

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А.В. Раскина, Н.В. Кононова, П.П. Дьячук,  
С.А. Виденин, Е.А. Чжан, А.А. Корнеева**

**ТЕОРИЯ  
НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ  
ПРОМЫШЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ**

Монография

КРАСНОЯРСК  
2020

УДК 519.714  
ББК 22.172.7  
Р 242

**Авторский коллектив:**

А.В. Раскина, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 1, 2, 3);  
Н.В. Кононова, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 1, 2, 3);  
П.П. Дьячук, канд. пед. наук, доцент кафедры информационных систем института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 1, 3);  
С.А. Виденин, канд. пед. наук, доцент кафедры информационных систем института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 1, 3);  
Е.А. Чжан, канд. техн. наук, доцент базовой кафедры интеллектуальных систем управления института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 2);  
А.А. Корнеева, канд. техн. наук, доцент базовой кафедры интеллектуальных систем управления института космических и информационных технологий СФУ (Гл. 1, 2)

**Рецензенты:**

И.О. Богульский, доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры математического моделирования в механике  
института инженерных систем и энергетики  
Красноярского государственного аграрного университета  
П.П. Дьячук, доктор педагогических наук,  
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры  
математического анализа и методики обучения математике в вузе  
Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева

**Раскина А.В., Кононова Н.В., Дьячук П.П.,  
Виденин С.А., Чжан Е.А., Корнеева А.А.**

Р 242 Теория непараметрических систем и ее применение для решения задач идентификации и управления динамическими промышленными объектами: монография / Сибирский федеральный университет. – Красноярск, 2020. – 272 с.  
ISBN 978-5-907232-56-3

Монография посвящена актуальным проблемам разработки и исследования непараметрических методов и алгоритмов управления в условиях недостатка априорной информации. Рассматриваются приложения полученных результатов к решению задач проектирования интеллектуальных систем управления технологическими процессами на производстве.

Будет полезна бакалаврам, магистрантам, аспирантам, а также всем, кто занят исследованиями в области разработки систем обработки данных, моделирования и управления.

ББК 22.172.7

*«Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FSRZ-2020-0011)».*

ISBN 978-5-907232-56-3

© Сибирский федеральный университет, 2020  
© Раскина А.В., Кононова Н.В., Дьячук П.П.,  
Виденин С.А., Чжан Е.А., Корнеева А.А., 2020

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
-----------------------	---

### **Глава 1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

1.1. Общие сведения о задаче идентификации динамических объектов .....	10
1.2. Гипотеза о линейности динамических систем .....	15
1.3. Параметрические методы идентификации линейных динамических систем.....	24
1.4. Непараметрические модели линейных динамических систем.....	28
1.5. Непараметрическая идентификация при частичной параметризации структуры модели динамического объекта.....	35
1.6. Определение параметрической структуры линейного динамического объекта .....	42
1.7. Непараметрические алгоритмы идентификации объектов с памятью .....	52
1.8. Методы моделирования нелинейных динамических систем	
1.9. Непараметрическая модель систем класса Винера.....	80
1.9.1. Моделирование систем класса Винера с квадратом.....	87
1.9.2. Моделирование систем класса Винера с насыщением .....	97
1.10. Непараметрическая модель нелинейных систем класса Гаммерштейна .....	101
1.10.1. Модель систем класса Гаммерштейна с квадратом.....	104
1.10.2. Модель систем класса Гаммерштейна с насыщением .....	106
1.11. Определение вида нелинейности моделей Винера и Гаммерштейна.....	110
1.12. Идентификация нелинейных динамических объектов с использованием метода определения порядка разностного уравнения модели .....	122

## **Глава 2. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ**

2.1. Общие сведения о задаче управления .....	127
2.2. Алгоритмы непараметрического управления с использованием метода обратного оператора.....	133
2.3. Многоконтурные системы управления .....	164
2.3.1. Непараметрическое управление макрообъектом .....	164
2.3.2. Непараметрическое управление неустойчивым динамическим объектом .....	172
2.4. Непараметрический алгоритм управления нелинейной динамической системой класса Винера.....	181
2.5. Непараметрический алгоритм управления системой класса Гаммерштейна .....	195

## **Глава 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

3.1. Непараметрические модели и алгоритмы управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали .....	208
3.1.1. Краткое описание технологического процесса.....	208
3.1.2. Непараметрические модели процесса кислородно-конвертерной плавки стали .....	212
3.1.3. Управление процессом кислородно-конвертерной плавки стали .....	216
3.1.4. Численные исследования.....	218
3.2.1. Краткое описание технологического процесса.....	233
3.2.2. Постановка задачи идентификации для процесса сжигания угля и получения перегретого пара в котлоагрегате.....	233
3.2.3. Обработка и анализ данных исследуемого технологического процесса.....	237
3.2.4. Предлагаемая схема управления процессом.....	245
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>255</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>258</b>



## Введение

Задача управления сложными промышленными объектами неотъемлемо связана с постановкой и решением задачи идентификации исследуемого процесса. Данной проблеме посвящено большое количество трудов различных отечественных и зарубежных ученых [13; 17; 31; 51; 62; 83; 135; 150; 173 и др.]. В частности, данные вопросы широко освещены в работах Эйкхоффа [139], Я.З. Цыпкина [132–134], Х. Унбегауэна [168], Т. Седерстрема [166] и др. При этом можно выделить несколько подходов к идентификации динамических систем. Первый базируется на применении параметрических алгоритмов идентификации. В этом случае еще на этапе постановки задачи структура модели исследуемого процесса предполагается известной с точностью до параметров, то есть динамический объект может быть описан, например, в виде линейного дифференциального уравнения с известным порядком при старшей производной, передаточной функцией или же набором типовых звеньев и др. Следует отметить, что в большинстве случаев специалистам приходится сталкиваться с малоизученными процессами, для которых не представляется возможным подобрать параметрическую структуру модели. Таким образом, в условиях недостатка априорной информации использование параметрических алгоритмов не представляется возможным. Второй подход состоит в определении переходной и весовой функций, которые позволяют оценить поведение динамической системы как в переходном, так и в установившемся режиме. Для идентификации линейных динамических систем применяются различные частотные и корреляционные методы. Среди последних можно отметить методы, основанные на описании объекта в виде уравнения Винера-Хопфа. Основная сложность здесь состоит в решении данного уравнения. Связано это прежде всего с труд-

ностью получения аналитического описания корреляционных функций. Одним из примеров рекурсивного алгоритма идентификации динамических систем является фильтр Калмана [56]. Здесь описание многомерной системы осуществляется в виде пространства состояний. Следующая группа методов объединяет в себе алгоритмы, позволяющие определить структуру модели динамического процесса. При этом подавляющее большинство методов отыскания оптимальной структуры сводится в конечном итоге к перебору и сравнению всех возможных вариантов модели, при этом для каждого из этих вариантов приходится вычислять оценки параметров. При относительно большой глубине памяти динамического процесса такой перебор, даже если он не полный, является весьма трудоемкой задачей. Также следует отметить в данной области метод типовой идентификации, предложенный Н.С. Райбманом, который позволяет по виду взаимных корреляционных функций входных/выходных переменных определить вид линейного дифференциального уравнения и его коэффициенты.

Идентификацией нелинейных систем, в том числе и систем класса Винера и Гаммерштейна, занимаются многие исследователи, среди которых могут быть отмечены работы В.М. Кунцевича [70], В.А. Каминскаса [57; 58], О.А. Кацюбы [61], А.Ф. Пашенко [94; 95], Г.Р. Болквадзе [18], В. Греблицкого [143; 144] и других. Однако опыт успешного практического применения большинства существующих методов идентификации нелинейных систем при построении моделей реальных объектов невелик. Это обусловлено прежде всего большим разнообразием нелинейных динамических объектов, а также методов их идентификации и условий их применения. Эти методы могут быть основаны на: представлении системы в виде суммы рядов Вольтерра, линеаризации системы или на представлении системы в виде модели Винера и Гаммерштейна. Каждый из этих методов имеет как достоинства,

так и недостатки. Для исследования нелинейных динамических объектов в теории управления часто применяют модели, представленные функциональными операторами Винера и Гаммерштейна. Модели этого класса образованы различными комбинациями линейных динамических звеньев и безынерционных нелинейных элементов.

В условиях недостатка априорной информации целесообразным является применение непараметрической теории, которая предполагает, что известны только качественные характеристики исследуемого объекта. На сегодняшний день непараметрические методы широко используются для решения различных задач системного анализа, в том числе задач идентификации и управления дискретно-непрерывными процессами. Поэтому разработка и исследование непараметрических моделей и алгоритмов управления, в том числе и для случая динамических объектов, являются актуальной научно-технической задачей.

