Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.3, с. 75–100

УДК 519.832
ББК 22.18

НЕТРАНЗИТИВНЫЕ ПО ВЫИГРЫШНОСТИ ПОЗИЦИИ БЕЛЫХ И ЧЕРНЫХ В ШАХМАТАХ

Александр Н. Поддьяков
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
e-mail: apoddiakov@gmail.com

Рассматриваются нетранзитивные по выигрышности циклы (замкнутые цепочки) шахматных позиций сторон (позиций белых и черных). Минималистская замкнутая по выигрышности цепочка из четырех нетранзитивных позиций такова: позиция A белых предпочтительнее позиции B черных (при возможности выбора игры за белых или за черных надо выбрать позицию A белых), позиция B черных предпочтительнее позиции C белых, позиция C белых предпочтительнее позиции D черных, но позиция D черных предпочтительнее позиции A белых. (Белые начинают во всех вариантах.) Это напоминает принцип игры «камень, ножницы, бумага», только объектов (позиций сторон) здесь не три, а четыре или большее четное число. Такая нетранзитивность обнаружена и в шашках. Нетранзитивность выигрышности позиций сторон рассматривается как следствие сложности шахматной и шашечной среды – по сравнению с более простыми позиционными детерминированными играми с полной информацией, в которых возможны только транзитивные по выигрышности позиции сторон.

У позиций сторон в шахматах не может быть совершенных оценок – фиксированных чисел в каком-либо абсолютном рейтинге, не учитывающем в явном виде позицию другой стороны. Для нетранзитивных позиций также невозможен расчет фиксированных евклидовых расстояний в пространстве отношений выигрышности позиций. Он приводит к противоречию: расстояние между выигрышностью позиций A и B у одной стороны ненулевое и нулевое одновременно. То же и у другой стороны.В дополнение к теореме Цермело-фон Неймана вводится положение о возможности или же невозможности построения чистых выигрышных стратегий, основанных на допущении о транзитивности выигрышности позиций сторон в разных играх. Ставятся вопросы о возможности нетранзитивных по выигрышности позиций сторон в других играх.

Ключевые слова: теория игр, детерминированные позиционные игры с полной информацией, шахматы, шашки, нетранзитивность, нетранзитивные по выигрышности циклы позиций сторон, совершенные оценки, евклидовы расстояния, теорема Цермело-фон Неймана.

Поступила в редакцию: 20.03.22 *После доработки*: 17.05.22 *Принята к публикации*: 12.09.22

1. Введение

Транзитивность превосходства доминирования (превосходства) определяется как такое свойство бинарных отношений, что если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$ (знак «$\succ$» означает «превосходит», «предпочтительнее», «благоприятнее» и т.п.). Оно может казаться само собой разумеющимся. Антитранзитивность превосходства доминирования (превосходства) определяется как такое свойство бинарных отношений, что если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $C \succ A$. Иначе говоря, A, B, C образуют замкнутую цепочку превосходства – нетранзитивный цикл. Пример – отношения превосходства в игре «камень, ножницы, бумага», где камень побеждает ножницы, те – бумагу, а она побеждает камень. В литературе при обсуждении нетранзитивных циклов говорится, соответственно, о свойстве нетранзитивности (а не антитранзитивности, хотя по смыслу речь идет о ней), и мы будем следовать этой традиции.

Математические объекты, выигрывающие друг у друга нетранзитивным образом (по принципу «камень, ножницы, бумага»), стали широко известны благодаря колонкам популяризатора математики

Мартина Гарднера в научно-популярном журнале “Scientific American” [28, 39] (русский перевод этих двух колонок – в [3, 4]). Он описал, например, необычные, специально изобретенные игральные кубики с разными нестандартными числами на гранях. Благодаря подбору нестандартных чисел игральная кость A чаще выигрывает (показывает большее число на верхней грани при бросках), чем кость B в паре $A - B$, B чаще выигрывает у C в паре $B - C$, но C чаще выигрывает у A в паре $A - C$. Соответственно, при возможности выбора кости, чтобы выиграть, надо выбирать A в паре $A - B$, B – в паре $B - C$ и C – в паре $A - C$. Это противоречит усвоенному в школе и представляющимся универсальным правилу транзитивности превосходства (если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$). Здесь, вероятно, имеет место неверное обобщение, опирающееся на транзитивность чисел: если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$. Когда же речь идет не просто о числах, а о трех и более объектах, характеризующихся тремя и более параметрами, нетранзитивность доминирования становится возможной.

Изобретаются нетранзитивные по выигрышности наборы игральных карт, рулеток, лотерей и т.д. и проводятся активные исследования нетранзитивности доминирования [1, 5, 9, 18-24, 30, 31, 37, 40]. Начиная с популяризаторских работ Гуго Штейнгауза [17], создаются задачи на материале нетранзитивности для школьников и студентов [6, 16, 20, 35]. При этом речь идет в основном о стохастических, недетерминированных играх.

Возможна ли нетранзитивность выигрышности позиций сторон в детерминированных стратегических позиционных играх с полной информацией и нулевой суммой – шахматах и шашках?

Здесь необходимо уточнение терминологии. Термин «позиция» в шахматах (и шашках) имеет два разных значения. Первое значение – позиция как целое, объединяющее позиции сторон («На доске возникла интересная позиция»).

Приведем примеры использования термина в этом значении в текстах о шахматах и шашках, важные для дальнейшего рассуждения.

«Современные схемы компьютерной оценки шахматной позиции основаны на двух допущениях. Во-первых, существует возможность решить, какая позиция благоприятнее, и, во-вторых, это отношение [большей благоприятности] транзитивно. Вследствие этих предположений, число, служащее мерой ценности [позиции], может быть присвоено любой шахматной позиции» [19, p. 38].

«Конструирование базы шашечных эндшпилей – это просто расчет транзитивного замыкания. Каждая позиция – член множеств побед, проигрышей и ничьих. Информация об однажды рассчитанной и классифицированной по этому принципу позиции, записанная в базу данных, представляет собой совершенное знание теоретической ценности данной позиции» [32, p. 3].

