Математические заметки

Том 111 выпуск 6 июнь 2022

УДК 517.9+513.8

Многомерные диффеоморфизмы Морса–Смейла с доминантным седлом

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В статье определяется класс диффеоморфизмов Морса–Смейла с доминантным седлом, и приводятся необходимые и достаточные условия сопряженности таких диффеоморфизмов. Показывается, что полярные диффеоморфизмы Морса–Смейла n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 4$, неблуждающее множество которых состоит из четырех точек, имеют доминантные седла. В качестве следствия получаем необходимые и достаточные условия сопряженности таких диффеоморфизмов. Мы приводим примеры полярных диффеоморфизмов $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ Морса–Смейла с указанным неблуждающим множеством.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса–Смейла, сопряженность, доминантное седло.

DOI: https://doi.org/???

Введение. В 1937 г. Андронов и Понтрягин [1] ввели одно из основных понятий современной теории динамических систем – понятие *грубой динамической системы* с непрерывным временем (потока) на компактной плоской области, диффеоморфной кругу и ограниченной циклом без контакта. Это понятие естественно обобщается на потоки и динамические системы с дискретным временем (диффеоморфизмы) на любые замкнутые многообразия. В 1959 г. Пейшото [2] обобщил результаты Андронова и Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом Пейшото модернизировал понятие грубости, заменив его более гибким понятием структурной устойчивости (из грубости системы следует ее структурная устойчивость, но авторам неизвестны примеры негрубых структурно устойчивых систем). Под влиянием работ [1] и [2] в 1960 г. Стив Смейл [3] ввел класс C^1-гладких динамических систем, по существу перечислив основные свойства грубых (структурно устойчивых) систем, полученных в [1], [2], при этом аналогом условия Андронова–Понтрягина–Пейшото об отсутствии сепаратрисных связей стало в многомерном случае условие трансверсальности пересечений инвариантных многообразий седловых периодических точек. С современной точки зрения системы Морса–Смейла на замкнутых многообразиях суть в точности структурно устойчивые динамические системы с нулевой топологической энтропией. С этой точки зрения, они являются простейшими структурно устойчивыми системами (в 60-х годах

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

прошлого века Аносов [2], [3] и Стив Смейл [6], [7] доказали существование структурно устойчивых динамических систем с положительной топологической энтропией). Основные определения теории динамических систем см. в книгах [8]–[10]. Основные определения и результаты, связанные с системами Морса–Смейла, см. в книге [11] и обзорах [12], [13].

Одной из основных задач качественной (иногда говорят, геометрической) теории динамических систем является задача топологической классификации в пределах выделенного класса динамических систем. Первый шаг классификации состоит в нахождении условий сопряженности. Напомним, что диффеоморфизмы f_1, $f_2\colon M^n \to M^n$ n-мерного многообразия M^n называются *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ такой, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

В настоящей работе определяется класс диффеоморфизмов Морса–Смейла с доминантным седлом и приводятся необходимые и достаточные условия сопряженности таких диффеоморфизмов. Мы показываем, что полярные диффеоморфизмы Морса–Смейла n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$, неблуждающее множество которых состоит из четырех точек (и, следовательно, содержит два седла), имеют доминантные седла. В качестве следствия получаем необходимые и достаточные условия сопряженности этих диффеоморфизмов. Мы приводим примеры полярных диффеоморфизмов $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ Морса–Смейла с указанным неблуждающим множеством.

Дадим необходимые определения и сформулируем основные результаты. Везде далее M^n означает замкнутое гладкое связное n-мерное многообразие, $n \geqslant 3$. Неблуждающее множество диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$.

Напомним, что $f\colon M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если $NW(f)$ наделено гиперболической структурой, состоит из конечного числа периодических точек и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in NW(f)$. Пусть $O(\sigma_0)$ – орбита седловой периодической точки σ_0. Орбита $O(\sigma_0)$ называется *u-доминантной*, если $W^u(O(\sigma_0)) \cap W^s(O(\sigma)) \neq \varnothing$ для любой другой седловой периодической орбиты $O(\sigma)$. Для простоты изложения мы будем рассматривать диффеоморфизмы Морса–Смейла, у которых все периодические точки являются неподвижными точками (этого можно добиться, перейдя к некоторой итерации диффеоморфизма f). Неподвижная седловая точка называется *седлом*. В этом случае седло σ_0 называется *u-доминантным*, если для любого другого седла σ выполняется условие

