ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 110–129

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.745

О ЧИСЛЕ НАИМЕНЬШИХ ПОЛНЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ В ДЕРЕВЬЯХ

Д. С. Талецкий[1,2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: dmitalmail@gmail.com

Аннотация. Наименьшим полным доминирующим множеством графа (НПДМ) называется подмножество его вершин D наименьшей мощности такое, что каждая вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной из D. В работе получена точная верхняя оценка числа НПДМ в классе n-вершинных 2-гусениц. Кроме того, показано, что при всех $n \geqslant 1$ каждое n-вершинное дерево содержит менее чем $(\sqrt{2})^n$ НПДМ. Ил. 5, библиогр. 6.

Ключевые слова: экстремальная комбинаторика, дерево, 2-гусеница, наименьшее полное доминирующее множество.

Введение

Доминирующим множеством графа называется подмножество вершин D такое, что любая вершина не из D смежна хотя бы с одной вершиной из D. *Полным доминирующим множеством* графа называется подмножество вершин D' такое, что любая вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной из D'. Доминирующее множество называется *наименьшим*, если оно наименьшее по мощности. В работе используются сокращения ДМ, НДМ, ПДМ и НПДМ для терминов доминирующее множество, наименьшее доминирующее множество, полное доминирующее множество и наименьшее полное доминирующее множество соответственно. *Числом полного доминирования* $\gamma_t(G)$ графа G называется мощность каждого его НПДМ. Через $\vartheta(G)$ будем обозначать число всех НПДМ графа G.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21–11–00194).

В 2006 г. в работе [1] описаны деревья, содержащие максимальное и минимальное число ДМ среди всех n-вершинных деревьев. Позднее в [2] описаны деревья и связные графы, содержащие минимальное число ПДМ. Вопрос о том, может ли дерево с числом доминирования γ содержать более чем 2^γ НДМ, оставался открытым до 2017 г., когда в [3] был приведён пример такого дерева. С другой стороны, в [4] показано, что каждое дерево с числом доминирования γ содержит не более чем $2{,}4606^\gamma$ НДМ. В статье [5] для всех $k \geqslant 2$ описаны деревья, содержащие максимальное и минимальное число k-ДМ (т. е. таких множеств D_k, что каждая вершина дерева не из D_k смежна хотя бы с k вершинами из D_k).

На сегодняшний день остаётся открытым вопрос о структуре деревьев, содержащих максимально возможное число НДМ и НПДМ. В работе [6] в 2019 г. показано, что каждое n-вершинное дерево содержит менее $95^{n/13}$ *минимальных* (т. е. минимальных по включению) ДМ. Кроме того, для любого $n \geqslant 1$ приведён пример n-вершинного дерева, содержащего более $0{,}649 \cdot 95^{n/13}$ минимальных ДМ. Методы, предложенные в [6], могут быть применены и для других классов графов, но использование их для перечисления множеств фиксированной мощности (в том числе НДМ и НПДМ) по мнению автора настоящей статьи не представляется возможным.

В 2019 г. в [7] получены три верхние оценки на число НПДМ в деревьях и лесах. А именно, для n-вершинного леса F с числом полного доминирования γ_t доказано неравенство

$$\vartheta(F) \leqslant \min\left((8\sqrt{e})^{\gamma_t}\left(\frac{n-\gamma_t/2}{\gamma_t/2}\right)^{\gamma_t/2},\ (1+\sqrt{2})^{n-\gamma_t},\ 1{,}4865^n\right).$$

В настоящей работе для всех n-вершинных деревьев доказано строгое неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$. Кроме того, получена точная верхняя оценка на число НПДМ для класса n-вершинных 2-гусениц.

1. Некоторые определения и обозначения

Как обычно, множества вершин и рёбер простого неориентированного графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. *Открытой окрестностью* $N(v)$ вершины v называется множество, состоящее из всех смежных с ней вершин, а *замкнутой окрестностью* $N[v]$ называется множество $N(v) \cup \{v\}$.

Через $G \setminus V_0$ будем обозначать подграф графа G, порождённый вершинами множества $V(G) \setminus V_0$. В случае, если $V_0 = \{v\}$, будем использовать обозначение $G \setminus v$ вместо $G \setminus \{v\}$. Через $G - e$ будем обозначать граф, полученный в результате удаления ребра $e \in E(G)$ из графа G.

Вершина дерева называется *предлистовой* или *предлистом*, если она смежна хотя бы с одним листом. Назовём вершину дерева *предконечной*, если все её соседи, кроме одного, являются листьями. *Диаметром* $\mathrm{diam}(T)$ дерева T называется максимально возможное расстояние между его вершинами. Простой путь $P = v_1v_2\dots v_m$ дерева T называется *диаметральным*, если он состоит из $\mathrm{diam}(T)+1$ попарно различных вершин. Дерево называется *k-гусеницей*, если каждая его вершина отстоит от некоторого его простого пути, называемого *хребтом*, на расстояние не более чем k. Считаем, что хребет k-гусеницы является её диаметральным путём. *Графом-звездой* S_m называется $(m+1)$-вершинное дерево, содержащее вершину степени m (здесь $m \geqslant 0$).

Через $\overline{a,b}$ обозначается множество всех целых чисел из отрезка $[a;b]$. Пусть в дереве T выбран диаметральный путь $P = v_1v_2\dots v_m$. Для каждого $i \in \overline{2,m}$ обозначим через T_i максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину v_i и не содержащее вершины v_{i-1}. Считаем, что поддерево T_1 совпадает с T. Положим $\widehat{T_i} = T_i \setminus T_{i+1}$. Через $\mathcal{D}_{T,P}(v_i)$ будем обозначать расстояние в дереве $\widehat{T_i}$ от вершины v_i до ближайшего листа, отличного от v_i. Если $\widehat{T_i}$ состоит из одной вершины, то положим $\mathcal{D}_{T,P}(v_i) = 0$. Заметим, что если вершина v лежит на хребте k-гусеницы, то $\mathcal{D}_{T,P}(v) \leqslant k$. В случае, когда выбор дерева T и пути P ясен из контекста, будем использовать обозначение $\mathcal{D}(v)$ вместо $\mathcal{D}_{T,P}(v)$.

Напомним, что через $\vartheta(G)$ обозначается число НПДМ графа G. Считаем, что $\vartheta(K_1) = 0$. Число НПДМ графа G, содержащих и не содержащих его вершину v, обозначим через $\vartheta_+(G,v)$ и $\vartheta_-(G,v)$ соответственно. Вершину v графа G будем называть *универсальной*, если $\vartheta_+(G,v) = \vartheta(G)$, и *пустой*, если $\vartheta_-(G,v) = \vartheta(G)$. Как обычно, через $G_1 \cup G_2$ обозначается граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $E(G_1) \cup E(G_2)$. Легко видеть, что для непересекающихся графов G_1 и G_2 имеет место равенство $\vartheta(G_1 \cup G_2) = \vartheta(G_1)\vartheta(G_2)$.

Назовём дерево T *разделимым*, если из него можно удалить ребро таким образом, чтобы в полученном лесе число НПДМ осталось прежним, и *неразделимым* в противном случае. Назовём n-вершинное дерево (2-гусеницу) *максимальным*, если оно содержит максимально возможное число НПДМ среди всех n-вершинных деревьев (n-вершинных 2-гусениц соответственно).