«Имея сеть совершенных оценок, вы можете определить лучший ход в каждой позиции, выбирая действие, ведущее к состоянию с большей оценкой» [38]. Совершенная оценка – фиксированное число, обозначающее степень предпочтительности позиций в ряду остальных. Расчет совершенных оценок был использован для анализа китайских шашек с двумя и более игроками [36].

А в го, видимо, нет совершенных оценок позиций на досках разного размера [26]. Возможно, это верно и для шахмат. Возьмем какую-нибудь позицию и затем добавим к доске еще восемь пустых досок так, чтобы исходная доска оказалась в центре или в каком-то из углов к расчета совершенных оценок вадрата, образованного всеми досками. Есть подозрение, что оценки позиций там станут другими – в том числе в зависимости от угла, куда помещена исходная доска. Позиция, чреватая матом, вполне может перестать быть таковой из-за внезапно открывшихся просторов. Позиция одной из сторон может в результате улучшиться, а другой – ухудшиться.

И здесь мы переходим ко второму значению термина «позиция» – позиция одной из сторон (одного из игроков). Пример использования термина «позиция» в этом значении: «Я взглянул на Сюй Фэнсюна – по привычке, абсолютно бессмысленной в этом матче. Моя позиция заметно ухудшилась. Машина играла сильно. Но самое главное – она играла иначе» [7].

Различая эти два значения, в статье мы будем говорить о позициях сторон, или, применительно к шахматам и шашкам, позициях белых и черных. Подчеркнем, что мы не ставим под сомнение транзитивность выигрышности шахматных и шашечных позиций в первом значении (как целое, объединяющее позиции сторон), но обсуждаем нетранзитивность выигрышности во втором значении – применительно к позициям белых и позициям черных.

Важное пояснение: в процитированных выше работах рассматриваются только легальные позиции – те, которые могут возникнуть на доске при начальной традиционной расстановке фигур и дальнейшей игре по правилам. Мы же, по аналогии со специально сконструированными нетранзитивными игральными костями, будем строить рассуждения на основе специально сконструированных позиций, которые не проверялись на легальность. В этом смысле поставленные нами задачи по созданию данных позиций относятся к так называемым неортодоксальным конструкционным. Для практики игры они бесполезны. Но они позволяют развить теорию. Мы показываем, что классификация позиций должны быть дополнена еще одним основанием – по транзитивности/нетранзитивности выигрышности позиций сторон – и делаем отсюда теоретические выводы относительно возможности дополнения теоремы Цермело-фон Неймана.

В целом, представленные в статье примеры относятся к так называемым патологическим. «Термин «патологический» используется в математике для обозначения примера, специально созданного, чтобы показать нарушение определенных, почти универсальных свойств. Патологические задачи часто позволяют строить интересные примеры контринтуитивного поведения математических объектов. Они также служат прекрасными иллюстрациями того, почему для многих математических утверждений, претендующих на универсальную истинность, требуется очень подробное описание условий применимости» [39].

В нашем случае «патологии» созданы для столкновения с не вполне эксплицированными представлениями двух уровней. Один уровень – это наивные «школьные» представления, что если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$. Второй, «продвинутый» уровень – это интуитивные представления людей, знающих шахматы, что раз транзитивность выигрышности является свойством шахматных позиций в первом значении (позиции как целое), то она должна бы сохраняться и для позиций во втором значении (для позиций белых и черных).

Можно сказать, что примеры нетранзитивных по выигрышности позиций сторон деконструируют шаблон определенной направленности мышления, связанной с ошибочной индукцией свойства транзитивности превосходства. Используя цитату выше, сформулируем – эти примеры являются иллюстрациями того, почему для так называемой аксиомы транзитивности превосходства, претендующей на универсальную истинность, например, в экономических теориях и теориях принятия решений [13], требуется очень подробное описание условий применимости.

Основной вопрос статьи – возможны ли в шахматах:

а) транзитивное упорядочивание по выигрышности всех позиций белых и черных;

б) расчет на этой основе теоретических совершенных оценок всех позиций белых и черных?

Ответ: невозможны.

2. Примеры нетранзитивных по выигрышности позиций сторон в шахматах и шашках

Рассмотрим набор из следующих четырех позиций: две позиции белых (A и C) и две черных (C и D) (рис. 1) [11, p. 48].

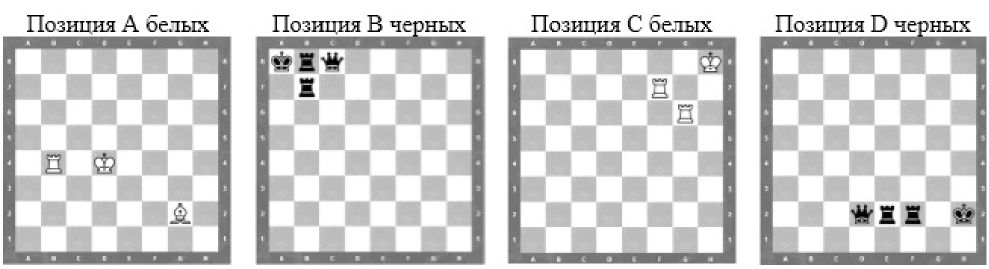

Рисунок 1. Две шахматные позиции белых и две позиции черных для попарного наложения на одну доску (A и B; B и C; C и D; D и A) и демонстрации образованного ими нетранзитивного цикла по выигрышности [11].

Последовательно наложим эти пары позиций на одну доску (рис. 2). Белые начинают во всех вариантах в соответствии с правилами шахматной композиции. (Малые интересность и дополнительная информативность при начале черными показана в [15]).