$$W^u(\sigma_0) \cap W^s(\sigma) \neq \varnothing.$$

Аналогично определяется s-доминантное седло условием

$$W^s(\sigma_0) \cap W^u(\sigma) \neq \varnothing.$$

В работе [14] было введено понятие локального эквивалентного вложения инвариантных многообразий, что позволило классифицировать потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия. Приведем его определение. Пусть M_1^k, M_2^k – топологически вложенные в M^n k-мерные подмногообразия, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Будем говорить, что M_1^k и M_2^k *локально эквивалентно вложены*, если существуют окрестности $U(\operatorname{clos} M_1^k)$, $U(\operatorname{clos} M_2^k)$ топологических замыканий $\operatorname{clos} M_1^k$, $\operatorname{clos} M_2^k$ подмногообразий M_1^k, M_2^k соответственно и гомеоморфизм $h\colon U(\operatorname{clos} M_1^k) \to U(\operatorname{clos} M_2^k)$ такой, что $h(M_1^k) = M_2^k$. Ясно, что для наличия сопряженности диффеоморфизмов необходимо добавить информацию о динамике в соответствующих окрестностях. Введем ключевое понятие.

Пусть $f_1, f_2\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизмы многообразия M^n, и пусть N_1, N_2 – их инвариантные множества соответственно, т.е. $f_i(N_i) = N_i$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что N_1, N_2 *имеют одинаковое динамическое вложение*, если существуют открытые окрестности δ_1, δ_2 множеств $\operatorname{clos} N_1$, $\operatorname{clos} N_2$ соответственно, и топологическое вложение (т.е. гомеоморфизм на свой образ) $h_0\colon \delta_1 \cup f_1(\delta_1) \to M^n$ такие, что

$$h_0(\delta_1) = \delta_2, \qquad h_0(\operatorname{clos} N_1) = \operatorname{clos} N_2, \qquad h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $f_i\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f_i)$ которого состоит из неподвижных точек, и пусть σ_i – его $u(s)$-доминантное седло σ_i, $i = 1, 2$, $n \geqslant 4$. Тогда диффеоморфизмы f_1, f_2 сопряжены, если и только если неустойчивые (устойчивые) многообразия $W^{u(s)}(\sigma_1)$, $W^{u(s)}(\sigma_2)$ имеют одинаковое динамическое вложение.*

Следуя [15], обозначим через $MS(M^n; a, b, c)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла замкнутого гладкого n-мерного многообразия M^n такое, что неблуждающее множество $NW(f)$ любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n; a, b, c)$ состоит из a стоковых неподвижных точек (стоков), b источниковых неподвижных точек (источников) и c седловых неподвижных точек (седел). Будем говорить, что гиперболическая точка $p \in M$ диффеоморфизма $f\colon M \to M$ имеет *тип* (μ, ν), если $\mu = \dim W^u(p)$, $\nu = \dim W^s(p)$. *Индексом Морса* $\mu(p)$ этой точки называется размерность ее неустойчивого многообразия, $\mu(p) = \dim W^u(p)$. Следующий результат означает, что множество $MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$ непусто.

Теорема 2. *Для любых $n \geqslant 3$ и $1 \leqslant k \leqslant n-2$ существует полярный диффеоморфизм Морса–Смейла $f \in MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$ с четырьмя неподвижными точками: источником, стоком и двумя седлами, имеющими типы $(n-k, k)$ и $(n-k-1, k+1)$.*

Следующий результат показывает, что любой диффеоморфизм из $MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$ имеет доминантное седло.

Теорема 3. *Пусть $f \in MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$ – полярный диффеоморфизм Морса–Смейла на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 4$, с неблуждающим множеством, состоящим из четырех точек: источником α, стоком ω и двумя седлами σ_1, σ_2. Тогда индексы Морса седел σ_1, σ_2 различны. Более того, неустойчивое многообразие седла с большим индексом Морса пересекается с устойчивым многообразием другого седла.*

Отметим, что для $n = 3$ теорема 3 доказана в [16]. Отметим также, что устойчивое многообразие седла с большим индексом Морса не пересекается с неустойчивым многообразием другого седла (с меньшим индексом Морса). Из теорем 1, 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $f_i \in MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f_i)$ которого состоит источника, стока и двух седел $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$, $i = 1, 2$, $n \geqslant 4$. Предположим, что индекс Морса седла $\sigma_1^{(i)}$ больше индекса Морса седла $\sigma_2^{(i)}$. Тогда диффеоморфизмы f_1, f_2 сопряжены, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

- *неустойчивые многообразия седел* $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_1^{(2)}$ *имеют одинаковое динамическое вложение*;
- *устойчивые многообразия седел* $\sigma_2^{(1)}$, $\sigma_2^{(2)}$ *имеют одинаковое динамическое вложение*.