Пусть в дереве T выбрана вершина $v \in V(T)$. Через $\widehat{\gamma}_t(T,v)$ обозначим мощность наименьшего подмножества вершин $D \subseteq V(T)$ такого, что каждая вершина $V(T)$, кроме, быть может, вершины v, смежна хотя бы с одной вершиной из D. Нетрудно видеть, что имеет место неравенство $\gamma_t(T) - 1 \leqslant \widehat{\gamma}_t(T,v) \leqslant \gamma_t(T)$. Обозначим через $\widehat{\vartheta}(T,v)$ число подмножеств $D \subseteq V(T)$ мощности $\widehat{\gamma}_t(T,v)$ таких, что каждая вершина $V(T)$, кроме, быть может, вершины v, смежна хотя бы с одной вершиной из D. Заметим, что если $\widehat{\gamma}_t(T,v)=\gamma_t(T)$, то $\widehat{\vartheta}(T,v)\geqslant\vartheta(T)$, так как в этом случае каждое НПДМ T имеет мощность $\widehat{\gamma}_t(T,v)$. Определим величины $\widehat{\vartheta}_+(T,v)$ и $\widehat{\vartheta}_-(T,v)$ аналогично $\vartheta_+(T,v)$ и $\vartheta_-(T,v)$.

Пусть множество D является ПДМ дерева T и $\mathrm{diam}(T)\geqslant 3$. Обозначим через $L(T)$ множество листьев T, соседи которых являются предконечными вершинами. Рассмотрим отображение $\varphi\colon L(T)\to V(T)$, которое переводит лист $l\in L(T)$ в единственную нелистовую вершину, находящуюся на расстоянии 2 от него. Обозначим через $\varphi(D)$ множество, полученное заменой в D каждого листа $l\in L(T)$ вершиной $\varphi(l)$. Поскольку D содержит все предлистья T, $\varphi(D)$ является ПДМ, при этом $|\varphi(D)|\leqslant|D|$. Таким образом, для любого НПДМ D множество $\varphi(D)$ также является НПДМ.

Назовём вершину v дерева T *φ-универсальной*, если $v\in\varphi(D)$ для любого НПДМ $D\subseteq V(T)$. Заметим, что каждая универсальная вершина φ-универсальна и каждая нелистовая вершина, смежная хотя бы с одной предконечной вершиной, φ-универсальна.

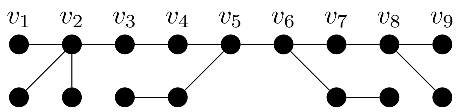

Рис. 1. Пример 2-гусеницы с хребтом $v_1v_2\ldots v_9$

На рис. 1 изображено дерево, которое является 2-гусеницей, а его диаметральный путь $v_1v_2\ldots v_9$ является хребтом гусеницы. Отметим, что $\mathcal{D}(v_4)=0$, $\mathcal{D}(v_2)=1$, $\mathcal{D}(v_5)=2$. Кроме того, нелистовые вершины v_3, v_5, v_6 и v_7 (и только они) смежны с предконечными вершинами, поэтому они φ-универсальны.

2. Предварительные результаты

2.1. Класс элементарных лесов. Назовём лес F *элементарным*, если каждая его компонента связности является графом-звездой. Будем говорить, что элементарный n-вершинный лес *максимален*, если он содержит максимально возможное число НПДМ среди всех таких лесов. Ясно, что $\vartheta(S_k)=k$ при всех $k\geqslant 0$.

Лемма 1. *При $n=4k+r\geqslant 12$, $r\in\{0,1,2,3\}$, n-вершинный максимальный элементарный лес единствен, изоморфен лесу $F_n=(k-r)S_3\cup rS_4$ и содержит $f(n)=4^r\cdot 3^{k-r}$ НПДМ.*

Доказательство. Пусть звезда S_k является наименьшей компонентой связности леса F. Если F содержит звезду S_m такую, что $k+1<m$,

то подграф $S_k \cup S_m$ можно заменить подграфом $S_{k+1} \cup S_{m-1}$ и число НПДМ леса F увеличится, что противоречит его максимальности. Тогда для некоторых целых $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 0$ имеет место равенство $F = aS_k \cup bS_{k+1}$. Покажем, что для любого n-вершинного леса F, не изоморфного F_n, существует замена некоторого его подграфа лесом с таким же числом вершин и большим числом НПДМ.

Случай $k = 0$. Заменим весь лес F деревом S_{n-1}.

Случай $k = 1$. Заменим весь лес F лесом $(b-1)S_{k+1} \cup S_{(a+1)(k+1)}$.

Случай $k = 2$. Если F содержит лес $2S_2$, то заменим его деревом S_5. Иначе F содержит лес $S_2 \cup 2S_3$, заменим его лесом $S_4 \cup S_5$.

Случай $k = 3$. Если $b \leqslant 4$, то условие леммы выполнено; иначе заменим лес $4S_4$ лесом $5S_3$.

Случай $k = 4$. Если $a \leqslant 3$ и $b = 0$, то условие леммы выполнено. Иначе F содержит один из лесов $4S_4$, $2S_4 \cup S_5$, $2S_5$, заменим их лесами $5S_3$, $4S_3, 3S_3$ соответственно.

Случай $k = 5$. Если F содержит лес $2S_5$, то заменим его лесом $3S_3$; иначе F содержит лес $S_5 \cup S_6$, заменим его лесом $2S_3 \cup S_4$.

Случай $k = 6$. Если F содержит лес $2S_6$, то заменим его лесом $S_3 \cup 2S_4$. Иначе F содержит дерево S_7, заменим его лесом $S_2 \cup S_4$.

Случай $k \geqslant 7$. Заменим дерево S_k лесом $S_2 \cup S_{k-3}$.

Таким образом, при любом $n \geqslant 12$ для любого n-вершинного леса F, отличного от F_n, найдётся хотя бы одна замена, увеличивающая число НПДМ в нём. Лемма 1 доказана.

Заметим, что при $n \in \{4, 5, 8, 9, 10\}$ максимальный лес единствен и изоморфен F_n, при $n = 11$ единственным максимальным лесом является $S_4 \cup S_5$, а при $n \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$ максимальным лесом (возможно, не единственным) является дерево S_{n-1}. Таким образом, при всех натуральных n имеет место неравенство $\vartheta(F_n) \leqslant f(n)$, которое будет строгим при $n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$.

2.2. Универсальные и пустые вершины.

Лемма 2. *Если в дереве T найдутся две смежные нелистовые вершины u и v такие, что u пуста, а v либо пуста, либо универсальна, то T разделимо.*

Доказательство. Если вершина v пуста, то удалим ребро uv и обозначим через F_1 полученный лес. Очевидно, что $\gamma_t(F_1) \geqslant \gamma_t(T)$. С другой стороны, каждое НПДМ дерева T не содержит вершин u и v, поэтому оно является ПДМ в лесе F_1, откуда $\gamma_t(F_1) \leqslant \gamma_t(T)$. Тогда $\gamma_t(F_1) = \gamma_t(T)$, при этом каждое НПДМ дерева T является НПДМ леса F, и наоборот, откуда $\vartheta(F_1) = \vartheta(T)$.