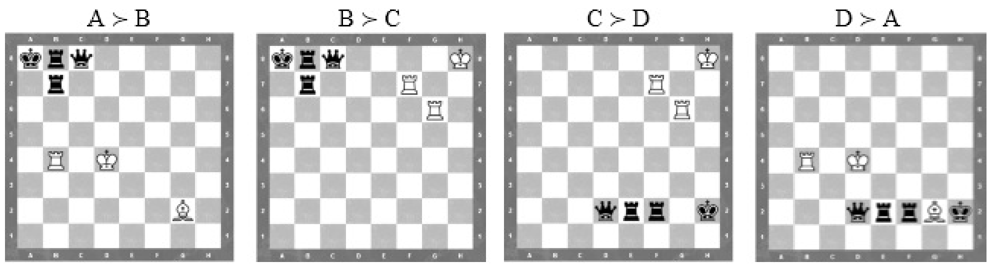

Рисунок 2. Позиции A, B, C, D, попарно наложенные на одну доску для демонстрации их нетранзитивности по выигрышности [11]

Решая задачу о том, какая позиция выигрышнее (предпочтительнее) в паре, можно видеть, что:

– позиция A белых предпочтительнее позиции B черных (при возможности выбора игры за белых или за черных надо выбрать позицию A белых);

– позиция B черных предпочтительнее позиции C белых;

– позиция C белых предпочтительнее позиции D черных;

– но позиция D черных предпочтительнее позиции A белых.

Каково минимальное число фигур у каждой из сторон, обеспечивающее возможность нетранзитивных по выигрышности позиций белых и черных? В шахматах это число равно двум, как показал А. Ю. Филатов. Он сконструировал минималистскую цепочку их 4 позиций, где с каждой стороны участвуют только король и пешка (рис. 3) [15]. Обратим внимание, что позиции белых A и C зеркально симметричны, как и позиции черных B и D, которые тоже зеркально симметричны. При наложении на одну доску симметричны позиции в первом значении (позиция как целое): зеркально симметричны позиции на первой и третьей доске, а также на второй и четвертой.

С использованием нетранзитивности позиций белых и черных могут быть сконструированы различные интересные шахматные задачи. Г. Л. Попов, международный мастер по шахматной композиции, главный редактор шахматного портала SuperProblem, построил следующую задачу (рис. 4) и дал ее возможное решение [14].

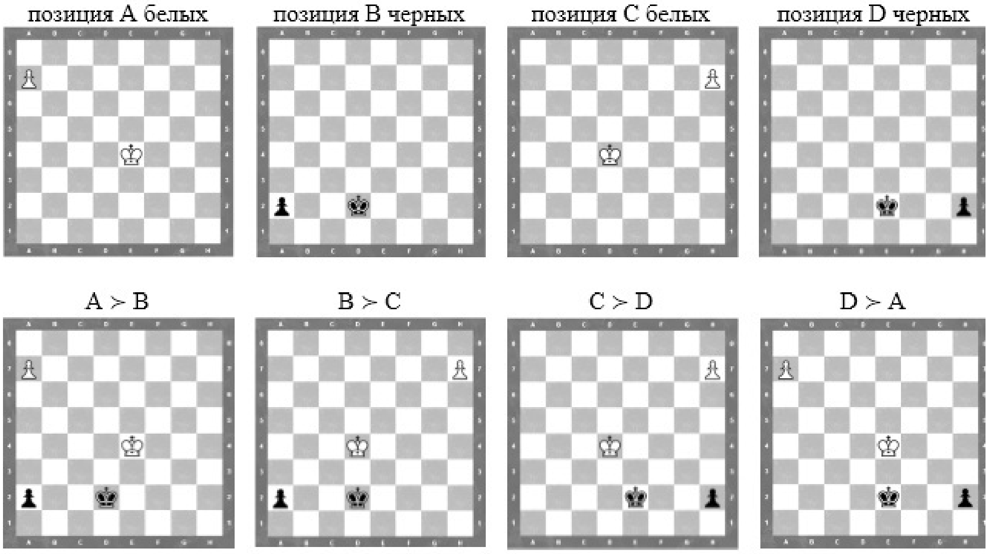

Рисунок 3. Минималистская и симметричная структура нетранзитивных по выигрышности шахматных позиций А. Филатова [15]. Вверху – ряд позиций A, B, C, D; внизу – их попарные наложения на одну доску

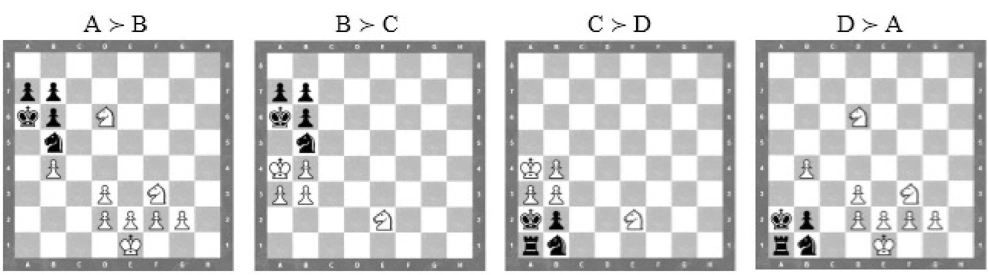

Рисунок 4. Шахматная задача Г. Л. Попова с использованием нетранзитивных по выигрышности позиций [14]

Сконструированы и шашечные позиции, нетранзитивные по выигрышности сторон (рис. 5), их построил С. Жураховский. Он указал, что те же позиции нетранзитивны и в поддавках. Обратим внимание, что в шашках нетранзитивные позиции могут включать только по одной шашке с каждой стороны.

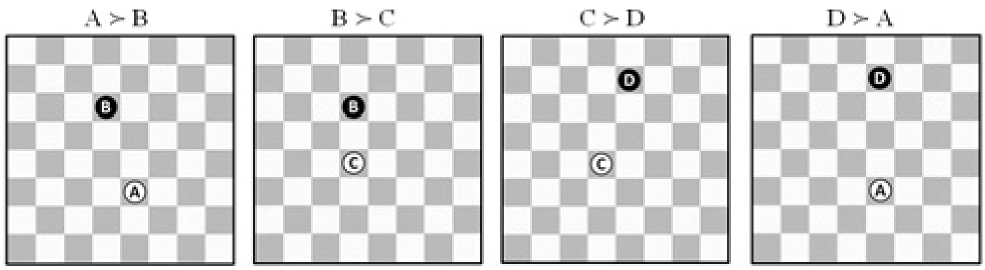

Рисунок 5. Нетранзитивные по выигрышности шашечные позиции С. Жураховского, построенные в развитие нашей идеи нетранзитивных позиций в шахматах

3. Каково число и доля цепочек нетранзитивных по выигрышности шахматных позиций?