1. Доказательство основных теорем

В этом разделе доказываются основные результаты статьи. В процессе доказательства мы доказываем вспомогательные утверждения и приводим необходимые результаты из других работ.

1.1. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из семейства истоков $\alpha(f)$, семейства стоков $\omega(f)$ и семейства седел $\sigma(f)$. Обозначим через $A(f)$ объединение стоков и неустойчивых многообразий седел, а через $R(f)$ — объединение источников и устойчивых многообразий седел:

$$A(f) = \omega(f) \bigcup_{s_i \in \sigma(f)} W^u(s_i), \qquad R(f) = \alpha(f) \bigcup_{s_i \in \sigma(f)} W^s(s_i).$$

Ключевым результатом, на котором основывается доказательство теоремы 1, является следующее утверждение, доказанное в [17] (в [17] доказано более сильное утверждение, но мы приводим его ослабленный вариант для диффеоморфизмов Морса–Смейла)

Предложение 1. *Диффеоморфизмы* $f_1, f_2\colon M^n \to M^n$ *Морса–Смейла замкнутого* n*-мерного многообразия* M^n, $n \geqslant 2$, *сопряжены, если и только если выполняется одно из следующих условий*:
- *множества* $A(f_1)$, $A(f_2)$ *имеют одинаковое динамическое вложение*;
- *множества* $R(f_1)$, $R(f_2)$ *имеют одинаковое динамическое вложение*.

Пусть $f_i\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f_i)$ которого состоит из неподвижных точек. Предположим для определенности, что f_i имеет u-доминантное седло σ_i, $i = 1, 2$. Пусть σ – произвольное седло диффеоморфизма f_i, отличное от σ_i. Из условия u-доминантности седла σ_i следует, что $W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma) \neq \varnothing$. Тогда в силу [3] $\operatorname{clos} W^u(\sigma) \subset \operatorname{clos} W^u(\sigma_i)$. Из предложения 2.1 [18] вытекает, что любой сток принадлежит топологическому замыканию неустойчивого многообразия хотя бы одного седла диффеоморфизма f_i. Следовательно, $A(f_i) = \operatorname{clos} W^u(\sigma_i)$. Поэтому одинаковая динамическая вложимость неустойчивых многообразий $W^u(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ влечет одинаковую динамическую вложимость множеств $A(f_1)$, $A(f_2)$. Отсюда и предложения 1 вытекает сопряженность диффеоморфизмов f_1, f_2. Теорема доказана.

1.2. Доказательство теоремы 2. Мы построим полярный поток Морса–Смейла. Для доказательства теоремы 2 этого будет достаточно, поскольку сдвиг на единицу времени вдоль траекторий такого потока дает диффеоморфизм Морса–Смейла с аналогичными свойствами. Сперва мы представим n-мерную сферу в виде специального объединения и затем, используя это представление, построим требуемый поток. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами $(x_1,\dots,x_{n+1})$ n-мерную сферу $\mathbb{S}^n$, заданную уравнением

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2+x_{n+1}^2=1, \qquad n\geqslant 3.$$

Зафиксируем $1\leqslant k\leqslant n-1$ и представим $\mathbb{R}^{n+1}$ в виде

$$\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^{k+1}\oplus\mathbb{R}^{n-k},$$

где $\mathbb{R}^{k+1}$ определяется равенствами $x_{k+2}=0,\ \dots,\ x_{n+1}=0$, а $\mathbb{R}^{n-k}$ – равенствами $x_1=0,\dots,x_{k+1}=0$. Нетрудно видеть, что пересечение $\mathbb{S}^n\cap\mathbb{R}^{k+1}$ является k-мерной сферой $\mathbb{S}_1^k\subset\mathbb{S}^n$, задаваемой равенствами

$$\mathbb{S}_1^k: \qquad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1, \quad x_{k+2}=0, \quad \dots, \quad x_{n+1}=0.$$

Эта сфера ограничивает в $\mathbb{R}^{k+1}$ замкнутый $(k+1)$-мерный диск, который обозначим через $\mathbb{D}_1^{k+1}$. Полностью аналогично, пересечение $\mathbb{S}^n\cap\mathbb{R}^{n-k}$ является $(n-k-1)$-мерной сферой $\mathbb{S}_2^{n-k-1}\subset\mathbb{S}^n$, задаваемой равенствами

$$\mathbb{S}_2^{n-k-1}: \qquad x_1=0, \quad \dots, \quad x_{k+1}=0, \quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2=1.$$

Сфера $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ ограничивает в $\mathbb{R}^{n-k}$ замкнутый $(n-k)$-мерный диск, который мы обозначим через $\mathbb{D}_2^{n-k}$.