Непараметрическая теория берет свое начало с работ М. Розенблатта. В дальнейшем непараметрическая теория была развита в работах Э.А. Надарая [88], В. Хардле [131], В.П. Живоглядова [45; 46], А.В. Медведева [75–83], В.А. Васильева, А.В. Добровидова, Г.М. Кошкина [68]. Последними был предложен метод фильтрации полезных сигналов на фоне помех в условиях непараметрической неопределенности. Непараметрические модели и алгоритмы управления для линейных динамических объектов были предложены А.В. Медведевым, в которых для описания динамической системы использовался интеграл Дюамеля. В дальнейшем задача сводилась к непараметрическому оцениванию весовой функции по результатам наблюдений «входа/выхода» объекта. Вопросы применения непараметрической теории для нелинейных объектов обсуждались в работах С.Н. Чайки, где задача решалась в условиях как параметрической, так и непараметрической неопределенности, так

как параметрическая структура нелинейного блока предполагалась известной.

Несмотря на довольно высокую эффективность непараметрических методов в решении задач идентификации и управления как линейными динамическими объектами, так и объектами, относящимися к категории нелинейных, можно отметить ряд недостатков, присущих данным методам. В частности, применение разработанных на сегодняшний день непараметрических алгоритмов возможно только для некоторых классов динамических объектов. В ряде случаев отпадает необходимость в частичной параметризации модели, которая производится на основании априорной информации, а также подаче на вход специальных входных сигналов, что невозможно в условиях нормального функционирования объектов. Таким образом, повышение эффективности непараметрических методов для решения задач идентификации динамических систем по данным наблюдений и дуального управления динамическими системами в условиях недостатка априорной информации является актуальной научно-технической задачей.

В работе использован комплекс существующих методов непараметрической теории идентификации и адаптивного управления. Раскрыты противоречия существующей теории, дающие возможность выявления новых проблем идентификации и управления динамическими системами в условиях частичной неопределенности, когда параметризованная структура управляемого процесса неизвестна. Изложены элементы разработанной непараметрической теории идентификации и управления нелинейными динамическими системами класса Винера и Гаммерштейна. Отличие последней от распространенных методов управления нелинейной динамикой состоит в том, что неизвестна параметрическая структура управляемого процесса. Рассмотрен класс задач идентификации и управле-

ния объектами класса Винера и Гаммерштейна, где представление нелинейной системы в виде двух блоков таково, что один из них (нелинейный блок) параметрически определен, а другой (линейный динамический) – нет. Изучено влияние основных факторов на эффективность идентификации и управления системами с применением разработанных алгоритмов. Проведена модернизация существующих непараметрических методов для идентификации динамических систем. Результаты исследований, представленные в монографии, способствуют развитию непараметрической теории управления динамическими процессами, в частности, системами, общая структура которых состоит из сочетания нескольких динамических и безынерционных элементов в их различном сочетании.

В монографии приведены результаты применения непараметрической теории к решению задач идентификации и управления сложными промышленными объектами. Приведенные алгоритмы применяются в разработке дополнений к технологическим инструкциям для выплавки и подготовки стали к непрерывной разливке в ККП № 2 на предприятии ОАО «ЕВРАЗ Объединенный Западно-Сибирский металлургический комбинат». В исследовании также приводятся разработка и внедрение новых методик, на основе которых созданы непараметрические модели и алгоритмы управления процессом сжигания угля в котлоагрегате ТЭЦ. Предложенные методики могут быть применены в компьютерных системах моделирования и управления различными технологическими объектами класса Винера или Гаммерштейна. Процессы данного типа достаточно распространены в различных областях промышленности, например, в теплоэнергетике (ТЭЦ), стройиндустрии, металлургии, нефтепереработке и др., где роль нелинейного элемента часто выполняют исполнительные механизмы, установленные как на входе, так и на выходе технологических аппаратов.

## Глава 1.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

---

### 1.1. Общие сведения о задаче идентификации динамических объектов

В последнее время роль моделирования приобретает все большее значение при решении задач управления сложными технологическими объектами. В связи с этим естественно повышение интереса к разработке методов построения моделей, в частности к такому методу, как идентификация. Н.С. Райбман дает следующее определение идентификации [102]: «Идентификация систем – это такой случай моделирования, при котором модель строится по результатам, полученным в условиях нормального функционирования исследуемого объекта». Таким образом, можно сказать, что идентификация систем – это определение структуры модели системы, а также определение ее параметров путем анализа входных/выходных переменных данной системы.

Рассмотрим общую схему идентификации, приведенную на рисунке 1.1.1 [77].

На рис. 1.1.1 приняты следующие обозначения:  $A$  – оператор, описывающий процесс,  $x(t)$  – выходная переменная процесса,  $u(t)$  – входная переменная процесса,  $t$  – непрерывное время,  $\xi(t)$  – случайное воздействие,  $h^u(t)$ ,  $h^x(t)$  – случайные помехи в каналах измерений, имеющие нулевое математическое ожидание и ограниченную дисперсию [63; 64],  $x_s(t)$  – выход модели объекта,  $u_t, x_t$  – наблюдения переменных в дискретные моменты времени  $t$  через соответствующие интервалы времени  $\Delta t$ ,  $\xi(t)$  – случайные поме-

хи, действующие на процесс. Наблюдая за процессом, мы получаем выборку входных/выходных наблюдений вида  $\{u_i, x_i\}, i = 1, s$ , где  $s$  – объем выборки.

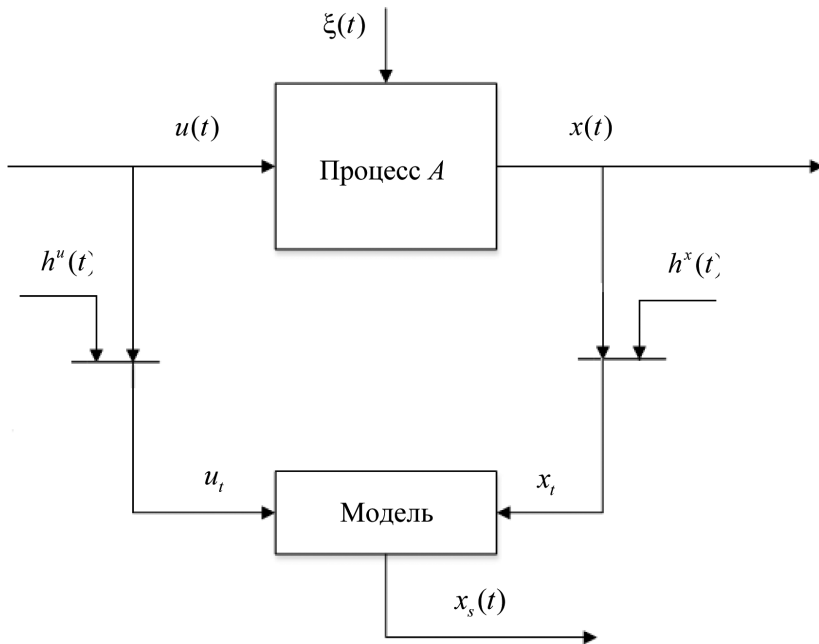


Рис. 1.1.1. Общая схема задачи идентификации

В рамках настоящей работы исследуемый процесс является динамическим, то есть состояние такой системы в некоторый момент времени  $t$  будет зависеть не только от входных воздействий, но и от ее состояний в прошлом. В работе рассматриваются классы объектов управления, допускающие описание разностными уравнениями вида:

$$x_t = F(x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_t, \xi_t), \quad (1.1.1)$$

где  $F$  – неизвестный функционал,  $t$  – дискретное время,  $k$  – порядок разностного уравнения, который ограничен  $k \leq k_{\max}$ .

Динамический процесс на рис. 1.1.1 относится к классу дискретно-непрерывных процессов, то есть по своей природе является непрерывным, но входные и выходные переменные процесса контролируются через дискретные моменты времени  $\Delta t$ . Задача идентификации сводится к построению модели процесса  $x_s(t)$  на основании входных/выходных наблюдений.

Постановка той или иной задачи идентификации зависит от уровня априорной информации, которая включает в себя информацию о параметрической структуре объекта, влияниях случайных помех  $h$  в каналах связи и действующих на объект внешних неконтролируемых воздействий. Разные авторы приводят свои варианты классификации уровней априорной информации. Рассмотрим далее некоторые из них.

А.А. Фельдбаум проводил [128] деление на системы с полной и неполной информацией об объекте. В данной интерпретации информация об управляемом объекте складывается из:

- а) информации о его операторе  $A$ ;
- б) информации о возмущении, действующем на объект  $\xi(t)$ ;
- в) информации о состоянии объекта, например, о всех величинах  $x_1, \dots, x_n$ , для объекта, движение которого характеризуется уравнениями;
- г) информация о цели управления;
- д) информация о задающем воздействии  $x^*(t)$ .

