Одним из таких примеров может быть система, разработанная для управления трафиком в оживленных районах города [7], позволяющая подстраиваться по динамику дорожного трафика и управлять дорожным движением наиболее эффективно.

В конце концов, существует иной практический пример управления в динамических системах с помощью глубокого обучения с подкреплением, который и представлен в докладе. В данном случае динамическая система – это здание, характеристики воздуха, заполненность помещений, материал поверхностей и многие другие параметры, изменяющиеся или нет в течении времени и в результате воздействия со стороны устройств ОВКВ. Роль управления в данном случае представляет из себя нейронная сеть (на самом деле группа), осуществляющая контроль над устройствами ОВКВ и воздействующая на окружение с целью оптимизировать полученное вознаграждение. А само вознаграждение, по меньшей мере, один из следующих показателей или их комбинации: потребление электроэнергии и/или мощности, стоимость электроэнергии и/или мощности, время работы устройства ОВКВ, количество изменений в работе устройства ОВКВ, отклонение от целевых условий по влажности или температуре и т.д.

**Заключение.** Методы глубокого обучения с подкреплением показали себя крайне эффективными в задачах непрерывного управления в динамических системах, показывая не

только отличные результаты в качестве управления, но и в способности к обобщению обученных политик для последующего переиспользования.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-4196.2022.1.1) и СПбГУ (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton R., Barto, A. Introduction to Reinforcement Learning. Cambridge: MIT press. 1998.
2. Schulman J., Moritz P., Levine S., Jordan I. M. Abbeel P. High-dimensional continuous control using generalized advantage estimation. Department of Electrical Engineering and Computer Science University of California, Berkeley. 2018.
3. Weber, T. A. Optimal Control Theory: with Applications in Economics. Cambridge: The MIT Press. 2011.
4. Lillicrap T., Hunt J., Pritzel A., Heess N., Erez T., Tassa Y., Silver D., Wierstra D. Continuous control with deep reinforcement learning. Google Deepmind London, UK. 2019.
5. Duan Y., Chen Xi, Houthoof R., Schulman J., Abbeel P. Benchmarking Deep Reinforcement Learning for Continuous Control. University of California, Berkeley, Ghent University, iMinds, OpenAI, 2016
6. Bahdanau D., Brakel P., Xu C. Goyal A. et al. An actor-critic algorithm for sequence prediction. ICLR. 2017.
7. Pengyuan Z., Xianfu C., Liu Z., Braud T., Hui P., Kangasharju J. DRLE: Decentralized Reinforcement Learning at the Edge for Traffic Light Control in the IoV. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2020. Vol. 22. №4. P. 2262-2273.

---

A.Yu. Belyaev (St.Petersburg University, St.Petersburg, Arloid Automation Ltd, London). **Heating, ventilation, and air conditioning systems control using deep reinforcement learning**

The control of heating, ventilation and air conditioning (HVAC) systems is a rather complex applied task, both due to the complex environment, the complexity of the control systems themselves, and in terms of generalization (generalization) of the solution of such a problem. This report describes a practical method for managing such systems based on the principles of deep reinforcement learning.



Н. И. НАУМОВА,

(Кафедра исследования операций, Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург)

Р. Н. МОКАЕВ

(Кафедра прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург)

## О РАССТОЯНИИ БРЭГМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ И МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

*В данном сообщении будут рассмотрены некоторые исторические аспекты появления и развития метода Брэгмана нахождения общей точки выпуклых множеств и возникшей в рамках данного метода концепции расстояния Брэгмана, которая в настоящее время активно используется в различных задачах оптимизации и машинного обучения.*

**Введение.** В 1967 г. Л. М. Брэгман разработал [1] итеративный метод нахождения общей точки выпуклых множеств, позволявший, в том числе, находить решение задач линейного и выпуклого программирования. Этот метод основывался на определении на основе замкнутых выпуклых множеств  $A_i$  специальной функции

$$d(x, y) = F(x) - F(y) - \langle \nabla F(y), x - y \rangle,$$

где  $x$  и  $y$  точки некоторого замкнутого выпуклого множества,  $F$  – непрерывно дифференцируемая строго выпуклая функция (см. рис. 1).

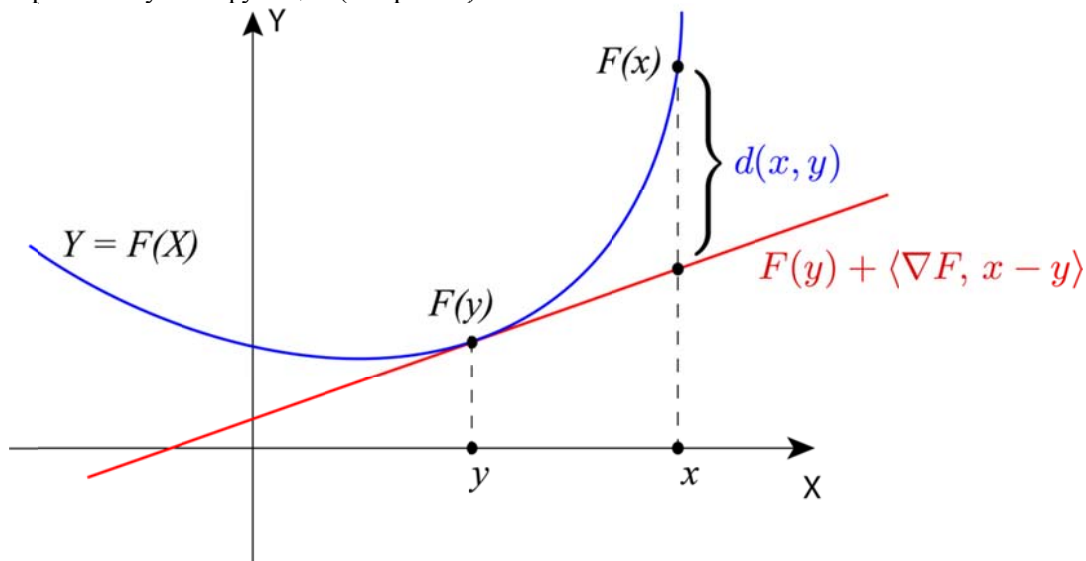


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация для расстояния Брэгмана

Функция  $d(x, y)$  при заданном начальном приближении решения  $x^0$  позволяет строить последовательность  $\{x^k\}$  (релаксационная последовательность). Брэгман показал, что предельные точки этой релаксационной последовательности являются общими для всех выпуклых множеств  $A_i$ . При выполнении ряда дополнительных предположений была доказана единственность предельной точки релаксационной последовательности.

Функция  $d(x, y)$  позднее получила название *расстояние Брэгмана* или *дивергенция Брэгмана* (*Bregman divergence*), и была доопределена для матриц, функций и мер распределения (см. [2–4]).

**Примеры расстояний Брэгмана.** Рассмотрим несколько примечательных частных случаев расстояния Брэгмана, нашедших применение в широком ряде теоретических и практических задач.

Каноническим примером расстояния Брэгмана является квадрат евклидова расстояния

$$d(x, y) = \|x - y\|^2, \text{ где } F(x) = \|x\|^2.$$

Другим известным примером является квадрат расстояния Махаланобиса [5]:

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^T Q(x - y),$$

где  $F(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ . Расстояние Махаланобиса применяется в методах классификации, кластерном анализе и в задаче построения линейной регрессии.

Обобщённая дивергенция Кульбака-Лейблера [6], также известная как относительная энтропия, определяется следующим образом:

$$d(p, q) = \sum_i p(i) \log \frac{p(i)}{q(i)} - \sum_i p(i) + \sum_i q(i),$$

где  $p, q$  – два вероятностных распределения, определенных на общем пространстве элементарных событий. Дивергенция Кульбака-Лейблера является важным понятием в теории информации и математической статистике [8].

Еще одно обобщение расстояния Брэгмана – расстояние Итакуры-Сайто [9]

$$d(p, q) = \sum_i \left( \frac{p(i)}{q(i)} - \log \frac{p(i)}{q(i)} - 1 \right).$$

используется как функционал качества в машинном обучении.

**Применение расстояния Брэгмана в задачах машинного обучения.** В рамках задачи кластеризации [7] вводится понятие «информации Брэгмана» для случайной величины  $X$  в терминах расстояния  $d$ :

$$I(X) = \sum_{i=1}^n v_i d(x_i, \mu),$$

где  $X$  принимает значения из  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^n$ , следуя вероятностной мере  $v$ , а  $\mu = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ . Частными случаями информации Брэгмана являются обычная дисперсия (расстояние Брэгмана в этом случае является квадрат евклидова расстояния) и взаимная информация (расстояние Кульбака-Лейблера). Задача кластеризации сводится к поиску разбиения множества  $\mathcal{X}$ , минимизирующего потерю в информации Брэгмана.

Также рассматривается и другая задача – задача бикластеризации [10,11] – состоящая в одновременной кластеризации строк и столбцов некоторой матрицы  $A$ . В этой задаче расстояние Брэгмана применяется для оценки качества бикластеризации и также используется понятие информации Брэгмана.

**Заключение.** В данном сообщении рассмотрены исторические аспекты появления и развития метода Брэгмана нахождения общей точки выпуклых множеств и возникшей в рамках данного метода концепции расстояния Брэгмана, которая в настоящее время активно используется в различных задачах оптимизации и машинного обучения.

*Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы Российской Федерации (НШ-4196.2022.1.1) и СПбГУ (грант по Мероприятию 3, Pure ID 92424538).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, т.7, №3, С. 620-631.
2. Bregman, L.M., Naumova, N. I. Arbitration solutions with ideal point, generated by systems of functions. Soviet Math. Dokl. 1984. т. 30. №3. С. 583–587.
3. Bregman, L. M., Naumova, N.I. Goal programming solutions generated by systems of functions. Lecture Notes in Economic and Math. Systems. 2002. Vol. 510. P. 495–514.
4. Bregman, L.M., Romanovsky, J.V. Apportionment and optimization in allocation problems. Operations Research and Statistical Modeling. 1975. Vol. 3. P. 137–162 (In Russian).
5. Mahalanobis, P.C. On the generalised distance in statistics. Proceedings of the National Institute of Sciences of India. 1936. Vol. 2, №1. P. 49-55.
6. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency. The Annals of Mathematical Statistics. 1951. V.22. №1. P. 79-86.
7. Banerjee, A., Merugu, S., Dhillon, I. S., Ghosh, J. Clustering with Bregman divergences. Journal of machine learning research, 2005. Vol. 6. P. 1705-1749.

8. Kullback S. Information Theory and Statistics. John Wiley & Sons. 1959.
9. Boytsov L., Naidan. B. Learning to Prune in Metric and Non-Metric Spaces, Advances in Neural Information Processing Systems. 2013. Vol. 26.
10. Hartigan J. A. Direct clustering of a data matrix. Journal of the American Statistical Association. 1972. Vol. 67, no. 337. P. 123-129. doi:10.2307/2284710.
11. Banerjee A, Dhillon I, Ghosh J, et al. A generalized maximum entropy approach to Bregman co-clustering and matrix approximation. Proceedings of the tenth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 2004. P. 509-514.

---

N.I. Naumova (Department of Operations Research, St. Petersburg State University, St. Petersburg), R.N. Mokaev (Department of Applied Cybernetics, St. Petersburg State University, St. Petersburg). **On the Bregman divergence in optimization problems and machine learning**

This report will consider some historical aspects of the emergence and development of the Bregman method for finding a common point of convex sets and the concept of the so-called *Bregman divergence* that arose within the framework of this method, which is currently actively used in various optimization and machine learning problems.

В. РАЗВАН

(Университет Крайова, Академия Инженерных Наук, Румыния)

## РАННИЕ РАБОТЫ Г.А. ЛЕОНОВА И ИХ ВЛИЯНИЕ НА РУМЫНСКУЮ ШКОЛУ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АВТОМАТИКИ

*В докладе показано как личные качества, личные научные достижения Г.А. Леонова и его дружественные связи с Румынией в 70-х и 80-х годов прошлого века привели к совместным исследованиям и к развитию новых направлений в области теоретической автоматике в Румынии.*

**Состояние исследований и некоторые направления румынской школы теоретической автоматике.** В середине 70-ых годов XX-ого века наиважнейшим направлением по теоретической автоматике было исследование абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем частотными методами на основе априорных интегральных оценок. После отъезда В.М. Попова за границу, главным авторитетом школы стал профессор *Аристид Халанай (1924-1997)*, бывший аспирант В.В. Немыцкого в МГУ, уже признанный авторитет в области систем с запаздыванием. Так как автоматические системы с запаздыванием являлись уже бесконечномерными системами (но с конечным числом входов и выходов), частотный метод казался более применимым для практических исследований абсолютной устойчивости вышеупомянутых систем. Более того, профессор Халанай сумел использовать частотные методы при изучении диссипативности и вынужденных колебаний. Таким образом, метод функций Ляпунова оказался как-то в тени. В то же время (т.е. 70-ые годы), главным направлением науки (особенно инженерной, но и не только) в условиях плановой экономики стало прямое внедрение теоретических научных результатов на производстве. Кроме многих отрицательных последствий, это административное направление имело и интересные положительные последствия – например, новые модели и задачи для прикладной математики (к которой принадлежал профессор Халанай) и также для теоретической автоматике (к которой принадлежал автор этих строк). Приведем один единственный пример, который будет интересен здесь: сотрудничая с инженерами-практиками Центрального Института по Энергетике, профессор Халанай установил модель синхронного генератора, имевшего структуру двух связанных систем – гамильтоновой и градиентной – записанных при помощи единой функции  $V(s, x, \delta)$ :

$$\dot{\delta} = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial V}{\partial \delta} - \alpha s, \quad \dot{x} = -B \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^*, \quad (1.1)$$

где  $\delta$  и  $s$  – скаляры а  $x$  – вектор,  $\partial V / \partial x$  – вектор-строка. Также  $\delta$  – угловая координата, а  $V(s, x, \delta)$  является периодической функцией (заметим мимоходом, что структура (1.1) является ярким примером идей Четаева, что «устойчивость должна как-то появляться в законах природы»). Отметим также, что (1.1) является фазовой системой с несколькими равновесиями. Общая форма функции  $V$  следующая

$$V(s, x, \delta) = \frac{1}{2} [\omega s^2 + x^* A x + x^* c(\delta) + c^*(\delta) x + \chi(\delta)]. \quad (1.2)$$

В это время в СССР, на мехмате ЛГУ развивалась теория абсолютной устойчивости нелинейных систем (школа В.А. Якубовича) на основе частотной теоремы (*Большая Лемма Теории Систем*, т.е. *лемма Якубовича-Калмана-Попова*) и функций Ляпунова типа «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». Этой школе принадлежал тогда молодой Г.А. Леонов, который пошел достаточно быстро по собственному пути изучения проблем автоколебаний и различных задач, связанных с фазовой синхронизацией. Системы фазовой синхронизации также являются фазовыми системами с несколькими равновесиями.

**Соприкосновение школ и научных направлений.** Скажем с самого начала, что научные связи в те времена осуществлялись обменом научных журналов, книг и оттисков (на личном уровне). Надо сказать, что появление *теории нелокального сведения* Г.А. Леонова с приложениями к задачам фазовой синхронизации произвело большое впечатление на семинаре

профессора Халаная. Позже, профессор Халанай несколько раз побывал в СССР на научных конференциях и встретил Г.А. Леонова в Киеве на Конференции по Нелинейным Колебаниям (судя по оставшимся бумагам профессора, обсуждали они именно задачи, связанные с нелокальным сведением). В то же время, автор (т.е. В.Р.) получил от Г.А. Леонова множество оттисков опубликованных работ по колебаниям и по нелокальному сведению. В 1978 вышла из печати книга [1], имевшая главу об устойчивости фазовых систем. Эту книгу получили от авторов и профессор Халанай, и В.Р.

**Совместная работа по синхронным машинам.** Эта работа, опубликованная в [2], является результатом объединения замечаний Г.А. Леонова об адекватности выбора функции Ляпунова  $V$  из (1.1) к методу нелокального сведения. Инженерное толкование этого замечания для устойчивости в целом синхронного генератора, принадлежащее Г.А. Леонову и также автору (В.Р.) привело к совместной работе [2], где изучается синхронный генератор с первичным двигателем и регулятором скорости. Главными результатами [2] являются следующие теоремы.

**Теорема 3.1** (Теорема сведения Леонова [1], стр. 314-316) *Введем в рассмотрение непрерывно дифференцируемую  $2\pi$ -периодическую функцию  $\psi(\sigma)$ . Эта функция имеет ровно два нуля на множестве  $[0, 2\pi)$  и также*

$$[\psi(\sigma)]^2 + [\psi'(\sigma)]^2 \neq 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

*Введем также в рассмотрение числа  $\lambda > 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$  и непрерывно дифференцируемые функции  $W(t)$  и  $\sigma(t)$ . Пусть выполнены следующие условия: i) любое решение  $\theta(t)$  дифференциального уравнения второго порядка*

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0 \quad (3.2)$$

*ограничена для  $t > 0$ ; ii) при всех значениях  $t \in [0, +\infty)$  для которых  $\psi(\sigma(t)) = 0$ ,  $\psi'(\sigma(t)) < 0$ , справедливо неравенство  $W(t) \geq 0$ ; при всех  $t \geq 0$*

$$\frac{dW}{dt} + 2\lambda W(t) + \varepsilon \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \psi(\sigma(t)) \frac{d\sigma}{dt} \leq 0 \quad (3.3)$$

*Тогда  $\sigma(t)$  ограничена на  $(0, +\infty)$ .*

При помощи этой Теоремы 3.1 получен главный результат об устойчивости.

**Теорема 3.2** *Введем в рассмотрение следующую динамическую систему, описывающую динамику синхронного генератора с первичным двигателем и регулятором скорости*

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \frac{\partial V}{\partial s}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial V}{\partial \delta} - (\alpha + \beta)s + q^*y, \\ \dot{x} &= -B \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^*, \quad \dot{y} = Hy - bs \end{aligned} \quad (3.4)$$

*Пусть выполнены следующие условия: i)  $B > 0$ ; ii)  $\alpha + \beta > \alpha_{cr}$ , где  $\alpha_{cr}$  является критическим бифуркационным параметром уравнения*

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0, \quad (3.5)$$

*а также*

$$\psi(\delta) = \omega\varphi(\delta) = \omega[\chi'(\delta) - c'(\delta)^*A^{-1}c(\delta)] \quad (3.6)$$

*имеющая все свойства из Теоремы 3.1; iii)  $\lambda_{\min}(AB) > \lambda_1$  где  $\lambda_{\min}(AB)$  – наименьшее собственное значение матрицы  $AB$  а  $\lambda_1, \lambda_2$  являются вещественными корнями уравнения*

$$4\lambda^2 - 4(\alpha + \beta)\lambda + \alpha_{cr}^2 = 0. \quad (3.7)$$

*Выберем  $\lambda$  и  $\varepsilon$  такими, что*

$$\lambda_1 < \lambda < \min\{\lambda_2, \lambda_{\min}(AB)\}, \quad \varepsilon < \alpha + \beta - \lambda \quad (3.8)$$

и чтобы: а)  $H + \lambda I$  являлась гурвицевой матрицей; б) пара  $(H + \lambda I, b)$  являлась управляемой; в) выполняется частотное неравенство:

$$\alpha + \beta - \lambda - \varepsilon + \operatorname{Re} q^*((-\lambda + i\mu)I - H)^{-1}b > 0 \quad (3.9)$$

для всех  $\mu \geq 0$ . Тогда система (3.4) является устойчивой в целом в смысле [1] (глава IV).

Получается, таким образом, асимптотическая устойчивость в целом для всех моделей синхронных генераторов, без применения теории сингулярных возмущений.

**Приложения по дихотомии и устойчивости систем с неединственным состоянием равновесия.** Это направление исследований берет начало со второй главы [1], где определяются следующие свойства систем с неединственным состоянием равновесия: дихотомия, глобальная асимптотика, устойчивость по Ляпунову стационарных множеств, устойчивость в целом стационарных множеств, точечная устойчивость в целом стационарных множеств. Как рабочий инструмент изучения этих свойств используются так называемые леммы ляпуновского типа из той же главы [1]. Отметим здесь, хоть и косвенно относящиеся к румынской школе, работы В.М. Попова [3, 4] – они выполнены уже в США, независимо от советской и румынской школ, и могут успешно дополнять главное направление исследований.

Эти исследования основаны на знании функции Ляпунова для изучаемого динамического объекта. Отметим здесь сначала монографию [5] и обзорную статью [6], где намечены такие объекты с неединственным состоянием равновесия и соответствующей функцией Ляпунова: химическая кинетика, экономика, биологические сообщества, генетика, нейронные сети. Особенно последний класс систем изучался на протяжении двух десятилетий при помощи функций Ляпунова и ляпуновских лемм из [1]. Из множества работ отметим монографии [7, 8]. Там включен и случай сетей с запаздываниями и функционалами Ляпунова квадратичного типа.