Рассмотрим n-мерное многообразие M_1^n, координаты точек которого удовлетворяют условиям

$$M_1^n: \qquad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1, \quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2\leqslant 1.$$

Нетрудно видеть, что $M_1^n=\mathbb{S}_1^k\times\mathbb{D}_2^{n-k}$. Положим

$$M_2^n: \qquad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2\leqslant 1, \quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2=1.$$

Тогда $M_2^n=\mathbb{D}_1^{k+1}\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$. Многообразия M_1^n, M_2^n имеют общую границу $\partial M_1^n=\partial M_2^n$, которая равна их пересечению

$$M_1^n\cap M_2^n=\partial M_1^n=\partial M_2^n=\mathbb{S}_1^k\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}: \quad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1, \quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2=1.$$

Следующее утверждение показывает, что n-мерную сферу можно представить в виде склейки вдоль границ двух специальных n-мерных многообразий.

Предложение 2. *Объединение $M_1^n\cup M_2^n$ гомеоморфно n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$.*

Доказательство. Для произвольной точки $p_0=(x_{1,0},\dots,x_{n+1,0})\in\mathbb{S}^n$ обозначим через l_0 луч, выходящий из начала координат $(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и проходящий через p_0. Покажем, что l_0 пересекает $M_1^n\cup M_2^n$ в одной точке. Действительно, при увеличении параметра $t\in[1;\infty)$ точка $p_t=(\sqrt{t}x_1,\dots,\sqrt{t}x_{n+1})$, начиная с точки p_0, движется по l_0, уходя в бесконечность. При этом выражение

$$\begin{aligned} w_t&=(tx_{1,0})^2+\dots+(tx_{n+1,0})^2=t^2(x_1^2+\dots+x_{n+1}^2)\\ &=(tx_{1,0})^2+\dots+(tx_{k+1,0})^2+(tx_{k+2,0})^2+\dots+(tx_{n+1,0})^2, \end{aligned}$$

начиная с 1, неограниченно увеличивается. Тогда найдется такое $t_0\in[1;\infty)$, что $w_t>1$ и выполняется одна и только одна из следующих возможностей:

a) $(tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 < 1$, $(tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 = 1$;
b) $(tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 = 1$, $(tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 < 1$;
c) $(tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 = 1$, $(tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 = 1$.

В случае a) пересечение $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$ состоит из одной точки p_{t_0}, принадлежащей внутренности многообразия M_2^n. В случае b) пересечение $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$ состоит из одной точки p_{t_0}, принадлежащей внутренности многообразия M_1^n. Наконец, в случае c) пересечение $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$ состоит из одной точки p_{t_0}, принадлежащей пересечению границ многообразий M_1^n, M_2^n. Таким образом, соответствие $p_0 \longrightarrow p_{t_0}$ определяет отображение $\vartheta\colon \mathbb{S}^n \to M_1^n \cup M_2^n$. Аналогичные соображения показывают, что существует обратное отображение $\vartheta^{-1}\colon M_1^n \cup M_2^n \to \mathbb{S}^n$. Ясно, что $M_1^n \cup M_2^n$ является кусочно-линейным многообразием. Отсюда и того, что $\vartheta\colon \mathbb{S}^n \to M_1^n \cup M_2^n$ является проекцией вдоль лучей, вытекает, что ϑ является гомеоморфизмом. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Имеют место следующие разложения n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$:*

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^n &= (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}) \cup (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}) = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{D}^{n-2}) \cup (\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^{n-3}) = \cdots \\ &= (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}) \cup (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}) = \dots = (\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2) \cup (\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).\end{aligned}$$

Отметим, что в работе [19] доказано, что склейка $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{D}^2) \cup_h (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3)$ многообразий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{D}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3$ с помощью любого диффеоморфизма $h\colon \partial(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{D}^2) \to \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3)$ является 4-мерной сферой $\mathbb{S}^4$. Наше представление $\mathbb{S}^n$ для $n = 4$ может рассматриваться как конкретная реализация результата работы [19] (на самом деле в [19] доказан более общий результат).

Используя теперь представление сферы $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}) \cup (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})$, которое имеет место согласно предложению 2, построим на $\mathbb{S}^n$ кусочно гладкое векторное поле.