Таким образом, все системы можно разделить на несколько типов, соответствующих указанным выше способам добывания сведений:

– системы с полной информацией об управляемом объекте либо с максимально возможной информацией. Система называется системой с полной информацией, если в управляющем устройстве заложена информация об операторе  $A$  и о цели управления, если имеется полная информация о задающем воздействии  $x^*(t)$ , полная информация о помехе



$\xi(t)$  и, наконец, полная текущая информация о состоянии объекта в данный момент времени  $t$ ;

– системы с неполной информацией об объекте и независимым (или пассивным) ее накоплением в процессе управления. Во второй группе теорий оптимальных систем априорно известны не сами воздействия, а лишь статистические характеристики случайных входных воздействий. Здесь входное воздействие на объект воспринимается как случайное. Класс, к которому принадлежит оператор  $A$ , неизвестен точно, но из априорной информации известна плотность распределения случайных факторов, которые предполагаются нормальными и аддитивными. В данном случае для построения систем идентификации и управления необходимо наличие выборки входных/выходных переменных объекта. Данный класс систем характеризуется тем, что процесс накопления информации о воздействии  $x^*(t)$  не зависит от алгоритма управления. Действительно, накопление информации состоит в наблюдении входных/выходных значений и конструировании по ним гипотез об исследуемом процессе. При этом информацию, получаемую от наблюдения, можно лишь правильно использовать, но ее нельзя увеличить, какова бы ни была стратегия управляющего устройства. Поэтому такие системы могут быть названы системами с пассивным или независимым (от стратегии управляющего устройства) накоплением информации;

– системы с неполной информацией об объекте и активным ее накоплением в процессе управления (дуальное управление). В данном случае задачи идентификации и задачи управления объединяются. Элементы выборки входных/выходных переменных процесса поступают как на вход модели, так и на вход системы управления. Таким образом, формирование управляющих воздействий имеет двойственный характер – они заключают одновременно в себе две функции – изучение объекта и управление им.

Некоторые уровни априорной информации в дополнение к существующим у Фельдбаума вводит А.В. Медведев [75]:

1) системы с параметрической неопределенностью. Для данного уровня априорной информации характерно знание о параметрической структуре модели исследуемого объекта с точностью до параметров, а также наличие информации о некоторых характеристиках случайных помех. Задача идентификации в данном случае решается в «узком» смысле. Это означает, что сначала необходимо определить на основании априорной информации класс оператора  $A^\alpha$ , например:

$$x_s^\alpha(t) = A^\alpha(u(t), \alpha), \quad (1.1.2)$$

где  $A^\alpha$  – параметрическая структура модели исследуемого объекта, а  $\alpha$  – вектор параметров. Следующим шагом является оценивание параметров  $\alpha$  с использованием выборки входных/выходных переменных объекта  $\{x_i, u_i, i = 1, s\}$ , где  $s$  – объем данной выборки;

2) системы с непараметрической неопределенностью. Для данного уровня априорной информации характерно отсутствие знаний о структуре модели, но требуется наличие информации о качественных характеристиках объекта. К такого рода характеристикам могут относиться однозначность характеристик изучаемого объекта, линейность или же характер нелинейности в случае динамического процесса и другие характеристики. В отличие от предыдущего случая, этап выбора параметрической структуры модели объекта отсутствует. В данном случае задача идентификации решается в «широком смысле». Основными методами здесь являются методы непараметрической статистики [14; 39; 43; 45; 60; 66; 78; 79], с помощью которых происходит оценивание оператора  $A$  на основе имеющейся выборки  $\{x_i, u_i, i = 1, s\}$ :

$$x_s(t) = A_s(u(t), x_s, u_s); \quad (1.1.3)$$

3) системы с параметрической и непараметрической неопределенностью. В данном случае имеющаяся априорная информация не подходит под описание ни одного из классов, так как, например, для некоторых характеристик могут быть известны параметрические закономерности, в то время как остальная информация остается недоступной.

В случае параметрической неопределенности объем сведений о параметрах модели объекта также может быть различным. В книге Александрова [5] приводится некоторая классификация следующих случаев объема сведений о параметрах объекта:

1) неопределенные, ограниченные по модулю параметры. В этом случае параметры  $|a_i(t)| \leq a_i^*$ , где  $a_i^*$  ( $i = 1, n_a$ ) – заданные числа;

2) параметры объекта являются случайными функциями времени с известным законом распределения вероятности, но неизвестными параметрами этого закона распределения;

3) параметры объекта являются случайными функциями времени с известным законом распределения и известными параметрами этого закона;

4) функции  $|a_i(t)|$  ( $i = 1, n_a$ ) заранее неизвестны, однако могут быть точно измерены в процессе работы объекта;

5) параметры объекта  $|a_i(t)|$  ( $i = 1, n_a$ ) – точно известные функции.

Следует отметить, как уже упоминалось ранее, что информация в различных каналах динамического объекта может одновременно соответствовать разным уровням априорной информации.

## 1.2. Гипотеза о линейности динамических систем

Исследованию линейных систем уделяется большое внимание, притом, что большинство реальных систем не удовлетворяет условиям линейности. Однако точность при-

боров и условия эксплуатации не всегда позволяют получить достаточно много информации о них, что приводит к непреодолимым математическим трудностям в построении моделей. Поэтому результаты исследования должны соответствовать результатам эксплуатации систем, контролируемых при помощи измерительных приборов ограниченной точности. Любая реальная система проектируется и разрабатывается в соответствии с общими требованиями точности решаемой ею практической задачи.

Ниже будут рассмотрены линейные динамические системы, уравнения движения которых сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Задача идентификации состоит в установлении и исследовании зависимости между сигналом  $u(t)$ , поданным на ее вход, и сигналом  $x(t)$ , который получен на ее выходе. Такую зависимость можно записать в операторном виде [1; 3; 22]:

$$A_x[x(t)] = A_u[u(t)], \quad (1.2.1)$$

где  $A_x$  и  $A_u$  – некоторые операторы, применяемые к функциям  $x(t)$  и  $u(t)$ .

При этом оператор  $A$  называется линейным, если обладает основными свойствами:

$$\begin{aligned} A\left[\sum_k x_k(t)\right] &= \sum_k A[x_k(t)], \\ A[c \cdot x(t)] &= c \cdot A[x(t)], \quad c = const. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Процессы, происходящие в системах, относящихся к классу линейных динамических, достаточно точно описываются линейными отношениями входных возмущений, а также выходных реакций на эти возмущения в предшествующие моменты времени, при этом коэффициенты линейных отношений не изменяются с течением времени (инвариантны ко времени).

Таким образом, линейные системы удовлетворяют условиям [38]:

– параметры системы, от которых зависят коэффициенты, входящие в уравнения движения, не должны зависеть от обобщенных координат системы, являющихся искомыми функциями времени, а также от их производных;

– параметры системы не должны зависеть от времени.

Выполнение первого условия является обязательным, так как в противном случае уравнение становится нелинейным и будет описывать движение нелинейной системы.

В качестве аналитического описания линейных динамических процессов широко применяются линейные дифференциальные и линейные конечно-разностные уравнения. Такой тип моделей используется в теории автоматического управления и других естественнонаучных направлениях для описания процессов технологических цепочек на предприятиях. Линейное дифференциальное уравнение, описывающее зависимость между реакцией динамического объекта  $x(t)$  и входным возмущением  $u(t)$ , имеет вид [28]:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t) \\ \bar{x}(t_0) = (x(t_0) \quad x'(t_0) \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0))^T \end{cases}, \quad (1.2.3)$$

где  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  – коэффициенты уравнения при  $i$ -й производной  $x^{(i)}(t)$  выходной переменной объекта  $x(t)$ ,  $n$  – порядок уравнения,  $u(t)$  – входная переменная объекта,  $t_0$  – момент времени, когда начинается наблюдение за объектом,  $\bar{x}(t_0)$  – вектор начальных условий дифференциального уравнения, символ  $T$  – обозначает операцию транспонирования. Такое уравнение позволяет учесть инерционность объекта, то есть отразить зависимость состояния в данный момент от его предыдущих состояний. Аналогом дифференциального уравнения является его описание в виде численного выражения, полученного с применением методов чис-

ленного дифференцирования, например, метода конечных разностей или Розенброка [15; 97].

В теории автоматического управления линейные динамические процессы описываются в виде передаточных функций. Такое описание непосредственно вытекает из дифференциального уравнения. Передаточная функция (передаточное звено) представляет собой отношение изображения, по Лапласу, функции, описывающей выходную реакцию объекта к изображению функции, описывающей входное возмущение [28; 29; 40]:

$$W(p) = \frac{X(p)}{U(p)}, \quad (1.2.4)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция объекта,  $X(p) = L\{x(t)\}$  – преобразование Лапласа  $L\{\cdot\}$  от выходной реакции объекта  $x(t)$ ,  $U(p) = L\{u(t)\}$  – преобразование Лапласа от входного возмущения объекта  $u(t)$ .

Существуют различные способы построения моделей динамических систем, в которых используется как параметрический, так и непараметрический подход. В каждом случае метод выбирается с учетом исходной информации об исследуемой системе, то есть априорных сведений о структуре и параметрах уравнений, описывающих систему. Большинство методов идентификации динамических объектов с применением параметрического подхода основано на использовании информации о порядке дифференциального уравнения, описывающего данный объект. Параметры уравнения тогда оцениваются по измерениям реализации входных и выходных сигналов системы. Параметрическое описание линейной динамической системы может быть представлено в виде численного аналога дифференциального уравнения или в виде передаточной функции. Уравнения (1.3.3–1.3.4) представляют модели объектов на параметрическом уровне априорной информации.