*Работа проводилась при поддержке гранта Ведущей научной школы РФ НШ-4196.2022.1.1.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием Равновесия. М: Наука, 1978
2. Halanay, A., Leonov, G.A., Rasvan, V., Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 1987 vol. 45 № 2 pp. 91-106
3. Popov, V. M., J. Differential Equations 1979. V. 31, pp. 337-358
4. Popov, V. M., J. Differential Equations 1981. V. 41, № 2, pp. 245-261
5. Halanay, A., Rasvan, V., Application of Liapunov methods in stability. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993
6. Rasvan, V., Archivum Mathematicum 1998 t. 34, № 1, pp. 207-215
7. Danciu, D., Sisteme cu mai multe echilibre. Aplicatii la rețele neuronale (рум.). Craiova: Universitaria, 2006
8. Danciu, D., Rețele neuronale. Stabilitate, sincronizare, întârzieri (рум.). Craiova: Universitaria, 2011

V. Rasvan (University of Craiova, Romania, Academy of Engineering Sciences, Romania). **Early works G.A. Leonov and their influence on the Romanian scientific school of theoretical automatics**

This report aims to demonstrate how personal qualities and scientific achievements of G.A. Leonov and his friendly relations with Romania in the 70s and 80s of the last century led to joint research and development of new directions in the field of theoretical automatics in Romania.

## Секция 8

### **УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

А. С. АНТИПОВ, С. А. КРАСНОВА  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

#### **УПРАВЛЕНИЕ ХОДОВОЙ ТЕЛЕЖКОЙ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

*Рассматривается задача управления движением тележки мостового крана с грузом, закрепленным на стержне. Особенности объекта: дефицит управлений, параметрическая неопределенность, действие внешних возмущений, не согласованных с управлением. Для уменьшения колебаний переносимого груза введено задающее воздействие в виде суммы конечного положения тележки и интеграла от углового отклонения стержня. Для подавления возмущений используется фиктивное управление с сигмовидной составляющей. Сформирована разрывная обратная связь, обеспечивающая заданную точность стабилизации конечного положения.*

**Введение.** Однобалочные мостовые краны широко распространены на производстве. Их основная функция – перенос груза, прикрепленного на стержне к ходовой тележке, вдоль пролета из начального положения в заданное конечное. Управляющая сила прикладывается к тележке, при этом актуальной проблемой является снижение неуправляемых непосредственно колебаний груза в ходе транспортировки, которые могут привести к повреждениям груза и рабочих конструкций. Выделяют два этапа решения задачи транспортировки: планирование траектории ходовой тележки и синтез управления, обеспечивающего ее отслеживание.

Исходя из практического опыта, для снижения колебаний груза нужно обеспечить плавные разгон и торможение тележки. С этой целью ступенчатое задание (конечное положение тележки) заменяют гладкой S-образной функцией. В работах специалистов можно встретить различные аналитические эталонные траектории, отличающиеся степенью вычислительной сложности [1, 2]. В некоторых случаях для определения параметров кривой задания требуется решать оптимальную задачу [3], что, в свою очередь, требует точного знания параметров математической модели объекта. В данной работе предлагается упростить этап планирования и использовать в качестве задания сумму постоянного сигнала и интеграла от угла отклонения стержня, что позволит естественным образом демпфировать колебания стержня с грузом.

На втором этапе при синтезе следящей системы для данного объекта нужно учитывать ряд особенностей: дефицит управлений, неопределенность параметров механической системы и действие на нее внешних возмущений. Для обеспечения инвариантности по отношению к возмущениям используют два основных подхода. В первом подходе для подавления возмущений применяют методы систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме [4]. Эффективный в теории, данный подход не реализуем в механических системах на практике из-за физических ограничений на управляющие силы и моменты, к которым предъявляется требование гладкости. Во втором подходе неопределенности компенсируют, применяя механизмы адаптации параметров [1], что приводит к повышению динамического порядка замкнутой системы. Следует отметить, что в большинстве работ, посвященных управлению ходовой тележкой, рассматривается только механическая система без учета динамики исполнительного устройства. В данной работе этот пробел восполняется, и в качестве объекта управления рассматривается электромеханическая система – ходовая тележка с грузом, закрепленным на стержне, с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (ДПТ). В этом случае возмущения, действующие на механическую подсистему, не согласованы с истинным управлением, действующим на ДПТ, и не могут быть непосредственно подавлены или

скомпенсированы. Для синтеза инвариантной системы слежения применяется принцип декомпозиции. В механической подсистеме формируется комбинированное (линейное и нелинейное) фиктивное управление – сила, создаваемая исполнительным устройством. Нелинейная часть в виде гладкой и ограниченной сигмовидной функции обеспечивает подавление с заданной точностью возмущений, действующих по одному каналу с фиктивным управлением [5, 6]. Для электрической подсистемы сформированное фиктивное управление выступает в качестве реализуемого задающего воздействия.

**Постановка задачи.** Математическая модель объекта управления имеет вид [7]:

$$\dot{q}_1 = q_2, \dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \quad (1)$$

$$\dot{F} = -aF - c\dot{x} + bu, \quad (2)$$

где уравнения (1) описывают динамику механической подсистемы,  $q_1 = (x, \theta)^T$ ,  $q_2 = (\dot{x}, \dot{\theta})^T$  – измеряемые векторы состояния,  $q_1(0) = \vec{0}$ ,  $q_2(0) = \vec{0}$ ,  $x$  – горизонтальное перемещение тележки,  $\theta$  – угол отклонения стержня от вертикальной оси,  $|\theta| < \pi/2$ ;  $v = (F, 0)^T$ ,  $F$  – движущая сила, создаваемая ДПТ,  $\eta = (F_r, 0)^T$ ,  $F_r(t)$  – часть сил, трактуемых как внешние возмущения. Матрицы инерции, центробежных и кориолисовых сил, а также гравитационных сил подсистемы (1) имеют соответственно вид

$$H(q_1) = \begin{pmatrix} M + m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & ml^2 \end{pmatrix}, \quad C(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 0 & ml \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G(q_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ mgl \sin \theta \end{pmatrix},$$

где  $M$  – масса ходовой тележки, груз полагается точечной массой  $m$ ,  $l$  – длина стержня, его жесткость и масса не учитываются,  $g = 9,81$  – ускорение свободного падения.

Уравнение (2) описывает учитываемую динамику ДПТ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – положительные конструктивные коэффициенты;  $u$  – управление (напряжение питания якорной цепи ДПТ).

Полагается, что параметры  $m$ ,  $M$ ,  $l$ , а также конструктивные коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  неопределены и могут изменяться в процессе эксплуатации в известных диапазонах, например

$$0 < a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Внешние возмущения  $F_r(t)$  неизвестны, но ограничены по модулю известной константой:

$$|F_r(t)| \leq \bar{F}_r, \quad \bar{F}_r = \text{const} > 0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Управление  $u$  порождает движущую силу  $F$  для перемещения тележки  $x(t)$ . Ставится задача синтеза разрывного управления в форме обратной связи, обеспечивающего перемещение тележки в заданное положение  $x_d = \text{const} \neq x(0)$  с выполнением целевого условия

$$|x(t) - x_d| \leq \Delta_{11}, \quad t \geq T. \quad (5)$$

При этом вторая переменная  $\theta$  не обеспечена ресурсом управления. Для демпфирования колебаний стержня с грузом введем в задающее воздействие интегральную составляющую

$$\chi(t) = x_d - \gamma \int_0^t \theta(\tau) d\tau, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача стабилизации (5) сводится к задаче слежения за заданным сигналом (6).

**Синтез закона управления.** Задачу синтеза следящей системы разделим на две подзадачи: 1) синтез фиктивного управления  $F^*$ , обеспечивающего отслеживание заданного сигнала (6) в механической подсистеме (1); 2) формирование истинного разрывного управления  $u$ , которое стабилизирует невязку  $F - F^*$  в электрической подсистеме (2).



Для решения первой подзадачи введем вектор ошибки слежения  $e_1 = q_1 - q_{1d}$ , где  $e_1 = (e_{11} = x - \chi, \theta)^T$ ,  $q_{1d} = (\chi, 0)^T$ , и его производную  $e_2 = (e_{21} = \dot{x} - \dot{\chi}, \dot{\theta})^T$ . В данном координатном базисе механическая подсистема (1) примет вид:

$$\dot{e}_1 = e_2, \dot{e}_2 = H^{-1}(q_1)[v - C(e_2 + \dot{q}_{1d}) - G(q_1) + \eta(t)] - \ddot{q}_{1d}. \quad (7)$$

Желаемое фиктивное управление сформируем в виде двух слагаемых:

$$F^* = -k_1 e_{11} - m_2 \sigma(k_2 e_{21}), \quad k_1, k_2, m_2 = \text{const} > 0, \quad (8)$$

где  $\sigma(k_2 e_{21}) = 2 / (1 + \exp(-k_2 e_{21})) - 1$  – гладкая и ограниченная сигма-функция, предназначенная для подавления внешних возмущений,  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления,  $m_2$  – амплитуда. Для упрощения дальнейшей настройки коэффициентов регулятора используем следующие оценки сигма-функции и ее производной [6]:

$$\begin{aligned} 0,8 < |\sigma(k_2 e_{21})| < 1, \quad 0 < \sigma'(k_2 e_{21}) < 0,18k_2, \quad |e_{21}| > 2,2 / k_2; \\ 0,36k_2 |e_{21}| \leq |\sigma(k_2 e_{21})| \leq 0,8, \quad 0,18k_2 \leq \sigma'(k_2 e_{21}) \leq \sigma'(0) = k_2 / 2, \quad |e_{21}| \leq 2,2 / k_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для анализа устойчивости системы (7), (8) рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова [1], включающего полную энергию механической подсистемы (1):

$$V = \frac{1}{2} k_1 e_{11}^2 + \frac{1}{2} e_2^T H e_2 + mgl(1 - \cos \theta) \geq 0.$$

Показано, что при максимальных по модулю допустимых значениях возмущений (4) и в силу (9) следующий выбор параметров фиктивного управления (8)

$$k_1 \geq \Delta_{21} / \Delta_{11}, \quad k_2 \geq 2,2 / \Delta_{21}, \quad \Delta_{21} = \text{const} > 0, \quad m_2 > 1,25 \bar{F}_r \quad (10)$$

гарантирует  $\dot{V} < 0$  и достижение цели управления (5), если  $F = F^*$ . Выполнение этого требования обеспечивается в электрической подсистеме при решении второй подзадачи. Для синтеза истинного управления запишем дифференциальное уравнение относительно невязки  $e_3 = F - F^*$ :

$$\dot{e}_3 = -a(e_3 + F^*) - c\dot{x} + k_1 e_{21} + \frac{1}{2} m_2 k_2 (1 - \sigma^2(k_2 e_{21})) \dot{e}_{21} + bu.$$

Введем разрывную обратную связь, которая реализуема в электрических исполнительных устройствах, где управление функционирует в ключевом режиме:

$$u = -m_3 \text{sign}(e_3), \quad m_3 = \text{const} > 0.$$

Выбор амплитуды  $m_3$  с учетом наихудшего изменения параметров (3) на основе неравенства

$$b_{\min} m_3 > a_{\max} (m_2 + 2k_1 X_1) + (c_{\max} + 2k_1) X_2 + m_2 k_2 X_3 \quad (11)$$

обеспечивает выполнение достаточного условия  $e_3 \dot{e}_3 < 0$ , и на поверхности  $e_3 = 0$  за некоторое конечное время возникнет скользящий режим. В неравенстве (11)  $X_i$  – оценки областей изменения переменных в процессе регулирования:  $|x^{(i-1)}(t)| \leq X_i, t \geq 0, i = 1, 2, 3$ .

Таким образом, посредством предложенной декомпозиции задачи синтеза с вводом фиктивного и истинного управлений, а также выбора их параметров (10), (11), достигается инвариантность с заданной точностью выходной переменной – ошибки слежения  $e_{11}(t) = x(t) - \chi(t)$  – по отношению к неконтролируемым возмущениям.

**Заключение.** Цель работы состояла в стабилизации заданного положения ходовой тележки мостового крана при воздействии на нее внешних и параметрических возмущений. Она была достигнута за счет формирования стабилизирующего фиктивного управления с сигмовидной частью в механической подсистеме и его отслеживания с помощью истинного разрывного управления в электрической подсистеме. Введено задающее воздействие для перемещения ходовой тележки с интегралом от угловой координаты, который демпфировал нежелательные

колебания груза по сравнению с его отсутствием. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность разработанного подхода.

*Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ 20-01-00363А*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ma B., Fang Y., Zhang X. Adaptive Tracking Control for an Overhead Crane System // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. 2008. P. 12194–12199.
2. Hu J., Zhang G., Mei L., Deng X. Decoupled linear model and S-shaped curve motion trajectory for load sway reduction control in overhead cranes with double-pendulum effect // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2019. Vol. 233(10). P. 3678–3689.
3. Wu Z. Optimal motion planning for overhead cranes // IET Control Theory and Applications. 2014. Vol. 8. P. 1833–1842.
4. Tuan L.A., Lee S.G. Sliding mode controls of double-pendulum crane system // J Mech Sci Technol. 2013. Vol. 27. P. 1863–1873.
5. Антипов А.С., Краснова С.А. Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 10. С. 609–614.
6. Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А. Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 40–66.
7. Mohamed K.T., Abdel-razak M.H., Haraz E.H., Ata A.A. Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems // AEJ - Alexandria Engineering Journal. 2021. Vol. 61(9), P. 6659–6673.

---

A.S.Antipov, S.A.Krasnova (V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow).  
**Control of overhead crane trolley with respect the dynamics of the actuator under uncertainty**

We consider the problem of controlling the motion of an overhead crane trolley with a payload fixed on a rod. Features of the plant: lack of control actions, parametric uncertainty, the action of external disturbances unmatched with the control. To reduce the payload oscillations, we introduce a reference action as the sum of the final position of the trolley and the integral of swing angle. To suppress disturbances, we use a fictitious control with a sigmoid term. Discontinuous feedback is formed, which provides the given accuracy of the final position stabilization.

А. И. ГЛУЩЕНКО, К. А. ЛАСТОЧКИН  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ПРЯМОЕ АДАПТИВНОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

*Рассматривается задача управления объектами с несогласованной параметрической неопределенностью, линейно зависящей от вектора состояний. Предложен новый подход прямого адаптивного модального управления, который гарантирует экспоненциальную сходимость настраиваемых параметров регулятора к их истинным значениям при выполнении слабого требования конечного возбуждения регрессора.*

**Введение.** Методология адаптивного управления с эталонной моделью эффективно применяется для решения задач управления объектами с параметрической неопределенностью [1]. При этом известно [2], что классические схемы такого подхода обеспечивают экспоненциальную устойчивость только при выполнении строгого требования постоянного возбуждения регрессора (PE). Поэтому были предложены подходы, ослабляющие PE до конечного (FE) или начального возбуждения с помощью комбинированных адаптивных законов на основе стека данных [3, 4] или интегрального компонента [5-7]. В [8] предложены законы, которые, в дополнение к экспоненциальной устойчивости, обеспечивают поэлементную монотонную сходимость параметрической ошибки.

Однако, рассмотренные методы требуют выполнения условия Эрцбергера [9], то есть параметрическая неопределенность объекта должна быть согласована с управлением, что не соблюдается для многих задач [10]. В этих случаях применим адаптивный бэкстеппинг [11]. К его недостаткам относят высокий динамический порядок законов управления и настройки. Для объектов с несогласованной неопределенностью, которая линейно зависит от вектора состояний объекта, возможно избежать законов высокого порядка путем применения адаптивного модального управления (АРМС) [1]. Согласно [1], [12], схемы непрямого АРМС получили существенное развитие в течение последних десятилетий. Схемы прямого АРМС [13] не столь популярны, несмотря на отсутствие для них проблемы control equation solvability. Причина в том, что данные схемы требуют априорной информации о матрице входов объекта, а экспоненциальная сходимость гарантируется только при выполнении условия PE.

Предлагаемый доклад посвящен разработке нового метода прямого АРМС объектами с несогласованной неопределенностью, линейно зависящей от вектора состояний, который должен гарантировать: 1) экспоненциальную сходимость значений параметров/состояний к своим истинным/желаемым значениям при условии FE, 2) монотонность переходных процессов по параметрической ошибке. При этом коэффициент усиления объекта является неизвестным.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу управления классом линейных систем:

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_r^+ \quad \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + w_1^T x(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t) + w_2^T x(t), \dots \\ \dot{x}_n(t) &= bu(t) + w_n^T x(t), \quad x(t_r^+) = x_0, \quad y(t) = h^T x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния с неизвестными начальными значениями  $x_0$ ,  $u(t) \in R$  – управление,  $w_i \in R^n$  – вектор неизвестных постоянных параметров  $i = \overline{1, n}$ ,  $b \in R$  – неизвестный коэффициент усиления,  $y(t)$  – выход объекта,  $h \in R^n$ . Далее система (1) записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \theta_{AB}^T \Phi(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_r^+) = x_0, \\ y(t) = h^T x(t). \end{cases} \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & u(t) \end{bmatrix}^T, \quad \theta_{AB}^T = [A \quad B], \quad (2)$$

где  $A \in R^{n \times n}$  – неизвестная матрица состояний,  $i$ -ая строка которой соответствует выражению  $\dot{x}_{i+1}(t) + w_i^T x(t)$ , а  $n$ -ая –  $w_n^T x(t)$ ;  $B \in R^n$  – неизвестный вектор коэффициентов усиления,  $n$ -ая строка которого содержит  $b$ ; пара  $(A, B)$  – полностью управляема, а  $(A, h^T)$  – наблюдаема;  $\Phi(t) \in R^{n+1}$  – регрессор, измеримый  $\forall t > t_r^+$ ;  $\theta_{AB} \in R^{(n+1) \times n}$  – неизвестен и постоянен. Требуемое качество управления для (2) в переходных процессах подчиним модальной модели:

$$\dot{\chi}(t) = \Gamma\chi(t), \quad v(t) = h^T\chi(t), \quad \chi(t_r^+) = \chi_0 \quad (3)$$

где  $\chi(t) \in R^n$  – вектор состояний генератора эталонных траекторий с начальными условиями  $\chi_0$ ,  $v \in R$  – выход генератора,  $\Gamma \in R^{n \times n}$  – гурвицева матрица состояний, пара  $(\Gamma, h^T)$  наблюдаема.

Для (2), при учете (3), оказывается справедливым утверждение, строго доказанное в [14].

**Утверждение 1.** Пусть  $\sigma\{A\} \cap \sigma\{\Gamma\} = \emptyset$ , тогда (2) может быть переписано в виде:

$$\dot{x}(t) = A_\Sigma x(t) + B(u(t) - K_x x(t)), \quad (4)$$

где  $\sigma\{\cdot\}$  – спектр матрицы,  $A_\Sigma = A + BK_x$ ,  $\sigma\{A_\Sigma\} = \sigma\{\Gamma\}$ , а  $K_x^T \in R^n$  задается решением системы:

$$\begin{cases} M\Gamma - AM = Bh^T, \\ h^T = K_x M, \end{cases} \quad (5)$$

где  $M \in R^{n \times n}$  – невырожденная  $\exists M^{-1}$  матрица линейного подобия  $x(t) = M\chi(t)$ .

Желаемое качество управления объектом (4) подчиним эталонной модели:

$$\dot{x}_{ref}(t) = A_\Sigma x_{ref}(t) + B_{ref} r(t), \quad x_{ref}(t_r^+) = x_{0ref}, \quad (6)$$

где  $x_{ref}(t) \in R^n$  – неизмеримый вектор состояний эталонной модели с начальными значениями  $x_{0ref}$ ,  $B_{ref} = BK_r \in R^n$  – неизвестный вектор коэффициентов усиления эталонной модели,  $K_r \in R$  – неизвестный коэффициент,  $r(t) \in R$  – известное задание. Коэффициент  $K_r$  эталонной модели определяется условием равенства в статическом режиме выхода  $y_{ref}(t) = h^T x_{ref}(t)$  заданию  $r(t)$ :

$$K_r = \arg \left\{ h^T (sI - A_\Sigma)^{-1} \Big|_{s=0} B_{ref} = -h^T A_\Sigma^{-1} BK_r = 1 \right\} = -\left( h^T A_\Sigma^{-1} B \right)^{-1} \quad (7)$$

С учетом (7), уравнение в отклонениях между (4) и (6) принимает вид:

$$\dot{e}_{ref}(t) = A_\Sigma e_{ref}(t) + B(u(t) - \theta^T \omega(t)), \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & r(t) \end{bmatrix}^T, \quad \theta^T = \begin{bmatrix} K_x & K_r \end{bmatrix}^T, \quad (8)$$

где  $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$  – неизмеримый вектор ошибок слежения,  $\omega(t) \in R^{n+1}$  – регрессор.

На основании (8) сигнал  $u(t)$  определим следующим образом:

$$u(t) = \hat{K}_x(t)x(t) + \hat{K}_r(t)r(t), \quad (9)$$

где  $\hat{K}_x^T \in R^n$ ,  $\hat{K}_r \in R$  – оценки параметров  $K_x$  и  $K_r$ . Подставив (9) в (8), имеем:

$$\dot{e}_{ref}(t) = A_\Sigma e_{ref}(t) + B\tilde{\theta}^T(t)\omega(t), \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & r(t) \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\theta}^T = \begin{bmatrix} \tilde{K}_x & \tilde{K}_r \end{bmatrix} = \hat{\theta}^T(t) - \theta^T, \quad (10)$$

где  $\tilde{K}_x(t) = \hat{K}_x(t) - K_x$ ,  $\tilde{K}_r(t) = \hat{K}_r(t) - K_r$ ,  $\tilde{\theta}(t) \in R^{n+1}$  – параметрические ошибки,  $\omega \in R^{n+1}$  – регрессор.