Сначала на k-мерной сфере $\mathbb{S}_1^k = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$ зададим гладкое векторное поле $\vec{v}_{1,k}$, которое индуцирует на $\mathbb{S}_1^k$ поток с двумя гиперболическими состояниями равновесия: источником N_1 в точке $(1, 0, \dots, 0)$ и стоком s_1 в точке $(-1, 0, \dots, 0)$. Такой поток иногда называют *потоком источник-сток* или *север-юг*. Обозначим через $A_1(x_1, \dots, x_{k+1})$, $\dots$, $A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})$ координаты поля $\vec{v}_{1,k}$. Другими словами,

$$\vec{v}_{1,k}(x_1, \dots, x_{k+1}) = (A_1(x_1, \dots, x_{k+1}), \dots, A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})).$$

Рассмотрим на $M_1^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{D}_2^{n-k}$ векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{V}}_1 = (A_1(x_1, \dots, x_{k+1}), \dots, A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}), x_{k+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Поскольку на диске $\mathbb{D}_2^{n-k}$ векторное поле

$$\vec{v}_{k+1,n+1} = (0, \dots, 0, x_{k+2}, \dots, x_{n+1})$$

имеет в начале координат гиперболический источник, то векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ имеет гиперболический источник α в точке $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и гиперболическое седло σ_1 в точке $(-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что геометрически $\alpha = N_1$ и $\sigma_1 = s_1$. Отметим, что седло σ_1 имеет тип $(n-k, k)$. Действительно, в силу задания векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ имеет отталкивающее инвариантное множество $\mathbb{S}_1^k$, представляющее собой объединение источника α и устойчивого многообразия $W^s(\sigma_1)$ седла σ_1. В силу того, что $\mathbb{S}_1^k$ есть репеллер поля $\vec{\boldsymbol{V}}_1$, неустойчивое многообразие седла σ_1 содержит образ сдвига диска $\mathbb{D}_2^{n-k}$ в точку $\sigma_1=(-1,0\dots,0)$. Таким образом,

$$W^s(\sigma_1)=\mathbb{S}_1^k\setminus\{\alpha\}:\qquad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1,\quad x_{k+2}=0,\quad \dots,\quad x_{n+1}=0,\quad x_1\neq 1,$$

есть часть

$$W^u(\sigma_1):\qquad x_1=-1,\quad x_2=0,\quad \dots,\quad x_{k+1}=0,\quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2\leqslant 1.$$

Так как векторное поле $\vec{v}_{k+1,n+1}$ на границе $\partial\mathbb{D}_2^{n-k}$ множества $\mathbb{D}_2^{n-k}$ направлено наружу и трансверсально границе, то векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ на границе $\partial M_1^n=\mathbb{S}_1^k\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ множества $M_1^n=\mathbb{S}_1^k\times\mathbb{D}_2^{n-k}$ также *направлено наружу* многообразия M_1^n и трансверсально границе.

Теперь построим аналогичным образом векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ на $M_2^n=\mathbb{D}_1^{k+1}\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ с той лишь разницей, что инвариантное множество $\{0\}\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}\subset M_2^n$ будет притягивающим. На $(n-k-1)$-мерной сфере $\mathbb{S}_2^{n-k-1}\subset\mathbb{S}^n$ зададим гладкое векторное поле $\vec{w}_{2,k+1}$, которое индуцирует на $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ поток с двумя гиперболическими состояниями равновесия: источником s_2 в точке $(0,\dots,0,1)$ и стоком l_2 в точке $(0,\dots,0,-1)$. Обозначим через $B_{k+2}(x_{k+2},\dots,x_{n+1})$, $\dots$, $B_{n+1}(x_{k+2},\dots,x_{n+1})$ координаты поля $\vec{w}_{2,k+1}$. Другими словами,

$$\vec{w}_{2,k+1}(x_{k+2},\dots,x_{n+1})=(B_{k+2}(x_{k+2},\dots,x_{n+1}),\dots,B_{n+1}(x_{k+2},\dots,x_{n+1})).$$

Рассмотрим на $M_2^n=\mathbb{D}_1^{k+1}\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{V}}_2=(-x_1,\dots,-x_{k+1},B_{k+2}(x_{k+2},\dots,x_{n+1}),\dots,B_{n+1}(x_{k+2},\dots,x_{n+1})).$$