Если же вершина v универсальна, то удалим все рёбра, инцидентные вершине u, кроме ребра uv, и обозначим через F_2 полученный лес. Аналогично предыдущему случаю легко проверить, что имеют место равенства $\gamma_t(F_2) = \gamma_t(T)$ и $\vartheta(F_2) = \vartheta(T)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если дерево T содержит универсальные вершины u и v такие, что $\operatorname{dist}(u, v) = 3$, то T разделимо.*

Доказательство. По условию в T найдутся вершины u' и v' такие, что существует путь $uu'v'v$. Обозначим через F лес, полученный удалением ребра $u'v'$ из T, и покажем, что $\vartheta(T) = \vartheta(F)$. Очевидно, что $\gamma_t(F) \geqslant \gamma_t(T)$. Докажем, что если D' является НПДМ T, то оно является НПДМ F. Поскольку вершины u и v входят в D', каждая из вершин u' и v' леса F имеет соседа, входящего в D'. Таким образом, D' является ПДМ в лесе F, откуда $\gamma_t(F) = \gamma_t(T)$ и $\vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$. С другой стороны, так как $\gamma_t(F) = \gamma_t(T)$, каждое НПДМ леса F является НПДМ и для дерева T, откуда $\vartheta(F) = \vartheta(T)$, что и требовалось доказать. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого дерева T верны следующие утверждения.*

1. *Если T содержит вершину v, смежную с листом v', а также с некоторой предконечной вершиной u, то $\vartheta(T_1) \geqslant \vartheta(T)$, где T_1 — дерево, полученное удалением листа v' из T.*

2. *Если T содержит вершину v, смежную хотя бы с двумя предконечными вершинами u_1 и u_2, то $\vartheta(T_2) \geqslant \vartheta(T)$, где T_2 — дерево, полученное удалением вершины u_2 и всех смежных с ней листьев из T.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Поскольку вершина v' является листом в T, то $\gamma_t(T_1) \leqslant \gamma_t(T)$. С другой стороны, вершина v φ-универсальна в T_1. Тогда найдётся НПДМ $D \ni v$ дерева T_1. Очевидно, что D является ПДМ и для T, откуда $\gamma_t(T_1) = \gamma_t(T)$, при этом каждое НПДМ T является НПДМ и для T_1, откуда $\vartheta(T_1) \geqslant \vartheta(T)$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть дерево T содержит вершину u, которая не является предлистом. Если все соседи u смежны хотя бы с одной φ-универсальной вершиной, то вершина u пуста.*

Доказательство. Предположим, напротив, что найдётся НПДМ D, содержащее u. Рассмотрим множество $\varphi(D)$. По условию все вершины открытой окрестности $N(u)$ имеют хотя бы одного соседа из $\varphi(D)$, отличного от u, причём хотя бы одна из этих вершин сама входит в $\varphi(D)$.

Тогда множество $\varphi(D) \setminus \{u\}$ также является ПДМ, что противоречит минимальности D. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если дерево T содержит пустую нелистовую вершину u, не смежную с универсальными вершинами, причём $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, то $\vartheta(T \setminus u) > \vartheta(T)$.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — соседи вершины u в T. Обозначим через T_i^* максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину u_i и не содержащее u. Поскольку вершина u пуста и $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, для любого НПДМ D дерева T множество $D \cap V(T_i^*)$ является НПДМ дерева T_i^*. Так как для любого $i \in \overline{1,k}$ найдётся НПДМ D_i дерева T, не содержащее v_i, множество $D_i \cap V(T_i)$ является НПДМ дерева T_i и не содержит v_i, откуда $\vartheta_-(T_i, v_i) > 0$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\vartheta(T) = \prod_{i=1}^{k} \vartheta(T_i^*) - \prod_{i=1}^{k} \vartheta_-(T_i^*, v_i) < \prod_{i=1}^{k} \vartheta(T_i^*) = \vartheta(T \setminus u).$$

Лемма 6 доказана.

Из лемм 2 и 6 вытекает

Следствие 1. *Для любых $n, k \geqslant 1$ если n-вершинное дерево T является k-гусеницей и содержит пустую нелистовую вершину u такую, что $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, то либо T разделимо, либо оно не является максимальным деревом и максимальной k-гусеницей.*

Данное утверждение будет применяться как для 2-гусениц, так и для произвольных деревьев.

3. Класс 2-гусениц

Лемма 7. *При $n \geqslant 3$ для любой n-вершинной 2-гусеницы T найдётся $(n+1)$-вершинная 2-гусеница T' такая, что $\vartheta(T) < \vartheta(T')$.*

Доказательство проведём индукцией по числу вершин n. Легко проверить, что при $n \in \overline{3,6}$ утверждение леммы верно. Пусть при $n \geqslant 7$ найдётся некоторая максимальная n-вершинная 2-гусеница T, для которой утверждение неверно, но при этом для любой 2-гусеницы T'' с меньшим числом вершин имеет место строгое неравенство $\vartheta(T'') < \vartheta(T)$.

Предположим, что $\mathrm{diam}(T) \leqslant 4$. Если $\mathrm{diam}(T) = 2$, то дерево T изоморфно S_{n-1}. Если $\mathrm{diam}(T) = 3$, то T содержит ровно две нелистовые вершины, тогда $\gamma_t(T) = 2$ и $\vartheta(T) = 1$. Если же $\mathrm{diam}(T) = 4$, то центральная вершина T универсальна, откуда $\vartheta(T) = 1$. Таким образом, имеет место неравенство $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(S_{n-1}) < \vartheta(S_n)$, что невозможно по предположению.

Предположим, что $\operatorname{diam}(T) \geqslant 5$. Обозначим через $v_1 v_2 \ldots v_k$ хребет T. Возможны следующие случаи.

Случай 1. В T найдётся хотя бы один непустой лист l, смежный с некоторой вершиной u. Присоединим новый лист l' к u и обозначим полученное дерево через T'. Тогда $\vartheta(T') = \vartheta_-(T,l) + 2\vartheta_+(T,l) > \vartheta(T)$; противоречие.

При рассмотрении случаев 2–4 будем предполагать, что все листья T пусты, а вершина v_3 универсальна (так как все соседи v_2, кроме v_3, являются пустыми листьями).

Случай 2. Имеет место неравенство $\deg(v_3) \geqslant 3$. По лемме 4 в дереве T найдётся поддерево T' такое, что $\vartheta(T') \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

При рассмотрении случаев 3 и 4 предполагаем, что $\deg(v_3) = 2$.

Случай 3. Вершина v_4 универсальна или пуста. Если v_4 универсальна, то для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_2\}$ является НПДМ дерева T_2, откуда $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(T_2)$; противоречие. Если же v_4 пуста, то $\deg(v_4) = 2$, поскольку иначе v_4 была бы φ-универсальной. Тогда для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ в T_5, откуда $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(T_5)$; противоречие.