А. Ю. Филатов, развивая пример на рисунке 1, показал, что количество нетранзитивных по выигрышности шахматных позиций белых и черных астрономически велико и что эти нетранзитивные цепочки могут быть астрономической длины [15] (так что нет смысла пытаться построить самую длинную). Вероятно, используя методы, аналогичные тем, что разработал А. Ю. Филатов для шахмат, можно показать, что количество нетранзитивных позиций в шашках тоже очень велико (но это лишь гипотеза).

Какова доля нетранзитивных шахматных позиций белых и черных среди всех (и транзитивных, и нетранзитивных)? Ответа пока нет, но мы можем предложить подход к решению.

Поскольку имеются прочитанные базы всех шахматных окончаний для 3-7 фигур и можно узнать исход любого из них (обзор и сравнение этих баз см. в [33]), можно сделать следующее.

1. Рассмотрим 4-7-фигурные окончания, варьирующие по длине цепочки позиций (4, 6, 8 позиций). Поскольку полный просмотр затруднен, воспользуемся методом Монте-Карло для генерации цепочек: генерируем случайным образом позицию A белых (король и другая фигура), аналогично – позицию B черных, позицию C белых, позицию D черных (для цепочки длиной в 4 позиции). Проверяем, используя имеющуюся базу окончаний, образуют ли эти пози-

ции нетранзитивный цикл или нет. Генерируем случайным образом 4 новые позиции (две белых и две черных), оцениваем их на нетранзитивность. Повторяем эту процедуру множество раз. После ее окончания смотрим долю нетранзитивных замкнутых цепочек среди всех (и транзитивных, и нетранзитивных). Сходная процедура была применена ранее для оценки доли нетранзитивных цепочек n-гранных игральных костей среди всех цепочек [24].

Контринтуитивно, но по аналогии с результатами для игральных костей [там же], можно предположить, что с возрастанием числа позиций вероятность встретить среди них нетранзитивные возрастает или, по крайней мере, не уменьшается. Впрочем, это может казаться контринтуитивным вначале, а задним числом представляться закономерным (так и должно быть).

2. Сравним полученные результаты в отношении позиций с разным числом фигур при равных длинах цепочек. Здесь тоже можно предположить, что с возрастанием многофигурности позиций в цепочках равной длины вероятность встретить среди этих цепочек нетранзитивные возрастает или, по крайней мере, не уменьшается.

4. Нетранзитивность позиций сторон как следствие сложности шахматной среды

Нетранзитивность позиций белых и черных по выигрышности – неочевидное и ранее не замеченное свойство шахматной среды (ни в каких списках примеров нетранзитивности не удалось обнаружить шахматные позиции сторон, закольцованные по выигрышности). Это свойство является побочным, незапланированным следствием созданной человеком сложности данной абстрактной среды. (Трудно предположить, что при изобретении шахмат, пусть и поэтапном, кто-то стремился к созданию возможностей для построения нетранзитивных шахматных позиций белых и черных – в том числе цепочек, астрономических по длине.)

Исходя из соображений сложности, мы предполагаем, что нетранзитивные по выигрышности позиции игроков невозможны в более простых средах – например, на маленьких досках (3×3? 4×4?). Если это так, интересно определить минимальный размер доски, позволяющий строить нетранзитивные позиции белых и черных. И сравнить результаты с аналогичными для шашек – будет ли там минимальный размер доски меньше?

Как могут обстоять дела с разными плоскими неквадратными (в том числе изрезанными) формами досок в отношении возможности построения на них нетранзитивных позиций сторон? А с досками на цилиндрических и тороидальных поверхностях?

О.Н. Ярыгин выдвинул следующую гипотезу. Существует определенное количество ходов между позициями сторон (белых и черных), до превышения которого транзитивность выигрышности не нарушается. Интересно определить этот предел, после которого нетранзитивность выигрышности позиций сторон уже может возникнуть, и ответить на вопрос, является ли это число ходов показателем сложности игровой среды (тогда в шахматах оно должно быть больше, чем в шашках, при игре на одинаковых досках).

Предположительно, нетранзитивность выигрышности позиций сторон может существовать и в других сложных играх – китайских шашках, го, реверси (Отелло) и т.д. Возможно, количество и относительная доля таких позиций могут служить одной из (лишь одной из) сравнительных мер сложности для стратегических позиционных игр.

Показав возможность нетранзитивности позиций сторон в сложных стратегических играх, рассмотрим более простую позиционную детерминированную игру с полностью транзитивным порядком позиций сторон по выигрышности. Это необходимо для последующего сравнения и выводов.

5. «Волшебники»: простая игра с транзитивным порядком выигрышности позиций сторон

Мы разработали эту игру для изучения мышления детей и их стратегий решения задач [12]. В некоторых отношениях она похожа на реверси (Отелло), но существенно проще. Мы разберем ее подробно для обоснования последующих выводов.

Материал игры: 10 одинаковых прямоугольных карточек. На одной стороне каждой карточки изображен добрый волшебник (улыбающаяся розовая рожица), на другой стороне – злой волшебник (сердитая синяя рожица).

Игра ведется на нарисованной доске, образованной двумя рядами клеток – верхним и нижним, которые могут быть различающейся длины (от 1 до 5 клеток) – например, верхний ряд содержит 2 клетки, а нижний – 5. Ряды могут быть и равной длины.

Правила игры

Человек играет сам с собой, как в некоторые карточные игры типа пасьянса, – собственно, можно сказать, что это особый пасьянс с особыми картами.

Карточки раскладываются в два горизонтальных ряда нарисованной доски – например, в верхний ряд ставятся 3 добрых волшебника, а в нижний – 3 злых (рис. 6).

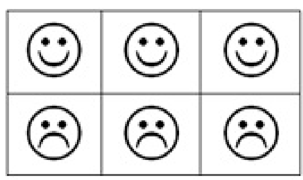

Рисунок 6. Возможное расположение карточек в задаче «3 добрых волшебника против 3 злых»

Уровень сложности игры задается численным соотношением и взаимным расположением волшебников. Путем перекладывания карточек можно превращать злых волшебников в добрых и наоборот. Игровое действие состоит в обмене местами одного волшебника верхнего ряда и одного волшебника нижнего ряда. Менять можно любого волшебника из верхнего ряда и любого из нижнего независимо от их расположения – можно менять и по вертикали, и наискосок – с любым смещением.