**Цель.** Необходимо построить закон формирования оценок  $\hat{\theta}(t)$ , обеспечивающий при  $\Phi(t) \in FE$  выполнение предельного равенства  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0$  (exp), где  $\xi(t) = \begin{bmatrix} e_{ref}^T(t) & \tilde{\theta}^T(t) \end{bmatrix}^T$ .

**Основной результат.** Предлагаемое решение основано на двухэтапной процедуре. **Шаг 1.** Вывод с применением процедуры динамического расширения и смешивания [15] регрессий со скалярным регрессором относительно неизвестных матриц  $A, B$ . **Шаг 2.** Переход с помощью (5) и (7) от полученных на шаге 1 выражений к регрессиям относительно  $\theta$ . Доказательства утверждений и теоремы не приводятся ввиду ограничений на объем статьи.

**Шаг 1.** Прежде всего, согласно [8], введем линейные устойчивые фильтры:

$$\bar{z}(t) = x(t) - l\bar{x}(t) = \bar{\theta}_{AB}^T \bar{\varphi}(t), \quad (11)$$

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T(t) & e^{-lt} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\theta}_{AB}^T = \begin{bmatrix} A & B & x(t_r^+) \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{\Phi}}(t) = -l\bar{\Phi}(t) + \Phi(t), \quad \bar{\Phi}(t_r^+) = 0_{n+1},$$

где  $l > 0$ ,  $\bar{z}(t)$  – измеримая функция,  $\bar{\varphi}(t) \in R^{n+2}$  – измеримый регрессор,  $\bar{\theta}_{AB}^T \in R^{n \times (n+2)}$  – расширенный вектор неизвестных параметров,  $\bar{x}(t) \in R^n$  – первые  $n$  элементов  $\bar{\Phi}(t) \in R^{n+1}$ .

**Допущение 1.** Параметр  $l$  в (11) выбран так, что импликация  $\bar{\Phi}(t) \in FE \Rightarrow \bar{\varphi}(t) \in FE$  верна.

Используя результаты [15], от (11) с векторным регрессором  $\bar{\varphi}(t)$  перейдем к уравнению со скалярным регрессором ( $adj\{\cdot\}$  – союзная матрица,  $det\{\cdot\}$  – определитель матрицы):

$$z(t) = \varphi(t)\bar{\theta}_{AB}, \quad z(t) := \text{adj}\left\{\mathfrak{H}\left[\bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t)\right]\right\}\mathfrak{H}\left[\bar{\varphi}(t)\bar{z}^T(t)\right], \quad \varphi(t) := \det\left\{\mathfrak{H}\left[\bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t)\right]\right\}, \quad (12)$$

где  $\mathfrak{H}[\cdot] := 1/(p+k)[\cdot]$  – устойчивый оператор ( $k > 0$  и  $p := d/dt$ ),  $z(t) \in R^{(n+2) \times n}$  и  $\varphi(t) \in R$  измеримы. С учетом определений  $\bar{\theta}_{AB}$  и  $\varphi(t) \in R$ , составим регрессии:

$$z_A(t) = z^T(t)\mathcal{L} = \varphi(t)A; \quad \mathcal{L} = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times 2}]^T; \quad z_B(t) = z^T(t)\epsilon = \varphi(t)B; \quad \epsilon = [0_{1 \times n} \quad 1 \quad 0]^T. \quad (13)$$

где  $z_A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $z_B(t) \in R^n$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\epsilon$  имеют необходимые размерности.

**Замечание 1.** В силу [16, 17], возбуждение  $\Phi(t)$  не ликвидируется процедурой (11)-(13).

**Шаг 2.** Учитывая  $\varphi(t) \in R$ , необходимо получить регрессию относительно вектора  $\theta$ .

**Утверждение 2.** По измеримым сигналам  $z_A(t)$ ,  $z_B(t)$ ,  $\varphi(t)$  и аналитическим выражениям (5), (7) возможно составить регрессионное уравнение

$$Y(t) = \Delta(t)\theta, \quad (14)$$

где  $Y(t) \in R^{n+1}$ ,  $\Delta(t) \in R$  – измеримые сигналы, и верно  $\Delta(t) \in \text{FE} \Rightarrow \Phi(t) \in \text{FE}$ .

Пользуясь результатами [8], пропустим (14) через фильтр ( $\sigma > 0$ ,  $\Upsilon(t) \in R^{n+1}$ ,  $\Omega(t) \in R$ ):

$$\Upsilon(t) = \Omega(t)\theta, \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau, \quad \Upsilon(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta(\tau) Y(\tau) d\tau, \quad (15)$$

Для регрессора  $\Omega(t)$  в [8] было доказано следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Если  $\Delta \in \text{FE}$  на интервале возбуждения  $[t_r^+; t_e]$  регрессора  $\Phi(t)$  и ( $\Delta \in L_\infty$  или  $|\Delta(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$  и  $\sigma > 2c_2$ , где  $c_1 > 0, c_2 > 0$ ), то: 1)  $\forall t \geq t_r^+ \Omega(t) \in L_\infty, \Omega(t) \geq 0$ , 2)  $\forall t \geq t_e \Omega(t) > 0, \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \delta_\Delta^2 \sigma^{-1}, \Omega_{LB} = \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau$ , где  $\delta_\Delta = \sup_{t \geq 0} \max |\Delta(t)|$ .

На основании (15) и свойств регрессора  $\Omega(t)$  введем закон настройки:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \Omega(t) (\Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t)) = -\gamma \Omega^2(t) \tilde{\theta}(t), \quad (16)$$

В виде Теоремы сформулируем условия, при которых (16) обеспечивает достижение Цели.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi(t) \in \text{FE}$ , тогда если  $\gamma$  выбран как  $\gamma = 0$  если  $\Omega(t) = 0$ , а иначе  $\gamma = (\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) + \gamma_1) / \Omega^2(t)$ , то (16) обеспечивает следующие свойства: 1)  $\forall t_a \geq t_b, |\tilde{\theta}_i(t_a)| \leq |\tilde{\theta}_i(t_b)|$ ; 2)  $\forall t \geq t_r^+ \xi(t) \in L_\infty$ ; 3)  $\forall t \geq t_e$  ошибка  $\xi(t)$  экспоненциально сходится к нулю со скоростью, минимальное значение которой прямо пропорционально параметрам  $\gamma_0 \geq 1$  и  $\gamma_1 \geq 0$ .

Для моделирования объект (4) и модальная модель (6) заданы следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), & x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{cases} \dot{\chi} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \chi, & \chi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ y(t) = [1 \quad 0] x(t), & v = [1 \quad 0] \chi \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

Задание  $r$ , параметры фильтров (11), (12), (15),  $\gamma_0, \gamma_1$  и  $\hat{\theta}(0)$  определим как:

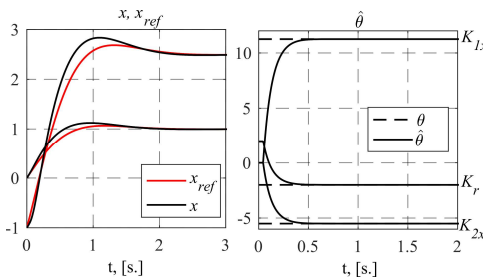


Рис. 1. Переходные процессы по координатам состояния и параметрам регулятора

$$r = l = \gamma_0 = 1; \quad k = 10; \quad \sigma = 5; \quad \gamma_1 = 0; \quad \hat{\theta}(0) = [0 \quad 0 \quad 2]^T. \quad (18)$$

На рис.1 приведены переходные процессы по  $x$  объекта (1) и  $x_{ref}$  эталонной модели (3) при  $x_0 = x_{0ref}$ , и по  $\hat{\theta}(t)$ , валидирующие теоретические выводы.

**Заключение.** Предложенный подход обеспечивает достижение Цели, не требует знания знака/значения  $B$ , гарантирует монотонность настраиваемых параметров в (9), и позволяет решать задачи адаптивного управления объектами (4).

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ioannou P.A., Sun J.** Robust Adaptive Control. New York: Dover, 2013. 834 p.
2. Boyd S., Sastry S.S. Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control. *Automatica*. 1986. Vol. 22, № 6. P. 629-639.
3. Chowdhary G., Yucelen T., Muhlegg M., Johnson E. Concurrent learning adaptive control of linear systems with exponentially convergent bounds. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 2013. Vol. 27, № 4. P. 280–301.
4. Parikh A., Kamalapurkar R., Dixon W.E. Integral concurrent learning: Adaptive control with parameter convergence using finite excitation. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 2021. Vol. 33, № 12. P. 1775–1787.
5. Cho N., Shin H.S., Kim Y., Tsourdos A. Composite model reference adaptive control with parameter convergence under finite excitation. *IEEE Trans. Autom. Control*. 2017. Vol. 63, № 3. P. 811-818.
6. Na J., Herrmann G., Zhang K. Improving transient performance of adaptive control via a modified reference model and novel adaptation. *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2017. Vol. 27, № 8. P. 1351-1372.
7. Pan Y., Aranovskiy S., Bobtsov A., Yu H. Efficient learning from adaptive control under sufficient excitation. *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2019. Vol. 29, № 10. P. 3111-3124.
8. Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K. Exponentially stable adaptive control. Part I. Time-invariant plants. *Autom. Remote Control*. 2022. Vol.83, № 4. P. 528-558.
9. Erzberger H. Analysis and design of model following control systems by state space techniques. *In Proc. Joint Autom. Control Conf.* Philadelphia: University of Pennsylvania, 1967, pp. 572-581.
10. Heise C.D., Holzapfel F. Uniform ultimate boundedness of a model reference adaptive controller in the presence of unmatched parametric uncertainties. *In Proc. IEEE 6th Int. Conf. Autom. Robot. App.* Queenstown, New Zealand: IEEE, 2015. P. 149-154.
11. **Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.** Nonlinear and adaptive control design. New York: Wiley, 1995. 576 p.
12. Tao G. Multivariable adaptive control: A survey. *Automatica*. 2014. Vol. 50, № 11. P. 2737-2764.
13. Elliott H., Wolovich W.A. Parametrization issues in multivariable adaptive control. *Automatica*. 1984. Vol. 20, № 5. P. 533–545.
14. Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V. Algebraic conditions of generalized modal control. *In IFAC Proc. Volum.* 2012. Vol. 45, №13. P. 150-155.
15. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing. *In IEEE Trans. Autom. Control*. 2016. Vol.62, №7. P.3546-3550.
16. **Narendra K.S., Annaswamy A.M.** Stable adaptive systems, New York: Courier Corporation. 2012. 509 p.
17. Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A. On Preserving-Excitation Properties of Dynamic Regressor Extension Scheme. Preprint. [Online]. Available. <https://hal-centralesupelec.archives-ouvertes.fr/hal-03245139>.

**A.I. Glushchenko, K.A. Lastochkin** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow)

### **Direct Adaptive Pole Placement Control with Guarantee of Exponential Stability**

*Abstract.* The control problem of plants with unmatched uncertainty, which linearly depends on the state vector, is considered. A new approach of direct adaptive pole placement control is proposed, which ensures exponential convergence of the controller adjustable parameters to their true values under a sufficiently weak requirement of the regressor finite excitation, as well as monotonicity of the parameter error transients. The obtained theoretical results are confirmed by numerical simulations.

А. И. ГЛУЩЕНКО, К. А. ЛАСТОЧКИН  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## АДАПТИВНЫЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

*Рассматривается задача оптимального управления в условиях параметрической неопределенности. Предложен новый закон настройки параметров линейно-квадратичного регулятора состояний, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системе управления при выполнении условия конечного возбуждения вектора, составленного из состояний объекта и управлений.*

**Введение.** Методы теории оптимального управления позволяют синтезировать законы регулирования, минимизирующие заданные целевые функции от состояний объекта и управлений [1, 2]. Наиболее популярным и используемым в приложениях является оптимальное управление с минимизацией линейно-квадратичного целевого функционала на бесконечном времени. Коэффициенты такого регулятора рассчитываются путем решения алгебраического уравнения Риккати [1-3]. Однако, для разрешения упомянутого уравнения требуется точное знание параметров объекта управления, что ограничительно и часто без предварительной идентификации объекта невозможно. Поэтому, актуальной представляется задача разработки методов адаптивного синтеза линейно-квадратичных регуляторов (ALQ) [4].

Существующие математически обоснованные подходы к синтезу ALQ можно разделить на две группы: а) ALQ, использующие концепцию обучения с подкреплением (reinforcement learning); б) ALQ, использующие концепцию адаптивного управления с самонастройкой параметров регулятора (self-tuning regulators).

Подходы из первой группы [5-9] основаны на методах машинного обучения и для настройки параметров линейно-квадратичного закона управления используют методологию policy iteration, состоящую из этапа policy evolution (critic update), на котором осуществляется вычисление значения целевой функции при использовании текущих коэффициентов регулятора, и этапа policy improvement (actor update), на котором осуществляется итеративная дискретная коррекция параметров регулятора в направлении убывания целевой функции.

Подходы из второй группы [10-13] основаны на методах теории идентификации и адаптивного управления [10] и предполагают либо прямую непрерывную настройку коэффициента оптимального регулятора, либо требуют дополнительной идентификации параметров модели объекта.

В целом, общими недостатками подходов, относящихся как к первой, так и ко второй группе, является сходимость настраиваемых параметров закона управления к истинным значениям только при выполнении ограничительного условия не исчезающего возбуждения регрессора и неудовлетворительное качество переходных процессов в течение адаптации параметров линейно-квадратичного закона управления.

Предлагаемый доклад посвящен разработке нового метода адаптивного оптимального управления объектами с параметрической неопределенностью, который в отличие от существующих решений гарантирует: 1) экспоненциальную сходимость значений параметров/состояний к своим истинным/желаемым значениям при условии конечного возбуждения регрессора (FE), 2) монотонность переходных процессов по ошибке идентификации каждого параметра закона управления.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу управления классом линейных систем в расширенном пространстве состояний:

$$\forall t \geq t_r^+, \begin{cases} \dot{x}(t) = \theta_{AB}^T \Psi(t) - B_r r = Ax(t) + Bu(t) - B_r r, & x(t_r^+) = x_0, & \Psi(t) = [x^T(t) \quad u^T(t)]^T, \\ z(t) = C^T x(t), & & \theta_{AB}^T = [A \quad B], \end{cases} \quad (1)$$

где  $x(t) = [x_p(t) \quad e_{z_i}(t)]^T \in R^n$  – расширенный вектор состояния с неизвестными начальными условиями  $x_0$ ,  $e_{z_i}(t) = \vartheta \int_{t_r^+}^t (z(\tau) - r) d\tau$  – взвешенная ( $\vartheta \neq 0$ ) интегральная ошибка слежения за

заданием  $r \in R^m$ ,  $u(t) \in R^m$  – управление,  $A, B, C$  – матрицы состояния, управления и выхода соответствующих размерностей,  $\theta_{AB} \in R^{(n+m) \times n}$  – вектор неизвестных параметров объекта управления. Пара  $(A, B)$  управляема, вектор  $\Psi(t) \in R^{n+m}$  измерим  $\forall t > t_r^+$ .

Для объекта управления (1) ставится задача минимизации целевой функции:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_r^+}^{\infty} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt, \quad (2)$$

где  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{m \times m}$ , а пара  $(A, Q^{\frac{1}{2}})$  является обнаруживаемой.

Из теории оптимального управления хорошо известен результат [3], позволяющий построить при известных матрицах  $A, B$  управление, минимизирующее функционал (2).

**Утверждение 1.** Пусть  $(A, B)$  управляема, а  $(A, Q^{\frac{1}{2}})$  обнаруживаема, тогда управление, минимизирующее (2), имеет вид:

$$u^*(t) = \theta^T(t) \omega(t) = K_x x(t) + K_r r = -R^{-1} B^T P x(t) - R^{-1} B^T V r, \quad (3)$$

$$\theta^T(t) = [K_x(t) \quad K_r(t)] \in R^{m \times (n+m)}, \quad \omega(t) = [x^T(t) \quad r^T]^T \in R^{n+m},$$

где  $K_x \in R^{m \times n}$ ,  $K_r \in R^{m \times m}$ , а  $P = P^T \in R^{n \times n}$ ,  $V \in R^{n \times m}$  – это установившиеся решения уравнений:

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t) A - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + Q, \quad \dot{V}(t) = -A^T V(t) + P(t) B R^{-1} B^T V(t) + P(t) B_r, \quad (4)$$

которые, если  $\forall i, j \in \overline{1, 2n}$  верно  $\lambda_i(D) \not\approx \lambda_j(D)$ , аналитически могут быть вычислены так:

$$P = P(\tau_\infty) := \Phi_{21}(\tau_\infty) \Phi_{11}^{-1}(\tau_\infty), \quad V = (A^T - P B R^{-1} B^T)^{-1} P B_r, \quad \Phi(\tau_\infty) := e^{D \tau_\infty}, \quad D = \begin{bmatrix} -A & B R^{-1} B^T \\ Q & A^T \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\Phi(\tau_\infty) \in R^{2n \times 2n}$ ,  $\Phi_{ij} \in R^{n \times n}$ ,  $\tau_\infty > 0$ ,  $\tau_\infty \rightarrow \infty$  – вспомогательная известная постоянная.

Введем закон управления с настраиваемыми параметрами:  $u(t) = \hat{\theta}^T(t) \omega(t)$ . Разница между уравнением объекта (1) с настраиваемым  $u(t)$  и оптимальным  $u^*(t)$  управлением имеет вид:

$$\dot{e}_{ref}(t) = A_{ref} e_{ref}(t) + B \tilde{\theta}^T(t) \omega(t), \quad (6)$$

где  $A_{ref} = A + B K$ ,  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  – параметрическая ошибка,  $e_{ref}(t)$  – ошибка слежения за  $x_{ref}(t)$ .

**Цель.** Необходимо построить закон формирования оценок  $\hat{\theta}(t)$ , обеспечивающий при  $\Psi(t) \in FE$  выполнение равенства  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0$  (exp), где  $\xi(t) = [e_{ref}^T(t) \quad \text{vec}^T(\tilde{\theta}(t))]^T$ .

**Основной результат.** Предлагаемое решение основано на двухэтапной процедуре. **Шаг 1.** Вывод с применением процедуры динамического расширения и смешивания [14] регрессий со скалярным регрессором относительно неизвестных матриц  $A, B, \Phi(\tau_\infty)$ . **Шаг 2.** Переход с помощью (4) и (5) от полученных на шаге 1 выражений к регрессиям относительно  $\theta$ . Доказательства утверждений и теоремы не приводятся ввиду ограничений на объем статьи.

**Шаг 1.** Прежде всего, согласно [15], получим измеримое регрессионное уравнение:

$$\bar{z}(t) = x(t) - l \bar{x}(t) + B_r \bar{r} = \theta_{AB}^T \bar{\varphi}(t), \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \left[ \bar{\Psi}^T(t) \quad e^{-l(t-t_r^+)} \right]^T, \quad \bar{\theta}_{AB}^T = [A \quad B \quad x(t_r^+)], \quad \dot{\bar{\Psi}}(t) = -l \bar{\Psi}(t) + \Psi(t), \quad \bar{\Psi}(t_r^+) = 0_{n+m},$$

где  $l > 0$ ,  $\bar{z}(t)$  – измеримая функция с  $\dot{\bar{r}}(t) = -l \bar{r}(t) + r(t)$ ,  $\bar{r}(t_r^+) = 0_m$ ,  $\bar{\varphi}(t) \in R^{n+m+1}$ ,  $\bar{\theta}_{AB}^T \in R^{n \times (n+m+1)}$

– расширенный вектор неизвестных параметров,  $\bar{x}(t) \in R^n$  – первые  $n$  элементов  $\bar{\Psi}(t) \in R^{n+m}$ .

**Допущение 1.** Параметр  $l$  в (7) выбран так, что импликация  $\bar{\Psi}(t) \in FE \Leftrightarrow \bar{\varphi}(t) \in FE$  верна.

Используя результаты [14], от (7) с векторным регрессором  $\bar{\varphi}(t)$  перейдем к уравнению со скалярным регрессором ( $adj\{\cdot\}$  – союзная матрица,  $det\{\cdot\}$  – определитель матрицы):

$$z(t) = \varphi(t) \bar{\theta}_{AB}, \quad z(t) := \frac{k_1 adj\{\mathfrak{H}[\bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}^T(t)]\} \mathfrak{H}[\bar{\varphi}(t) \bar{z}^T(t)]}{1 + k_1 det\{\mathfrak{H}[\bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}^T(t)]\}}, \quad \varphi(t) := \frac{k_1 det\{\mathfrak{H}[\bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}^T(t)]\}}{1 + k_1 det\{\mathfrak{H}[\bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}^T(t)]\}}, \quad (8)$$

где  $\mathfrak{H}[\cdot] := 1 / (\bar{p} + k_0)[\cdot]$  – фильтр ( $k_0 > 0, k_1 > 0, \bar{p} := d/dt$ ),  $z(t) \in R^{(n+m+1) \times n}$  и  $\varphi(t) \in R$  измеримы.



С учетом определений  $\bar{\theta}_{AB}$  и  $\varphi(t) \in R$ , составим регрессии ( $z_A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $z_B(t) \in R^n$ ):

$$z_A(t) = z^T(t) \mathcal{L} = \varphi(t) A; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times (m+1)} \end{bmatrix}^T; \quad z_B(t) = z^T(t) \epsilon = \varphi(t) B; \quad \epsilon = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_{m \times m} & 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T. \quad (9)$$

где  $z_A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $z_B(t) \in R^{n \times m}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\epsilon$  имеют необходимые размерности.