В случае недостатка априорной информации о структуре исследуемого объекта ее поиск может потребовать значительной траты ресурсов, не всегда доступной исследователю. Рассматриваются методы моделирования динамических объектов в условиях, когда информации о порядке и параметрах дифференциального или конечноразностного уравнения нет. В теории управления модель линейного динамического объекта во временной области может быть описана уравнением Дюамеля (свертки) [6; 85]:

$$x(t) = h(t - t_0) + \int_{t_0}^t k(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau, \quad (1.2.5)$$

где  $h(t)$  и  $k(t)$  – соответственно переходная и весовая характеристики исследуемого объекта. Модель в виде интеграла Дюамеля описывает поведение выходной реакции объекта как свертки входного возмущения и временных характеристик объекта. Задачу описания динамического объекта можно свести к оценке его переходной или весовой функции, для чего применяются различные методы, основанные на параметрическом или непараметрическом подходах.

**Критерии линейности систем.** Важной практической задачей при исследовании динамических систем является установление факта линейности, если это имеет место. В теории идентификации реальный объект или процесс представлен моделью, описывающей его в той или иной мере. Эта модель выбирается из определенного класса, например, из множества линейных или нелинейных моделей. Однако в большинстве случаев предположение о линейности системы является некоторым упрощением, так как строго линейных динамических систем в реальности нет. При решении практических задач необходима уверенность в том, что полученная модель объекта описывает его адекватно. То есть требуется подтверждение, что есть основание принимать исследуемую

систему линейной и полученные в результате модели могут давать эффективный прогноз ее поведения в различных условиях. В связи с этим возникает задача проверки гипотезы о линейности исследуемого объекта. Эта гипотеза проверяется в результате оценки определенных критериев, сформулированных на основании исследования имеющейся информации об объекте [47]. Пусть  $w^1(t, u(t) = 1)$  – выборка измерений переходной функции системы (то есть реакции объекта на единичное входное воздействие в виде функции Хевисайда  $u(t) = 1(t)$ ),  $\{u_i, x_i\}, i = \overline{1, s}$  – выборка измерений реакции объекта на некоторый тестовый сигнал  $u(t)$ , отличный от единичного. Общая схема алгоритма установления факта линейности динамической системы основана на оценивании того, насколько точно линейная модель описывает поведение динамического процесса. Если ошибка идентификации оказывается приемлемой, то принимается гипотеза о линейности.

Свойство суперпозиции линейных моделей дает возможность сконструировать несколько типов критериев проверки линейности [1].

*1. Критерии, основанные на выполнении принципа суперпозиции.* Основным свойством линейных систем является выполнение принципа суперпозиции [22]:

$$x(K \cdot u(t)) = K \cdot x(u(t)), \quad (1.2.6)$$

$$x(u_1(t) + u_2(t)) = x(u_1(t)) + x(u_2(t)), \quad (1.2.7)$$

где  $K$  – некоторая константа,  $u_1(t), u_2(t)$  – различные входные воздействия,  $h_{\beta}(t)$  – реакция объекта на соответствующее входное воздействие.

Чтобы отнести объект к классу линейных или нелинейных, необходимо определить, насколько различаются его реакции (в установившемся состоянии) на одинаковые по характеру и разные по величине входные импульсы  $u_1(t)$  и  $u_2(t) = K \cdot u_1(t)$ , где  $K = const$ . Если отношение этих реакций носит постоян-



ный характер и примерно равно отношению значений входных импульсов  $K$  (то есть  $u_1(t)/u_2(t) \approx K$ ), объект можно отнести к классу линейных, иначе его следует отнести к нелинейным объектам. Линейность также можно определить путем сравнения реакций объекта на линейную комбинацию входных импульсов  $\sum_{i=1}^n K_i \cdot u_i(t)$ , где  $K_i = \text{const}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество входных возмущений. Если выходная реакция удовлетворительно описывается аналогичной линейной комбинацией  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i(t)$ , выходных реакций  $x_i(t)$  объекта на каждое из входных реакций  $u_i(t)$ , объект можно назвать линейным, что соответствует (1.2.7).

Данный критерий проверяется на практике как оценка среднеквадратической ошибки линейного описания процесса. Принцип суперпозиции равносильен описанию динамической системы в виде интеграла Дюамеля, так как интеграл в численном виде представляет собой сумму некоторых компонент, что и предполагается рассматриваемым принципом. Поэтому обобщенный критерий принадлежности системы к классу линейных формулируется в виде следующего условия. Он представляет собой среднеквадратическое отклонение реакции объекта на тестовое входное воздействие от модели в виде интеграла Дюамеля [68]:

$$W = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S [\hat{x}(u(t_i)) - x_i]^2 < \delta, \quad (1.2.8)$$

где  $d$  – заданная малая константа, характеризующая точность модели,  $x_i$  – реакция объекта на тестовый сигнал  $u(t)$  в момент времени  $t_i$ ,  $\hat{x}(u(t_i))$  – значение непараметрической модели в момент  $t_i$  при том же тестовом сигнале на входе.

В случае, если система линейна и случайные ошибки измерений незначительны, величина критерия  $W$  будет близка к нулю. Критерий (1.2.8) представляет собой оценку среднеквадратической ошибки моделирования дина-

мической системы при помощи непараметрических алгоритмов идентификации линейных систем. Предполагается, что эта ошибка будет значительно выше, если описание объекта с использованием интеграла Дюамеля неадекватно действительности, то есть исследуемый объект относится к классу нелинейных.

2. *Критерий относительной меры нелинейности.* Предложен Н.С. Райбманом [103]. Для одномерного безынерционного объекта представляет собой следующую величину:

$$\gamma_{x/u}^2 = \frac{\eta_{x/u}^2 - r_{x/u}^2}{\eta_{x/u}^2}, \quad (1.2.9)$$

где  $\eta_{x/u}^2$  – дисперсионное отношение, которое определяет тесноту функциональной зависимости входной величины  $u$  и выходной  $x$ :

$$\eta_{x/u}^2 = \frac{D\{M\{X/u\}\}}{D\{X\}}, \quad (1.2.10)$$

где  $D\{X\}$  – оценка дисперсии случайной величины выхода системы,  $M\{X/u\}$  – оценка регрессии выходной величины относительно входного воздействия;

$r_{x/u}$  – коэффициент корреляции:

$$r_{x/u} = \frac{M\{[X - M\{X\}][\hat{M}\{X/u\} - M\{X\}]\}}{\sqrt{D\{X\} \cdot D\{\hat{M}\{X/u\}\}}}, \quad (1.2.11)$$

$\hat{M}\{X/u\}$  – наилучшее в среднеквадратическом линейное приближение случайной величины  $X$  среди всех возможных линейных функций  $u$  (исследуемая модель, в терминах которой осуществляется идентификация).

Необходимо также отметить, что выполняется свойство коэффициента корреляции:

$$0 \leq r_{x/u} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r_{x/u}^2 \leq 1. \quad (1.2.12)$$

Получаем соотношение для относительной меры нелинейности:

$$0 \leq \gamma_{x/u}^2 \leq 1. \quad (1.2.13)$$

В случае линейности регрессии  $M\{X/u\}$  величина  $\gamma_{x/u}^2$  принимает нулевое значение, нелинейность системы приближает значение  $\gamma_{x/u}^2$  к единице.

На основе критерия (1.2.9) сформулирована относительная мера нелинейности для динамических систем, в случае их непараметрической идентификации [1]. Идея оценивания меры нелинейности тогда заключается в исследовании корреляционной связи непараметрической модели линейной динамики и статической оценки регрессии. Оценка регрессии применяется при этом в качестве некоторого аналога истинной регрессии, а линейная динамическая модель – это модель, в терминах которой проводится идентификация.

Модифицированная относительная мера нелинейности имеет вид:

$$\hat{\Gamma}_{x/t}^2 = \frac{\hat{N}_{x/t}^2 - \hat{R}_{x/t}^2}{\hat{N}_{x/t}^2}, \quad (1.2.14)$$

где  $\hat{N}_{x/t}^2$  – оценка дисперсионного отношения:

$$\hat{N}_{x/t}^2 = \frac{\sum_{i=1}^S (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^S (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.2.15)$$

где  $\{u(t_i), x_i\}$ ,  $x_i = x(u(t_i))$ ,  $i = \overline{1, S}$  – выборочные значения реакции системы на тестовый сигнал  $u(t)$  в дискретные моменты времени  $t_i$ ;  $\hat{x}_i$  – значения непараметрической оценки регрессии (выход модели);  $\bar{x}(t)$  – среднее значение выходной переменной:  $\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S x_i$ ;  $\hat{R}_{x/t}^2$  – квадрат оценки коэф-

фициента корреляции (оценивает корреляцию между значением выхода исследуемого объекта и его оценкой в виде модели):

$$\hat{R}_{x/t} = \frac{\sum_{i=1}^S [(x_i - \bar{x})(\hat{x}(u(t_i)) - \bar{x}_s)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^S (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^S (\hat{x}(u(t_i)) - \bar{x}_s)^2}}, \quad (1.2.16)$$

где  $\hat{x}(u(t_i))$  – реакция непараметрической модели линейной динамической системы (ЛДС) на тестовое входное воздействие;  $\bar{x}_s$  – среднее значение выхода модели,  $\bar{x}_s = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \hat{x}(u(t_i))$ . Критерий (1.2.16) позволяет ввести относительную величину, значения которой лежат в ограниченном диапазоне. При этом, если проводить аналогии с подобным критерием для статических объектов, чем больше значение критерия, тем более вероятно считать систему нелинейной. В связи со значимостью задачи проверки гипотезы линейности динамических систем при решении практических задач идентификации необходимо исследовать совокупность имеющихся критериев и на основании сопоставления полученных результатов принимать решение о допустимости описания процесса с применением линейных моделей.