Случай 4. Вершина v_4 не универсальна и не пуста. Предположим, что $\deg(v_4) \geqslant 3$. Тогда v_4 не является предлистом и смежна хотя бы с одной предконечной вершиной, все остальные соседи которой являются пустыми листьями. Но тогда v_4 универсальна, что невозможно, поэтому $\deg(v_4) = 2$. Предположим, что вершина v_5 не пуста. Тогда для любого НПДМ $D \ni v_5$ множество $(D \setminus \{v_3\}) \cup \{v_1\}$ также является НПДМ, что противоречит универсальности v_3. Таким образом, вершина v_5 пуста и $\deg(v_5) = 2$. Покажем, что $\deg(v_6) = 2$. Пусть $\deg(v_6) > 2$. Тогда вершина v_6 φ-универсальна и по лемме 5 вершина v_4 пуста, что невозможно. Поскольку вершина v_5 пуста и $\deg(v_6) = 2$, вершина v_7 универсальна.

Заметим, что имеет место неравенство $\vartheta_+(T, v_4) \leqslant \vartheta_+(T, v_6)$, поскольку каждое НПДМ T содержит ровно одну из вершин v_4 и v_6, причём если НПДМ D содержит v_4, то множество $(D \setminus \{v_4\}) \cup \{v_6\}$ также является НПДМ. Рассмотрим n-вершинный лес $S_3 \cup T_5$ и обозначим через T' дерево, полученное присоединением листа дерева S_3 к вершине v_7 дерева T_5. Очевидно, что T' является разделимой 2-гусеницей. Тогда

$$\vartheta(T') = 3\vartheta(T_5) \geqslant 3\vartheta_+(T, v_6) > \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) = \vartheta(T).$$

Таким образом, T не является максимальной 2-гусеницей, что противоречит предположению. Лемма 7 доказана.

Теорема 1. *При $n \geqslant 12$ каждая максимальная n-вершинная 2-гусеница T содержит максимальный элементарный лес F_n в качестве остовного подграфа. Имеет место равенство $\vartheta(T) = f(n)$.*

Доказательство. Из рассуждений предыдущей леммы следует, что если $\mathrm{diam}(T) \leqslant 4$, то имеет место неравенство $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(S_{n-1}) \leqslant f(n)$. Равенство $\vartheta(T) = f(n)$ возможно лишь в том случае, если T изоморфно S_3 или S_4. Таким образом, будем предполагать, что $n \geqslant 6$ и $\mathrm{diam}(T) \geqslant 5$.

Обозначим через $v_1, \ldots, v_k$ хребет T, а через p — индекс самой левой вершины хребта, которая отлична от v_2 и имеет степень выше 2 (если $T = P_n$, то положим $p = k + 1$). Обозначим через q номер второй слева вершины хребта с этим свойством (если такой вершины нет, то положим $q = k + 1$). Предполагаем, что если T отлично от P_n, то $p \leqslant \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ (в противном случае переименуем вершины хребта в обратном порядке).

Предположим, что найдётся максимальная 2-гусеница T, которая либо содержит более $f(n)$ НПДМ, либо содержит ровно $f(n)$ НПДМ и не содержит лес F_n в качестве остовного подграфа. Можем считать, что T неразделима, так как не существует 2-гусениц с меньшим числом вершин, обладающих таким свойством. Обозначим через a число листьев, смежных с вершиной v_2 (т. е. $a = \deg(v_2) + 1$). Рассмотрим несколько случаев в зависимости от значения величины p.

Случай $p = 3$. По леммам 4 и 7 дерево T не является максимальной 2-гусеницей; противоречие.

Случай $p = 4$. Если $\mathcal{D}(v_4) = 2$, то вершина v_4 смежна с некоторым предлистом u_4, не лежащим на хребте T. Тогда $\mathrm{dist}(v_2, u_4) = 3$ и T разделима по лемме 3; противоречие. Пусть теперь $\mathcal{D}(v_4) = 1$. Покажем, что в этом случае все листья, смежные с v_4, пусты. Пусть это не так и найдётся некоторое НПДМ D, содержащее лист v_4', смежный с v_4. Тогда множество $\varphi(D) \setminus \{v_4'\}$ также является ПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Поскольку T максимальна, по лемме 7 вершина v_4 смежна с единственным пустым листом v_4'. Рассмотрим несколько вариантов в зависимости от значения величины q.

Вариант $p = 4$, $q = 5$. Если $\mathcal{D}(v_5) = 1$, то v_5 универсальна и T разделима, поскольку $\mathrm{dist}(v_2, v_5) = 3$. Если же $\mathcal{D}(v_5) = 2$, то удалим вершины v_4 и v_4' из дерева, обозначим через F получившийся лес. Имеет место равенство $\gamma_t(F) + 1 = \gamma_t(T)$, при этом для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_4\}$ является НПДМ леса F. Кроме того, каждая компонента связности F является 2-гусеницей. Тогда

$$f(n) > f(a+2) f(n-a-4) \geqslant \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T),$$

что противоречит предположению о максимальности T.

Вариант $p = 4$, $q = 6$. Если $\mathcal{D}(v_6) = 2$ и вершина v_6 смежна с некоторым предлистом u_6, то $\mathrm{dist}(v_4, u_6) = 3$ и T разделима. Если же $\mathcal{D}(v_6) = 1$, то действуем аналогично предыдущему варианту. Удалим вершины v_4 и v_4' из дерева, обозначим через F получившийся лес. Тогда для любого

НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_4\}$ является НПДМ леса F, откуда $f(n) > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Вариант $p = 4$, $q = 7$. Если $\mathcal{D}(v_7) = 1$, то v_7 универсальна и T разделима, так как $\operatorname{dist}(v_4, v_7) = 3$. Пусть $\mathcal{D}(v_7) = 2$ и v_7 смежна с некоторой предконечной вершиной u_7, не лежащей на хребте T. Вершины v_4 и u_7 универсальны, а вершины v_3 и v_7 φ-универсальны. Тогда по лемме 5 вершины v_5 и v_6 пусты и T разделима по лемме 2; противоречие.

Вариант $p = 4$, $q = 8$. Поскольку вершина v_8 либо универсальна, либо φ-универсальна, по лемме 5 вершина v_6 пуста. Легко проверить, что имеет место равенство $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + 3$. Тогда каждое НПДМ T, содержащее вершину v_7, содержит v_3 и не содержит v_5, откуда $\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_+(T, v_7)$ и $\vartheta_+(T, v_7) \leqslant \vartheta(T_6)$. Если вершина v_5 пуста, то T разделима по лемме 2; противоречие. Если же v_5 не пуста, то имеет место равенство $\vartheta_+(T, v_5) = (a + 1)\vartheta_-(T_7, v_7)$, поскольку если некоторое НПДМ T содержит вершину v_5, то оно также содержит ровно одну вершину из открытой окрестности $N(v_2)$. Таким образом,

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_7) + \vartheta_+(T, v_5) \leqslant \vartheta(T_6) + (a+1)\vartheta_-(T_7, v_7).$$

Поскольку $f(n-a-5) \geqslant \vartheta(T_6)$ и $f(n-a-6) \geqslant \vartheta_-(T_7, v_7) \geqslant \vartheta(T_7)$, то

$$f(n) > f(n-a-5) + (a+1)f(n-a-6) \geqslant \vartheta(T),$$

что противоречит предположению о максимальности T.