**Замечание 1.** В силу [16, 17], возбуждение  $\Phi(t)$  не ликвидируется процедурой (7)-(9).

С помощью (9) составим измеримое регрессионное уравнение:

$$z_D(t) := \begin{bmatrix} -\varphi(t) z_A(t) & z_B(t) R^{-1} z_B^T(t); & Q \varphi^2(t) & \varphi(t) z_A^T(t) \end{bmatrix} = \varphi^2(t) D, \quad (10)$$

Разложим экспоненту из (5) в ряд Тейлора:  $\Phi(\tau_\infty) = e^{D\tau_\infty} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} D^k \tau_\infty^k + \epsilon$ . Умножив результат на  $\Delta_\Phi(t) := \varphi^{2p}(t)$  и подставив (10), опустив рутинные операции, имеем измеримые функции:

$$z_{\Phi_{11}}(t) = \varphi^{2p}(t) \Phi_{11}(\tau_\infty) + \epsilon_{\Phi_{11}}(t), \quad z_{\Phi_{21}}(t) = \varphi^{2p}(t) \Phi_{21}(\tau_\infty) + \epsilon_{\Phi_{21}}(t). \quad (11)$$

**Шаг 2.** На основе (9), (11) необходимо получить регрессию относительно  $\theta$ .

**Утверждение 2.** По измеримым сигналам  $z_A(t)$ ,  $z_B(t)$ ,  $z_{\Phi_{11}}(t)$ ,  $z_{\Phi_{21}}(t)$ ,  $\varphi(t)$  и аналитическим выражениям (5), (7) возможно составить уравнение  $Y(t) = \Delta(t)\theta + \epsilon_\theta(t)$ , где  $Y(t) \in R^{(n+m) \times m}$ ,  $\Delta(t) \in R$  – измеримые сигналы,  $\epsilon_\theta(t) \in R^{(n+m) \times m}$  – неизмеримое возмущение, и верно  $\Psi(t) \in FE \Rightarrow \Delta(t) \in FE$ .

Пользуясь [15], пропустим  $Y(t) = \Delta(t)\theta$ , через фильтр ( $\sigma > 0$ ,  $\Upsilon(t) \in R^{n+1}$ ,  $\Omega(t) \in R$ ):

$$\Upsilon(t) = \Omega(t)\theta + \zeta(t), \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau, \quad \Upsilon(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta(\tau) Y(\tau) d\tau, \quad (12)$$

Для регрессора  $\Omega(t)$  в [15] было доказано следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Если  $\Delta(t) \in FE$  и ( $\Delta(t) \in L_\infty$  или  $|\Delta(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$  и  $\sigma > 2c_2$ ), где  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , то:

- 1)  $\forall t \geq t_r^+ \quad \Omega(t) \in L_\infty, \Omega(t) \geq 0$ ,
- 2)  $\forall t \geq t_e \quad 0 < \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{UB}$ .

На основании (12) и свойств  $\Omega(t)$  введем закон:  $\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \Omega(t) (\Omega(t) \hat{\theta}(t) - \Upsilon(t)) = -\gamma \Omega^2(t) \tilde{\theta}(t)$ .

В Теореме сформулируем условия, при которых закон обеспечивает достижение Цели.

**Теорема 1.** Пусть  $\Psi(t) \in FE$ , тогда если  $\gamma$  выбран как:  $\gamma = 0$  если  $\Omega(t) \leq \rho \in (0; \Omega_{LB})$ , а иначе  $\gamma = (\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega(t) \omega^T(t)) + \gamma_1) / \Omega^2(t)$ , то если  $\forall t \geq \bar{t} \geq t_e \quad \zeta_{UB} < \frac{\rho \lambda_{\min}(\bar{Q})}{2 \|\bar{P} B\|} - \rho e^{-0.5 \eta_{\bar{\theta}}(\bar{t} - t_e)} \|\tilde{\theta}(t_e)\|$  и  $\zeta(t) = o(\Omega(t)\theta)$ , где  $\bar{P} \in R^{n \times n}$  – решение уравнения Ляпунова  $A_{ref} \bar{P} + A_{ref}^T \bar{P} = -\bar{Q} = -\bar{Q}^T < 0$ , то гарантированы свойства: 1)  $\forall t_a \geq t_b \quad |\tilde{\theta}_i(t_a)| \leq |\tilde{\theta}_i(t_b)|$ ; 2)  $\forall t \geq t_r^+ \quad \xi(t) \in L_\infty$ ; 3)  $\forall t \geq t_e$  ошибка  $\xi(t)$  экспоненциально сходится к нулю.

Объект управления и варьируемые параметры в эксперименте были следующими:

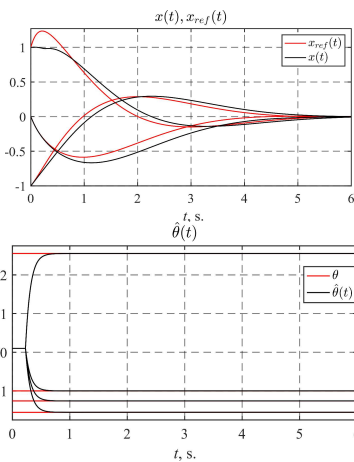


Рис. 1. Переходные процессы по координатам состояния и параметрам регулятора

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$r = e^{-7t}, \quad Q = I_{3 \times 3}, \quad R = 1, \quad \rho = 10^{35},$$

$$\hat{\theta}(0) = 0, 1I_4, \quad l = 2, 5, \quad k_0 = 10, \quad k_1 = 1, 8 \cdot 10^{35},$$

$$\sigma = \frac{5}{7}, \quad \tau_\infty = 7, \quad p = 35, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 10,$$

На рис.1 приведены переходные процессы по  $x(t)$  и  $\hat{\theta}(t)$ . **Заключение.** Для линейных объектов с параметрической неопределенностью предложен адаптивный линейно-квадратичный регулятор, гарантирующий достижение Цели и дополнительно обеспечивающий монотонность настройки параметров закона управления.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Lewis, F., Syrmos, V.** Optimal control. John Wiley & Sons, 1995. 539 p.
2. **Kwakernaak, H, R. Sivan** Linear optimal control systems. Wiley, New York, 1972. — 595 p.
3. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. soc. mat. mexicana*. 1960. Vol. 5, №. 2. P. 102-119.
4. Modares H., Lewis F. L., Naghibi-Sistani M. B. Adaptive optimal control of unknown constrained-input systems using policy iteration and neural networks *IEEE Trans. Neural Net. Learn. Syst.* 2013. Vol. 24, №. 10. P. 1513-1525.
5. Kleinman D. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Trans. Autom. Control.* 1968. Vol. 13, №. 1. P. 114-115.
6. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. Memory-efficient filter based novel policy iteration technique for adaptive LQR *In Proc. Annual Amer. Control Conf.* 2018. P. 4963-4968.
7. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. memory-efficient filter-based approximate optimal regulation of unknown LTI systems using initial excitation *In Proc. IEEE Conf. Dec. and Control*, 2018. P. 1638-1643.
8. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. Initial excitation-based iterative algorithm for approximate optimal control of completely unknown LTI systems. *IEEE Trans. Autom. Control.* 2019. Vol. 64, №. 12. P. 5230-5237.
9. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. Filter based Explorized Policy Iteration Algorithm for On-Policy Approximate LQR. *In Symp. Ser. Comp. Intell.* 2019. P. 133-140.
10. **Ioannou P.A., Sun J.** Robust Adaptive Control. New York: Dover, 2013. 834 p.
11. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. Data-driven adaptive LQR for completely unknown LTI systems *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50, №. 1. P. 4156-4161.
12. Jha S. K., Roy S. B., Bhasin S. Direct adaptive optimal control for uncertain continuous-time LTI systems without persistence of excitation. *IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs.* 2018. Vol. 65, №. 12. P. 1993-1997.
13. Jha S. K., Bhasin S. Adaptive linear quadratic regulator for continuous-time systems with uncertain dynamics *IEEE/CAA J. Autom. Sinica.* 2019. Vol. 7, №. 3. P. 833-841.
14. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing. *IEEE Trans. Autom. Control.* 2016. Vol.62, №7. P.3546-3550.
15. Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K. Exponentially stable adaptive control. Part I. Time-invariant plants. *Autom. Remote Control.* 2022. Vol.83, № 4. P. 528-558.
16. **Narendra K.S., Annaswamy A.M.** Stable adaptive systems, New York: Courier Corporation. 2012. 509 p.
17. Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A. On Preserving-Excitation Properties of Dynamic Regressor Extension Scheme. Preprint. [Online]. Available. <https://hal-centralesupelec.archives-ouvertes.fr/hal-03245139>.

**A.I. Glushchenko, K.A. Lastochkin** (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow)

### **Adaptive Linear Quadratic Controller with Exponential Stability**

*Abstract.* The problem of optimal control under conditions of parameter uncertainty is considered. A new adaptive law to adjust the parameters of the linear-quadratic state feedback controller is proposed to provide exponential stability of the closed-loop control system under the condition of finite excitation of the regressor vector, which includes states and control signals.

К. Р. ЧЕРНЫШЕВ, Е. Ф. ЖАРКО, Е. А. АБДУЛОВА  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В статье рассматривается задача идентификации (нелинейных) стохастических систем. Основное внимание уделено применению состоятельных (то есть обращающихся в нуль тогда и только тогда, когда два (в общем случае) случайных вектора являются стохастически независимыми) мер зависимости. Представлены важные частные случаи, связанные с применением дивергенции Цаллиса, как основного средства в построении соответствующей меры зависимости, приводящей, в конечном случае, к получению полной входо-выходной модели системы на основе локальных моделей. Данный подход использован в задаче моделирования технико-экономических показателей атомных электростанций.*

**Введение.** Статья посвящена определенным важным вопросам, связанным с идентификацией стохастических систем. Эти вопросы связаны с идентифицируемостью систем и построением входо-выходного отображения нелинейных объектов. В наиболее общем случае, идентифицируемость стохастических систем может быть ассоциирована с необращением в нуль той или иной меры зависимости между хотя бы одной компонентой входного и хотя бы одной компонентой выходного процесса системы. Это означает, что в таком случае какое-то входо-выходное отображение системы может быть построено, и именно оно будет рассматриваться как описание системы. При этом в качестве указанных мер зависимости будут рассматриваться те, которые являются состоятельными. Условие состоятельности меры зависимости означает, в соответствии с терминологией А.Н. Колмогорова, ее обращение в нуль тогда и только тогда, когда пара случайных величин, что в случае идентифицируемости систем соответствует входной и выходной компонентам процессов системы, стохастически независимы. Для обычной корреляции это, как хорошо известно, не выполняется. Соответственно, именно состоятельная мера зависимости рассматривается в данной статье. Кроме того, состоятельная мера зависимости должны принимать свои значения в единичном интервале, поскольку в противоположном случае не существует возможности судить о действительной степени зависимости случайных величин. Соответственно, эти вопросы требуют особого внимания, равно как и соответствующая проблема, связанная с выбором переменных, которые должны быть включены в финальную модель системы. Сказанное также относится и к локальным моделям, на основе которых строится полная модель системы.

**Идентифицируемость входо-выходной модели.** Рассматривается задача идентификации для многомерной стохастической системы с наблюдаемыми входным выходным процессами,

$$U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T, \quad (1)$$

где  $U(t)$  –  $m$ -мерный входной процесс,  $Y(t)$  –  $n$ -выходной процесс.

Случайные процессы (1) рассматриваются как стационарные и стационарно связанные в узком смысле. Модель данной системы ищется на основе совокупностей локальных моделей вида

$$\hat{Y}(t; \tau) = W(\tau)U(t - \tau), \quad t = 1, 2, \dots; \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_p < \infty, \quad (2)$$

где  $W(\tau)$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, \tau_p < \infty$  – матричнозначные коэффициенты, подлежащие идентификации,  $\tau_p$  – выбираемый исследователем порядок моделей. Критерий идентификации моделей (2) имеет вид

$$I_2^T(Y(t), \hat{Y}(t; \tau)) = I_2^T(Y(t), W(\tau)U(t - \tau)) \rightarrow \max_{W(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_p, \quad (3)$$

где  $I_2^T(\cdot, \cdot)$  – симметричная квадратическая взаимная информации Цаллиса (СКВИЦ) [1] соответствующих случайных векторов:

$$I_2^T(Y(t), \hat{Y}(t; \tau)) = \frac{1}{2} \int_{R^n} \int_{R^n} (\delta_2(Y(t), \hat{Y}(t; \tau)))^2 dY(t) d\hat{Y}(t; \tau), \quad (4)$$

$$\delta_2(Y(t), \hat{Y}(t; \tau)) = f_{Y(t)\hat{Y}(t; \tau)}(Y(t), \hat{Y}(t; \tau)) - g_{Y(t)}(Y(t))g_{\hat{Y}(t; \tau)}(\hat{Y}(t; \tau)),$$

где  $f_{Y(t)\hat{Y}(t;\tau)}(Y(t), \hat{Y}(t;\tau))$  – совместная плотность распределения выходного процесса системы и выходного процесса ее локальной модели,  $g_{Y(t)}(Y(t))$  и  $g_{\hat{Y}(t;\tau)}(\hat{Y}(t;\tau))$  – их маргинальные плотности соответственно.

Теоретико-информационный критерий (3), (4) определяет, таким образом, идентифицируемые матричнозначные коэффициенты локальных моделей (2) как удовлетворяющие соотношению  $W^*(\tau) = \arg \max_{W(\tau)} I_2^T(Y(t), W(\tau)U(t-\tau))$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, \tau_p$ .

Как следствие, значения СКВИЦ, определяемые выражением

$$I_2^T(Y(t), W^*(\tau)U(t-\tau)), \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_p, \quad (5)$$

и будут служить основой для принятия исследователем решения о включении соответствующей локальной модели (2) в общую модель исследуемой системы. При этом значения (5) преобразуются для получения их нормированных значений:

$$\hat{i}_2^T(Y(t), W^*(\tau)U(t-\tau)) = \sqrt{1 - \frac{1}{(8\pi \cdot I_2^T(Y(t), W^*(\tau)U(t-\tau)) + 1)^2}}. \quad (6)$$

Принятие решения о включении конкретной локальной модели (2) в общую модель системы базируется на учете вклада данной локальной модели в формирование выходного процесса системы. Такой вклад определяется исходя из задаваемых исследователем максимально допустимого значения меры неоднородности вклада локальных моделей и минимально допустимого значения нормированной СКВИЦ для локальных моделей в полном соответствии с методологий, изложенной в [2]. В ее рамках, понятие неоднородности непосредственно распространяется на величины (6).

При таком подходе каждая локальная модель (2) характеризуется двумя числами, каждое из которых принимает значение в единичном интервале. Первое – это значение нормированной СКВИЦ (6), второе – это мера неоднородности, одинаковая для всех локальных моделей. Соответственно, все локальные модели (2) могут быть ассоциированы с точкой в единичном квадрате

$$\chi_\tau = (\hat{i}_2^T(Y(t), W^*(\tau)U(t-\tau)); \eta_h^{loc}), \quad (7)$$

где  $\eta_h^{loc}$  – значение меры неоднородности локальных моделей.

В свою очередь, к задаче исследователя относится установление минимально допустимой общей величины для всех  $\hat{i}_2^T(Y(t), W^*(\tau)U(t-\tau))$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, \tau_p$ ; например,  $\underline{\hat{i}_2^T}$ ; а также, максимально допустимую степень неоднородности, например,  $\overline{\eta_h^{loc}}$ . Таким образом, эти значения образуют прямоугольник  $\Pi = \left[0; \underline{\hat{i}_2^T}\right] \times \left[\overline{\eta_h^{loc}}; 1\right]$ , в единичном квадрате. Отсюда, если в (7)

$\chi_\tau \in \Pi$ , то локальная модель  $\hat{Y}(t;\tau) = W(\tau)U(t-\tau)$  подлежит исключению из конструируемой модели. Если она не принадлежит, то исключать ее не следует.

Тогда, с учетом приведенных принципов, суммирование всех локальных моделей по  $\tau = 0, 1, \dots, \tau_p$  приводит к следующему выражению для общей модели системы

$$\hat{Y}(t) = \left( \sum_{\tau=0}^{\tau_p} \eta_{v(\tau)} \right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{\tau_p} \eta_{v(\tau)} W(\tau)U(t-\tau), \quad W(\tau) = W^*(\tau), \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_p, \quad (8)$$

$$\eta_{v(\tau)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi_\tau \notin \Pi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_p \quad (9)$$

где  $\chi_\tau$  определяется формулой (7).

**Применение в задаче расчета технико-экономических показателей атомных электростанций.** В настоящем разделе рассматривается применение предложенного подхода в задаче расчета технико-экономических показателей атомных (ТЭП) электростанций (АЭС). В связи с тем, что не существует двух одинаковых энергоблоков АЭС, возникает задача учета специфики конкретного энергоблока АЭС, как в части технических средств, так и исходя из имеющихся точек контроля технологических параметров. Одним из важных показателей ТЭП, характеризующий работу системы регенеративного подогрева (относится к турбогенераторной части энергоблока), является температура питательной воды за подогревателем высокого давления (ПВД), который осуществляет подогрев питательной воды для дальнейшей подачи через систему питательной воды в парогенераторы реакторной установки во всех режимах нормальной эксплуатации. Температура питательной воды за подогревателем высокого давления является расчетным сигналом. В связи с тем, что снижение температуры питательной воды приводит к снижению давления в парогенераторах, что в свою очередь ведет к уменьшению расхода пара на турбину и соответственно снижению выработки электроэнергии, данный сигнал требует постоянного мониторинга. Расчетное значение температуры питательной воды за ПВД5 зависит от температур питательной воды в ПГ 1-4, расходов через ПВД1, температуры до ПВД5, давления на выходе питательного насоса и других (всего более 48 сигналов), из которых только температуры питательной воды в ПГ 1-4 относятся к важнейшим сигналам энергоблока, без которых или недостоверности которых расчет ТЭП не ведется. Для поддержания расчетов температуры питательной воды за ПВД5 –  $T(t)$  – в случае отсутствия или недостоверности сигналов, не относящихся к важным, была получена модель, основанная только на важных сигналах (входных переменных) энергоблока. В результате были выбраны следующие входные переменные для модели вида (8)-(9):  $U(t-1)$ ,  $U(t-2)$ , где вектор  $U(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t), T_4(t), N(t))^T$  имеет своими компонентами соответственно температуру питательной воды  $T_i(t)$  в  $i$ -м парогенераторе,  $i = 1, 2, 3, 4$  и мощность генератора (активную)  $N(t)$ . На рис. 1 приведено поведение относительной ошибки расчета температуры питательной воды  $T_m(t)$  на основе полученной модели с данными входными переменными и выходной переменной  $T(t)$ , рассчитанной в соответствии с расчетной схемой.

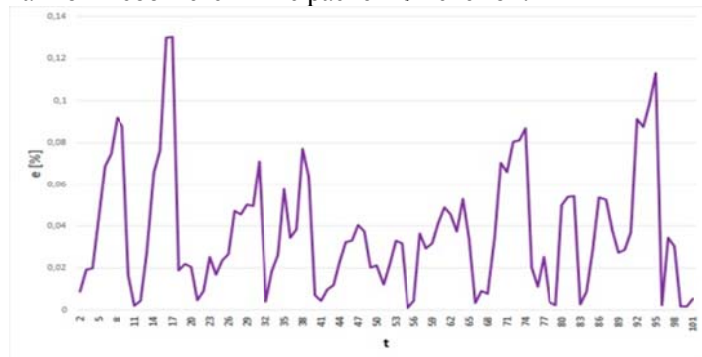


Рис. 1. Поведение относительной ошибки расчета температуры питательной воды  $T_m(t)$  на основе полученной модели и выходной переменной  $T(t)$ , рассчитанной в соответствии с расчетной схемой

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Chernyshov K.R.** System Identifiability and Structure Identification: Input and Output Variables Selection Based on Consistent Measures of Dependence // IFAC-PapersOnLine. 2021. V. 54, no. 14. P. 132-137.
2. **Chernyshov K.R.** Constructing a Symmetric Tsallis Divergence as a System Identification Criterion // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51, no. 32. P. 550-555.

K.R.Chernyshov, E.Ph.Jarko, E.A.Abdulova (Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow). **Conditions of stochastic systems identifiability**

The paper considers the problems of identifying non-linear stochastic systems and its application to a specific task of the nuclear power plant control. The main attention is paid to the application of consistent (what means vanishing if and only if two random (in general) vectors are stochastically independent) measures of dependence. There are presented particular important cases concerned with applying Tsallis divergence as a basic tool to construct a corresponding measure of dependence leading, finally, to obtaining a total input/output system model by the use of local ones. The results are applied to an information task of nuclear power plant control.

