Хаотические ламинации и их свойства

Е. В. Жужома

Ключевые слова: хаотическая ламинация, локальная ламинация, слоение, аксиома А Смейла, базисное множество.

DOI: https://doi.org/???

Введение. В статье вводится понятие хаотической ламинации, которое на замкнутом многообразии обобщает понятие хаотического слоения. Хаотические ламинации естественным образом возникают в динамических системах, удовлетворяющих аксиоме А Смейла [1]. Хорошим примером одномерного хаотического слоения на замкнутом многообразии является транзитивный поток Аносова. Базисное множество несингулярного потока, которое удовлетворяет аксиоме Смейла, дает пример хаотической ламинации, если это базисное множество не совпадает с несущим многообразием.

Мы показываем, что для двумерных трансверсально ориентируемых ламинаций (не обязательно хаотических) на 3-мерных многообразиях имеет место аналог теоремы Рэба о слое, гомеоморфном сфере. Это позволяет доказать, что на замкнутых 3-мерных многообразиях не существует хаотических двумерных трансверсально ориентируемых ламинаций. Тем не менее, показывается, что на любом 3-мерном замкнутом многообразии M^3 существует одномерная хаотическая ламинация топологической размерности два. Отсюда вытекает, что на любом многообразии вида $M^3 \times \mathbb{S}^1$ существует двумерная хаотическая ламинация топологической размерности три.

Понятие хаотического слоения было введено в работе [2], которое было мотивированно понятием хаоса в смысле Дивани [3]. Напомним, что согласно Р. Дивани динамическая система является хаотической, если выполнены следующие условия:

1) система транзитивная и периодические орбиты всюду плотны в фазовом пространстве системы;

2) система обладает свойством чувствительности орбит от начальных условий.

В работе [4] было доказано, что из условия 1) следует условие 2). Это позволило ввести понятие хаотического слоения, как транзитивного слоения, имеющего всюду плотное семейство компактных (или замкнутых, если несущее многообразие является замкнутым) слоев [2]. Хаотические слоения рассматривались также в работе [5]. Ламинации и их применение в теории динамических систем и топологии рассматривались в книгах [6], [7].

Основные определения. Сначала, следуя [8] (см. также [7]), введем унифицирующее понятие локальной ламинации на замкнутом n-мерном многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Зафиксируем натуральное число $1 \leqslant d \leqslant n-1$ и целые числа $0 \leqslant l \leqslant r \leqslant \infty$. Пусть $\mathscr{M} \subset M^n$ – некоторое подмножество многообразия M^n (которое может совпадать с M^n), содержащее в свою очередь подмножество $S \subset \mathscr{M}$, замкнутое в индуцированной топологии множества $\mathscr{M}$. Предположим, что $\mathscr{M} \setminus S$ представляет собой объединение $\bigcup_\alpha L_\alpha$ попарно непересекающихся C^r гладких d-мерных связных инъективно вложенных многообразий L_α, где α пробегает некоторое множество индексов. Будем говорить, что семейство $\{L_\alpha\}$, обозначаемое через $\mathscr{D}$, является *локальной d-мерной $C^{r,l}$ ламинацией* с множеством особенностей $S \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Sing}(\mathscr{D})$, если для любой точки $x \in \mathscr{M} \setminus S$ существует окрестность $U(x) \subset M^n$, $x \in U(x)$, и C^l диффеоморфизм $\psi\colon U(x) \to \mathbb{R}^n$ такой, что любая связная компонента пересечения $U(x) \cap L_\alpha$ (если это пересечение не пусто) отображается диффеоморфизмом ψ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00304.

в d-мерную гиперплоскость

$$x_{d+1} = c_1, \quad \dots, \quad x_n = c_{n-d},$$

при этом ограничение $\psi|_{U(x)\cap L_\alpha}$ является C^r диффеоморфизмом на образ. Везде далее предполагается $r = 1$. Величина $l \geqslant 0$ не важна, и поэтому вместо локальной $C^{1,l}$ ламинации мы будем говорить просто локальная ламинация (под C^0 диффеоморфизмом понимается гомеоморфизм).