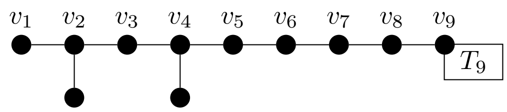

Рис. 2. Структура 2-гусеницы T при $p = 4$, $q \geqslant 9$ и $a = 2$

Вариант $p = 4$, $q \geqslant 9$. В этом варианте T имеет структуру, изображённую на рис. 2. Предположим, что $\gamma_t(T_9) > \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$. Тогда вершина v_8 универсальна, а вершина v_6 пуста по лемме 5. Если НПДМ D содержит вершину v_5, то оно не содержит v_7, иначе множество $\varphi(D) \setminus \{v_5\}$ также являлось бы ПДМ, что невозможно. Если же D содержит v_7, то оно не содержит v_5 и, следовательно, содержит v_3. Тогда

$$\begin{aligned}\vartheta(T) &= \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_+(T, v_7) = (a+1)\vartheta_-(T_7, v_7) + \vartheta_+(T_6, v_8)\\ &\leqslant (a+1)\vartheta(T_7) + \vartheta(T_6) \leqslant (a+1)f(n-a-6) + f(n-a-5) < f(n).\end{aligned}$$

Предположим, что $\gamma_t(T_9) = \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_+(T_9, v_9), \quad A_2 = \vartheta(T_9), \quad B_1 = \widehat{\vartheta}_+(T_9, v_9), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}(T_9, v_9).$$

Заметим, что $A_1 \leqslant A_2$ и $B_1 \leqslant B_2$. Кроме того, из того, что $\gamma_t(T_9) = \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$, следует, что $A_2 \leqslant B_2$. Предположим, что существует НПДМ D, содержащее хотя бы три вершины из множества $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Тогда множество

$$(\varphi(D) \setminus \{v_5, v_6, v_7, v_8\}) \cup \{v_7, v_8\}$$

также является НПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Таким образом, для любого НПДМ D пересечение $D \cap \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ совпадает с одним из множеств $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_5, v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$. Тогда

$$\vartheta(T) = (a+1)A_1 + A_2 + (a+1)B_1 + B_2.$$

Обозначим через T_6' дерево, полученное из T_6 присоединением листа v_7' к вершине v_7. Тогда для леса $F = S_{a+3} \cup T_6'$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} f(n) \geqslant \vartheta(F) &= (a+3)(\vartheta_+(T_6', v_6) + \vartheta_+(T_6', v_7') + \vartheta_+(T_6', v_8)) \\ &= (a+3)(2\vartheta_+(T_6', v_6) + \vartheta_+(T_6', v_8)) = (a+3)(2A_2 + B_2)) > \vartheta(T), \end{aligned}$$

что противоречит предположению о максимальности T.

Случай $p = 5$. Если $\mathcal{D}(v_5) = 1$, то вершина v_5 универсальна и T разделима, поскольку $\mathrm{dist}(v_2, v_5) = 3$. Если же $\mathcal{D}(v_5) = 2$, то v_5 смежна с некоторой предконечной вершиной u_5, не лежащей на хребте T. По лемме 5 вершина v_4 пуста в T и по следствию 1 T либо разделима, либо не максимальна; противоречие.

Случай $p = 6$. Вершина v_6 φ-универсальна. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 T либо разделима, либо не максимальна; противоречие.

Случай $p = 7$. Ясно, что вершины v_3 и v_7 φ-универсальны. Тогда по лемме 5 вершина v_5 пуста. Следовательно, v_3 и v_7 универсальны. Каждое НПДМ T содержит ровно одну вершину из множества $\{v_4, v_6\}$ (так как если ПДМ D содержит обе вершины, множество $D \setminus \{v_4\}$ также является ПДМ). При этом $\vartheta_+(T, v_4) \leqslant \vartheta_+(T, v_6)$, поскольку для любого НПДМ D' множество $(D' \setminus \{v_4\}) \cup \{v_6\}$ также является НПДМ. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) \leqslant 2\vartheta(T_5) \leqslant 2f(n-a-3) < f(n).$$

Случай $p \geqslant 8$. Рассуждаем аналогично варианту $p = 4$, $q \geqslant 9$. Если $\gamma_t(T_8) > \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$, то вершина v_5 пуста, а v_3 и v_7 универсальны. Если НПДМ D содержит вершину v_4, то оно не содержит v_6, иначе множество $\varphi(D) \setminus \{v_4\}$ также являлось бы ПДМ, что невозможно. Если v_4 пуста, то T разделимо по лемме 2, иначе

$$\begin{aligned} \vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) &= \vartheta_-(T_6, v_6) + \vartheta_+(T_5, v_7) \\ &\leqslant \vartheta(T_6) + \vartheta(T_5) \leqslant f(n-a-4) + f(n-a-3) < f(n). \end{aligned}$$

Предположим, что $\gamma_t(T_8) = \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_+(T_8, v_8), \quad A_2 = \vartheta(T_8), \quad B_1 = \widehat{\vartheta}_+(T_8, v_8), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}(T_8).$$

Аналогично предыдущему варианту для любого НПДМ D пересечение $D \cap \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ совпадает с одним из множеств $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_5, v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$. Напомним, что $\deg(v_2) = a + 1$. Тогда

$$\vartheta(T) = (a+1)(A_1 + A_2) + B_1 + B_2.$$

Удалим все листья, смежные с v_2, и добавим $a-1$ новых листьев к вершине v_3, после чего присоединим лист v_6' к вершине v_6. Для полученной n-вершинной 2-гусеницы T' верно $\vartheta(T') = (a+1)(2A_2 + B_2)$. Поскольку $\gamma_t(T_8) = \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$, то $A_2 > 0$, откуда $\vartheta(T') > \vartheta(T)$, что противоречит максимальности T. Теорема 1 доказана.

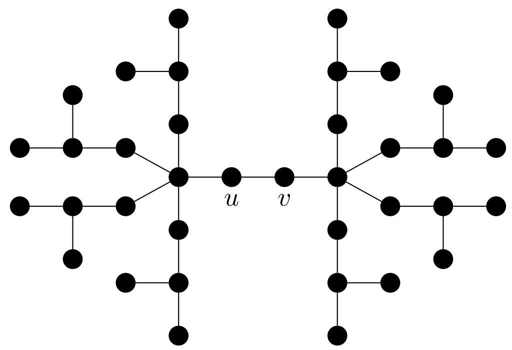

Рис. 3. Гусеница T_{36}^*

Заметим, что для класса 3-гусениц утверждение теоремы не имеет места. На рис. 3 изображена 36-вершинная 3-гусеница T_{36}^* с центральными вершинами u и v, полученная присоединением к каждому концу пути P_4 четырёх копий звезды S_3. Обозначим через M_k число НПДМ дерева T_{36}^*, содержащих k центральных вершин. Тогда

$$\vartheta(T_{36}^*) = M_2 + M_1 + M_0 = 3^8 + 2 \cdot 3^4 \cdot (3^4 - 2^4) + (3^4 - 2^4)^2 > 3^9 = f(36).$$

4. Класс произвольных деревьев

Известно, что существуют n-вершинные леса, содержащие хотя бы $(\sqrt{2})^n$ наименьших доминирующих множеств (например, для чётного n подойдёт лес $\frac{n}{2}P_2$). Однако, как будет показано в этом разделе, каждое n-вершинное дерево T содержит менее чем $(\sqrt{2})^n$ наименьших *полных* доминирующих множеств.