Р.О. ОМОРОВ, Т.А. АКУНОВ, А.О. АЙДРАЛИЕВ  
(Институт машиноведения и автоматизации Национальной Академии Наук Кыргызской Республики,  
г. Бишкек)

## РОБАСТНОСТЬ И ЭЛЛИпсоИДНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

*Рассматриваются алгебраический метод исследований робастной устойчивости непрерывных и дискретных интервальных динамических систем, а также метод эллипсоидных оценок качества интервальных многомерных систем управления. Основоположником алгебраического направления исследований робастности интервальных систем В.Л. Харитоновым было установлено, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно устойчивость лишь четырех угловых полиномов семейства, которые теперь носят название полиномов Харитонова. В данной работе представлены оригинальные результаты, полученные для исследования устойчивости непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные Алгебраическим методом робастной устойчивости. Для исследования качественных свойств многомерных систем управления предложены эллипсоидные оценки качества в виде мажорант и минорант, основанные на экстремальных сингулярных числах соответствующих критериальных матриц. Вычислительный аппарат определения эллипсоидных оценок построен на базе сингулярного разложения матриц с использованием стандартных SVD-процедур разложения матриц.*

**Введение.** Вопросам робастности и грубости динамических систем в современной науке уделяется все больше внимания [1-6]. Интерес, который привлекает проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, связан с тем, что эти понятия относятся к важным свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании.

В настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости, что связано прежде всего с основополагающими результатами В.Л. Харитонова, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов [2].

В алгебраическом направлении исследований робастности систем управления получены оригинальные результаты касательно не только свойства устойчивости, но и других свойств качества систем (быстродействия, перерегулирования, точности и др.), которые основаны на использовании модальных оценок качества процессов, в современной терминологии именуемые эллипсоидными оценками [3,4,7].

Предлагаемый доклад посвящен алгебраическому методу исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, а также построению эллипсоидных оценок для этих систем.

**I. Алгебраический метод робастной устойчивости.** Рассматриваются линейные динамические системы порядка  $n$ , непрерывная

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

и, дискретная

$$x(m+1) = Ax(m), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

где -  $x = x(t) \in R^n, x(m)$  – вектор состояния,  $A \in R^{n \times n}$  - интервальная матрица с элементами  $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ , представляющие интервальные величины  $a_{ij} \in [a_{ij}, \overline{a_{ij}}]$  с угловыми значениями  $a_{ij}, \overline{a_{ij}}, a_{ij} \leq \overline{a_{ij}}$ .

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

**Непрерывные системы.** В базовых для рассматриваемого метода работах [5,6] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости системы (1) по условиям гурвицевости четырех угловых полиномов Харитонова, составленным

по последовательным сепаратным угловым коэффициентам  $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$  характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n = 0. \quad (3)$$

Приведем эти теорему 1, доказательство которой приведено в [5,6].

**Теорема 1.** Для того чтобы положение равновесия  $x=0$  системы (1) было асимптотически устойчиво при всех  $A \in D$  или, чтобы интервальная матрица  $A$  была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитоновы, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам  $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$  характеристических полиномов (3) системы (1).

**Дискретные системы.** Как известно, публикация работы [2] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонova [6]. Так в работе [6] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонova. Но эти аналоги теорем Харитонova имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [3]. Эти ограничения были сняты в работе [6], где получены дискретные аналоги теорем Харитонova с использованием теоремы Шура являющиеся аналогами результатов работы [2] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Для дискретных систем, используя  $z$  - преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}, b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \underline{b}_i \leq \bar{b}_i. \quad (4)$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура, т.е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n|, \quad (5)$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = [b_0 f(z) - b_n f(1/z)z^n] / z, \dots, f_{i+1}(z) = [b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z)z^{n-1}] / z, \quad (6)$$

где  $b_{0,i}, b_{n,i}$  - соответственно старший и младший коэффициенты  $i$ -го ( $i = \overline{1, n-2}$ ) полинома  $f_i(z)$ .

В докладе приводится Алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем.

**II. Эллипсоидные оценки качества многомерных систем управления с интервальными параметрами.** Использование в качестве инструментария сингулярного разложения (SVD) матриц позволило ввести в рассмотрение скалярные показатели качества векторных процессов в многомерных системах, аналогичные показателям качества для одномерных систем в форме мажорант и минорант и именуемых *эллипсоидными* в силу прозрачной геометрической интерпретируемости в виде отображения сферы в эллипсоид.

**Концепция 1.** Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению, параметризованному скаляром  $\tau$

$$\kappa(\tau) = \Pi(\tau)\chi(\tau), \quad \forall \tau, \tau = t, k; \omega \quad (7)$$

где  $\kappa \in R^p, \chi \in R^v, \Pi \in R^{p \times v}$  - некоторая критериальная матрица,  $\tau$  может принимать смысл непрерывного времени  $t$  в случае исследования непрерывных многомерных управляемых процессов и смысл дискретного времени  $k$ , выраженного в числе интервалов дискретности длительностью  $\Delta t$  так, что непрерывное время  $t$  и дискретное  $k$  связаны соотношением  $t = (\Delta t)k$  в случае исследования дискретных многомерных управляемых процессов,  $\omega$ - частота источника

внешнего гармонического воздействия. Пусть матрица  $\Pi(\tau)$  имеет в силу сингулярного разложения представление

$$\Pi(\tau) = U(\tau)\Sigma(\tau)V^T(\tau) \quad (8)$$

где  $\Sigma(\tau)$  –  $(\rho \times \nu)$  диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы  $\Pi(\tau)$ ,  $U(\tau)$  – ортогональная  $(\rho \times \rho)$  матрица, столбцы которой образуют левый сингулярный базис матрицы  $\Pi(\tau)$ ,  $V(\tau)$  – ортогональная  $(\nu \times \nu)$  матрица, столбцы которой образуют правый сингулярный базис матрицы  $\Pi(\tau)$ . Если в (7) перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau) \leq \|\kappa(\tau)\|/\|\chi(\tau)\| \leq \alpha_M(\tau), \forall \tau \quad (9)$$

где  $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$  – экстремальные элементы алгебраического спектра  $\sigma_\alpha\{\Pi(\tau)\}$  сингулярных чисел матрицы  $\Pi(\tau)$ . Наибольшее и наименьшее сингулярные числа  $\alpha_M(\tau), \alpha_m(\tau)$  матрицы  $\Pi(\tau)$  в (7) однозначно определяют на матрице правых сингулярных векторов  $V(\tau)$  те из них, которые на сфере  $\|\chi(\tau)\| = \text{fix}$  отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида, получаемого с помощью (7), причем длины этих полуосей  $\alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|$  и  $\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\|$  соответственно.

С тем, чтобы сконструировать критериальную матрицу для линейной *интервальной* многомерной системы, необходимо иметь четыре “угловые харитоновские” реализации систем вида

$$\dot{x}_i(t) = F_i x + G_i g(t); x(0); y_i(t) = Cx_i(t) \quad i = \overline{1,4}, \quad (10)$$

сопровождающие “харитоновские” характеристические полиномы [2]

В докладе приводятся конструкции критериальных матриц для построения переходных характеристик по состоянию и выходу, а также для построения эллипсоидных мажоранты и миноранты амплитудно-частотных характеристик по состоянию  $x(t)=x(t,\omega)$ , выходу  $y(t)=y(t,\omega)$  и ошибке  $\varepsilon(t) = \varepsilon(t,\omega)$  интервальной многомерной непрерывной системы. Приводятся примеры.

**Заключение.** Алгебраический метод харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в данной работе, является дальнейшим развитием основных результатов работ [5, 6], который позволяет решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы.

Аппарат эллипсоидных оценок позволяет получить оценки качества процессов в многомерных системах в виде мажорант и минорант, аналогичные одномерным системам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dorato P.A. Historical review of robust control//IEEE Contr. Syst. Magazine. 1987. V.7. No 2. P. 44-47.
2. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. С. 2086-2088.
3. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. - Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
4. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Эллипсоидные оценки качества систем с интервальными параметрами, конструируемые на харитоновской выборке из массива угловых реализаций // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2004. № 14. С. 54-61.
5. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №1. С.22-27.
6. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №3. С.3-7.
7. Оморов Р.О., Акунов Т.А., Айдралиев А.О. Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 2. С. 239–245. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245
8. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices// Int. J. Control 1983. V.37. No 4. P. 717-722.



R.O.Omorov, T.A.Akunov and A.O.Aidraliev (Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek). **Robustness and Ellipsoidal Quality Estimates of Interval Multivariable Systems**

The algebraic method of researches of robust stability of continuous and discrete interval dynamical systems is considered, as well as the method of ellipsoidal quality estimates of interval multidimensional control systems. This paper presents the original results obtained for the research of the stability of continuous and discrete linear interval dynamical systems, called the Algebraic method of robust stability. Ellipsoidal quality estimates based on majorant and minorant estimates calculated using of singular values of corresponding criterion matrices of these properties are proposed for investigation of qualitative properties of multivariate control systems.

А. В. КОЛНОГОРОВ, А. Н. ЛАЗУТЧЕНКО

(Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород)

**ЗАДАЧА О ДВУРУКОМ БАНДИТЕ С МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДОХОДОВ: БАЙЕСОВСКИЙ И МИНИМАКСНЫЙ ПОДХОДЫ**

*Рассматриваются байесовский и минимаксный подходы к задаче о двуруком бандите, которая характеризуется конечным множеством значений одношаговых доходов. В байесовской постановке получены рекуррентные уравнения для вычисления оптимальных стратегии и риска. Минимаксные стратегия и риск ищутся с использованием основной теоремы теории игр как байесовские, соответствующие наихудшему априорному распределению.*

**Введение.** Рассматривается задача о двуруком бандите (см., например, [1–3]). Название происходит от игрового автомата с двумя рукоятками, называемыми также действиями, выбор каждой из которых сопровождается случайным выигрышем игрока. Распределение выигрыша фиксировано в процессе игры, зависит только от выбираемого в текущий момент времени действия, но неизвестно игроку. Целью является максимизация математического ожидания полного дохода на заданном горизонте, т.е. это задача оптимального управления. Управление осуществляется в условиях априорной неопределенности, поэтому оно должно определить действие, которому соответствует большее значение математического ожидания одношагового дохода, и обеспечить его преимущественное применение. Данная задача известна также как задача о целесообразном поведении в случайной среде [4, 5] и задача адаптивного управления [6, 7]. Она имеет приложения в компьютерных и интернет технологиях, обработке данных, медицине, моделировании поведения. Также задача может рассматриваться как игра с природой [8]. Текст доклада посвящен методам нахождения байесовских и минимаксных стратегий и рисков для двурукого бандита с конечным множеством доходов, описываемых мультиномиальным распределением. Данный подход представляет интерес, поскольку позволяет выполнять аппроксимацию широкого класса распределений общего вида, например, ограниченных распределений и распределений с легкими хвостами.

**Определение объекта, стратегии и цели управления.** Задача о двуруком бандите в байесовской постановке представлена, например, в [1–3]. Рассматриваемый в данном докладе двурукий бандит характеризуется конечным множеством доходов  $a_0, \dots, a_k$  и описывается управляемым случайным процессом  $\xi_n, n = 1, 2, \dots, N$ , значения которого зависят только от текущих выбранных действий  $y_n$ , выбираемых из множества  $\{1, 2\}$ , и характеризуются распределением

$$\Pr(\xi_n = a_j | y_n = l) = p_{lj},$$

где  $p_{lj} > 0, j = 0, \dots, k, p_{l0} + \dots + p_{lk} = 1, l = 1, 2$ . Горизонт управления  $N$  предполагается известным.

Обозначим вектор вероятностей  $p_l = (p_{l1}, \dots, p_{lk}), l = 1, 2$ . Так как значения  $a_0, \dots, a_k$  являются известными и одинаковыми при всех допустимых значениях вероятностей, то такой двурукий бандит полностью описывается параметром  $\theta = (p_1, p_2)$ . Предположим, что к моменту времени  $n$  первое и второе действия применены по  $n_1$  и  $n_2$  раз, так что  $n_1 + n_2 = n$ . Пусть при этом в ответ на применение  $l$ -го действия получены  $m_l = (m_{l0}, \dots, m_{lk})$  значений  $a_0, \dots, a_k$ , так что  $m_{l0} + \dots + m_{lk} = n_l, l = 1, 2$ . Тогда распределение статистики  $(m_1, n_1)$  является мультиномиальным

$$\Pr(m_1, n_1 | p_1) = \text{Mu}(m_1, n_1, p_1) = \frac{n_1!}{m_{10}! \dots m_{1k}!} p_{10}^{m_{10}} \dots p_{1k}^{m_{1k}}. \quad (1)$$

Обозначим через  $\sigma$  стратегию управления, которая описывает выбор действия  $y_{n+1}$  в момент времени  $n + 1$  в зависимости от текущей предыстории процесса  $m_1, n_1, m_2, n_2$ . Важной особенностью задачи является то, что значение параметра  $\theta$  является априори неизвестным, поэтому определить для него оптимальную стратегию невозможно. Однако известно множество его допустимых значений, которое обозначим  $\Theta$ . В этом случае для решения оптимизационной задачи возможно использование байесовского и минимаксного подходов. Обозначим через  $E(p_1) =$

$a_0p_{10} + \dots + a_kp_{1k}$  математическое ожидание одношагового дохода за применение  $\sigma$ -го действия. Если бы значение параметра было известно, то всегда следовало бы применять действие, соответствующее максимуму математического ожидания одношагового дохода, при этом математическое ожидание полного дохода было бы равно  $N \max(E(p_1), E(p_2))$ . В случае же применения стратегии  $\sigma$  математическое ожидание полного дохода меньше максимально возможного на величину

$$L_N(\sigma, \theta) = N \max(E(p_1), E(p_2)) - E_{\sigma, \theta}(\sum_{n=1}^N \xi_n), \quad (2)$$

которая называется функцией потерь и вызвана неполнотой информации. Здесь  $E_{\sigma, \theta}$  обозначает знак математического ожидания при выбранных стратегии  $\sigma$  и параметре  $\theta$ . Отметим, что задача о двуруком бандите может интерпретироваться как игра с природой [8]. В этом случае стратегиями лица, осуществляющего управление, являются стратегии  $\sigma$ , стратегиями природы – параметры  $\theta$ . Это игра с нулевой суммой, или антагонистическая. Однако из двух игроков только лицо, осуществляющее управление, заинтересовано в ее исходе. Природа к результатам игры равнодушна.

Обозначим через  $\lambda(\theta) = \lambda(p_1, p_2)$  априорную плотность распределения на множестве параметров  $\Theta$ . Байесовский риск определяется следующим образом:

$$R_N^B(\lambda) = \inf_{\sigma} \int_{\Theta} L_N(\sigma, \theta) d\theta, \quad (3)$$

соответствующая оптимальная стратегия называется байесовской. Минимаксный риск определяются как

$$R_N^M(\Theta) = \inf_{\sigma} \sup_{\theta} L_N(\sigma, \theta), \quad (4)$$

соответствующая оптимальная стратегия называется минимаксной.

**Нахождение байесовских стратегии и риска.** Приведем рекуррентные уравнения для нахождения байесовского риска (3). Положим  $x^+ = \max(x, 0)$  и обозначим через  $e_j = (e_{j0}, \dots, e_{jk})$ ,  $j = 0, \dots, k$  единичные векторы, заданные координатами  $e_{jj} = 1$  и  $e_{ji} = 0$  при  $j \neq i$ , через  $0 = (0, \dots, 0)$  обозначим  $(k + 1)$ -мерный нулевой вектор. Байесовский риск можно найти с помощью решения рекуррентного уравнения

$$R(m_1, n_1, m_2, n_2) = \min \left( R^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2), R^{(2)}(m_1, n_1, m_2, n_2) \right),$$

где  $R^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2) = R^{(2)}(m_1, n_1, m_2, n_2) = 0$  при  $n = N$  и далее

$$\begin{aligned} R^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2) &= g^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2) + \\ &+ (n_1 + 1)^{-1} \sum_{j=0}^k R(m_1 + e_j, n_1 + 1, m_2, n_2)(m_{1j} + 1), \\ R^{(2)}(m_1, n_1, m_2, n_2) &= g^{(2)}(m_1, n_1, m_2, n_2) + \\ &+ (n_2 + 1)^{-1} \sum_{j=0}^k R(m_1, n_1, m_2 + e_j, n_2 + 1)(m_{2j} + 1) \end{aligned}$$

при  $n < N$ , Здесь

$$\begin{aligned} g^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2) &= \iint_{\Theta} (E(p_2) - E(p_1))^+ F(m_1, n_1, m_2, n_2, \theta) \lambda(p_1, p_2) dp_1 dp_2, \\ g^{(2)}(m_1, n_1, m_2, n_2) &= \iint_{\Theta} (E(p_1) - E(p_2))^+ F(m_1, n_1, m_2, n_2, \theta) \lambda(p_1, p_2) dp_1 dp_2, \\ F(m_1, n_1, m_2, n_2, \theta) &= Mu(m_1, n_1, p_1) Mu(m_2, n_2, p_2), \\ dp_l &= dp_{11} \dots dp_{lk}, \quad l = 1, 2, \end{aligned}$$

а  $Mu(m_l, n_l, p_l)$  определено в (1). При этом байесовская стратегия предписывает выбирать то действие, которому соответствует меньшая текущая величина  $R^{(1)}(m_1, n_1, m_2, n_2)$ ; в случае их равенства выбор может быть произвольным. Байесовский риск (3) определяется по формуле

$$R_N^B(\lambda) = R(0, 0, 0, 0).$$

В случае неограниченного роста горизонта управления для вычисления байесовских стратегии и риска получено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

**Нахождение минимаксных стратегии и риска.** Минимаксный риск (4) может быть найден с использованием основной теоремы теории игр как байесовский, соответствующий наихудшему априорному распределению, т.е. с использованием равенства

$$R_N^M(\Theta) = R_N^B(\lambda^0) = \sup_{\lambda} R_N^B(\lambda),$$

при этом минимаксная стратегия совпадает с байесовской, соответствующей наихудшему априорному распределению. Справедливость основной теоремы теории игр следует из непрерывности функции потерь (2) по совокупности переменных  $\sigma$ ,  $\theta$  и компактности множеств стратегий и параметров. Для практических приложений достаточно рассматривать аппроксимации наихудшего априорного распределения распределениями на конечных множествах параметров. В этом случае для нахождения минимаксного риска следует искать глобальный максимум функции конечного числа переменных. Для бернуллиевского двурукого бандита такой подход использовался в [9, 10]. Отметим также, что численное нахождение наихудшего априорного распределения на конечном множестве параметров не представляет труда, так как байесовский риск является вогнутой функцией априорного распределения. В докладе будут представлены результаты приближенного определения минимаксных стратегии и риска для различных множеств допустимых значений параметра  $\Theta$ .

**Заключение.** Предложен подход к нахождению байесовских и минимаксных стратегий и рисков для двурукого бандита с конечным множеством доходов, описываемых мультиномиальным распределением, на известном горизонте управления. В качестве дальнейшего направления исследований можно рассмотреть случай неопределенного (т.е. априори неизвестного) горизонта управления, а также асимптотическое описание в случае, если горизонт управления неограниченно растет.

*Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 20-01-00062*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berry D.A., Fristedt B. Bandit Problems: Sequential Allocation of Experiments. London, New York: Chapman and Hall, 1985, 275 p.
2. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974, 491 с.
3. Пресман Э.Л., Сонин И.М. Последовательное управление по неполным данным. Байесовский подход. М.: Наука, 1982, 256 с.
4. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969, 316 с.
5. Варшавский В.И. Коллективное поведение автоматов. М.: Наука, 1973, 408 с.
6. Срагович В.Г. Адаптивное управление. М.: Наука, 1981, 381 с.
7. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов. М.: Наука, 1986, 288 с.
8. Боровков А.А. Математическая статистика. Дополнительные главы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984, 144 с.
9. Колногоров А.В. О минимаксном подходе к оптимальному целесообразному поведению в стационарных средах на конечном времени. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1988, № 6, с.143–146.
10. Kolnogorov A., Grunev D. Minimax strategies for Bernoulli two-armed bandit on a moderate control horizon. Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications, 2021, v.7, No 4, p. 536–544.

---

A.V.Kolnogorov, A.N.Lazutxhenko (Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Velikiy Novgorod). **Two-armed bandit problem with a multinomial distribution of incomes: Bayesian and minimax approaches**

We consider Bayesian and minimax approaches to the two-armed bandit problem, which is described by a finite set of one-step incomes. In Bayesian setting of the problem, we obtain recursive equations for computing optimal strategy and risk. Minimax strategy and risk are searched for using the main theorem of the game theory as Bayesian ones, corresponding to the worst-case prior distribution.

С. В. ГАРБАРЬ

(Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород)

**ПАКЕТНАЯ ВЕРСИЯ СТРАТЕГИИ UCS ДЛЯ ГАУССОВСКОГО ОДНОРУКОГО БАНДИТА**

*Исследуется применение стратегии UCS для задачи об одноруком бандите. Предложено использование пакетной версии алгоритма, позволяющей выполнять параллельную обработку с тем, чтобы минимизировать нормализованные к размеру горизонта управления потери в худшем случае и уменьшить общее время обработки. Показано, что потери зависят от количества обрабатываемых пакетов.*

**Введение.** Задача о двуруком бандите является одной из базовых задач обучения с подкреплением [1, 2]. В неформальной постановке речь идёт об игровом автомате, имеющем две рукоятки, каждой из которых соответствует некоторый случайных доход, характеристики которого априорно неизвестен игроку. Игрок имеет возможность выбрать действие некоторое заданное количество раз, составляющее горизонт управления.