Поскольку на диске $\mathbb{D}_1^{k+1}$ векторное поле

$$\vec{v}_{k+1,n+1}=(-x_1,\dots,-x_{k+1},0,\dots,0)$$

имеет в начале координат гиперболический сток, то векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ имеет гиперболическое седло σ_2 в точке $(0,\dots,0,1)$ и гиперболический сток ω в точке $(0,\dots,-1)$. Ясно, что геометрически $\sigma_2=s_2$ и $\omega=l_2$. Отметим, что седло σ_2 имеет тип $(n-k-1,k+1)$. Действительно, в силу задания векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ притягивающее инвариантное множество $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$, представляющее собой объединение стока ω и неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$ седла σ_2. В силу того, что $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ есть аттрактор поля $\vec{\boldsymbol{V}}_2$, устойчивое многообразие седла σ_2 содержит образ сдвига диска $\mathbb{D}_1^{k+1}$ в точку $\sigma_2=(0\dots,0,1)$. Таким образом,

$$W^u(\sigma_2)=\mathbb{S}_2^{n-k-1}\setminus\{\omega\}:\qquad x_1=0,\quad \dots,\quad x_{k+1}=0,\quad x_{k+2}^2+\dots+x_{n+1}^2=1$$

есть часть

$$W^s(\sigma_2):\qquad x_1^2+\dots+x_{k+1}^2\leqslant 1,\quad x_{k+2}=0,\quad \dots,\quad x_n=0, x_{n+1}=1.$$

Так как векторное поле $\vec{v}_{k+1,n+1}$ на границе $\partial\mathbb{D}_1^{k+1}$ множества $\mathbb{D}_1^{k+1}$ направлено внутрь и трансверсально границе, то векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ на границе $\partial M_2^n=\mathbb{S}_1^k\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ множества $M_2^n=\mathbb{D}_1^{k+1}\times\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ также *направлено внутрь* многообразия M_2^n и трансверсально границе.

Поскольку векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ на общей границе $\partial M_1^n = \partial M_2^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$ направлено трансверсально границе наружу M_1^n (т.е. из M_1^n внутрь M_2^n), а векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ на этой общей границе направлено трансверсально границе из M_1^n внутрь M_2^n, то из предложения 2 следует, что векторные поля $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ образуют кусочно гладкое векторное поле $\vec{\boldsymbol{V}}$ на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$. Нетрудно проверить, что интегральные кривые поля $\vec{\boldsymbol{V}}$ обладают свойством единственности и существования (т.е. проходят через каждую точку сферы $\mathbb{S}^n$). Векторные поля такого типа иногда называют *сшитыми полями* (соответственно, говорят о *сшитых потоках*).

Таким образом, мы построили полярное векторное поле с четырьмя гиперболическими состояниями равновесия: источником α в точке $(1,0,\dots,0)$, стоком ω в точке $(0,\dots,0,-1)$ и седлами σ_1, σ_2 в точках $(-1,0,\dots,0)$, $(0,\dots,0,1)$ соответственно. Отметим, что седла σ_1 и σ_2 имеют разный топологический индекс

$$\operatorname{ind}(\sigma_1) = (-1)^{n-k}, \qquad \operatorname{ind}(\sigma_2) = (-1)^{n-k-1},$$

поскольку числа $n-k$, $n-k-1$ разной четности (нечетности). Нетрудно видеть, что инвариантные многообразия $W^s(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ не пересекаются. Непосредственно проверяется, что части $W^u(\sigma_1) \cap M_1^n$, $W^s(\sigma_2) \cap M_2^n$ инвариантных многообразий $W^u(\sigma_1)$, $W^s(\sigma_2)$, лежащие в M_1^n и M_2^n соответственно, пересекаются в одной точке $(-1,0,\dots,0,1)$. Поэтому пересечение $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$ непусто и состоит из интегральной кривой векторного поля $\vec{\boldsymbol{V}}$, проходящей через точку $(-1,0,\dots,0,1)$.

Теперь можно взять трубчатую окрестность общей границы $\mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$ с трансверсальными полю $\vec{\boldsymbol{V}}$ граничными компонентами и сгладить $\vec{\boldsymbol{V}}$ в трубчатой окрестности, сохранив $\vec{\boldsymbol{V}}$ вне этой окрестности. Тогда мы получим гладкое полярное векторное поле Морса–Смейла с четырьмя гиперболическими состояниями равновесия на сфере $\mathbb{S}^n$. Это построение завершает доказательство теоремы 2.

1.3. Доказательство теоремы 3. Для удобства читателя мы разобьем доказательство теоремы на ряд утверждений, из которых вытекает требуемый результат. Напомним некоторые определения и факты. Пусть $f\colon M \to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M и $p \in M$ – неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма f. *Индекс Кронекера–Пуанкаре* точки p есть число

$$\operatorname{Ind}_p(f) = (-1)^{\dim W^u(p)}\Delta,$$

где Δ равна $+1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет или меняет ориентацию отображение $f|_{W^u(p)}$. Если $\Delta = 1$, то $\operatorname{Ind}_p(f)$ совпадает с *топологическим* индексом. В дальнейшем для простоты мы будем всегда считать, что f и все $f|_{W^u(p)}$, $p \in \operatorname{Fix}(f)$, сохраняют ориентацию.