### 1.3. Параметрические методы идентификации линейных динамических систем

В настоящее время известен и широко применяется параметрический метод построения моделей динамических систем [133; 139]. Идентификация при данном объеме априорной информации называется идентификацией в «узком» смысле, то есть задача идентификации сводится к оценке параметров объекта при условии, что структура последнего известна [21; 138]. Для применения этих методов необ-

ходимо иметь достаточные знания об исследуемом объекте. Нахождение неизвестных параметров модели производится с использованием различных итеративных, вероятностных методов, стохастических аппроксимаций, метода наименьших квадратов и др. Рассмотрим подробно данные методы.

Одной из первых работ, посвященных идентификации, является работа К.Ф. Гаусса, подробно описанная в [32]. В настоящем исследовании описывается метод наименьших квадратов, который применялся для моделирования траектории движения планет. В дальнейшем А.Н. Колмогоровым и А.А. Марковым [65] были даны математическое обоснование МНК и границы его применимости. Впоследствии этот метод нашел применение во множестве других приложений. Рассмотрим его подробно [83]. Пусть исследуемый процесс описывается некоторой функцией  $x = f(u)$ . Необходимо построить модель данного процесса по наблюдениям входных/выходных переменных  $\{x_i, u_i, i = \overline{1, s}\}$ . Первым этапом является определение параметрической структуры модели с точностью до параметров. Таким образом:

$$x(u) = f(u) \approx \hat{f}(u, \alpha), \quad (1.3.1)$$

где  $\alpha$  – вектор параметров, например:

$$\hat{f}(u, \alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(u), \quad (1.3.2)$$

где  $\varphi_j(u), j = \overline{1, N}$  – система линейно-независимых функций;  $N$  – число элементов ряда (1.3.2). Критерий имеет вид:

$$W_s(\alpha) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left( x_i - \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(u_i) \right)^2. \quad (1.3.3)$$

Следующим этапом является взятие производных от  $W_s(\alpha)$  по  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ . В дальнейшем, приравнявая их к нулю, получим систему линейных уравнений относительно

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ . Решая эту систему, найдем значения коэффициентов, входящих в (1.3.2), т. е.  $\alpha^s = (\alpha_1^s, \alpha_2^s, \dots, \alpha_N^s)$ .

Одним из примеров рекурсивного алгоритма идентификации динамических систем является фильтр Калмана [56]. Р. Калман одним из первых разработал описание многомерной системы в виде пространства состояний, чем внес существенное развитие в теорию идентификации. Постановка задачи сводится к следующей формулировке: по данным наблюдения  $z(t)$  требуется определить оценку желаемого сигнала  $\hat{x}(t)$ . Алгоритм состоит из двух этапов: экстраполяция и корректировка. На первом рассчитывается состояние системы в следующий момент времени, на втором этапе происходит корректировка с учетом полученной с датчиков новой информации. Идея метода состоит в следующем. Чтобы получить наилучшее приближение к истинному выходному значению  $x(t)$ , необходимо выбрать среднее значение между показанием  $z(t)$  и вычисленным предсказанием  $\hat{x}(t)$ . Переменные наблюдений  $z(t)$  будут иметь коэффициент Калмана, равный  $K$ , предсказанное значение  $\hat{x}(t)$  – коэффициент  $1-K$ . Коэффициент Калмана определяется путем решения задачи минимизации квадратичного показателя соответствия выхода объекта и выхода модели.

Существенный интерес в рамках теории параметрической идентификации представляет работа Эйкофа [139], посвященная идентификации систем и анализу временных рядов. Для идентификации нелинейных систем Н.С. Райбманом была разработана теория дисперсионной идентификации [102]. В дальнейшем развитие получили работы, в которых задача идентификации сводилась к задаче получения наилучшей возможной аппроксимации реальной системы внутри данного класса моделей. Важнейшие результаты в данной области отображены в работах Льюинга. Значительный вклад в развитие теории параметрической идентификации внес Я.З. Цыпкин, разработавший теорию инфор-

мационной идентификации [132; 133]. Рассмотрим подробно схему параметрической идентификации, приведенную Я.З. Цыпкиным, которая представлена на рис. 1.3.1 [132].

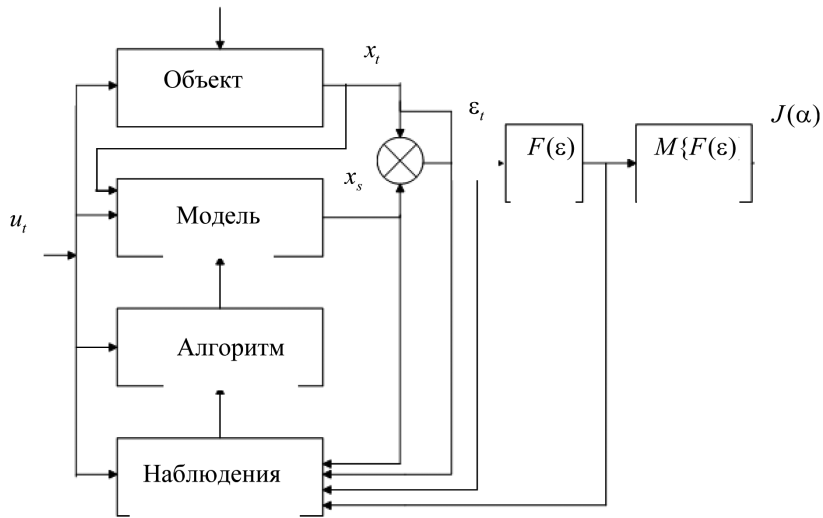


Рис. 1.3.1. Схема задачи параметрической идентификации, приведенная Я.З. Цыпкиным

На рис. 1.3.1 приняты обозначения:  $u_t$  – входная переменная процесса,  $x_t$  – выходная переменная процесса;  $\xi_t$  – случайная внешняя помеха;  $x_s$  – выход модели процесса;  $F(\varepsilon)$  – выпуклая функция потерь;  $M$  – символ математического ожидания;  $\alpha$  – вектор параметров модели;  $J(\alpha)$  – критерий качества идентификации, представляющий собой средние потери, равен:

$$J(\alpha) = M \{ F(\varepsilon(x_t, x_s), \alpha) \}. \quad (1.3.4)$$

Оценка параметров модели  $\alpha$  осуществляется в блоке «Алгоритм» в соответствии с условием минимизации критерия качества идентификации:

$$J(\alpha^*) = \min_{\alpha} J(\alpha). \quad (1.3.5)$$

Далее искомые параметры модели находятся с использованием различных регулярных итеративных методов.

Другой подход к идентификации динамических систем состоит в определении переходной и весовой функций, которые позволяют оценить поведение динамической системы как в переходном, так и в установившемся режимах. Основным недостатком данного подхода состоит в необходимости подачи на вход исследуемого объекта специальных входных сигналов, таких как функция Хевисайда, дельта-функция Дирака и других функций, что невозможно в условиях нормального функционирования объекта.

Когда проведение экспериментов по снятию переходных характеристик невозможно, то для их идентификации применяют методы, основанные на описании объекта в виде уравнения Винера-Хопфа:

$$K_{xu}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) K_{uu}(t - \tau) dt, dt \geq 0, \quad (1.3.6)$$

где  $K_{uu}(\tau)$  – автокорреляционная функция входного сигнала объекта;  $K_{xu}(\tau)$  – взаимная корреляционная функция выходного и входного сигналов объекта;  $\omega(\tau)$  – весовая функция объекта. Основная сложность применения данного подхода состоит в решении уравнения Винера-Хопфа. Связано это прежде всего с трудностью получения аналитического описания корреляционных функций. При этом структура уравнения Винера-Хопфа такова, что даже небольшие ошибки при вычислении корреляционных функций приводят к существенным ошибкам при оценке импульсной переходной характеристики процесса.

#### **1.4. Непараметрические модели линейных динамических систем**

В условиях малой априорной информации об объекте исследования во многих случаях невозможно обоснован-



но выбрать параметрическую структуру модели. В случае недостатка априорной информации предпочтительным является применение теории непараметрической идентификации [14; 39; 43; 45; 60; 66; 78; 79]. Применение данной теории позволяет уйти от вопроса определения структуры модели объекта с точностью до параметров. Как отмечалось ранее, в случае непараметрической неопределенности из существующей априорной информации могут быть известны только качественные характеристики исследуемого объекта, например, отношение его к классу линейных систем. В этом случае порядок уравнения или глубина памяти динамического объекта на основании имеющейся априорной информации не определены. Рассмотрим следующий алгоритм идентификации линейной динамической системы.