Формально двурукий бандит — это управляемый случайный процесс  $\xi(n), n = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  называется горизонтом управления, а значение  $\xi(n)$ , называемое доходом на шаге  $n$ , зависит только от выбранного действия.

Доходы от применения действий будут считать нормально распределёнными с плотностью  $f_l(x) = (2\pi D)^{-1/2} \exp(-(x - m_l)^2/2D), l = 1, 2$ . Дисперсии доходов  $D$  будем считать известными и равными между собой. Гауссовский двурукий бандит может быть рассмотрен в ситуации, когда действия применяются не по одному, а пакетами заданного размера [3, 4]. В такой ситуации в соответствии с центральной предельной теоремой распределение дохода от обработки каждого пакета будет близким к нормальному.

Далее мы будем рассматривать задачу об одноруком бандите [5, 6, 7]: предполагается, что математическое ожидание дохода от применения первого действия  $m_1$  известно. Математическое ожидание дохода от применения второго действия  $m_2$  предполагается неизвестным. Таким образом, однорукий бандит описывается параметром  $\theta = m_2$ .

Далее мы рассмотрим и исследуем использование пакетной версии стратегии UCS в применении к гауссовскому однорукому бандиту.

**Стратегия UCS для многоруких бандитов.** Оптимальной стратегией при наличии полной информации было бы применения каждый раз того действия, средний доход для которого выше. Определим функцию потерь как математическое ожидание разности между максимально возможным ожидаемым доходом и тем, который был получен в результате применения некоторой стратегии  $\sigma$

$$L_N(\sigma, \theta) = E_{\sigma, \theta} \left( \sum_{n=1}^N (\max(m_1, m_2) - \xi(n)) \right).$$

где  $E_{\sigma, \theta}(\cdot)$  означает математическое ожидание по мере, порождённой параметром  $\theta$  и стратегией  $\sigma$ .

Нормализованную к размеру горизонта управления функцию потерь определим как

$$\hat{L}_N(\sigma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{DN}} L_N(\sigma, \theta).$$

Далее будем рассматривать управление в области близких распределений, которую определим как

$$\{m_l = m + c_l \sqrt{D/N}; m \in \mathbb{R}, |c_l| \leq C < \infty, l = 1, 2\}.$$

Стратегия UCS [8] предписывает использовать действие, которому на данный момент соответствует наибольшая величина верхней границы доверительного интервала (upper confidence bound — UCS) оценки выигрыша, которая находится по формуле.

$$U_l(n) = \frac{X_l(n)}{n_l} + \frac{\sqrt{2D \log(n/n_l)}}{\sqrt{n_l}},$$

где  $l = 1, 2$ . Данная формула разрешает дилемму «информация или управление» следующим образом: первое слагаемое позволяет получать максимальный доход в соответствии с текущей оценкой ожидаемого дохода, а второе медленно растущее слагаемое позволяет обновить информацию о доходах для тех действий, которые не были использованы длительное время.

**Случай однорукого бандита.** Так как характеристики — математическое ожидание и дисперсия — доходов от применения первого действия известны, то можно считать, что мы обладаем полной информацией о нём, так как оно уже было применено бесконечное количество раз. То есть

$$U_1(n) = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{X_1(n)}{n_1} + \frac{\sqrt{aD \log(n/n_1)}}{\sqrt{n_1}} \right) = m_1.$$

Соответственно, верхние границы для стратегии UCB в случае однорукого бандита принимают форму:

$$\begin{cases} U_1(n) = m_1, \\ U_2(n) = \frac{X_2(n)}{n_2} + \frac{\sqrt{2D \log(n/n_2)}}{\sqrt{n_2}}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда выбор действия может быть изменён только после того, как оно было использовано  $M$  раз подряд. Назовём стратегию, которая работает в такой постановке, пакетной, и заметим, что в данной ситуации возможна параллельная обработка: одновременное выполнение заданного действия, так как выбор делается заранее для всего пакета. В случае пакетной обработки данных с  $K$  пакетами размера  $M$  имеем

$$\begin{cases} U_1(k) = Mm_1, \\ U_2(k) = \frac{X_2(k)}{k_2} + \frac{\sqrt{aMD \log(k/k_2)}}{\sqrt{k_2}}, \end{cases}$$

где  $k$  — число обработанных на данный момент пакетов,  $k_2$  — число пакетов, для которых было выбрано второе действие,  $X_2(k)$  — полученный от этого доход.

**Описание алгоритма на единичном горизонте.** Для того, чтобы обосновать возможность численного моделирования методами Монте-Карло, построим инвариантное описание алгоритма, которое не будет зависеть от размера горизонта управления. Для этого отмасштабируем заданный горизонт управления с тем, чтобы он был равен единице. Дальнейшее описание для многоруких бандитов для данной стратегии было ранее рассмотрено в [9].

Введём для дальнейших рассуждений индикаторные функции ( $l = 1, 2$ )

$$I_l(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } U_l(k) = \max(U_1(k), U_2(k)), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обратим внимание, что для любого  $k$  лишь одна из функций  $I_1(k)$ ,  $I_2(k)$  будет равна единице.

Доход после обработки  $k$ -го пакета может быть записан как

$$\xi(k) = \sum_{l=1}^2 I_l(k) \cdot (M \cdot (m + c_l \sqrt{D/MK}) + \sqrt{MD}\eta),$$

где  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $\eta$  — стандартная нормально распределённая случайная величина. То есть доход может быть записан как сумма среднего дохода от применения данного действия  $M$  раз и случайной величины с нормальным распределением с нулевым средним и стандартным отклонением  $\sqrt{MD}$ .

Суммарный доход от применения каждого действия может быть записан как сумма доходов от его применений на текущий момент времени,

$$X_l(k) = k_l M m_l + \sum_{i=1}^k I_l(i) \sqrt{MD} \eta.$$

Действие номер  $l$  было применено ровно  $k_l$  раз, соответственно,

$$\sum_{i=1}^k I_l(i) \sqrt{MD} \eta = \sqrt{k_l MD} \eta.$$

Соответственно, верхняя граница доверительного интервала для второго действия может быть записана как

$$U_2(k) = mM + c_2 \frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{K}} + \frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{k_2}} \eta + \frac{\sqrt{aMD \log(k/k_2)}}{\sqrt{k_2}}.$$

Выполним линейное преобразование, не изменяющее порядок следования границ:

$$u_l(t) = (U_l(k) - mM) \sqrt{K/MD}.$$

Для перехода к единичному горизонту управления введём обозначения:

$$t = kK^{-1}, t_l = k_l K^{-1}.$$

Таким образом, с единичным горизонтом управления, зависящим только от общего числа обрабатываемых пакетов, получаем:

$$\begin{cases} u_1(t) = c_1, \\ u_2(t) = c_2 + \frac{\eta}{\sqrt{t_2}} + \frac{\sqrt{a \log(t/t_2)}}{\sqrt{t_2}}. \end{cases}$$

Нормализованная функция потерь может быть выражена в инвариантной форме как

$$\begin{aligned} \hat{L}_N(\sigma, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{DN}} E_{\sigma, \theta} \left( \sum_{k=1}^K (M \cdot \max(m_1, m_2) - \xi(k)) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{DKM}} E_{\sigma, \theta} \left( \sum_{k=1}^K \left( M \cdot \max(m_1, m_2) - \sum_{l=1}^2 M m_l I_l(k) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{DKM}} E_{\sigma, \theta} \left( \sum_{l=1}^2 M \cdot \sqrt{D/(KM)} (\max(c_1, c_2) - c_l) \left( \sum_{n=1}^K I_l(k) \right) \right) \\ &= \sum_{l=1}^2 (\max(c_1, c_2) - c_l) E_{\sigma, \theta}(t_l). \end{aligned}$$

**Результаты численного моделирования.** Методом Монте-Карло исследуем зависимость величины нормализованных потерь  $\hat{L}_N(\sigma, \theta)$  от величины  $c_2$  для однорукого бандита. Положим не умаляя общности рассуждений  $m_1 = 0, D = 1$ .

На рис. 1 показаны нормализованные потери на горизонтах управления  $N=50, 200, 800, 1600$ .

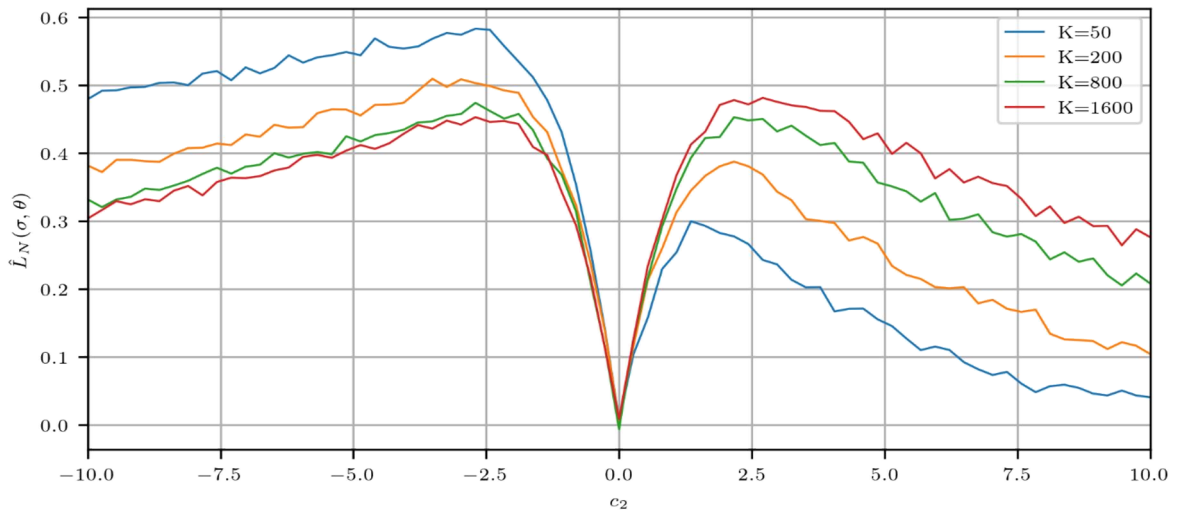


Рис. 1. Нормализованные потери на горизонтах управления  $N = 50, 200, 800, 1600$

Однако в соответствии с полученным ранее описанием данные рассуждения можно распространить и на большие количества выполняемых действий, если они будут разбиты на соответствующее число пакетов.

В зависимости от размера горизонта управления (числа обрабатываемых пакетов) оказывается, что максимальные нормализованные потери наблюдаются либо в случае, когда известное действие приносит меньший доход, чем известное (при  $N$  больших примерно 800), либо известное действие является более выгодным (при  $N$  больших, чем примерно 800).

При числе обрабатываемых пакетов  $K = 800$  нормализованные потери примерно одинаковы как в случае, если применение действия с известными характеристиками более выгодно, так и в противном случае. Соответственно, если имеется необходимость проводить управление на горизонте, превышающем по величине 800, имеет смысл разбивать обработку на пакеты таким образом, чтобы их количество составляло порядка 800. Максимальные потери в таком случае будут меньше, а при возможности параллельной обработки, времени потребуется меньше.

На рис. 2 показаны нормализованные потери при горизонте управления 800 и при горизонте управления 8000 при разбиении данных на пакеты размера  $M = 10$ . Видно, что нормализованные потери при этом примерно одинаковы.

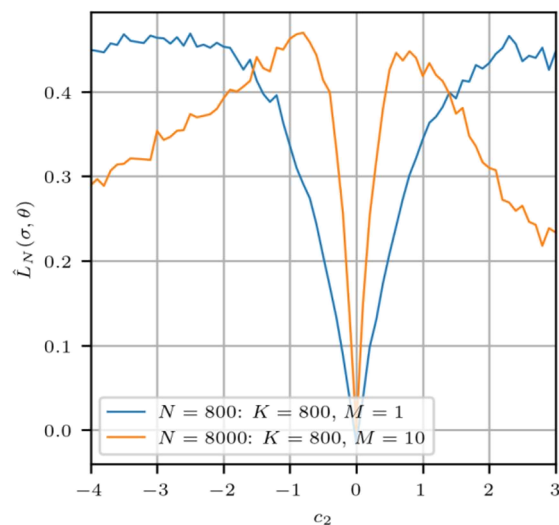


Рис. 2. Нормализованные потери на горизонтах управления  $N = 800, 8000$  при последовательной и пакетной обработке (с числом пакетов  $K = 800$ )

**Заключение.** В данной работе исследовано применения пакетной версии стратегии UCS в случае однорукого бандита. Получено инвариантное описание для единичного горизонта управления, показано, что нормализованные потери зависят только от числа обрабатываемых пакетов. Методами Монте-Карло исследовано, какое число пакетов оказывается минимальным с точки зрения минимизации максимальных потерь.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, научный проект номер 20-01-00062*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lattimore T., Szepesvari C. Bandit Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
2. Berry D.A., Fristedt B. Bandit Problems: Sequential Allocation of Experiments. London, New York: Chapman and Hall, 1985.
3. Колногоров А.В. Гауссовский двурукий бандит и оптимизация групповой обработки данных // Пробл. передачи информ. 2018. Т. 54. No 1. С. 93–111.
4. Колногоров А.В. Гауссовский двурукий бандит: предельное описание // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. No 3. С. 86–111.
5. Bradt R.N., Johnson S.M., Karlin S. On sequential designs for maximizing the sum of  $n$  observations. The Annals of Mathematical Statistics, 1956, vol. 27, no. 4, pp. 1060-1074.
6. Chernoff H., Ray S.N. A Bayes sequential sampling inspection plan. The Annals of Mathematical Statistics, 1965, vol. 36, no. 5, pp. 1387-1407.



7. Kolnogorov A.V. Robust normal two-armed bandit, one arm known, and parallel data processing. IFAC Proceedings Volumes, 2013, vol. 46, no. 11, pp. 263-268.
  8. Lai T. L. Adaptive Treatment Allocation and the Multi-Armed Bandit Problem // Annals of Statist. 1987. V. 25. P. 1091–1114.
  9. S V Garbar Invariant description for batch version of UCB strategy for multi-armed bandit J. Phys.: Conf. Ser. 1658 012015 2020
- 

S.V. Garbar (Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Velikiy Novgorod). **Batch version of the UCB strategy for the Gaussian one-armed bandit**

Batch version of the UCB strategy is examined for the one-armed bandit problem. A batch version of the strategy is proposed. It allows the parallel processing, which can help shorten the processing time and lower the regret, It is shown that the normalized regret depends on number of processed batches.

В. Н. ОВЧАРЕНКО

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва)

## СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*В докладе рассматривается метод решения задачи структурно-параметрической идентификации устойчивых линейных динамических систем с постоянными коэффициентами. Показано, что решение задачи может быть получено в частотной области за конечное число шагов.*

**Введение.** Исторически метод структурно-параметрической идентификации линейных динамических систем возник вместе с развитием частотных методов анализа их характеристик и обработки экспериментальных данных. Под структурно-параметрической идентификацией понимали аппроксимацию частотных характеристик, полученных в эксперименте, частотными характеристиками системы типовых динамических звеньев (коэффициентом усиления, апериодическими и колебательными звеньями, форсирующими звеньями первого и второго порядков и т.д.). В процессе решения задачи этим методом определялись порядки числителя и знаменателя передаточных функций и оценки коэффициентов. Практическое применение этого метода было связано с рядом трудностей, обусловленных необходимостью предварительной обработки тестовых записей (учет ненулевых начальных условий, определение длительности участка обработки, удаление смещений и фильтрация измерительных шумов и т.д.). В этом докладе приводится новый метод структурно-параметрической идентификации, основанный на применении частотно-временного метода идентификации линейных динамических систем.

**Постановка задачи.** Рассмотрим устойчивую линейную стационарную непрерывную систему, заданную дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка на интервале времени  $t \in [0, T]$

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x^{(1)} + a_0x = b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \quad (1)$$

где  $x$  – скалярный выходной сигнал;  $u$  – скалярный входной сигнал, такой что  $u(t) \neq const$ ;  $x^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$  –  $k$ -е производные; начальные условия  $x_0^{(k)}$  известны полностью или частично.

Наблюдается скалярная функция времени  $y(t)$ , линейно связанная с процессом  $x(t)$ :

$$y(t) = x(t) + b_y + \varepsilon(t), \quad (2)$$

где  $\varepsilon(t)$  — стационарный случайный процесс с нулевым средним, описывает измерительный шум;  $b_y$  – неизвестное смещение измерителя на интервале  $[0, T]$ , обусловленное смещением нуля измерителя и/или конечным временным интервалом измерений (на этом интервале измеритель "шумит" несимметрично).

Обозначим через  $\alpha = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ ,  $\beta = (b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)$ ,  $\gamma = (x_0^{(n-1)}, \dots, x_0)$  –  $n$ -мерные векторы параметров и начальных условий уравнения (1). На входном сигнале  $u(t)$  наблюдается выход  $y(t) = y(t; \alpha, \beta, \gamma)$ , зависящий от векторов параметров, начальных условий и смещения, т.е. наблюдаемый выход  $y(t)$  является траекторией в  $(3n + 1)$ -мерном параметрическом пространстве. В общем случае на входной сигнал и параметры наложены ограничения  $u \in U$ ,  $(\alpha, \beta) \in \theta$ .

Под структурно-параметрической идентификацией будем понимать решение следующей задачи. На интервале  $[0, T]$  выполняется одиночный эксперимент. Требуется по наблюдениям пары вход — выход  $(u(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T]$  определить порядок  $n$ ; все коэффициенты  $(\alpha, \beta) \in \theta$ ; неизвестные начальные условия  $\gamma$  системы (1) и смещение  $b_y$  в (2).

**Принцип оценки порядка динамической системы.** Принцип оценки порядка динамической системы (1) по результатам единственного эксперимента на интервале  $[0, T]$  основан на фундаментальных свойствах линейных систем, к которым относится свойство эквивалентности и слабой эквивалентности двух и более систем [1]. Обозначим через  $S_n$  линейную динамиче-

скую систему (1) порядка  $n$ ; векторы  $\alpha, \beta, \gamma$  имеют размерности, согласованные с порядком системы.

*Определение.* Система  $S_n$  является следствием системы  $S_m$ ,  $m > n$  на интервале  $[0, T]$  (вложением в систему  $S_m$ ) или  $S_n \sqsubseteq S_m$  если каждая пара вход — выход  $(u, x)$  системы  $S_n$  является также парой вход — выход  $(u, x)$  системы  $S_m$ .

Анализ вложений динамической системы сводится к анализу передаточных функций и их частотных характеристик в условиях единичного эксперимента.

*Утверждение.* Пусть  $n_0$  — наименьший порядок, начиная с которого существуют слабоэквивалентные системы большего порядка при нулевых начальных условиях. Тогда для вложений  $S_{n_0} \sqsubseteq S_{n_0+1} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq S_m \sqsubseteq \dots$  последовательные отношения частотных характеристик слабоэквивалентных динамических систем возрастающего порядка не зависят от частоты

$$\frac{W_{n_0+1}(j\omega)}{W_{n_0}(j\omega)} = \frac{W_{n_0+2}(j\omega)}{W_{n_0+1}(j\omega)} = \dots = \frac{W_{n_0+k}(j\omega)}{W_{n_0+k-1}(j\omega)} = \dots = 1. \quad (3)$$

Полученные результаты приводят к следующему принципу оценки порядка динамической системы: по наблюдениям на интервале  $[0, T]$  пары вход — выход  $(u, x)$  вычисляются последовательность оценок передаточных функций возрастающего порядка и отношение их частотных характеристик (3); наименьшее значение  $n_0$ , для которого выполняются условия (3), принимается за оценку порядка динамической системы (1); оценка порядка  $n_0$  динамической системы выполняется за  $(n_0 + 1)$  шагов.

**Пример.** Идентификация структуры уравнений возмущенного движения самолета МиГ-21 по полетным данным. Рассматривается возмущенное движение самолета относительно установившегося горизонтального полета. Требуется идентифицировать структуру передаточных функций по углу атаки и отклонению руля высоты (т.е. найти порядки числителя и знаменателя). На рис. 1, а) показаны переходные процессы, зарегистрированные в полете летающей лаборатории, построенной на основе самолета МиГ-21. Задача структурно-параметрической идентификации передаточных функций  $W_{\alpha}^{\varphi}(s), W_{\omega_z}^{\varphi}(s), W_{\varphi}^{X_B}(s)$  решалась частотно-временным методом.

За начальное приближение частотной характеристики было принято  $W_0(j\omega) = 1$ . В процессе решения задачи структурно-параметрической идентификации порядок исследуемых динамических систем возрастал от  $n = 1$  до  $n = 5$ . Результаты показаны на рис. 1 б) и в). Диаграммы Боде отношений  $W_{n+1}/W_n$  для передаточной функции по угловой скорости тангажа  $W_{\omega_z}^{\varphi}(s)$  имеют аналогичный вид. Диаграммы Боде показывают, что пары  $(\varphi, \alpha)$  и  $(X_B, \varphi)$  являются линейными динамическими системами второго порядка, т.е. реализуется короткопериодическое возмущенное движение самолета.

**Заключение.** Для рассматриваемого класса динамических систем определение порядка линейных дифференциальных уравнений сводится к анализу отношений частотных характеристик последовательно усложняемых структур. За оценку порядка динамической системы принимается наименьший порядок динамической системы, начиная с которого усложнение структуры динамической системы приводит только к последовательности новых слабоэквивалентных систем. Этот результат согласуется с научной парадигмой: из всего множества слабоэквивалентных систем следует выбирать наиболее простую динамическую систему с наименьшим числом параметров. Оценка порядка динамической системы определяется за конечное число шагов. Детальное изложение метода структурно-параметрической идентификации можно найти в [2, 3].