Запрещенные действия: нельзя обменивать местами карточки внутри одного ряда, а также выставлять карточки за пределы нарисованной доски.

Взаимодействие волшебников: если в результате обмена волшебник оказался между двумя «чужими» (то есть злой между двумя добрыми или добрый между двумя злыми), то он тоже превращается в «чужого» (карточка переворачивается другой стороной). Стихотворная форма этого правила для детей: «В окружение ты встал и таким же точно стал». При всех остальных вариантах соседства превращение не происходит. Необходимо подчеркнуть, что превращению подвергаются только волшебники – участники обмена, остальные не изменяются, даже несмотря на возникшее в результате обмена неблагоприятное соседство.

Приведем примеры некоторых заданий и решений (рис. 7-10).

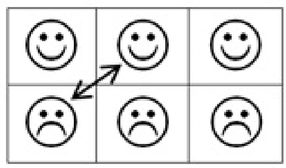

Рисунок 7. Результативный первый ход в задаче «3 добрых волшебника против 3 злых»

Крайний злой волшебник из нижнего ряда перемещается в середину верхнего ряда и превращается в доброго, поскольку встал между двух добрых. Обмениваемый добрый волшебник остается добрым, т.к. не попал между двумя злыми. Таким образом, соотношение становится «4 добрых против 2 злых» (вместо изначального «3 добрых против 3 злых»).

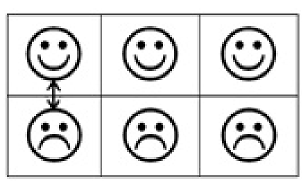

Рисунок 8. Допустимый, но ухудшающий ситуацию ход в задаче «3 добрых волшебника против 3 злых»

Крайний злой и добрый волшебники меняются местами. Никто при этом не изменяется, поскольку ни тот, ни другой не попали между двумя «чужими». Но этим ходом разрушена «рабочая пара» добрых (разделенных одной клеткой), с помощью которой можно превращать злых как на конвейере, помещая их один за другим в эту клетку.

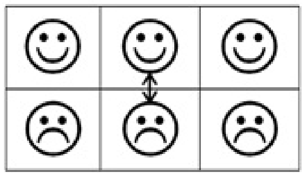

Рисунок 9. Допустимый ход, никак не изменяющий ситуацию в задаче «3 добрых волшебника против 3 злых»

После обмена оба превращаются в свою противоположность, и ситуация на доске остается той же, что была.

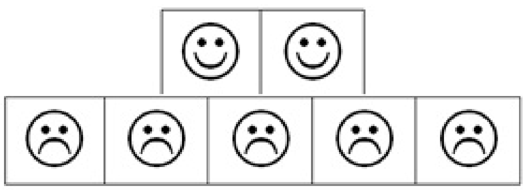

Рисунок 10. Задача «2 добрых волшебника против 5 злых»

Требует предварительных обменов, не ведущих к превращениям, что трудно, например, для большинства старших дошкольников.

Мы разработали компьютерный вариант игры. Он включает в себя возможность игры против «главного» злого волшебника, не участвующего в обменах, стоящего в стороне и делающего ходы за злых, а также возможность игры в условиях неопределенности, когда часть или все волшебники невидимы (закрыты щитами) и должны быть идентифицированы (обмениваемые волшебники становятся видны при обмене).

Алгоритм учитывает: количество «своих» волшебников в ряду (чем их больше, тем выше оценка позиции), количество ходов, необходимое для образования рабочей пары своих волшебников (за каждую пару – наценка), и количество уже имеющихся рабочих пар своих волшебников.

Это простая игра: оценка ситуации (в отличие от шахматных и шашечных алгоритмов) не включает количество и расположение чужих в явном виде. Фактически эти параметры (количество и расположение чужих) отражены в количестве и расположении своих, откуда могут быть однозначно выведены, поскольку пустых клеток нет, – опять-таки в отличие от шахмат и шашек. *Каждая позиция «своих» имеет, по формуле, свою совершенную численную оценку, и все возможные позиции «своих» транзитивно упорядочены по предпочтительности.* У симметричных позиций оценки одинаковы.

Покажем транзитивность порядка предпочтительности позиций в одном ряду из трех клеток (играем за добрых). Правило сравнения позиций лексикографическое: вначале сравниваем две позиции по количеству своих волшебников и, если их больше в одной из позиций, считаем ее предпочтительной. Если же число своих волшебников в обеих позициях одинаково, далее сравниваем расположение волшебников в обеих позициях и считаем предпочтительной ту, где меньше ходов до создания рабочей пары (0 ходов означает наличие рабочей пары). Транзитивный порядок всех возможных позиций (без учета симметричных) в одном ряду из трех клеток таков:

$$OOO \prec OXO \prec XOO \prec XXO \prec XOX \prec XXX\,,$$

где X означает доброго волшебника, O – злого.

Поясним это упорядочивание.

$XXX \succ XOX$, т.к. 3 добрых в ряду лучше, чем 2.

$XOX \succ XXO$, т.к. XOX содержит рабочую пару добрых, способных превращать злых, – в отличие от XXO, где такой пары нет.

$XXO \succ XOO$, т.к. XXO содержит двух добрых (а не одного, как XOO).

$XOO \succ OXO$, т.к XOO нужен лишь один ход (обмен) чтобы превратиться в XOX, содержащую рабочую пару. OXO для этого нужно 2 хода.

$OXO \succ OOO$, т.к. 1 добрый в ряду лучше, чем ни одного.

Итоговые оценки для обоих рядов просто суммируются, и выбирается обмен, ведущий к позиции с большей суммарной оценкой. Транзитивность работает и здесь (суммы транзитивных оценок тоже упорядочиваются транзитивно).

Таким образом, существуют два типа детерминированных стратегических позиционных игр с нулевой суммой, дифференцирован-

ные по возможности-невозможности в них нетранзитивных по выигрышности позиций сторон.