Множество $\mathscr{M}$ называется *носителем локальной ламинации* $\mathscr{D}$. Подмногообразия L_α называются *слоями*. Каждая точка множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{D})$ называется *особенностью*. Компонента связности пересечения $L_\alpha \cap U(x)$ называется *локальным слоем*. Локальные слои образуют базу топологии на каждом слое L_α, которую мы будем называть *слоевой* (иногда говорят, внутренней) *топологией* на L_α. Имея в виду эту слоевую топологию, мы будем говорить о компактности слоя или гомеоморфности слоя некоторому многообразию. Окрестности $U(x)$ называются *окрестностями со структурой линейной локальной ламинации*, а диффеоморфизмы ψ – *выпрямляющими диффеоморфизмами*. Иногда окрестность со структурой линейной локальной ламинации называют слоеным ящиком.

Понятие локальной ламинации обобщает такие классические понятия как ламинация и слоение. Если носитель $\mathscr{M}$ локальной ламинации $\mathscr{D}$ является замкнутым подмножеством многообразия M^n, и $\mathrm{Sing}(\mathscr{D}) = \varnothing$, то $\mathscr{D}$ называется *ламинацией*. Хорошим примером ламинации является геодезическая ламинация. Ламинацию также образуют неустойчивые многообразия растягивающегося аттрактора диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A Смейла [9]. Ламинации мы обычно будем обозначать через $\mathscr{L}$.

Если $\operatorname{supp}\mathscr{D} = M^n$ и $\mathrm{Sing}(\mathscr{D}) = \varnothing$, то $\mathscr{D}$ называется *слоением*. Если $\operatorname{supp}\mathscr{D} = M^n$ и $\mathrm{Sing}(\mathscr{D}) \neq \varnothing$, то $\mathscr{D}$ называется слоением *с особенностями*. Слоения мы обычно будем обозначать символом $\mathscr{F}$.

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что локальная ламинация с особенностями есть слоение с особенностями на некотором подмножестве. Если это подмножество замкнуто и особенностей нет, то мы получаем ламинацию. Если это подмножество совпадает с многообразием (особенности могут быть), то локальная ламинация является слоением (возможно, с особенностями). Из сказанного следует, что понятие локальной ламинации является наиболее общим. Поэтому все утверждения и определения, которые имеют место для локальной ламинации, будут также иметь место для ламинаций и слоений. В основном мы рассматриваем ламинации, при этом двумерные ламинации на трехмерных многообразиях предполагаются трансверсально ориентируемыми (т.е., в некоторой окрестности носителя ламинации существует неособое векторное поле, трансверсальное слоям ламинации).

Предельным множеством компактного слоя будем считать сам слой. Пусть L_α – некомпактный слой, и пусть $V_1 \subset \dots \subset V_i \subset \cdots$ – последовательность компактных подмножеств $V_i \subset L_\alpha$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} = L_\alpha$. *Предельным множеством* слоя L_α называется множество пересечение топологических замыканий множеств $L_\alpha \setminus V_i$, обозначается $\omega(L_\alpha)$.

Слой L_α в ламинации $\mathscr{L}$ называется *всюду плотным*, если $\omega(L_\alpha)$ совпадает с носителем ламинации. Ламинация $\mathscr{L}$ называется *транзитивной*, если она содержит всюду плотный слой. Ламинация, содержащая не менее двух компактных слоев, называется *хаотической*, если она транзитивная и в ее носителе всюду плотны компактные слои.

Свойства хаотических ламинаций. Везде далее через $L(x)$ обозначается слой, проходящий через точку x. Имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{L}$ – двумерная ламинация на замкнутом 3-мерном многообразии M^3, и L_0 – слой ламинации $\mathscr{L}$. Тогда для любого компактного диска $D \subset L_0$ существует окрестность $U(D)$ такая, что компоненты пересечения слоев ламинации $\mathscr{L}$ с $U(D)$ гомеоморфны диску.*

Доказательство. Граница $l = \partial D$ диска D гомеоморфна окружности и является стягиваемой замкнутой кривой на слое L_0. Поэтому достаточно малый нормальный забор A, составленный из одномерных нормалей, проходящих через l, пересекается со слоями ламинации $\mathscr{L}$ по замкнутым кривым. Отсюда и определения ламинации вытекает требуемый результат.

Следующее утверждение показывает, что для ламинаций (не обязательно хаотических) имеет место аналог теоремы Рэба о слое, гомеоморфном сфере.