Как отмечалось ранее, одномерный линейный динамический объект может описываться в виде интеграла Дюамеля [69]:

$$x(t) = k(0) \cdot u(t) + \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (1.4.1)$$

где  $h(t - \tau)$  – весовая функция системы, являющаяся производной переходной функции  $k(t)$ , т. е.  $h(t) = k'(t)$ . Следовательно, теперь проблема состоит в отыскании весовой функции  $h(t)$ . Один из путей решения этой задачи – снятие переходной динамического объекта и дальнейшая оценка его весовой функции по результатам наблюдений  $\{x_i = k_i, t_i, i = \overline{1, s}\}$ . Непараметрическая модель (1.4.1) будет иметь вид:

$$x_s(t) = k_s(0) \cdot u(t) + \int_0^t h_s(t - \tau, \bar{k}_s, \bar{t}_s)u(\tau)d\tau. \quad (1.4.2)$$

Рассмотрим алгоритм получения оценок переходной и весовой функции  $k_s(t), h_s(t)$ . Пусть на вход динамической

системы поступает единичное возмущающее воздействие  $1(t)$  – функция Хэвисайда:

$$\begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Регистрируя значение выходной величины при данном входном воздействии, получаем выборку наблюдений:  $\{x_i = k_i, t_i, i = 1, s\}$ . Оценка переходной функции имеет вид:

$$h_s(t) = k'_s(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s k_i H' \left( \frac{t-t_i}{c_s} \right), \quad (1.4.4)$$

где  $H(\cdot)$  – колоколообразная функция,  $\tilde{n}_s$  – параметр размытости.

Так как весовая функция  $h(t)$  является производной по времени от переходной функции  $k(t)$ :

$$h(t) = \frac{dk(t)}{dt},$$

то оценку весовой можно найти, взяв производную от оценки переходной характеристики  $k_s(t)$ :

$$h_s(t) = k'_s(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s k_i H' \left( \frac{t-t_i}{c_s} \right). \quad (1.4.5)$$

Поскольку производная от оценки функции регрессии не обязательно является оценкой производной, этот факт требует специального рассмотрения. Ранние исследования данного вопроса [154] привели к выводу, что колоколообразная функция  $H(\cdot)$  должна удовлетворять дополнительным условиям сходимости:

$$\int_{\Omega(x)} H'(u) du = 0 \quad c_s^{-1} \int_{\Omega(x)} u H'(u) du = -1,$$

где  $u$  – произвольная переменная.

Колоколообразные функции  $H(\cdot)$  и параметр размытости  $c_s$  должны удовлетворять следующим условиям сходимости [60]:

$$\begin{aligned} c_s > 0; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} c_s &= 0; \\ H(c_s^{-1}(t - t_i)) &< \infty; \\ c_s^{-1} \int_{\Omega(u)} H(c_s^{-1}(t - t_i)) dx &= 1; \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s c_s &= \infty; \\ \lim_{s \rightarrow \infty} c_s^{-1} H(c_s^{-1}(t - t_i)) &= \delta(t - t_i). \end{aligned}$$

Некоторые функции, удовлетворяющие вышеупомянутым условиям, представлены ниже:

$$H = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x - x_i}{c_s}\right) + \frac{1}{2}, & \left| \frac{x - x_i}{c_s} \right| \leq \pi \\ 0, & \left| \frac{x - x_i}{c_s} \right| > \pi \end{cases}, \quad (1.4.6)$$

$$H = \begin{cases} \frac{0.827}{c_s} \exp\left(\frac{-(x - x_i)^2}{(x - x_i)^2 - c_s^2}\right), & |x - x_i| \leq c_s \\ 0, & |x - x_i| > c_s \end{cases}. \quad (1.4.7)$$

Параметр размытости  $c_s$  вычисляется из условия минимума квадратичной ошибки наблюдаемого значения выхода объекта и его непараметрической оценки (1.3.2):

$$R(c_s) = \sum_{i=1}^s (x(t_i) - x_s(t_i, c_s))^2 \rightarrow \min, \quad (1.4.8)$$

где  $x(t_i)$  – значения выхода объекта,  $x_s(t_i, c_s)$  – значения выхода модели объекта при некотором фиксированном параметре размытости  $c_s$ .

Рассмотрим многомерный случай. Пусть объект представляет собой линейную динамическую систему. Схема идентификации представлена на рис. 1.4.1.

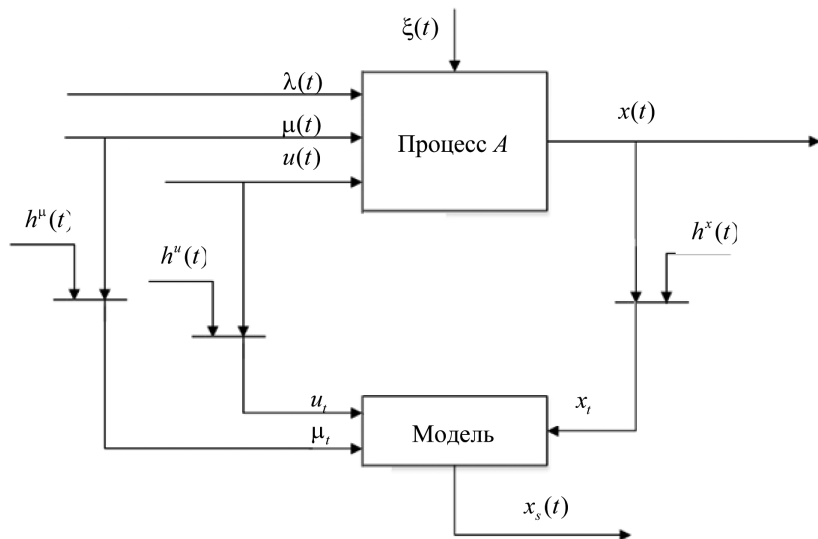


Рис. 1.4.1. Схема идентификации многомерной линейной динамической системы

На рис. 1.4.1 приняты обозначения:  $x_t$  – выходная переменная процесса,  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{n1})$  – векторное управляющее воздействие,  $\mu_t \in (\mu_{1t}, \dots, \mu_{n1})$  – векторное входное контролируемое, но не управляющее воздействие,  $\lambda_t$  – входное неконтролируемое воздействие,  $x_s(t)$  – выход модели объекта,  $(t)$  – непрерывное время, индекс  $t$  – дискретное время,  $h^\mu_t, h^\mu_t, h^x_t$  – случайные помехи измерений соответствующих переменных процесса,  $\xi_t$  – векторная случайная помеха.

Следует отметить, что входная переменная  $\lambda_t$  существенно отличается по своему содержанию от переменных  $u_t$  и  $\mu_t$ . Дело в том, что эта переменная не поддается изме-

рению либо может быть известна исследователю, но ее контроль осуществляется достаточно редко и в соответствии, как правило, со сложной и длительной процедурой измерения [79]. Контроль переменных осуществляется через интервал времени  $\Delta t$ , следовательно, имеем выборку входных/выходных переменных  $\{x_i, u_{1i}, \dots, u_{ni}, \mu_{1i}, \dots, \mu_{mi}, i = \overline{1, s}\}$ , где  $s$  – объем выборки, индекс  $h$  у переменных объекта из соображения простоты опущен. Задача идентификации сводится к построению модели процесса  $x_s(t)$  на основании входных/выходных наблюдений.

Обозначим все возможные входные воздействия: управляемые  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})$ , неуправляемые, но контролируемые  $\mu_t \in (\mu_{1t}, \dots, \mu_{nt})$  и неконтролируемые  $\lambda_t$  через переменную  $\rho_t \in (\rho_{1t}, \dots, \rho_{nt})$ . Линейный многомерный объект с  $N$ -входами можно представить как  $N$  одномерных линейных объектов с одним входом и одним выходом (рис. 1.4.2).

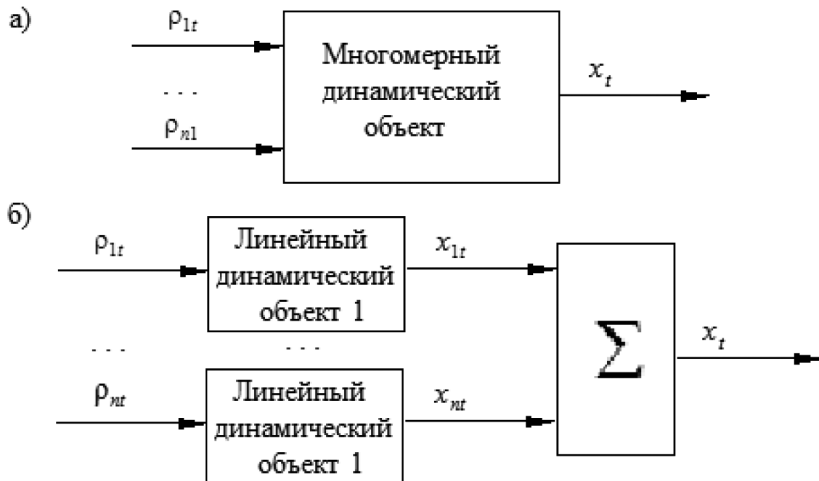


Рис. 1.4.2:

- а) Блок-схема многомерного линейного динамического объекта  
 б) Блок-схема  $n$ -одномерных линейных динамических объектов