Лемма 8. *При $n, k \geqslant 1$ если n-вершинный элементарный лес F содержит хотя бы k компонент связности, то $(\sqrt{2})^n \geqslant (4/3)^k \vartheta(F)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(m) = (\sqrt{2})^{m+1}/m$, определённую на множестве натуральных чисел. Поскольку $g(m)$ монотонно возрастает при $m \geqslant 3$, имеет место неравенство $g(m) \geqslant 4/3$.

Пусть $F = S_{m_1} \cup S_{m_2} \cdots \cup S_{m_k}$ (считаем, что $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$, иначе $\vartheta(F) = 0$ и доказывать нечего). Тогда

$$\frac{(\sqrt{2})^n}{\vartheta(F)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\sqrt{2})^{m_i+1}}{m_i} = \prod_{i=1}^{k} g(m_i) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Лемма 8 доказана.

Назовём максимальное n-вершинное дерево *критическим*, если оно содержит не менее $(\sqrt{2})^n$ НПДМ и для любого $n' < n$ каждое n'-вершинное дерево содержит менее $(\sqrt{2})^{n'}$ НПДМ. Из определения ясно, что каждое критическое дерево неразделимо. Поскольку все деревья диаметра не более 4 являются 2-гусеницами, по теореме 1 и лемме 8 они не критические. Таким образом, предполагаем, что каждое критическое дерево имеет диаметр не менее 5.

Лемма 9. *Для любого критического дерева T и любого его диаметрального пути $v_1 v_2 \ldots v_k$ верно $\mathcal{D}(v_4) = 3$.*

Доказательство. По лемме 4 имеем $\mathcal{D}(v_3) = 0$. Пусть $\mathcal{D}(v_4) \leqslant 2$. Тогда возможны три случая.

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 0$. Напомним, что $\deg(v_2) = a + 1$. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_-(T, v_3) + \vartheta_+(T, v_3) \leqslant a\vartheta(T_4) + \widehat{\vartheta}(T_4, v_4).$$

Заметим, что равенство достигается, если $\vartheta_-(T, v_3) > 0$, в противном случае $\vartheta(T) = \widehat{\vartheta}(T_4, v_4)$. Покажем, что $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_5) + 2$. С одной стороны, каждое НПДМ T содержит хотя бы две вершины из множества $N[v_2]$, откуда $\gamma_t(T) \geqslant \gamma_t(T_5) + 2$. С другой стороны, для любого НПДМ D_5 дерева T_5 множество $D_5 \cup \{v_2, v_3\}$ является НПДМ дерева T, откуда $\gamma_t(T) \leqslant \gamma_t(T_5) + 2$. Далее возможны два варианта.

Вариант $\gamma_t(T_4) > \gamma_t(T_5)$. Имеем $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_4) + 1$. Тогда вершина v_3 универсальна в T (иначе нашлось бы НПДМ T мощности $\gamma_t(T_4) + 1$, содержащее вершины v_1 и v_2, что невозможно). Если найдётся НПДМ D дерева T, содержащее v_5, то множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ для дерева T_4, и $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_4) + 2$; противоречие. Значит, v_5 пуста в T. Заметим, что если НПДМ D дерева T содержит вершину v_4, то оно не содержит других вершин множества $N(v_5)$, иначе множество $D \setminus \{v_4\}$ тоже являлось бы ПДМ. Вершина v_6 не пуста в T (иначе оно разделимо по лемме 2), причём для каждого НПДМ $D \ni v_6$ множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ T_5. Тогда v_6 не пуста в T_5 и $\partial_+(T, v_6) \leqslant \partial_+(T_5, v_6)$. При этом для любого НПДМ $D \ni v_4$ множество $(D\setminus\{v_4\})\cup\{v_6\}$ тоже является НПДМ, откуда $\vartheta_+(T, v_4) \leqslant \vartheta_+(T, v_6)$. Следовательно,

$$\vartheta(T) \leqslant \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) \leqslant 2\vartheta_+(T_5, v_6) \leqslant 2\vartheta(T_5) < 2(\sqrt{2})^{n-a-3} < (\sqrt{2})^n.$$

Вариант $\gamma_t(T_4) = \gamma_t(T_5)$. Нетрудно видеть, что

$$\vartheta(T_4) \leqslant \vartheta(T_5), \quad \widehat{\vartheta}_-(T_4, v_4) = \vartheta(T_5).$$

Покажем, что $\widehat{\vartheta}_+(T_4, v_4) \leqslant \vartheta(T_5)$. Поскольку вершина v_4 является листом в дереве T_4, то $\gamma_t(T_5) = \widehat{\gamma}_t(T_4, v_4)$. Рассмотрим множество $D \subseteq V(T_4)$ мощности $\gamma(T_5)$ такое, что $v_4 \in D$ и у каждой вершины множества $V(T_4) \setminus \{v_4\}$ есть сосед из D. По определению существует $\widehat{\vartheta}_+(T_4, v_4)$ таких множеств. При этом $v_6 \notin D$ (иначе $D \setminus \{v_4\}$ являлось бы НПДМ T_5, что невозможно). Тогда множество $(D \setminus \{v_4\}) \cup \{v_6\}$ является НПДМ T_5, откуда $\widehat{\vartheta}_+(T_4, v_4) \leqslant \vartheta(T_5)$.

По предположению $\vartheta(T_5) < (\sqrt{2})^{n-a-3}$. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant a\vartheta(T_4) + \widehat{\vartheta}(T_4, v_4) \leqslant (a+2)\vartheta(T_5) < (a+2)(\sqrt{2})^{n-a-3} < (\sqrt{2})^n.$$

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 2$. Вершина v_4 смежна с некоторым предлистом u_4. Тогда $\mathrm{dist}(v_2, u_4) = 3$ и по лемме 3 дерево T разделимо.

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 1$. В этом случае v_4 смежна с некоторым листом v_4' и не смежна с предлистьями. Предполагаем, что вершина v_5 не пуста и не универсальна в T (иначе T было бы разделимо по леммам 2 и 3). Возможны два варианта.

Вариант $\deg(v_4) = 3$. Заметим, что если НПДМ дерева T содержит вершину v_5, то оно может содержать любую вершину окрестности $N(v_2)$. Если же НПДМ не содержит v_5, то оно содержит вершину v_3. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_-(T, v_5) = (a+1)\vartheta_+(T_4, v_5) + \vartheta(F_5) \leqslant (a+1)\vartheta(T_4) + \vartheta(F_5).$$

Если $\vartheta(T_4) \geqslant 2\vartheta(F_5)$, то $\vartheta(T) \leqslant (a+3/2)\vartheta(T_4) < (a+3/2)(\sqrt{2})^{n-a-2}$. Если же $\vartheta(T_4) < 2\vartheta(F_5)$, то $\vartheta(T) < (2a+3)\vartheta(F_5) < (2a+3)(\sqrt{2})^{n-a-5}$. Легко проверить, что в обоих случаях при всех целых $a \geqslant 1$ выполнено неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$.

