

ТОПОЛОГИЯ РАСПАДАЮЩИХСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Г.М. Полотовский
polotovskiy@gmail.com

УДК 512.772, 515.165.4

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых, распадающихся на неприводимые сомножители. Дается обзор полученных в последние три года автором и его учениками результатов о кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя, и о кривых степени 8, распадающихся на два сомножителя.

Ключевые слова: 16-я проблема Гильберта, распадающиеся плоские вещественные алгебраические кривые

Topology of decomposable real algebraic curves

The problem of isotopic classification of plane real algebraic curves decomposing into irreducible factors, which belongs to the first part of Hilbert's 16th problem, is in consideration. A review of the results obtained in the last three years by the author and his students about curves of degree 7 decomposing into three factors, and about curves of degree 8 decomposing into two factors is given.

Keywords: Hilbert's 16th problem, decomposable plane real algebraic curves

Плоской вещественной алгебраической кривой (ниже – кривая) C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ – координаты в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$; $\mathbb{R}C_m = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 | C_m(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ называется множеством вещественных точек кривой C_m .

Вопрос о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ в случае неособой кривой, включённый Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы, был решён Д.А. Гудковым [1] в 1969 г. В предисловии к [1] Гудков поставил задачу о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ для случая, когда кривая C_6 распадается в произведение двух M -кривых (неособая кривая C_m называется M -кривой, если $\mathbb{R}C_m$ имеет максимально возможное для данной степени m число компонент связности, равное $(m-1)(m-2)/2+1$ согласно теореме Харнака). Эта задача была решена в [2], а затем для случая, когда число сомножителей больше двух – в [3]. Начиная с середины 1980-х годов рассматривается аналогичная задача о кривых C_7 , распадающихся в произведение двух M -кривых, решение которой благодаря усилиям многих авторов близко к завершению; также была найдена классификация взаимных расположений M -кривой степени 5 и пары прямых (библиография работ этого периода приведена в [4]).

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Полотовский Григорий Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Grigory Polotovskiy (National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia)

В докладе даётся обзор полученных в последнее время результатов (частично опубликованных в [4] – [8]) в аналогичных классификационных задачах: а) о кривых C_7 , распадающихся в произведение пары M -коник и M -кубики; б) о кривых C_8 , распадающихся в произведение двух M -кривых: б1) коники и секстики; б2) кубики и квинтики; б3) двух квартик. Без наложения дополнительных условий все эти задачи труднообозримы, поэтому всюду предполагаются выполненными условия максимальности и общего положения: каждые две кривые-сомножители пересекаются трансверсально в максимально возможном по теореме Безу числе точек, и все эти точки расположены на одной компоненте связности каждой из кривых-сомножителей. Но и при этих предположениях задача остаётся слишком объёмной, поэтому рассматриваемые случаи делятся на серии, выделяемые условиями комбинаторного характера.

Схема исследования во всех случаях следующая: сначала перечисляются топологические модели кривых данной серии, удовлетворяющие наложенным условиям, топологическим следствиям теоремы Безу и следствиям известных результатов о топологии неособых алгебраических кривых. Затем для каждой модели из полученного списка делается попытка либо доказать её нереализуемость алгебраической кривой данной степени с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, либо построить её алгебраическую реализацию с помощью различных вариантов метода малого параметра, включая предложенный О.Я. Виро patchworking и его обобщения.

Результаты имеют вид списков попарно различных топологических моделей построенных расположений и расположений, для которых доказана их нереализуемость алгебраическими кривыми данной степени. Привести здесь эти результаты невозможно из-за недостатка места. В качестве примера приведём статистику результатов для подслучая задачи а), рассмотренного в [6]: из подлежащих изучению 62 топологических моделей 9 моделей реализованы, для 49 моделей доказана их неререализуемость, вопрос о реализуемости 5 оставшихся моделей пока открыт.

Литература

1. Гудков Д.А., Уткин Г.А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. Вып.87 (1969), 1-214.
2. Полотовский Г.М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. **236**:3 (1977), 548–551.
3. Kuzmenko T.V., Polotovskii G.M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M -curves in general position // Translations of the American Mathematical Society. Series 2. Vol.173 (1996), 165-178.
4. Борисов И.М., Полотовский Г.М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. Т.176 (2020), 3-18.
5. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. Т.22. №1 (2020), 24-37.
6. Горская В.А. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. Т.23, вып.3(84) (2022), 61-76.
7. Борисов И.М. Построение некоторых взаимных расположений M -кубики и M -квинтики // Чебышевский сборник. Т.22, вып.1 (2021), 76-91.
8. Пучкова Н.Д. О взаимных расположениях двух M -кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. (2022, в печати).