Обозначим через $\operatorname{tr}(f_{*k})$ след (линейного) отображения $f_{*k}\colon H_k(M,\mathbb{R})$, которое индуцируется диффеоморфизмом f в k-мерной группе гомологий

$$H_k(M,\mathbb{R}) = H_k(M), \qquad 0 \leqslant k \leqslant \dim M.$$

Если множество $\operatorname{Fix}(f)$ неподвижных точек диффеоморфизма f состоит из гиперболических точек, то для такого диффеоморфизма имеет место следующая формула Лефшеца:

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \operatorname{tr}(f_{*k}) = \sum_{p\in \operatorname{Fix}(f)} \operatorname{Ind}_p(f).$$

Поскольку для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$ имеем $H_0(\mathbb{S}^n) = H_n(\mathbb{S}^n) = 1$, $H_k(\mathbb{S}^n) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то формула Лефшеца для диффеоморфизма Морса–Смейла сферы $\mathbb{S}^n$ принимает следующий вид:

$$1 + (-1)^n = \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f)} \mathrm{Ind}_p(f). \tag{1.1}$$ {eq1.

Известно [3], что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла компактного многообразия имеет хотя бы один сток и источник. Обозначим через α_f и ω_f выделенные (некоторым образом) источник и сток соответственно диффеоморфизма f. Ясно, что $\mathrm{Ind}_\alpha(f) = (-1)^n$, $\mathrm{Ind}_\omega(f) = 1$. Тогда из (1.1) получаем

$$\sum_{p \in \mathrm{Fix}(f) \setminus (\alpha_f \cup \omega_f)} \mathrm{Ind}_p(f) = 0. \tag{1.2}$$ {eq1.

Обозначим через $MS(\mathbb{S}^n, 4)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками. Через $MS_{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ обозначим подмножество $MS(\mathbb{S}^n; 1, 1, 2)$, состоящее из диффеоморфизмов с одним источником α, одним стоком ω и двумя седлами с индексами Морса μ_i, $i = 1, 2$.

Лемма 1. *Имеет место неравенство* $\mu_1 \neq \mu_2$.

Доказательство. Для диффеоморфизма $f \in MS_{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ формула (1.2) принимает вид

$$(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} = 0. \tag{1.3}$$ {eq1.

Как следствие, получаем, что седла должны иметь разный индекс Морса.

Ниже, для определенности мы будем всегда считать $\mu_1 < \mu_2$. Обозначим седло с индексом Морса μ_i через σ_i.

Известно [7], что многообразие есть объединение попарно непересекающихся устойчивых (неустойчивых) многообразий неблуждающих гиперболических точек. Учитывая, что $W^s(\alpha) = \alpha$ и $W^u(\omega) = \omega$, получаем следующие равенства для диффеоморфизма $f \in MS_{\mu_1,\mu_2}\mathbb{S}^n, 4)$:

$$\mathbb{S}^n = W^s(\sigma_1) \cup W^s(\omega) \cup W^s(\sigma_2) \cup \alpha, \tag{1.4}$$ {eq1.

$$S^n = W^u(\sigma_1) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_2) \cup \omega. \tag{1.5}$$ {eq1.

Лемма 2. *Если* $f \in MS_{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$, *то имеют место следующие включения*:

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega), \qquad W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha).$$

Доказательство. В силу (1.4) множество $W^u(\sigma_1) - \sigma_1$ должно быть вложено в $W^s(\omega) \cup W^s(\sigma_2)$, так как диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет гомоклинических пересечений. Из структурной устойчивости диффеоморфизма Морса–Смейла следует, что $W^u(\sigma_1)$ не может пересекаться с $W^s(\sigma_2)$, поскольку пересечение должно быть трансверсальным, но многообразие $W^u(\sigma_1)$ μ_1-мерное, а многообразие $W^s(\sigma_2)$ – $(n-\mu_2)$-мерное и $\mu_1 + (n - \mu_2) < n$. Отсюда вытекает первое включение

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega).$$

Второе включение доказывается аналогично.

Следствие 3. *Если* $f \in MS_{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{S}^n,4)$, *то* $S_\omega^{\mu_1} \overset{\mathrm{def}}{=} W^u(\sigma_1) \cup \omega$ *есть топологически вложенная* μ_1*-мерная сфера, а* $S_\alpha^{n-\mu_2} \overset{\mathrm{def}}{=} W^s(\sigma_2) \cup \alpha$ *– топологически вложенная* $(n-\mu_2)$*-мерная сфера.*

Лемма 3. *Если* $f \in MS_{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{S}^n,4)$, *то пересечение* $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ *непустое и содержит по крайней мере одно некомпактное гетероклиническое подмногообразие, содержащее в своем замыкании седла* σ_1, σ_2.