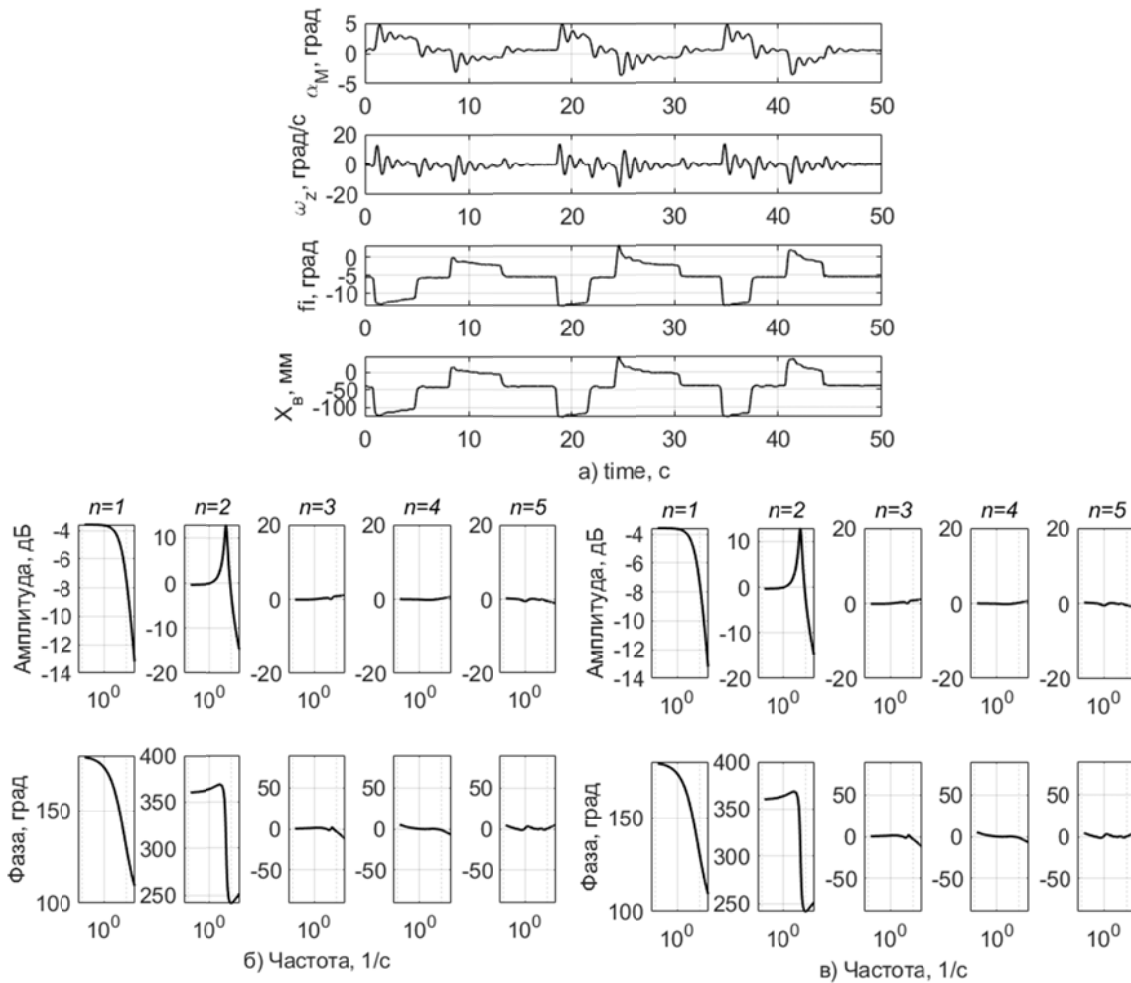


Рис.1. а) полетные данные и структура систем б)  $W_{\alpha/\varphi}(s)$  и в)  $W_{\varphi/X_B}(s)$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, ГРФ.-М; Л., 1970.
2. Овчаренко В.Н. Структурно-параметрическая идентификация линейной динамической системы с постоянными параметрами. Журнал «Автоматика и телемеханика». № 1, 2020.
3. Овчаренко В.Н., Поплавский Б.К., Ефремов А.В. Частотные методы идентификации в задачах динамики полета воздушных судов. – М.: ЛЕНАНД. 2022. – 458 с.

V. N. Ovcharenko (Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow). **Structural-parametric identification linear dynamic system**

The report discusses a method for solving the problem of structural-parametric identification of stable linear dynamic systems with constant coefficients. It is shown that the solution of the problem can be obtained in the frequency domain in a finite number of steps.

Р.О. ОМОРОВ, А. АКУНОВА, Т.А. АКУНОВ  
(Институт машиноведения и автоматике Национальной Академии Наук Кыргызской Республики,  
г. Бишкек)

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА МНОГОМЕРНЫХ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

*Рассмотрены вопросы анализа устойчивости и качества процессов многомерных систем при векторном гармоническом экзогенном воздействии с использованием экстремальных элементов сингулярного разложения вещественнозначных передаточных матриц. За базовый показатель частотно-робастного метода принято частотное число обусловленности передаточной матрицы отношения вход-выход. Процедуры синтеза частотно-робастного метода используют возможности модально-робастного обобщенного модального управления. Алгебраический метод робастной устойчивости позволяют решать вопросы анализа и синтеза робастных интервальных непрерывных и дискретных систем.*

**Введение.** В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес [1,2] к проблемам робастности и грубости (малочувствительности) систем. Вопросам робастности, с которыми тесно связана проблема грубости, посвящены работы ученых и исследователей многих стран мира. Традиционное понимание грубости и робастности в современной литературе определяет робастность [1,3,4] как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими работами В.Л. Харитонова [2], в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов.

Концепция подобия, используемая при конструировании частотных передаточных матриц, сводит исследование вынужденных составляющих переменных многомерной системы к анализу линейной (локально линейной) алгебраической задачи, связывающей вектор данной переменной с вектором начального состояния источника экзогенного гармонического воздействия с помощью критериальной матрицы, параметризованной частотой воздействия. Последнее обстоятельство позволяет задачу оценки и обеспечения робастности многомерных систем при гармоническом экзогенном воздействии, под которой понимается малая чувствительность частотных показателей качества к вариациям параметров структурных компонентов систем, свести к проблеме робастности линейной алгебраической задачи. В этой связи за базовый показатель частотной робастности принято частотное число обусловленности, то есть число обусловленности критериальной матрицы линейной алгебраической задачи, в качестве которой используется частотная передаточная матрица вход-выход многомерной системы.

Основные процедуры синтеза частотно-робастных многомерных систем опираются на возможности модально-робастного обобщенного модального управления.

Использование сингулярного разложения частотных передаточных матриц многомерных систем позволяет на экстремальных элементах алгебраического спектра сингулярных чисел и сингулярных базисов построить мажорантные и минорантные амплитудные и фазовые частотные характеристики исследуемых систем по состоянию, выходу и ошибке.

Предлагаемый доклад посвящен проблемам частотной робастности многомерных систем.

**Алгебраический метод робастной устойчивости.** Появление тенденции «робастизации» в развитии теории управления не случайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем автоматического управления, а более широкого класса систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции). В настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости.

Первые работы по анализу и синтезу грубых (малочувствительных) систем были связаны с развитием теории чувствительности. К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

При этом для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т.е. вопросы робастности и грубости в большом, а также следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны.

В докладе представлены результаты [3-5] метода в алгебраическом направлении робастной устойчивости, как для непрерывных так и дискретных линейных интервальных систем, названного *Алгебраическим методом робастной устойчивости*.

**Методы частотного направления робастной устойчивости.** Предлагается новый взгляд на традиционные методы и средства исследования многомерных систем управления, в особенности в частотном направлении теории робастности для многомерных систем. К их числу относятся частотные передаточные матрицы и конструируемые на их основе частотные характеристики. Задача конструирования частотных передаточных матриц решается с использованием концепции подобия вынужденной составляющей состояния многомерной системы состоянию источника конечномерного экзогенного воздействия. При этом матрица преобразования подобия ищется как решение матричного уравнения Сильвестра.

Рассматривается линейная многомерная непрерывная система

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); \quad x(0) = x_0; \quad y(t) = Cx(t); \quad (1)$$

где  $x(t)$  – вектор состояния,  $y(t)$  – вектор выхода,  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$  – ошибка по выходу,  $g(t)$  – экзогенное конечномерное воздействие,  $x \in R^n$ ;  $g, y \in R^n$ ;  $F \in R^{n \times n}$ ,  $G, C^T \in R^{n \times m}$ .

Как известно, пользователей проектируемых систем интересуют такие частотные показатели, как полоса пропускания отношения вход-выход на уровне заданного значения амплитудной частотной характеристики, показатель колебательности, полоса пропускания отношения вход-ошибка на уровне требуемого значения относительной частотной ошибки и так далее.

Для конструирования частотных передаточных матриц воспользуемся положениями следующего утверждения [6,7].

*Утверждение 1.* Пусть  $g(t)$  – конечномерное задающее воздействие, которое генерируется с помощью автономной конечномерной системы минимальной размерности

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \quad z(0); \quad g(t) = Pz(t); \quad PP^T = I; \quad z(t) = \exp(Et)z(0), \quad (2)$$

где  $z \in R^l$ ,  $E \in R^{l \times l}$ ,  $P \in R^{m \times l}$ ,  $g \in R^m$ . Тогда становятся справедливыми представления

$$x(t) = \exp(Ft)x(0) + (T \exp(Et) - \exp(Ft)T)z(0), \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) = C \exp(Ft)x(0) + C(T \exp(Et) - \exp(Ft)T)z(0), \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) = (P - CT) \exp(Et)z(0) - C \exp(Ft)(x(0) - Tz(0)), \quad (5)$$

где матрица  $T$  удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра  $TE - FT = GT$ .

Для построения мажоранты и миноранты амплитудно-частотных характеристик выходу  $y(t) = y(t, \omega)$  и ошибке  $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, \omega)$  многомерной непрерывной системы (1) используется следующее утверждение.

*Утверждение 2.* Мажоранты и миноранты амплитудно-частотных характеристик по выходу  $y(t) = y(t, \omega)$  и ошибке  $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, \omega)$  многомерной непрерывной системы, удовлетворяют оценочным неравенствам, принимающим для гармонического воздействия вид

$$M_{ym}(\omega) \leq \frac{\|y(t, \omega)\|}{\|z(0)\|} = \frac{\|y(\omega)\|}{\|z(0)\|} \leq M_{yM}(\omega), \quad \forall \omega, \quad M_{ym}(\omega), M_{yM}(\omega) \in \sigma_{\alpha}\{CT\}$$

$$\delta_m(\omega) \leq \frac{\|\varepsilon(t, \omega)\|}{\|z(0)\|} = \frac{\|\varepsilon(\omega)\|}{\|z(0)\|} \leq \delta_M(\omega), \quad \forall \omega, \quad \delta_m(\omega), \delta_M(\omega) \in \sigma_{\alpha}\{P - CT\}$$

в которых  $\sigma_{\alpha}\{*\}$  – алгебраический спектр сингулярных чисел матриц (\*), частотная передаточная матрица  $T$  путем решения уравнения Сильвестра (18) принимает вид

$$T(\omega) = -(\omega^2 I + F^2)^{-1} \text{row}\{[FG_i \quad \omega G_i]\}; \quad i = \overline{1, m},$$

где  $\omega$  – частота задающего внешнего векторного воздействия.

Контроль робастности отношения “вход-выход” при гармоническом экзогенном воздействии синтезируемой многомерной системы осуществляется с помощью числа обусловленности частотной передаточной матрицы этого отношения. Построение робастных компонентов “конструкции”, гарантирующих стабильность частотных показателей качества отношения “вход-выход”, осуществляется сведением мультипликативного параметрического воздействия на систему к аддитивному в виде дополнительного параметрического квазиэкзогенного воздействия, относительно которых системе доставляется неуправляемость ее выхода. Параметрическая часть задачи в рамках проблемы оптимального номинала, как и в случае одномерных систем, решается с помощью назначения робастной структуры мод матрице состояния системы, а также минимизацией числа обусловленности матрицы нормированных собственных векторов. В силу явной геометрической направленности методологии достижения робастности многомерных систем для поставленной задачи используются возможности обобщенного модального управления.

Структурная избыточность многомерных объектов позволяет поставить задачу обобщенного модального управления [8, 9].

*Определение 1.* Под задачей *обобщенного модального управления* понимается задача синтеза законов управления, доставляющего матрице  $F$  системы (1), полученной агрегированием исходного многомерного непрерывного объекта управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (7)$$

и закона управления, реализованного в виде линейной композиции прямой связи по экзогенному воздействию и обратной связи по состоянию

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (8)$$

$$F = A - BK, \quad G = BK_g \quad (9)$$

где  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B, K \in R^{n \times m}$ ,  $K_g \in R^{m \times m}$  желаемые алгебраический спектр собственных значений  $\{\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}\}$  и геометрический спектр собственных векторов  $\{\xi_i: F\xi_i = \lambda_i\xi_i, i = \overline{1, l}; l \leq n\}$ , матрица  $K$  обратной связи по состоянию объекта вычисляется с помощью соотношения

$$K = HM^{-1}, \quad (10)$$

а матрица  $M$  является решением уравнения Сильвестра

$$MG - AM = -BH. \quad (11)$$

В докладе применяется подход к задаче ранжирования варьируемых параметров, основанный на декомпозиции вариации матрицы состояния объекта и позволяющий ввести в рассмотрение “параметрическое” экзогенное воздействие. Если потребовать выполнения условия равенства норм матриц входа по компонентам экзогенного параметрического воздействия, то на тройке матриц параметрического входа-состояния-выхода могут быть построены кросс-грамианы, значения норм которых в виде максимальных сингулярных чисел позволяет решить задачу ранжирования варьируемых параметров. Этот первый подход, обеспечивающий робастность систем путем достижения неуправляемости отношения “параметрический вход-состояние-выход, хорошо вписывается в возможности обобщенного модального управления, которое назначением желаемой структуры собственных векторов матрицы состояния синтезируемой многомерной системы для группы доминирующих параметров путем обеспечения неуправляемости выхода системы по соответствующим этим параметрам параметрическим экзогенным входам позволяет обеспечить полную нечувствительность, т.е. полную робастность, выходов системы к вариациям параметров указанной группы.

Второй подход основан [9] на связи частотного числа обусловленности  $S_y(\omega)$  отношения “вход-выход” с числами обусловленности матричных компонентов этого отношения и использует свойства числа обусловленности произвольной матрицы, а также свойства матрицы собственных векторов  $M$ .

Как известно, алгоритм обобщенного модального управления, предполагающего обеспечение требуемой структуры мод и собственных векторов матрицы  $F$  синтезируемой системы, при задании матрицы состояния модальной модели  $\Gamma$  в диагональной (блочной-диагональной) форме, должен быть дополнен процедурой минимизации  $C\{M\}$  числа обусловленности матрицы преобразования подобия. Причем имеются версии *полного* (когда ранг матрицы  $B$  равен  $r < n$ ) и *неполного* (когда ранг матрицы  $B$  равен  $r = n$ ) обобщенного модального управления.

В докладе приводятся алгоритмы, обеспечивающие робастность систем путем достижения неуправляемости отношения “параметрический вход-состояние-выход”, а также алгоритм синтеза многомерных систем в классе хорошо обусловленных отношений “вход-выход”.

Таким образом, многомерные системы по сравнению с одномерными обнаруживают заметное богатство структурных реализаций, однако, плохо сконструированные связи между сепаратными каналами, их разнотемповость, т.е. неидентичность частотных свойств может стать источником уменьшения частотной робастности многомерных систем, что не обнаруживается в одномерном случае.

Задача синтеза многомерных частотноробастных непрерывных систем в классе хорошо обусловленных отношений “вход-выход” может быть решена методами обобщенного модального управления, доставляющего матрице состояния системы модальноробастное представление. При этом в силу асимптотических свойств оценка частотного числа обусловленности отношения “вход-выход” во всем диапазоне частот экзогенного гармонического воздействия принимает минимальное значение, степень отклонения которого от единицы определяется степенью отклонения от единицы числа обусловленности матрицы собственных векторов.

**Заключение.** В докладе показана связь желаемой структуры собственных векторов  $\{\xi_i, i = \overline{1, l}; l \leq n\}$  с проблемой достижения частотной робастности многомерной системы (1). Концепция подобия позволяет с единых алгоритмических позиций построить частотные передаточные матрицы непрерывных, дискретных и с модуляцией многомерных систем для одночастотного и многочастотного случаев возбуждения входов систем гармоническим экзогенным воздействием для решения задачи синтеза частотноробастных систем

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dorato P.A. Historical review of robust control // IEEE Contr. Syst. Magazine. 1987. V.7. No 2. P. 44-47.
2. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. С. 2086-2088.
3. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. №1. С.22-27.
4. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. №3. С.3-7.
5. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т.20. № 3. С.364-370.
6. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. - Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
7. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии. // Автоматика и телемеханика, 1989. №11. С.76-85.
8. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Изв. Вуз. Приборостроение, 2000, Т.43, №3. С.8-16.
9. Akunova A., Akunov T.A., Ushakov A. V. Degeneration of Complex Systems under Multifrequent Input Signal // Proc. of the 2nd International Conference “Control of Oscillations and Chaos” (COC2000), St.Petersburg, 2000. Vol. 1. P.101-104.

---

R.O. Omorov, A. Akunova, T.A. Akunov (Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek). **Algebraic And Frequency Methods for the Analysis and Synthesis of Multidimensional Robust Systems**

The paper considers issues of stability and process quality analysis of multidimensional systems under vector harmonic exogenous influence using extremal elements of singular decomposition of real-valued transfer matrices. The frequency robust method is based on the frequency conditioning number of the input-output ratio transfer matrix. The procedures for the synthesis of the frequency robust method use the capabilities of the modal-robust generalized modal control. The algebraic method of robust stability allows to solve the analysis and synthesis problems of robust interval continuous and discrete systems.



К. А. РЫБАКОВ  
(Московский авиационный институт, Москва)

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

*В докладе рассматриваются повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито и их представление, полученное на основе спектральной формы математического описания и спектрального метода анализа линейных систем управления.*

**Введение.** В докладе предлагается новое представление повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности  $k \geq 2$  :

$${}^S J_T^{(j_1 \dots j_k)} = \int_T \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \dots \psi_k(t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \quad (1)$$

и повторных стохастических интегралов Ито кратности  $k \geq 2$  :

$${}^I J_T^{(j_1 \dots j_k)} = \int_T \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \dots \psi_k(t_k) dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) \dots dW_{j_k}(t_k), \quad (2)$$

где  $T = [t_0, T]$ ,  $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, s\}$ ,  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_k(t) \in L_2(T)$  – заданные функции,  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_s(t)$  – независимые стандартные винеровские процессы, которым соответствуют независимые стандартные гауссовские белые шумы  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_s(t)$ . Такие интегралы возникают в разложении решений стохастических дифференциальных уравнений в ряды Тейлора–Стратоновича и Тейлора–Ито, а их моделирование необходимо при реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с высоким порядком сильной сходимости (для реализации методов с порядком сходимости  $k/2$  требуется моделировать повторные стохастические интегралы до кратности  $k$  включительно) [1–4]. Отметим, что для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений достаточно ограничиться функциями  $\psi_l(t) = (t - t_0)^{n_l}$ ,  $n_l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ .

Предлагается представлять повторные стохастические интегралы как выходные сигналы полилинейных систем управления, входные сигналы для которых – стандартные гауссовские белые шумы. Структурные схемы таких систем управления включают интегрирующие звенья, усилительные звенья с коэффициентами усиления  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_k(t)$  и множительные звенья. Более простая структурная схема соответствует повторным стохастическим интегралам Стратоновича, поскольку для них справедливы обычные правила интегрального исчисления. Для повторных стохастических интегралов Ито структурная схема сложнее, она включает дополнительные параллельные соединения, учитывающие правила стохастического исчисления Ито.

Важной составляющей при этом является применение спектральной формы математического описания, которая лежит в основе спектрального метода анализа линейных систем управления [5–7]. Выбор спектральной формы математического описания неслучаен. Он обусловлен тем, что при построении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, включающих моделирование повторных стохастических интегралов, свою эффективность показал подход, основанный на представлении винеровских процессов ортогональными разложениями (метод Мильштейна [1]) и подход, основанный на разложении в ортогональные ряды ядер кратных стохастических интегралов, которые соответствуют повторным стохастическим интегралам (метод Кузнецова [3,4]).

Спектральная форма математического описания базируется на представлении сигналов и систем управления упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения функций (входных и выходных сигналов, а также импульсных переходных функций) в ортогональные ряды. Она предполагает, что звеньям линейных систем управления соответствуют двумерные нестационарные передаточные функции (бесконечные плоские матрицы), множительному звену – трехмерная нестационарная передаточная функция (бесконечная пространственная матри-

ца), а входные и выходные сигналы системы управления представляются нестационарными спектральными характеристиками (бесконечными матрицами-столбцами) [5–7]. Далее будем следовать терминологии [8] и использовать спектральные характеристики оператора интегрирования, спектральные характеристики операторов умножения и спектральные характеристики множительного звена, а также спектральные характеристики функций и случайных процессов.