Исходя из принципа суперпозиции [86] многомерный линейный динамический объект, представленный на рис. 1.3, может описываться суммой интегралов Дюамеля:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & k_1(0) \cdot \rho_1(t) + \int_0^t h_1(t - \tau) \rho_1(\tau) d\tau + k_2(0) \cdot \rho_2(t) + \\
 & + \int_0^t h_2(t - \tau) \rho_2(\tau) d\tau + k_n(0) \cdot \rho_n(t) + \int_0^t h_n(t - \tau) \rho_n(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Непараметрическая оценка (1.3.9) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x_s(t) = & k_{1,s}(0) \cdot \rho_1(t) + \int_0^t h_{1,s}(t - \tau, \bar{k}_{1,s}, \bar{t}_s) \rho_1(\tau) d\tau + \\
 & + k_{2,s}(0) \cdot \rho_2(t) + \int_0^t h_{2,s}(t - \tau, \bar{k}_{2,s}, \bar{t}_s) \rho_2(\tau) d\tau + \dots + \\
 & + k_{n,s}(0) \cdot \rho_n(t) + \int_0^t h_{n,s}(t - \tau, \bar{k}_{n,s}, \bar{t}_s) \rho_n(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Таким образом, в случае отношения исследуемого объекта к категории линейных могут быть применимы непараметрические модели, в которых для описания динамической системы использовались интегралы типа свертки, более конкретно, интеграл Дюамеля. В дальнейшем задача сводится к непараметрическому оцениванию весовой функции системы по результатам наблюдений входа/выхода объекта. Следует отметить, что, во-первых, данный подход применим к решению задач идентификации и управления только в случае отношения исследуемой системы к классу линейных. Во-вторых, требует подачи на вход специальных сигналов для получения характеристик процесса, что невозможно в условиях нормального функционирования объекта исследования.

## 1.5. Непараметрическая идентификация при частичной параметризации структуры модели динамического объекта

В случае когда структура модели динамического объекта остается неизвестной, предлагается следующий подход к идентификации. Как уже отмечалось в 1.1, в работе рассматриваются классы объектов управления, допускающие описание разностными уравнениями вида:

$$x_t = F(x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_t, \xi_t). \quad (1.5.1)$$

Здесь  $F$  – неизвестный функционал,  $k$  – известный порядок разностного уравнения, найденный из имеющейся априорной информации либо с использованием специальных процедур. Если проводить аналогию с описанием исследуемого процесса в непрерывном времени в виде дифференциальных уравнений, то  $k$  – порядок старшей производной в соответствующем уравнении. Таким образом, мы находимся в ситуации, когда задача идентификации формулируется в условиях и параметрической, и непараметрической априорной информации [80]. Следует заметить, что дискретное уравнение (1.5.1) имеет соответствующий аналог среди дифференциальных уравнений.

Введем следующие обозначения:

$$z_t = (z_1, \dots, z_{k+1}) = (x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_t), \quad (1.5.2)$$

тогда

$$x_t = f(z_t). \quad (1.5.3)$$

Таким образом, структура модели процесса (1.4.1) может быть частично параметризована. При этом задача идентификации динамической системы сводится к задаче идентификации статической системы за счет введения математического переобозначения (1.5.2). С учетом данных переобозначений

(1.5.2) модель системы (1.5.1) может быть показана на следующей схеме (рис. 1.5), которая иллюстрирует модель динамической системы в дискретном времени, сведенную к модели статической системы, когда на вход последней поступают не только переменные  $u_i$ , но и  $x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$  и т. д.

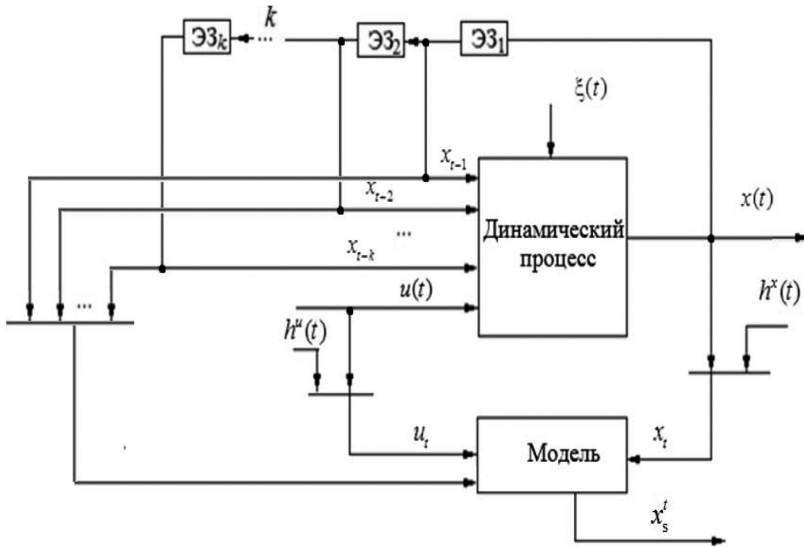


Рис. 1.5.1. Блок-схема моделирования динамического процесса при параметрическом и непараметрическом уровне неопределенности

На рис. 1.5.1 ЭЗ – элемент запаздывания. Отметим еще раз, что в данном случае параметрическая структура рассматриваемого процесса нам по-прежнему неизвестна с достаточной точностью, но можно говорить о частичной параметризации модели исследуемого процесса.

В рассматриваемых условиях в качестве непараметрической модели процесса может быть принята следующая непараметрическая оценка функции регрессии по наблюдениям  $\{x_i, u_i, i = 1, s\}$  [88; 131]:



$$x_s^t = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \cdot \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}, \quad (1.5.4)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – колоколообразная функция [24].

**Вычислительный эксперимент.** Для вычислительного эксперимента был выбран динамический объект, описываемый следующим разностным уравнением:

$$x_t = 2.62 \cdot x_{t-1} - 2.363 \cdot x_{t-2} + 0.719x_{t-3} + 0.238u_{1t} + 0.266u_{2t} + 0.12u_{3t} + 0.175\mu_t + 0.014\lambda_t. \quad (1.5.5)$$

Здесь  $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})$  – векторное управляющее воздействие,  $\mu_t$  – входное контролируемое, но не управляющее воздействие,  $\lambda_t$  – входное неконтролируемое воздействие,  $x_t$  – выходная переменная процесса. Зададим шаг дискретизации:

$$h = \frac{T}{s} = 0.1,$$

где  $T$  – время функционирования системы,  $s$  – объем выборки.

Помехи в канале измерений выхода объекта имитировались следующим образом:

$$x_i = x(t_i) + c \cdot \xi_i,$$

где  $x(t_i)$  – реакция объекта на сигнал  $u_i$  (без учета влияния помехи),  $\xi_i$  – нормально распределенная аддитивная помеха:  $M(\xi) = 0$ ,  $D(\xi) < \infty$ . Константа  $c$  определяет уровень (интенсивность) помехи.

Выборка входных/выходных переменных имеет вид:  $\{x_i, u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \mu_i, i = \overline{1, s}\}$ , где  $s$  – объем выборки. Задача непараметрической идентификации состоит в оценивании класса операторов на основе выборки  $\{x_i, u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \mu_i, i = \overline{1, s}\}$ .

В данном случае в качестве непараметрической модели объекта можно использовать следующие уравнение:

$$x_i^s = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} x_i \cdot \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{u_{js} - u_{ji}}{c_s^u}\right) \cdot \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s^\mu}\right) \cdot \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{u_{js} - u_{ji}}{c_s^u}\right) \cdot \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s^\mu}\right) \cdot \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}. \quad (1.5.6)$$

В модели (1.4.6)  $c_s^u, c_s^\mu, c_s^x$  – коэффициент размытости ядра соответствующих переменных. Параметры размытости  $c_s^u, c_s^\mu, c_s^x$  при наличии обучающей выборки находятся из задачи минимизации показателя соответствия выхода объекта и выхода модели, основанного на методе скользящего экзамена, когда в модели (1.4.6) по индексу  $i$  исключается  $k$ -е наблюдение переменной, предъявляемой для экзамена:

$$R(c_s^u, c_s^\mu, c_s^x) = \sum_{k=1}^s (x_s(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\mu}_k) - x_k)^2 = \min_{c_s^u, c_s^\mu, c_s^x} k \neq i, \quad (1.5.7)$$

где индекс  $i$  фигурирует в формуле (1.5.6).

В качестве алгоритма оптимизации был выбран неградиентный метод многомерной оптимизации – метод Нелдера-Мида, так как данный метод является эффективным при низкой скорости вычисления минимизируемой функции. Приняты следующие значения параметров метода: коэффициент отражения  $\alpha = 1$ ; коэффициент сжатия  $\beta = 0,5$ ; коэффициент растяжения  $\gamma = 2$ ; точность  $\varepsilon = 0,001$ . Начальные вершины деформируемого многогранника выбирались следующим образом. Задается область возможных значений коэффициентов размытости ядерной функции  $c_s \in [0.01, 4]$ , из которой произвольным образом выбирается  $n+1$  точка, где  $n$  – количество входных переменных, образующих симплекс  $n$ -мерного пространства.

Также для каждой модели вычисляется относительная ошибка  $W$ , равная отношению квадратичной ошибки к дисперсии выходной переменной  $x_i$  [64].