Вариант $\deg(v_4) \geqslant 4$. Обозначим через F_0 лес $T \setminus (V(T_5) \cup \{v_4, v_4'\})$. Положим $Q = \vartheta(F_0)$ и $q = |V(F_0)|$. Заметим, что F_0 является элементарным лесом, состоящим хотя бы из $\deg(v_4) - 2 \geqslant 2$ компонент связности. Тогда по лемме 8 имеем $(\sqrt{2})^q/Q \geqslant 16/9$. Поскольку $\vartheta(T_4) \leqslant (\sqrt{2})^{n-q}$ и $\vartheta(F_5) \leqslant (\sqrt{2})^{n-q-3}$, то

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_-(T, v_5) \leqslant Q(\vartheta(T_4) + \vartheta(F_5)) \leqslant \frac{9}{16}(\sqrt{2})^q((\sqrt{2})^{n-q} + (\sqrt{2})^{n-q-3}) < (\sqrt{2})^n.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любого критического дерева T и любого его диаметрального пути $v_1v_2\dots v_k$ верно $\mathcal{D}(v_5) \in \{0, 4\}$.*

Доказательство. По леммам 4 и 9 $\mathcal{D}(v_3) = 0$ и $\mathcal{D}(v_4) = 3$. Предположим, что $\mathcal{D}(v_5) \notin \{0, 4\}$. Возможны три случая.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 1$. Вершина v_5 предлистовая. Тогда T разделимо, так как $\operatorname{dist}(v_2, v_5) = 3$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 2$. Вершина v_5 смежна с некоторой предлистовой вершиной u_5, отличной от v_4 и v_6. Поскольку $\mathcal{D}(v_4) = 3$, все соседи вершины v_4 смежны с предлистьями. Тогда по лемме 5 вершина v_4 пуста. По следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 3$. Вершина v_5 смежна с некоторой вершиной u_4, сосед которой u_3 является предлистом. Заметим, что если u_3 не является предконечной вершиной, то она смежна с некоторой предконечной вершиной u_2, а также с листом u_3'. Тогда по лемме 4 дерево T не критическое; противоречие. Значит, вершина u_3 предконечная, а вершина u_4 φ-универсальная в T. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие. Лемма 10 доказана.

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ для любого n-вершинного дерева T имеет место неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$.*

Доказательство. При $n \leqslant 9$ все n-вершинные деревья являются 2-гусеницами, поэтому условие теоремы для них выполнено. Предположим, что при $n \geqslant 10$ найдётся n-вершинное критическое дерево T. Обозначим через $P = v_1v_2\dots v_k$ некоторый диаметральный путь T. Тогда по леммам 4, 9 и 10 имеем $\mathcal{D}(v_3) = 0$, $\mathcal{D}(v_4) = 3$ и $\mathcal{D}(v_5) \in \{0, 4\}$. Считаем, что вершина v_5 смежна с вершиной v_6, а также с некоторыми вершинами $v_4^1, \dots, v_4^k$ (здесь $v_4 = v_4^1$). Возможны 6 случаев в зависимости от значения величины $\mathcal{D}(v_6)$.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 1$. Вершина v_6 предлистовая. Тогда по лемме 5 вершина v_4 пустая и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 2$. Вершина v_6 смежна с некоторым предлистом u_5. Тогда по лемме 5 вершина v_5 пуста. Обозначим через F_0 элементарный лес $T \setminus (V(T_6) \cup N[v_5])$. Если вершина v_6 не пуста в T_6, то имеет место равенство $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0)$. Тогда вершина v_4 пуста в T и T разделимо по лемме 2; противоречие. Если же вершина v_6 пуста в T_6, то $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0) + 1$. Для каждого $i \in \overline{1, k}$ удалим в T все рёбра, инцидентные вершине v_4^i, кроме ребра $v_4^i v_5$. Тогда для полученного леса F верно равенство $\gamma_t(F) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0) + 2$ и для любого НПДМ D дерева T множество $D \cup \{v_5\}$ является НПДМ леса F. Таким образом, $(\sqrt{2})^n > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 3$. Вершина v_6 смежна с некоторой вершиной u_5, сосед которой u_4 является предлистом. Предположим, что u_4 не является предконечной вершиной. Если в T найдётся диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6 \dots v_k$, то $\mathcal{D}_{T,P'}(u_4) = 1$, что противоречит лемме 9. Иначе вершина u_4 смежна хотя бы с одним листом u_4' и хотя бы с одной предконечной вершиной. Тогда по лемме 4 дерево T не критическое; противоречие.

Итак, вершина u_4 предконечная в T. Тогда вершина u_5 φ-универсальна и по лемме 5 вершина v_5 пуста в T. Действуем аналогично предыдущему варианту. Если вершина v_6 не пуста в T_6, то вершина v_4 пуста в T и по лемме 2 дерево T разделимо; противоречие. Иначе для каждого $i \in \overline{1,k}$ удалим все рёбра, инцидентные вершине v_4^i, кроме ребра $v_4^i v_5$. Тогда для любого НПДМ D дерева T множество $D \cup \{v_5\}$ является НПДМ полученного леса F, откуда $(\sqrt{2})^n > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 5$. В этом случае найдётся некоторый диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6 \dots v_k$, где вершина u_5 отлична от v_5 и v_7. По леммам 9 и 10 $\mathcal{D}_{T,P'}(u_4) = 3$ и $\mathcal{D}_{T,P'}(u_5) \in \{0, 4\}$. Предположим, что найдётся НПДМ D, не содержащее v_6. Тогда множество

$$(\varphi(D) \setminus (N(v_5) \cup N(u_5))) \cup \{v_6\}$$

также является ПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Таким образом, вершина v_6 универсальна в T. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

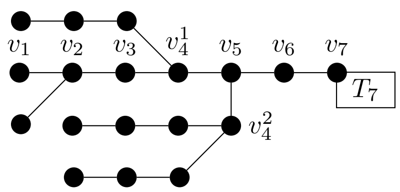

Рис. 4. Структура дерева T в случае $\mathcal{D}(v_6) = 0$

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 0$. В этом случае T имеет структуру, изображённую на рис. 4. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_-(T_7, v_7), \quad A_2 = \vartheta(F_7), \quad B_1 = \vartheta_+(T_7, v_7), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}_+(T_7, v_7).$$

Обозначим через T_5' максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину v_5, но не содержащее вершин $v_4^1, \dots, v_4^k$. Обозначим через F_0

элементарный лес, полученный удалением из дерева T всех вершин поддерева T_6 и окрестности $N[v_5]$. Положим $Q = \vartheta(F_0)$ и $q = |V(F_0)|$. Очевидно, что $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_5') + \gamma_t(F_0)$. Тогда каждое НПДМ дерева T содержит ровно две вершины множества $N[v_5] \cup N[v_6]$, которые либо смежны, либо находятся на расстоянии 3 друг от друга. Заметим, что если $A_1 \geqslant A_2$, то пара $\{v_4^i, v_5\}$ не может входить в НПДМ. Аналогично, если $B_1 \geqslant B_2$, то пара $\{v_5, v_6\}$ не может входить в НПДМ. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant Q(k \cdot \min(A_1, A_2) + A_2 + k \cdot \min(B_1, B_2) + B_2).$$

Поскольку $\vartheta(T_5') = (A_2 + B_2) < (\sqrt{2})^{n-q-k}$, то $(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+k} < (\sqrt{2})^n$. Тогда достаточно доказать, что

$$(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+k} > Q(k+1)(A_2 + B_2).$$

Так как $\mathcal{D}(v_4) = 3$, лес F содержит хотя бы две компоненты связности и $(\sqrt{2})^q/Q \geqslant (4/3)^2$. С другой стороны, $(\sqrt{2})^k/(k+1) \geqslant 2/3$, откуда и следует требуемое неравенство.