1. Игры без нетранзитивных по выигрышности позиций сторон. Все позиции сторон могут быть упорядочены транзитивно, и для каждой из них может быть вычислена теоретическая совершенная оценка (пример – игра «Волшебники»). Возможен абсолютный рейтинг позиций каждой их сторон, не учитывающий в явном виде позицию другой стороны.

2. Игры (шахматы, шашки) с возможными позициями сторон, нетранзитивными по выигрышности. Здесь позиции каждой из сторон на всем их множестве не могут иметь совершенных оценок и абсолютного рейтинга, не учитывающего в явном виде позицию другой стороны. В шахматных алгоритмах такой учет совершенно необходим, что является одним из азов для разработчиков. Мы использовали для теоретического обоснования этой практики положение о нетранзитивности по выигрышности позиций сторон. Вероятно, возможны и другие теоретические обоснования, но наше представляется самым коротким на настоящий момент.

6. Невозможность фиксированных оценок позиций сторон в шахматах: подробности

Как показано выше, у позиций сторон в шахматах не может быть совершенных оценок – фиксированных чисел, обозначающих положение в каком-либо абсолютном рейтинге выигрышности, не учитывающем в явном виде позицию другой стороны. Развернем более подробное обсуждение этого факта.

Совершенные численные оценки выигрышности позиций сторон в случае нетранзитивного закольцовывания этих позиций должны быть равны друг другу – каждая позиция предпочтительней другой по выигрышности и менее предпочтительна, чем третья.

Совершенные оценки должны описывать нетранзитивный цикл выигрышности: $N_A > N_B$, $N_B > N_C$, $N_C > N_D$, $N_D > N_A$, где N_A, N_B, N_C и N_D – совершенные оценки выигрышности позиций A, B, C, D, соответственно.

Отсюда $N_A > N_C > N_A$ и $N_B > N_D > N_B$.

Такие совершенные оценки выигрышности позиций невозможны. Это противоречило бы смыслу понятия «совершенная оценка» (фиксированное число, обозначающее степень предпочтительности позиций в ряду остальных). Но цикл $N_A > N_C > N_A$, где N_A и N_C – фиксированные числа, невозможен.

Совершенные оценки как фиксированные числа могут образовывать транзитивный порядок, но не кольцо. Цикл различающихся фиксированных чисел – это нонсенс, на числовой прямой выполняется свойство транзитивности, как учат еще в школе.

Итак, существование нетранзитивных по предпочтительности позиций сторон означает, что не может быть фиксированного числа для оценки выигрышности любой позиции стороны на всем множестве позиций сторон.

Приведем следующий модельный наглядный пример.

К опытному шахматисту приходит талантливый в шахматах и математике ребенок и говорит: «Я разработал формулу, которая позволяет оценивать по отдельности позицию белых и позицию черных и приписывать им однозначную, фиксированную количественную оценку, а затем сравнивать эти позиции — уже просто как числа, какое больше: у белых или у черных». Вместо ответа типа: «Вот сыграешь много партий и на опыте поймешь, что это не так; такая формула, я уверен, невозможна» теперь есть возможность ответа другого типа: «Есть такая штука, как нетранзивные шахматные позиции, и они означают, что позиция белых и позиция черных не могут иметь фиксированной количественной оценки без учета друг друга. В круге побед и поражений, где каждая позиция бьет соседку с одной стороны и бьется соседкой с другой, какие могут быть фиксированные численные оценки? Дать тебе готовый пример таких позиций или хочешь придумать свой пример сам?»

7. Невозможность фиксированных евклидовых расстояний в пространстве отношений выигрышности шахматных позиций сторон

П. Фишбёрн, будущий лауреат Теоретической премии фон Неймана, писал в 1991 г., что движение в направлении исследования нетранзитивности аналогично движению от евклидовой геометрии к неевклидовой с отказом от упрощенной ньютонианской модели мира как абсолютной [27, p. 117].

В развитие этой метафоры мы можем показать, что в шахматах позиции сторон на всем их множестве не могут быть описаны фиксированными евклидовыми расстояниями в пространстве отношений выигрышности, поскольку часть позиций образует нетранзитивные циклы.

С одной стороны, численные оценки выигрышности позиций сторон в случае нетранзитивного закольцовывания этих позиций равны друг другу (каждая бьет одну и бьется другой, число побед и поражений у всех одинаковое, нет позиции, более выигрышной в целом, чем другие). Это значит, что евклидово расстояние между позициями сторон в пространстве отношений выигрышности (предпочтительности) равно 0.

С другой стороны, если позиция A предпочтительнее B по выигрышности, то оценка A должна быть больше оценки B. Значит, евклидово расстояние между A и B в пространстве отношений выигрышности (предпочтительности) не равно 0. Аналогично обстоит дело с позициями B и C – и так далее до последней позиции, оценка которой должна быть больше оценки первой. Итак, внутри каждой рассмотренной пары позиций есть ненулевое расстояние в пространстве отношений выигрышности между позициями.

Приходим к заключению, что расчет фиксированных евклидовых расстояний в пространстве отношений выигрышности позиций для нетранзитивных по выигрышности позиций сторон невозможен. Он приводит к противоречию: расстояние между A и B и равно 0, и не равно 0 одновременно.

Это же верно и для стохастических объектов типа нетранзитивных костей, лотерей и пр., что раньше не эксплицировалось. Дело ограничивалось очень важной констатацией тождества этих объектов по выигрышности, зависящей от выбора другой стороны. Но отсюда не делался переход к противоречиям, возникающим при оценке расстояний между нетранзитивными объектами в пространстве отношений выигрышности.

8. Дополнение к теореме Цермело-фон Неймана

«Теорема Цермело–Неймана утверждает, что все позиционные игры с полной информацией имеют решение в чистых стратегиях» [8], см. также [25].

Со своей стороны, добавим сюда два утверждения.

Для некоторых из этих позиционных игр возможно решение в чистых стратегиях на основе допущения о транзитивности выигрышности позиций сторон на всем множестве позиций (как в «Волшебниках»).

Для некоторых из позиционных игр решение на основе этого допущения невозможно из-за существования в них нетранзитивных по выигрышности позиций сторон (в шахматах, шашках и, возможно, других позиционных играх, начиная с определенного уровня сложности; его предстоит оценить).