**Представление повторных стохастических интегралов.** Сформулируем основной результат данной работы в виде двух теорем о представлении повторных стохастических интегралов (1) и (2). Из-за ограничений на объем реферата формулы для нахождения необходимых спектральных характеристик здесь не приводятся, но их можно найти в [8] как для общего случая, так и при условии, что в качестве базисной системы  $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(T)$  используются полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша, функции Хаара, тригонометрические функции.

*Теорема 1.* Пусть  $V_1, V_2, \dots, V_s$  – спектральные характеристики белых шумов  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_s(t)$  соответственно,  $P^{-1}$  – спектральная характеристика оператора интегрирования,  $V$  – спектральная характеристика множительного звена,  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$  – спектральные характеристики операторов умножения на функции  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_k(t)$  соответственно. Спектральные характеристики  $P^{-1}$ ,  $V$  и  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$  определены относительно базисной системы  $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(T)$ . Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича (1) представляется с помощью соотношений

$${}^S J_T^{(j_1 \dots j_k)} = V_{j_k}^T \Psi_k X_{k-1}, \quad X_l = P^{-1} \Psi_l (V V_{j_l}) X_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad X_1 = P^{-1} \Psi_1 V_{j_1}, \quad (3)$$

или в явном виде

$${}^S J_T^{(j_1 \dots j_k)} = V_{j_k}^T \Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} (V V_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} \Psi_2 (V V_{j_2}) P^{-1} \Psi_1 V_{j_1}, \quad (4)$$

где  $^T$  означает транспонирование.

Частный случай теоремы 1 при условии  $\psi_l(t) \equiv 1$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ , доказан в [9] при выборе произвольной базисной системы, а при выборе функций Уолша – в [10]. Наиболее простой вариант для  $k = 2$  разобран ранее в [11].

*Теорема 2.* Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того,  $\mathbf{1}$  – спектральная характеристика функции  $f_0(t) \equiv 1$  относительно базисной системы  $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(T)$ . Тогда повторный стохастический интеграл Ито (2) представляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} {}^I J_T^{(j_1 \dots j_k)} &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k X_{k-2} + V_{j_k}^T \Psi_k X_{k-1}, \\ X_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l X_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V V_{j_l}) X_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \\ X_0 &= \mathbf{1}, \quad X_1 = P^{-1} \Psi_1 V_{j_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_{j_{l-1} j_l}$  – символ Кронекера,  $l = 2, \dots, k$ .

Частный случай теоремы 2 при условии  $\psi_l(t) \equiv 1$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ , доказан в [12].

Можно рассмотреть повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито смешанного типа. Воспользуемся подходом, который применяется в [3, 4], а именно дополним множество значений  $j_1, j_2, \dots, j_k$  нулем и введем функцию  $W_0(t) = t$ , т.е.  $dW_0(t) = dt$ . Тогда формулы (1) и (2) определяют повторные стохастические интегралы более широкого класса при условии  $j_1 + j_2 + \dots + j_k > 0$ . Для представления повторных стохастических интегралов Стратоновича смешанного типа с помощью спектральной формы математического описания достаточно опираться на теорему 1 и соотношения (3) и (4), дополнительно обозначая  $V_0 = \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  – спектральная характеристика функции  $f_0(t) \equiv 1$ . Отметим, что при условии  $j_1 + j_2 + \dots + j_k = 0$  соот-

ношения (3) и (4) позволяют найти коэффициенты разложения ядра кратного стохастического интеграла, который соответствует повторному стохастическому интегралу, т.е. функции

$$\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\dots\psi_k(t_k)1(t_2-t_1)\dots 1(t_k-t_{k-1}),$$

где  $1(t-\tau)$  – единичная ступенчатая функция.

Для представления повторных стохастических интегралов Ито смешанного типа соотношения (5), приведенные в теореме 2, требуется модифицировать, а именно

$$\begin{aligned} {}^1 J_{\Gamma}^{(j_1\dots j_k)} &= -\frac{1}{2}\delta_{j_{k-1}j_k}^* \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k X_{k-2} + V_{j_k}^T \Psi_k X_{k-1}, \\ X_l &= -\frac{1}{2}\delta_{j_{l-1}j_l}^* P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l X_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V_{j_l}) X_{l-1}, \quad l=2, \dots, k-1, \\ X_0 &= \mathbf{1}, \quad X_1 = P^{-1} \Psi_1 V_{j_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta_{j_{l-1}j_l}^* = \delta_{j_{l-1}j_l} \bar{\delta}_{j_l 0} = \delta_{j_{l-1}j_l} (1 - \delta_{j_l 0})$ ,  $l=2, \dots, k$ .

Кроме того, можно сформулировать аналог теорем 1 и 2 для представления повторных  $\theta$ -интегралов кратности  $k \geq 2$ , который при  $\theta = 1/2$  дает представление повторных стохастических интегралов Стратоновича (1), а при  $\theta = 0$  – представление повторных стохастических интегралов Ито (2).

Приближенное моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито осуществляется при усечении всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка  $L$ , т.е. когда все матрицы, входящие в соотношения (3)–(6), являются конечными размера  $L$  по каждому измерению:  $L$  для матриц-столбцов,  $L \times L$  для плоских и  $L \times L \times L$  для пространственных матриц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.
2. Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1995.
3. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. С. А.1–А.1073.
4. Kuznetsov D.F. Mean-square approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Itô SDEs and semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 4. С. А.1–А.788.
5. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
6. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. М.: Машиностроение, 1979.
7. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егулов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
8. Рыбаков К.А. Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. М.: Изд-во МАИ, 2021.
9. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 217. Springer, 2021. P. 287–304.
10. Rybakov K. Application of Walsh series to represent iterated Stratonovich stochastic integrals // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 927. Id 012080.
11. Рыбаков К.А. Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 4. С. 1–31.
12. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Itô iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 274. Springer, 2022. P. 331–344.

K. A. Rybakov (Moscow aviation institute, Moscow). **Application of the spectral method for analysis of linear control systems to modeling iterated stochastic integrals**

The report deals with iterated Stratonovich and Itô stochastic integrals and their representations based on the spectral form of mathematical description and the spectral method for the analysis of linear control systems.

Н.М. МАРКОВИЧ, М. С. РЫЖОВ  
(Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОЦЕНИВАНИЕ ХВОСТОГО ИНДЕКСА МЕР ВЛИЯТЕЛЬНОСТИ УЗЛОВ В СЛУЧАЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННО МЕНЯЮЩИХСЯ ГРАФАХ

*Из теории экстремальных значений, касающиеся сумм и максимумов нестационарных последовательностей случайной длины, прогнозируется хвостовой индекс Пейджрангов и рангов модели линейных максимумов в качестве мер влияния суперузлов, к которым присоединяется большая часть узлов в эволюционирующих графах. Графы разбиваются на слабо зависимые сообщества. Хвостовые индексы максимумов и сумм рангов узлов по сообществам, как независимым блокам данных, оказываются близкими к минимальному хвостовому индексу репрезентативных выборок узлов, составленных по сообществам.*

**Ключевые слова:** Случайный граф, хвостовой индекс, Пейджранг, модель линейных максимумов, сообщества, эволюция, предпочтительное присоединение

**Введение.** Случайные графы привлекают внимание исследователей из-за многочисленного применения, включая сложные сети и системы. Под случайными графами подразумеваются графы, в которых число входящих (in-degree) и исходящих (out-degree) связей, являются случайными числами. Хорошо известно, что для многих реальных сетей и структур соответствующий случайный граф имеет число входящих и исходящих связей распределены по степенному закону.

Несмотря на то, что число связей являются дискретными случайными величинами, их распределение может быть аппроксимировано регулярно меняющимися распределениями с тяжелыми хвостами [1]. Хвост распределения случайной неотрицательной величины  $X$  называется регулярно меняющимся с хвостовым индексом (ХИ)  $\alpha$ , если для него выполнено  $\bar{F}(x) = P\{X > x\} = x^{-\alpha} \ell(x)$ ; где  $\ell(x)$  — медленно изменяющаяся функция,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ell(xt) / \ell(x) = 1$  для любого  $t > 0$ . Чем меньше ХИ, тем тяжелее хвост распределения. Другой мерой влияния узлов в случайном графе является Пейджранг (ПР). Для случайно выбранной веб-страницы (т.е. вершины веб-графа) ПР представляется как решение задачи

$$R = \sum_{j=1}^D A_j R_j + Q, \quad (0.1)$$

предполагая, что  $\{R_j\}$  являются независимыми одинаково распределенными копиями  $R$  и

$E(Q) < 1$  выполняется.  $\stackrel{D}{=}$  обозначает равенство в распределении. В [1,2] показано, что для случайной веб-страницы ПР имеет регулярно меняющееся распределение. С помощью эмпирических оценок получено, что ХИ для числа входящих связей и ПР веб-страницы имеет значение  $\alpha < 2$ . По свойствам регулярно изменяющихся распределений это означает, что дисперсия индексов узлов бесконечна. Другой мерой влияния узла являются ранги модели линейных максимумов (МЛМ) [4]

$$R = \left( \bigvee_{j=1}^D A_j R_j \right) \vee Q. \quad (0.2)$$

Цель работы состоит в том, чтобы оценить ХИ для РП и МЛМ суперузлов, соединенных большим количеством входящих связей с другими узлами в эволюционирующих случайных графах. Структура ребер и узлов таких графов меняется со временем и может быть разделена на сообщества с помощью направленного алгоритма Louvain [5]. Сообщество состоит из узлов, которые сильно связаны друг с другом и слабо связаны с узлами из других сообществ [6]. Количество связей у узлов в сообществах также могут быть зависимыми и нестационарно распределенными. Используя результаты теории экстремальных значений, оценивается ХИ блок-максимумов и блок-сумм ПР узлов по сообществам и сравниваем его с минимальным ХИ ПР среди репрезентативных рядов, составленных из узлов разных сообществ. Эволюция графа обеспечивается линейным преимущественным присоединением (ПП) [7]. В работе исследуются моделируемые эволюционирующие графы со стационарными распределенными входящими и

исходящими связями и однородной структурой взаимосвязей, а также реальные меняющиеся графы. Для оценки ХИ используются оценки Хилла и QQ-plot (см. [8]).

**Хвостовой индекс для случайных сумм и максимумов в случайных графах.** В работах [9, 10] был найден ХИ сумм и максимумов нестационарных последовательностей случайной длины с возможной зависимостью друг от друга. Такие последовательности можно рассматривать как строки двумерного массива случайных величин  $(Y_{n,i} : n, i \geq 1)$ , в котором "индекс строки"  $n$  соответствует времени, а "индекс столбца"  $i$  соответствует уровню. Предполагается, что последовательности из "столбцов" являются стационарно распределенными с регулярно меняющимися хвостами и ХИ  $\{k_i\}_{i \geq 1}$ . Предполагается, что одна из таких последовательностей имеет минимальный ХИ  $k_1$ . Было обнаружено, что ХИ для сумм и максимумов по строкам равны  $k_1$  [9]. То же самое может быть верно, если последовательностей случайное количество [10]. Результаты также остаются верными, если ХИ элементов в "столбцах" различны, кроме "столбцов" с ХИ  $k_1$  [10].

Результаты в [9, 10] могут быть применены к суммам и максимумам в правых частях (1.1) и (1.2). Это позволяет найти ХИ ПР и МЛМ суперузлов внутри сообществ, к которым присоединяется большая часть узлов сообщества. ПР или МЛМ суперузлов вычисляется по сумме или максимуму ПР его ближайших соседей, имеющих входящие связи на исходный узел. Согласно теории и нашему имитационному исследованию, ХИ их ПР (или МЛМ) могут быть аппроксимированы минимальным ХИ репрезентативной выборки, "столбцов" из узлов, которые взяты из каждого сообщества в качестве их представителей, а последовательности "строк" случайной длины можно рассматривать как сообщества узлов, см. Рис. 1. Поскольку ПР в сообществах могут быть нестационарно распределенными и произвольно зависимыми, репрезентативная выборка с минимальным ХИ должна быть распределена стационарно, что может не выполняться в гетерогенных случайных графах.

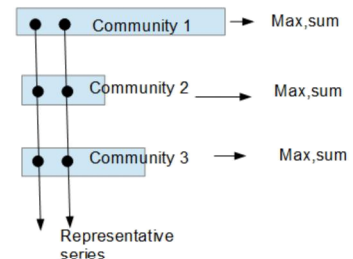


Рис. 1. Сообщества в виде последовательностей "строк" и репрезентативные выборки узлов в виде "столбцов": максимумы и суммы берутся по ПР в сообществах.

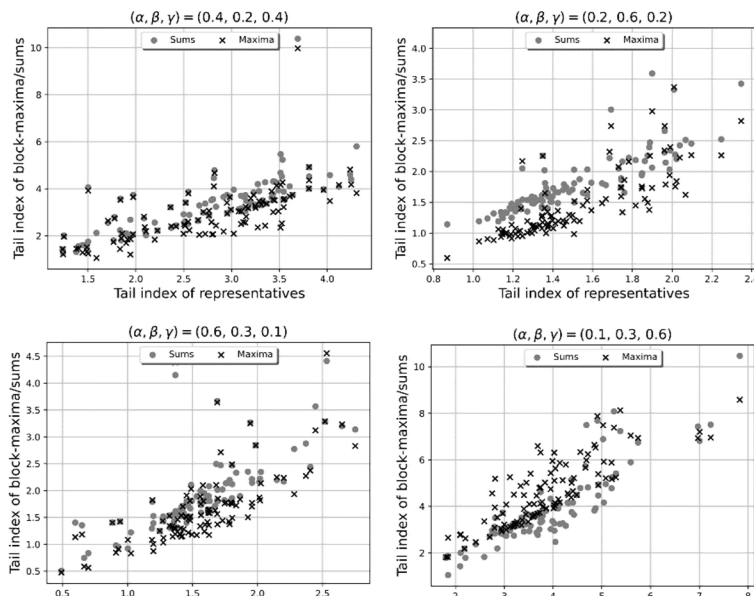


Рис. 2. Оценки QQ-plot для ХИ максимумов и сумм по сообществам в сравнении с минимальными оценками QQ-plot для ХИ репрезентативной выборки для ПР, где каждая точка соответствует одному из 100 графов, полученных ПП ( $\alpha, \beta, \gamma$ )-схемами.

В нашем эксперименте были применены схемы ПП с различными наборами параметров  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Количество узлов в эволюционировавших графах было принято равным  $n = 10^4$ . Для

**Результаты.** Были рассмотрены стационарные эволюционирующие графы, которые создаются с помощью ПА  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -схем, предложенных в [7], из начальной структуры, содержащей по крайней мере один узел.  $\alpha$  – вероятность создания нового ребра от вновь появляющегося узла к существующему узлу, вероятность  $\gamma$  – наоборот.  $\beta$  – вероятность создания нового ребра между двумя существующими узлами. Значение ХИ для ПР еще не в теории, но его можно оценить.

Для оценки ХИ используется простая и достаточно точная оценка QQ-plot, предложенную в [8].

каждого набора  $(\alpha, \beta, \gamma)$  смоделировано 100 графов. На рис. 2 оценки QQ-plot для сумм по отношению к минимальным ХИ ПР репрезентативных выборок демонстрируют диагональный тренд. Хотя ХИ максимумов также демонстрируют тренд, он может отличаться от такового для сумм. Здесь опускается подробный анализ и тестирование на стационарность репрезентативных выборок с минимальным ХИ по U-критерию Манна-Уитни.

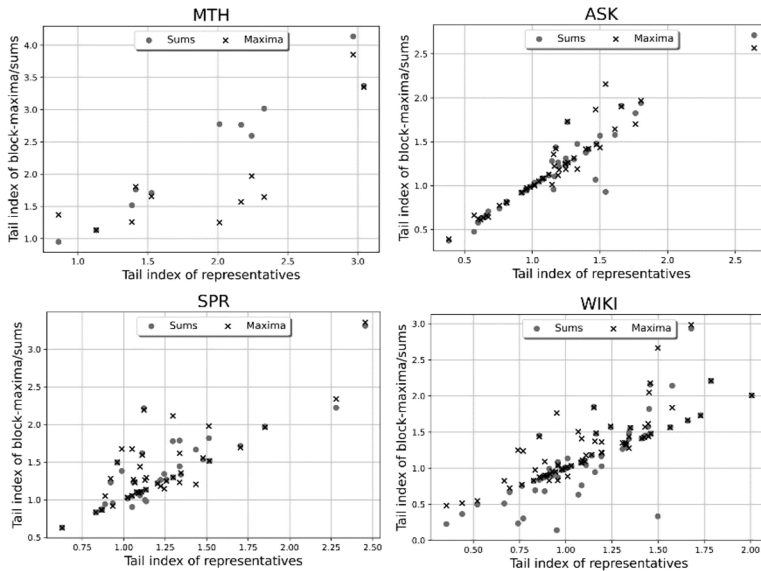


Рис. 3. Оценки QQ-plot для ХИ максимумов и сумм по сообществам в сравнении с минимальными оценками QQ-plot для ХИ репрезентативной выборки для ПР, где каждая точка соответствует одному из подграфов реально меняющегося графа.

точность оценки ХИ для максимумов и сумм, если их число недостаточно велико, как для МТН графа. Для значений сумм и максимумов ПР по сообществам сравнивается ХИ с минимальными ХИ среди репрезентативных выборок. Можно сделать вывод, что максимумы и суммы по всем сообществам на рис. 3 имеют схожие значения ХИ с минимальным ХИ среди репрезентативных выборок. Этот результат согласуется с результатами в [9, 10], которые проверялись в работе.

**Заключение.** В работе сделано предположение ХИ ПР и МЛМ суперузлов в случайных графах. С этой целью граф разбивался на сообщества. Предполагалось, что суперузел в сообществе имеет входящие связи ото всех узлов сообщества. ХИ ПР и МЛМ суперузлов могут быть аппроксимированы минимальным ХИ ПР последовательностей, построенных по репрезентативным узлам из сообществ. Полученные результаты подтверждают теорию, представленную в работах [9, 10]. Поскольку сообщества имеют случайный размер, некоторые узлы могут попадать в несколько репрезентативных выборок, что приводит к их зависимости. Последнее не противоречит предположениям, изложенным в [9, 10]. Преимущество такого подхода заключается в том, что сообщества представляют собой слабо связанные подграфы, и, следовательно, случайные величины из репрезентативных выборок слабо зависимы, что в основном требуется для оценки ХИ. Из теории [9, 10] репрезентативная выборка с минимальным ХИ должны быть стационарно распределена с регулярно меняющимся хвостом. Случайные величины из остальных репрезентативных выборок могут быть распределены с различными ХИ, превышающими минимальный.

*Работа проводилась при поддержке гранта РНФ 22-21-00177.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Volkovich Y. V., Litvak N. Asymptotic analysis for personalized web search. Adv. Appl. Prob. 2010. Vol. 42. № 2. P. 577–604.

2. Jelenkovic P. R., Olvera-Cravioto M. Information ranking and power laws on trees. *Adv. Appl. Prob.* 2010. Vol. 42. №4. P. 1057–1093.
3. Brin S., Page L. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*. 1998. Vol. 30. P. 107–117.
4. Markovich N.M., Ryzhov M. and Krieger, U.R. Nonparametric analysis of extremes on web graphs: pagerank versus max-linear model. *Communications in Computer and Information Science*. 2017. Vol. 700. P. 13–26.
5. Dugu'e N., Perez A. Directed Louvain: maximizing modularity in directed networks. [Research Report] Universit'e d'Orl'eans. hal-01231784. 2015.
6. Fortunato, S. Community detection in graphs. *Physics Reports*. 2010. Vol. 486. № 3. P. 75–174.
7. Wan P., Wang T., Davis R. A. and Resnick S.I. Are extreme value estimation methods useful for network data? *Extremes*. 2020. Vol. 23, P. 171–195.
8. Das B., Resnick S.I. QQ Plots, Random Sets and Data from a Heavy Tailed Distribution. *Stochastic Models*. 2008. Vol. 24 № 1, P. 103–132.
9. Markovich N., Rodionov I. Maxima and sums of non-stationary random length sequences. *Extremes*. 2020. Vol. 23 № 9, P. 451–464.
10. Markovich N. Extremes of Sums and Maxima with Application to Random Networks. 2021. arXiv:math.PR/2110.04120
11. Michail, O. An Introduction to Temporal Graphs: An Algorithmic Perspective. In: Zaroliagis, C., Pantziou, G., Kontogiannis, S. (eds) *Algorithms, Probability, Networks, and Games*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9295. P. 308–343, Springer, Cham, 2015.
12. Leskovec J., Krevl A. SNAP Datasets: Stanford Large Network Dataset Collection, 2014. <http://snap.stanford.edu/data>

---

N.M.Markovich, M.S.Ryzhov, (Institute of Control Science V.A.Trapeznikova RAS, Moscow). **Estimation of tail index for node influence in random evolving graphs**

From the theory of extreme values concerning sums and maxima of nonstationary sequences of random length, the tail index of Pageranks and Max Linear Models are predicted as measures of the influence of superstar nodes, to which most of the nodes in evolving graphs joined. Graphs are divided into weakly dependent communities. The tail indices of the maxima and sums of the node ranks by communities, as independent data blocks, are shown to be close to the minimum tail index of representative series of nodes compiled by communities.