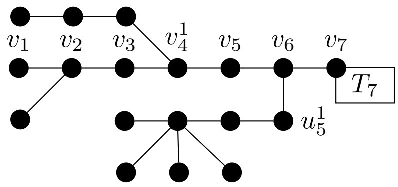

Рис. 5. Структура дерева T в случае $\mathcal{D}(v_6) = 4$

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 4$. В этом случае T имеет структуру, изображённую на рис. 5. Если найдётся некоторый диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6v_7 \dots v_s$, где вершина u_5 отлична от v_5, то применим рассуждения из случая $\mathcal{D}(v_6) = 5$. Иначе вершина v_6 смежна с некоторыми вершинами $u_5^1, \dots, u_5^m$ (где $m \geqslant 1$), все соседи которых, кроме вершины v_6, имеют степень 2 и смежны с некоторыми предконечными вершинами. Введём обозначения A_1, A_2, B_1, B_2, Q, q аналогично предыдущему случаю. Обозначим через F_0' элементарный лес, полученный удалением из дерева T_6 всех вершин поддерева T_7 и окрестности $N[v_6]$. Положим $W = \vartheta(F_0')$ и $w = |V(F_0')|$. Каждое НПДМ дерева T содержит ровно две вершины множества $N[v_5] \cup N[v_6]$, которые либо смежны, либо находятся на расстоянии 3 друг от друга. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant QW(k(m+1)\min(A_1, A_2) + mA_2 + A_2 + k\min(B_1, B_2) + B_2).$$

Обозначим через T_5'' максимальное по включению поддерево дерева T_5, которое содержит вершины v_5 и v_6 и не содержит вершин $v_4^1, \dots, v_4^k$ и $u_5^1, \dots, u_5^m$. Тогда

$$\vartheta(T_5'') = \vartheta_+(T_5'', v_5) + \vartheta_+(T_5'', v_7) = A_2 + B_2 < (\sqrt{2})^{n-q-w-k-m}.$$

Покажем, что

$$(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+w+k+m} > QW((k+1)mA_2 + (m+1)A_2 + kB_2 + B_2).$$

Предполагаем, что $A_2 \leqslant B_2$. Тогда достаточно доказать неравенство $(\sqrt{2})^{q+w+k+m} > QW(k+1)(m+1)$. По лемме 9 лес $F \cup F'$ содержит хотя бы три компоненты связности. Тогда

$$\frac{(\sqrt{2})^{q+w+k+m}}{QW(k+1)(l+1)} = \frac{(\sqrt{2})^{q+w}}{QW}\frac{(\sqrt{2})^{k+m}}{(k+1)(m+1)} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 > 1.$$

Таким образом, $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bród D., Skupień Z.** Trees with extremal numbers of dominating sets // Australas. J. Comb. 2006. Vol. 35. P. 273–290.
2. **Krzywkowski M., Wagner S.** Graphs with few total dominating sets // Discrete Math. 2018. Vol. 341, No. 4. P. 997–1009.
3. **Bień A.** Properties of gamma graphs of trees // Colourings, independence and domination. Abs. 17th Workshop Graph Theory (Piechowice, Poland, Sept. 17–22, 2017). Zielona Góra: Univ. Zielona Góra, 2017. 1 p. Available at `www.cid.uz.zgora.pl/php/pdf_file.php?vid=1046` (accessed Jan. 13, 2023).
4. **Alvarado J., Dantas S., Mohr E., Rautenbach D.** On the maximum number of minimum dominating sets in forests // Discrete Math. 2018. Vol. 342, No. 4. P. 934–942.
5. **Taletskii D. S.** Trees with extremal numbers of k-dominating sets // Discrete Math. 2022. Vol. 345, No. 1, ID 112656. 5 p.
6. **Rote G.** Minimal dominating sets in a tree: Counting, enumeration, and extremal results. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2019. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1903.04517).
7. **Henning M. A., Mohr E., Rautenbach D.** On the maximum number of minimum total dominating sets in forests // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2019. Vol. 21, No. 3, ID 3. 12 p.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
16 июня 2022 г.
После доработки —
4 октября 2022 г.
Принята к публикации
6 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 110–129

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.745

ON THE NUMBER OF MINIMUM TOTAL DOMINATING SETS IN TREES

D. S. Taletskii [1, 2]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2] Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Street, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: dmitalmail@gmail.com

Abstract. The minimum total dominating set (MTDS) of a graph is a vertex subset D of minimum cardinality such that every vertex of the graph is adjacent to at least one vertex of D. In this paper we obtain the sharp upper bound for the number of MTDS in the class of n-vertex 2-caterpillars. We also show that for all $n \geqslant 1$ every n-vertex tree has less than $(\sqrt{2})^n$ MTDS. Illustr. 5, bibliogr. 6.

Keywords: extremal combinatorics, tree, 2-caterpillar, minimum total dominating set.

REFERENCES

1. **D. Bród** and **Z. Skupień,** Trees with extremal numbers of dominating sets, *Australas. J. Comb.* **35**, 273–290 (2006).
2. **M. Krzywkowski** and **S. Wagner,** Graphs with few total dominating sets, *Discrete Math.* **341** (4), 997–1009 (2018).
3. **A. Bień,** Properties of gamma graphs of trees, *Colourings, Independence and Domination* (Abs. 17th Workshop Graph Theory, Piechowice, Poland, Sept. 17–22, 2017) (Univ. Zielona Góra, Zielona Góra, 2017). Available at www.cid.uz.zgora.pl/php/pdf_file.php?vid=1046 (accessed Jan. 13, 2023).
4. **J. Alvarado, S. Dantas, E. Mohr,** and **D. Rautenbach,** On the maximum number of minimum dominating sets in forests, *Discrete Math.* **342** (4), 934–942 (2018).
5. **D. S. Taletskii,** Trees with extremal numbers of k-dominating sets, *Discrete Math.* **345** (1), ID 112656, 5 p. (2022).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–11–00194).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

6. **G. Rote,** Minimal dominating sets in a tree: Counting, enumeration, and extremal results (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2019) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1903.04517).
7. **M. A. Henning, E. Mohr,** and **D. Rautenbach,** On the maximum number of minimum total dominating sets in forests, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **21** (3), ID 3, 12 p. (2019).

Dmitrii S. Taletskii

Received June 16, 2022
Revised October 4, 2022
Accepted October 6, 2022