Транзитивность выигрышности позиций сторон в первом значении (позиция как целое, объединяющее позиции сторон) сохраняется в этих играх (это следствие теоремы Цермело – фон Неймана, состоящее в том, у одной из сторон в стратегических позиционных играх с полной информацией всегда есть ход, ведущий к выигрышу или, по крайней мере, ничьей).

9. Учет транзитивности-нетранзитивности позиций в алгоритмах

В 2007 г. путем компьютерных расчетов была решена проблема совершенной стратегии в шашках [34]. Игра оказалась ничейной. Хотя в указанной статье про это не говорится (статья популярная), но судя по более раннему тексту [32], при расчетах использовалось транзитивное замыканий позиций как целостностей.

Современные компьютерные программы игр в шахматы, шашки, го и др. работают, вероятно, не нуждаясь в положении о транзитивности позиций сторон в легальных случаях (хотя она там имеет место). В части из них учитывается транзитивность позиций как целого, объединяющего позиции сторон. На эффективность программ факт нетранзитивности позиций сторон не влияет – реальные алгоритмы работают с позициями, которые могут возникнуть в игре. Разработчикам здесь не страшны «монстры» нетранзитивных позиций, а кому-то могут быть и интересны («надо же, что бывает, но к моей работе это отношения не имеет»). Ведь нетранзитивные позиции сторон – это «патологические», неортодоксальные конструкционные примеры, созданные для работы с теоретическим положением о нетранзитивности позиций на всем их множестве и невозможности их совершенных оценок.

При этом здесь может быть два варианта, и какой их них вероятнее, мы не беремся судить.

1. Какие-то из этих современных программ (в пределе – все) действительно работают на других принципах, никак не связанных с базовыми допущениями транзитивности легальных позиций сторон.

2. Какие-то из этих программ (в пределе – все) содержат допущения транзитивности легальных позиций сторон в неявном виде. Тогда это допущение с некоторой вероятностью можно извлечь, эксплицировать из рассмотрения других допущений транзитивности чего-то еще в этих программах.

Возможны ли подходы, в которых нетранзитивность выигрышности позиций сторон и теоретическая невозможность их совершенных оценок и абсолютного рейтинга для всех позиций, – явно сформулированное положение? В развитие метафор И. Лакатоса и Н. Талеба, можно предполагать, что для этих подходов нетранзитивные позиции сторон – не «монстры» и «черные лебеди», а «лебеди белые», превратившиеся из «гадких утят» (не таких уж, впрочем, гадких – примеры А.Ю. Филатова, Г.Л. Попова и С. Жураховского просто красивы).

В настоящий момент это лишь теоретическая возможность, таких подходов нет.

10. Заключение

Существуют разные типы математических объектов, нетранзитивных по превосходству (доминированию), – в том числе не только стохастические, но и детерминированные. К последним относятся позиции сторон в абстрактных стратегических играх с полной информацией и нулевой суммой – в шахматах и шашках. Для обоснования этого использованы специально разработанные «патологические» примеры, относящиеся к неортодоксальным конструкционным.

Нетранзитивность выигрышности позиций сторон является следствием сложности данных игр. Сложность шахматной и шашечной среды делает возможной эту нетранзитивность – в отличие от сред более простых игр (например, от представленных в статье «Волшебников»). Там возможно транзитивное упорядочивание всех позиций сторон. Возможно построение абсолютного рейтинга предпочтительности позиций каждой стороны, не учитывающего в явном виде позицию другой стороны.

В шахматах же (и в шашках) не может быть совершенных оценок – фиксированных чисел в каком-либо абсолютном рейтинге, не учитывающем в явном виде позицию другой стороны.

Расчет фиксированных евклидовых расстояний в пространстве отношений выигрышности позиций сторон для нетранзитивных позиций невозможен, он должен приводить к противоречию: расстояние между выигрышностью позиций A и B одной стороны ненулевое и нулевое одновременно. То же и у другой стороны.

В дополнение к теореме Цермело-фон Неймана введено положение о возможности или же невозможности построения чистых выигрышных стратегий, основанных на предположении о транзитивности выигрышности позиций сторон, в разных позиционных играх.

Для некоторых из этих игр возможно решение в чистых стратегиях на основе допущения о транзитивности выигрышности позиций сторон на всем множестве позиций (как в игре «Волшебники»).

Для некоторых из позиционных игр решение на основе этого допущения невозможно из-за существования в них нетранзитивных по выигрышности позиций сторон (в шахматах и шашках).

Ставятся вопросы о возможности нетранзитивных по выигрышности позиций сторон в шахматах на досках разных форм и размеров, а также в других позиционных играх, начиная с определенного уровня сложности, который предстоит оценить.

Была ли исходная идея возможности нетранзитивных по выигрышности позиций игроков так называемым «революционизирующим вопросом»? Об этих вопросах в шахматах см. [2, 10].

Поставим планку несколько ниже: полученные результаты могут рассматриваться как еще одно относительно локальное восстание (не революция) против аксиомы транзитивности предпочтений (если предпочтительнее , а предпочтительнее , то предпочтительнее). Она широко используется в теории принятия решений как универсальная, общеприменимая для самых разных областей. На материале позиций сторон в шахматах и шашках мы проблематизировали ее.

Возможно, для кого-то из теоретиков шахматной игры эти результаты, увеличивающие разнообразие известных видов отношений между позициями сторон, окажутся заслуживающими внимания. Как минимум, оснований для их классификации стало больше.

Благодарность. Автор выражает признательность Д. Силвэру, Я.Н. Шитову, О.Н. Ярыгину и анонимному рецензенту статьи за ценные комментарии и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданов И.И. *Нетранзитивные рулетки* // Математическое просвещение. 2010. Сер. 3. Вып. 14. С. 240–255.

2. Васюкова Е.Е. *Эвристики мышления* // Психология когнитивных процессов. 2020. № 9. С. 129–142.

3. Гарднер М. *Крестики-нолики.* М.: Мир, 1988.

4. Гарднер М. *Путешествие во времени.* М.: Мир, 1990.

5. Горбунова А.В., Лебедев А.В. *Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания* // Управление большими системами. 2020. № 85. С. 23–50

6. Ильков Л. *Парадоксы командных соревнований* // Квант. 2009. № 1. С. 44–46.