Теорема 1. *Пусть двумерная трансверсально ориентируемая ламинация $\mathscr{L}$ на замкнутом 3-мерном многообразии M^3 имеет слой L_0, гомеоморфный 2-мерной сфере. Тогда существует трубчатая окрестность $U(L_0)$ слоя L_0 такая, что $U(L_0)$ гомеоморфна $L_0 \times (-1;+1)$, и все слои в $U(L_0)$ гомеоморфны 2-мерной сфере.*

Доказательство. Представим L_0 в виде объединения двух замкнутых дисков D_1, D_2 таких, что их пересечение $D_1 \cap D_2$ есть простая замкнутая кривая l_0. Так как l_0 является стягиваемой в точку замкнутой кривой на слое L_0, то существует кольцо A_0, построенное из (одномерных) перпендикуляров к слою L_0, которые проходят через l_0, при этом пересечения слоев ламинации $\mathscr{L}$ с A_0 представляют собой замкнутые кривые, гомотопные кривой l_0 в кольце A_0. Из предложения 1 вытекает существование окрестностей $U(D_i)$ дисков D_i, $i = 1, 2$, таких, что пересечения слоев ламинации $\mathscr{L}$ с $U(D_i)$ являются двумерными дисками, которые пересекают A_0 по замкнутым кривым, гомотопным кривой l_0 в кольце A_0. Известно, что объединение двух дисков с общей границей есть двумерная сфера. Поэтому, уменьшив, если необходимо, окрестности $U(D_1)$ и $U(D_2)$, получим требуемую окрестность $U(L_0)$.

Предложение 2. *На замкнутых 3-мерных многообразиях не существует хаотических трансверсально ориентируемых двумерных ламинаций.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathscr{L}$ – хаотическая трансверсально ориентируемая двумерная ламинация на замкнутом 3-мерном многообразии M^3, и L_0 – замкнутый слой ламинации $\mathscr{L}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in L_0$. Так как L_0 – замкнутая поверхность конечного рода, то существует семейство простых замкнутых петель $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, пересекающихся только в точке x_0, таких, что $L_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$ есть открытый диск. Из предложения 1 вытекает, что все достаточно близкие к L_0 замкнутые слои ламинации $\mathscr{L}$ будут параллельны L_0.

В силу определения, хаотическая ламинация имеет бесконечное семейство замкнутых слоев, которые образую всюду плотное множество в носителе ламинации. Поэтому существует три параллельных замкнутых слоя L_1, L_2 и L_3 таких, что L_3 лежит в области Q гомеоморфной $L_1 \times [0;1]$ с границей $L_1 \times \{0\} = L_1$, $L_1 \times \{1\} = L_2$ и при этом, L_3 принадлежит внутренности области $L_1 \times [0;1]$. Однако, к слою L_3 сколь угодно близко должен подходить всюду плотный слой, скажем L_0. Не уменьшая общности, можно считать, что вне Q имеются слои хаотической ламинации. Поэтому L_0 должен пересекать границу $\partial Q = L_1 \cup L_2$, которая состоим из двух слоев L_1, L_2. Это невозможно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Примеры хаотических ламинаций. Согласно предложению 2, на замкнутых трехмерных многообразиях не существует хаотических трансверсально ориентируемых двумерных ламинаций. Однако, имеет место следующий результат.

Теорема 2. *На любом 3-мерном замкнутом многообразии M^3 существует одномерная хаотическая ламинация топологической размерности два.*

Доказательство. Согласно [1], что на любом замкнутом 3-мерном многообразии M^3 существует градиентно-подобный поток Морса–Смейла с устойчивым узлом ω. Пусть $U(\omega)$ – окрестность ω, гомеоморфная 3-мерному шару с гладкой границей $\partial U(\omega)$ такая, что векторное поле на $\partial U(\omega)$ направлено внутрь $U(\omega)$. Покажем сначала, что на M^3 существует поток Морса–Смейла с устойчивой (следовательно, и с неустойчивой) периодической траекторией. Действительно, система дифференциальных уравнений $\dot{\rho} = \rho \cdot (1 - \rho)$,

$\dot{\phi} = 1$, $\dot{z} = -z$ имеет периодическую устойчивую траекторию, где (ρ, ϕ, z) – цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Эта система также имеет (достаточно большую) окрестность U_0 точки $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, гомеоморфную шару с гладкой границей ∂U_0, такую, что векторное поле системы на ∂U_0 направлено внутрь U_0. Тогда векторное поле в градиентно-подобном потоке Морса–Смейла в окрестности $U(\omega)$ можно заменить векторным полем в окрестности U_0, согласовав эти векторные поля на границах соответствующих шаров. Тогда мы получим на M^3 поток f^t с устойчивой периодической траекторией l_0. Из устойчивости траектории l_0 следует, что l_0 имеет трубчатую окрестность $U(l_0)$, гомеоморфную полноторию, такую на границе $\partial U(l_0)$ векторное поле потока f^t направлено внутрь $U(l_0)$.