Доказательство. В $(n-\mu_1)$-мерном многообразии $W^s(\sigma_1)$ возьмем такую $(n-\mu_1-1)$-мерную гладкую сферу $S_1^{n-\mu_1-1}$, что $f(S_1^{n-\mu_1-1}) \cap S_1^{n-\mu_1-1} = \varnothing$, и $S_1^{n-\mu_1-1}$ ограничивает в $W^s(\sigma_1)$ $(n-\mu_1)$-шар (обозначим его через B) с точкой σ_1 внутри. Так как диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет гомоклинических точек, то сфера $S_\omega^{\mu_1}$ пересекается с B ровно в одной точке σ_1. Поэтому коэффициент зацепления $S_\omega^{\mu_1}$ с $(n-\mu_1-1)$-мерной сферой $S_1^{n-\mu_1-1}$ равен $+1$ или -1 (в зависимости от выбора ориентации) [20; гл. 10]. Для доказательства леммы достаточно показать, что какую бы сферу $S_1^{n-\mu_1-1}$ с указанными выше свойствами ни взять, она должна пересекаться с $W^u(\sigma_2)$.

Предположим, что существует $S_1^{n-\mu_1-1}$ такая, что $S_1^{n-\mu_1-1} \cap W^u(\sigma_2) = \varnothing$. Тогда согласно (1.5) $S_1^{n-\mu_1-1} \subset W^u(\alpha)$. Известно [7], что неустойчивое многообразие $W^u(\alpha)$ источника диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Из $\mu_1 < \mu_2$ вытекает, что $\mu_1 \neq n-1$. Поэтому $(n-\mu_1-1)$-мерная группа гомологий многообразия $W^u(\alpha)$ равна нулю,

$$H_{n-\mu_1-1}(W^u(\alpha)) = 0,$$

так как $n-\mu_1-1 \neq 0$. Следовательно, $S_1^{n-\mu_1-1}$ гомологична топологически вложенной сфере, скажем $S_2^{n-\mu_1-1} \subset W^u(\alpha)$, на которую можно натянуть $(n-\mu_1)$-мерный шар, лежащий в $W^u(\alpha)$. Но поскольку $S_\omega^{\mu_1} = W^u(\sigma_1) \cup \omega$ и $W^u(\alpha)$ не пересекаются, то коэффициент зацепления $S_\omega^{\mu_1}$ с $S_2^{n-\mu_1-1}$ равен нулю. Так как коэффициент зацепления сфер не меняется при переходе к гомологическим сферам [21; с. 152], то коэффициент зацепления $S_\omega^{\mu_1}$ с $S_1^{n-\mu_1-1}$ также равен нулю. Полученное противоречие доказывает лемму.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.

[2] M. M. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. of Math.* (2), **69** (1959), 199–222.

[3] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

[4] Д. В. Аносов, “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707–709.

[5] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, Тр. МИАН СССР, **90**, 1967, 3–210.

[6] S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965, 63–80.

[7] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.

[8] S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[9] V. Grines, E. Zhuzhoma, *Surface Laminations and Chaotic Dynamical Systems*, M.–Izhevsk, 2021.

[10] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[11] В. З. Гринес, О. В.Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Изд-во «РХД», М.–Ижевск, 2011.

[12] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, "Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий", *УМН*, **74**:1 (445) (2019), 41–116.

[13] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Глобальная динамика систем Морса–Смейла", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Труды МИАН, **261**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2008, 115–139.

[14] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия", *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92.

[15] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "О несущих многообразиях многомерных диффеоморфизмов Морса–Смейла с двумя седловыми периодическими точками", *Матем. заметки*, **109**:3 (2021), 361–369.

[16] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях", *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.

[17] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Необходимые и достаточные условия сопряженности регулярных гомеоморфизмов Смейла", *Матем. сб.*, **212**:1 (2021), 63–77.

[18] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, "Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла", *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Труды МИАН, **271**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 111–133.

[19] F. Laudenbah, V. Poénaru, "A note on 4-dimensional handlebodies", *Bull. Soc. Math. France*, **100** (1972), 337–344.

[20] Г. Зейферт, В. Трельфалль, *Топология*, М.–Ижевск, 2001.

[21] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: `zhuzhoma@mail.ru`

Поступило
09.11.2021
Принято к публикации
01.02.2022

В. С. Медведев
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: `medvedev-1942@mail.ru`