7. Каспаров Г. *Человек и компьютер. Взгляд в будущее.* М.: Альпина Паблишер, 2018.

8. Колчин В.Ф. *Игр теория* // Большая Российская энциклопедия. https://bigenc.ru/mathematics/text/1999808

9. Лебедев А.В. *Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин* // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 91–103.

10. Левидов М.Ю. *Стейниц, Ласкер.* М.: Russian Chess house, 2008.

11. Поддьяков А.Н. *Нетранзитивность превосходства и ее использование для обмана и тренировки мышления* // Психолого-экономические исследования. 2016. Т. 3. № 4. С. 43-50.

12. Поддьяков А.Н. *Пакет компьютерных игр для изучения и формирования комбинаторного логического мышления детей* // Познание. Общество. Развитие / Ред. и составитель Д.В. Ушаков. М.: Ин-т психологии РАН, 1996. С. 126-135.

13. Поддьяков А.Н. *Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах* // Вопросы психологии. 2019. № 2. С. 3-16.

14. Попов Г.Л. *Нетранзитивность – кладезь для шахматных композиторов.* 2021. http://superproblem.ru/doc/columns/expert/2021/Non-transitivity.pdf

15. Филатов А.Ю. Нетранзитивные позиции в шахматах // Наука и жизнь. 2017. № 7. С. 117-120.

16. Шейнерман Э.*Путеводитель для влюбленных в математику.* М.: Альпина нон-фикшн, 2018.

17. Штейнгауз Г. *Задачи и размышления.* М.: Мир, 1974.

18. Akin E. *Generalized intransitive dice: mimicking an arbitrary tournament* // Journal of dynamics and games. 2019. V 8. № 1. P. 1–20.

19. Atkinson G. *Chess and Machine Intuition.* Exeter: IntellectTM, 1998.

20. Beardon T. *Transitivity.* http://nrich.maths.org/1345.

21. Bednay D., Bozoki S. *Constructions for nontransitive dice sets* // Proceedings of the 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications. Veszprem, Hungary, June 4-7, 2013. P. 15–23.

22. Bozoki S. *Nontransitive dice sets realizing the Paley tournaments for solving Schutte's tournament problem* // Miskolc Mathematical Notes. 2014. V. 15. N 1. P. 39–50.

23. Buhler J., Graham R., Hales A. *Maximally nontransitive dice* // American Mathematical Monthly. 2018. V. 125. N 5. P. 387–399.

24. Conrey B., Gabbard J., Grant K., Liu A., Morrison K. *Intransitive dice* // Mathematics Magazine. 2016. V. 89. N 2. P. 133–143.

25. Csakany B. *A form of the Zermelo-von Neumann theorem under minimal assumptions* // Acta Cybernetica. 2002. V. 15. P. 321–325.

26. *Frequently asked questions - and their answers*. https://www.figg.org/old_figg/www.figg.org/varie/faq.txt

27. Fishburn P.C. *Nontransitive preferences in decision theory* // Journal of risk and uncertainty. 1991. N. 4. P. 113–134.

28. Gardner M. *The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference* // Scientific American. 1970. N 223. P. 110–114.

29. Gardner, M. *On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations* // Scientific American. 1974. N 231. P. 120–125.

30. Grime J. *The bizarre world of nontransitive dice: games for two or more players* // The College Mathematics Journal. 2017. V. 48. N 1. P. 2–9.

31. Hulko A., Whitmeyer M.A. *Game of nontransitive dice* // Mathematics Magazine. 2019. V. 92. N 5. P. 368-373.

32. Lake R., Schaeffer J., Lu P. *Solving large retrograde analysis problems using a network of workstations*. 1993. https://webdocs.cs.ualberta.ca/~jonathan/publications/ai_publications/databases.pdf

33. Peterson C. *The effect of endgame tablebases on modern chess engines*. San Luis Obispo: California Polytechnic State University, 2018.

34. Schaeffer J., Burch N., Bjornsson Y., Kishimoto A., Muller M., Lake R., Luand P., Sutphen S. *Checkers is solved* // Science. 2007. V. 317. N. 5844. P. 1518–1522.

35. *Strogatz S.* H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* Boulder, CO: Westview Press, 2015.

36. Sturtevant N. R. *Challenges and progress on using large lossy endgame databases in Chinese Checkers* // Computer Games. CGW 2015, GIGA 2015 / Cazenave T. et al. (eds). Communications in Computer and Information Science. V. 614. P. 3–15.

37. Trybula S. *On the paradox of three random variables* // Applicationes Mathematicae. 1961. V. 5. N. 4. P. 321–332.

38. Unzueta D. *AlphaGo: How AI mastered the game of Go.* https://towardsdatascience.com/alphago-how-ai-mastered-the-game-of-go-b1355937c98d

39. Weisstein E.W. *Pathological* // MathWorld – A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Pathological.html.

40. West L.J., Hankin R*Exact tests for two-way contingency tables with structural zeros* // Journal of statistical software. 2008. Vol. 28 (11). P. 1–19.

INTRANSITIVELY WINNING CHESS PLAYERS' POSITIONS

Alexander N. Poddiakov, HSE University, Cand.Sc., prof. (apoddiakov@gmail.com).

Abstract: Chess players' positions in intransitive (rock-paper-scissors) relations are considered. Namely, position A of White is preferable (it should be chosen if choice is possible) to position B of Black, position B of Black is preferable to position C of White, position C of White is preferable to position D of Black, but position D of Black is preferable to position A of White. Intransitivity of winningness of chess players' positions is considered to be a consequence of complexity of the chess environment – in contrast with simpler games with transitive positions only. Perfect values of chess players' positions are impossible. Euclidian metric cannot be used to describe chess players' positions in space of winningness relations. The Zermelo-von Neumann theorem is complemented by statements about possibility *vs.* impossibility of building pure winning strategies based on the assumption of transitivity of players' positions. Questions about the possibility of intransitive players' positions in other positional games are raised.

Keywords: game theory, positional games, chess, checkers, intransitivity, intransitively winning chess players' positions, perfect values, Euclidian metric, Zermelo-von Neumann theorem.