Рассмотрим аттрактор Плыкина Λ_P диффеоморфизма $g_P\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ [10]. Напомним, что Λ_P имеет топологическую размерность 1. Динамическая надстройка $sus^t(g_P)$ над g_P имеет притягивающее базисное множество Ω топологической размерности 2, соответствующее Λ_P. Более того, Ω имеет окрестность $U(\Omega)$, гомеоморфную полноторию такую на границе $\partial U(\Omega)$ векторное поле потока $sus^t(g_P)$ направлено внутрь $U(\Omega)$. Аналогично предыдущему шагу заменим векторное поле в $U(l_0)$ векторным полем в $U(\Omega)$. Получим поток g^t на M^3 с инвариантным притягивающим множеством Ω. Так как в базисном множестве Ω плотны периодические траектории и имеется всюду плотная орбита, то Ω является требуемой хаотической ламинацией.

Замечание. Приведем схематично альтернативное доказательство теоремы 2 в случае ориентируемого многообразия M^3. Согласно [11], на M^3 существует расслоенное зацепление $\{C_1, \dots, C_k\} \subset M^3$. Тогда $M^3 \setminus L$ представляется в виде

$$(\operatorname{int} M^2 \times [0;1])/(x,1) \sim (g(x),0),$$

где $g\colon \operatorname{int} M^2 \to \operatorname{int} M^2$ – диффеоморфизм внутренности $\operatorname{int} M^2$ некоторой компактной ориентируемой поверхности M^2 с граничными компонентами $C_1, \dots, C_k$. При этом, g продолжается до диффеоморфизма $g\colon M^2 \to M^2$ такого, что $g|_{\bigcup_{i=1}^k C_i} = id$. Согласно [12], g можно аппроксимировать структурно устойчивым диффеоморфизмом g_0 изотопным g (см. также [13]). Если $g_0|_{\operatorname{int} M^2}$ является диффеоморфизмом Аносова, то с помощью хирургической операции Смейла можно построить изотопный g_0 диффеоморфизм (обозначим его снова через g_0) с притягивающей периодической точкой [1]. Ясно, что диффеоморфизм с притягивающей периодической точкой можно построить и для других типов структурно устойчивых диффеоморфизмов. Далее, диффеоморфизм g_0 в окрестности притягивающей периодической точки заменяется на диффеоморфизм (обозначим его через g_*) с аттрактором Плыкина. Тогда динамическая надстройка $f^t = sus^t(g_*)$ над g_* имеет двумерное базисное множество с требуемой хаотической ламинацией.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что хаотическая ламинация принадлежит одномерному слоению, вообще говоря, с особенностями. Из альтернативного доказательства теоремы 2 вытекает, что хаотическая ламинация принадлежит одномерному слоению на ориентируемом многообразии M^3.

Следствие 1. *На любом ориентируемом многообразии вида $M^3 \times \mathbb{S}^1$ существует двумерная хаотическая ламинация топологической размерности три. Замкнутые слои этой ламинации являются двумерными торами, а каждый всюду плотный слой гомеоморфен (в слоевой топологии) цилиндру $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.*

Автор благодарит Н. И. Жукову и участников семинара в МИАН под руководством Д. В. Трещева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817. **[2]** R. Churchill, *Deterministic Chaos in General Relativity*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., **332**, Plenum, New York, 1994, 107–112. **[3]** R. Devaney, *An Inrtoduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings Publ., Menlo Park, CA, 1985. **[4]** J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis,

P. Stacey, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 332–334. **[5]** Y. V. Bazaikin, A. S. Galaev, N. I. Zhukova, *Chaos*, **30** (2020), 103116. **[6]** D. Calegari, *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007. **[7]** V. Grines, E. Zhuzhoma, *Surface Laminations and Chaotic Dynamical Systems*, ICS, Moscow–Izhevsk, 2021. **[8]** Д. В. Аносов, Е. В. Жужома, Труды МИАН, **249**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2005, 3–239. **[9]** R. Williams, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 169–203. **[10]** Р. В. Плыкин, *УМН*, **39**:6 (240) (1984), 75–113. **[11]** J. Alexander, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **9** (1923), 93–95. **[12]** M. Shub, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 817–818. **[13]** S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, *Comm. Math. Phys.*, **64** (1978), 35–40.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский
университет "Высшая школа экономики"
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило
19.02.2022
Принято к публикации
22.02.2022