Переходная характеристика процесса  $k(t)$  (1.4.5) представлена на рис. 1.5.2:

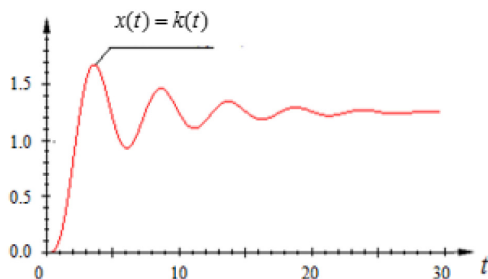


Рис. 1.5.2. Переходная характеристика процесса (1.5.5)

Пусть управляющие воздействия имеют вид:

$$u_1(t_i) = 0.4 \sin(0,2 \cdot t_i), \quad u_2(t_i) = 0.2 \cos(0,1 \cdot t_i),$$

$$u_3(t_i) = 0.1 \sin(0,08 \cdot t_i),$$

где

$$t_i = t_0 + i \cdot h,$$

где  $t_0 = 0$ . Далее по тексту индекс  $i$  у переменной  $t$  из соображений простоты будет опущен. Графики соответствующих входных воздействий представлены на рис. 1.5.3:

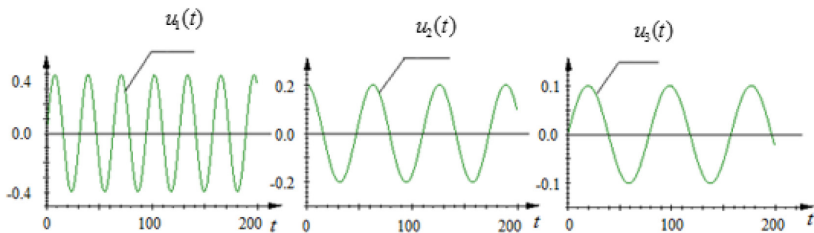


Рис. 1.5.3. Входные управляющие воздействия  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$

Пусть не управляемая, но контролируемая переменная имеет вид:  $\mu(t) = 0.1 \sin(0,2 \cdot t)$ . График представлен на рис. 1.5.4 а), входная неконтролируемая переменная равна:  $\lambda(t) = 1 + 0.01 \sin(0,01 \cdot t)$ , график переменной представлен на рис. 1.5.4 б).

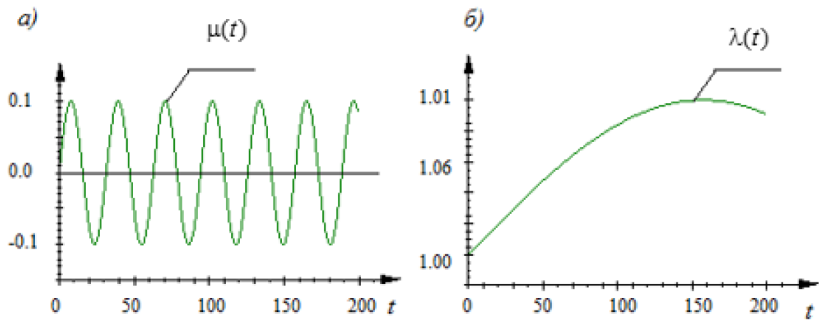


Рис. 1.5.4:

- а) входное не управляемое, но контролируемое воздействие  $\mu(t)$ ;  
 б) входное неконтролируемое воздействие  $\lambda(t)$

Модель объекта, полученная с использованием непараметрической оценки (1.5.6), представлена на рис. 1.5.5:

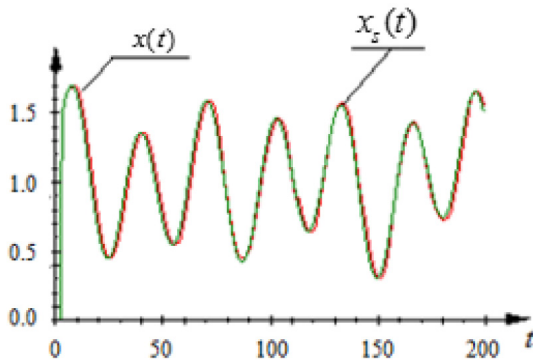
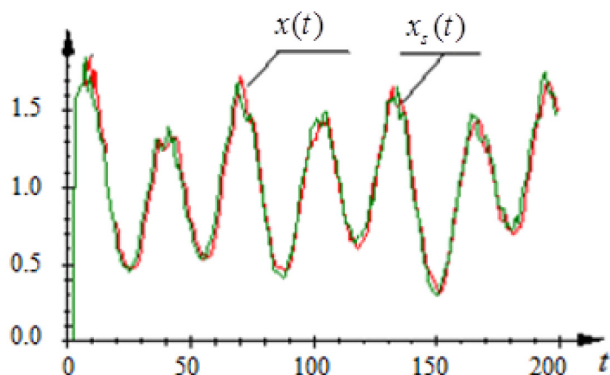


Рис. 1.5.5. Результаты моделирования динамического объекта (1.5.5) при частично известной параметрической структуре модели

В эксперименте, показанном на рис. 1.5.5, относительная ошибка моделирования равна  $W=0,015$ . На рис. 1.5.5 видно, что использование непараметрической оценки (1.5.7) позволяет построить достаточно качественные модели динамических объектов, если глубина памяти  $k$  известна.

Пусть на объект действует внешнее возмущающее воздействие  $\xi(t) = 7\%$ . Результаты данного эксперимента представлены на рис. 1.5.6.



*Рис. 1.5.6. Результаты моделирования динамического объекта (1.5.5) при частично известной параметрической структуре модели, при внешней помехе 7%*

В эксперименте, представленном на рис. 1.5.6, относительная ошибка моделирования равна  $W=0,09$ . Результаты моделирования показали, что непараметрическая модель (1.5.7) может быть применима в задачах идентификации в условиях внешних помех.

В следующих двух экспериментах неконтролируемая входная переменная равна соответственно:  $\lambda_1(t) = 1 + 0.6\sin(0,1 \cdot t)$  и  $\lambda_2(t) = 0.5\sin(0,5 \cdot t)$  (рис. 1.5.7 а). Результаты моделирования при указанных значениях представлены на рис. 1.5.7 б.

С дальнейшим увеличением неконтролируемой входной переменной  $\lambda(t)$  точность модели будет значительно понижаться. Здесь необходимо введение дополнительных средств контроля переменной  $\lambda(t)$  для повышения качества идентификации.

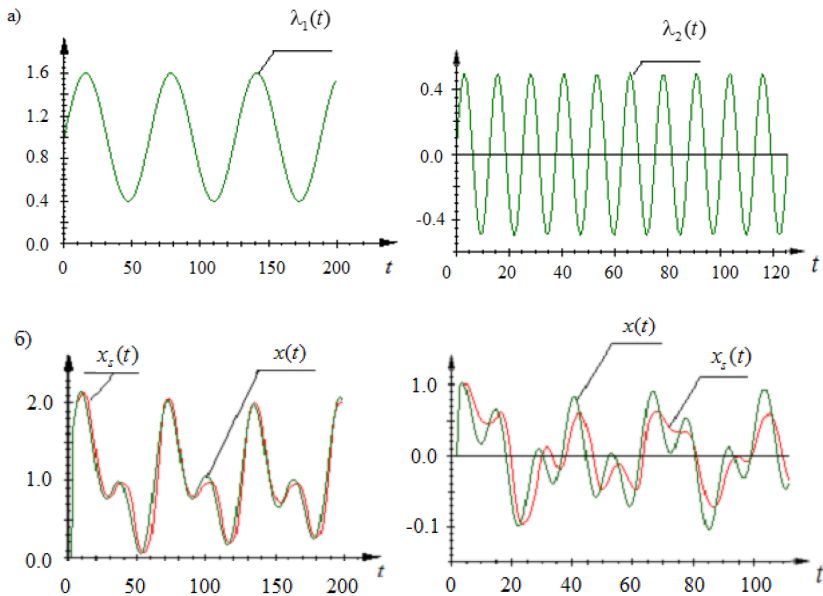


Рис. 1.5.7: а) Входная неконтролируемая переменная  $\lambda(t)$ ;  
 б) Результаты моделирования при различных вариантах  
 неконтролируемой переменной  $\lambda(t)$

## 1.6. Определение параметрической структуры линейного динамического объекта

Одной из основных проблем современной теории идентификации является определение структуры модели исследуемого объекта. На сегодняшний день большинство работ по данной проблеме посвящено методам параметрической идентификации [132; 133; 139], где структура процесса постулируется с точностью до вектора параметров, исходя из имеющейся априорной информации. Причем выбор структуры модели процесса основывается на накопленном опыте работы с подобными объектами, а также может осуществляться методом перебора различных моделей из заданного класса. В условиях недостатка априорной информации

об объекте исследования такие подходы малоэффективны из-за наличия существующего многообразия процессов, их сложности и малоизученности.

В научной литературе по данной проблематике можно выделить два основных подхода. Первый состоит в решении задачи выбора подпространства регрессоров линейной (по параметрам) модели, как, например, метод группового учета аргументов [54; 117]. Сущность метода состоит в выборе регрессионных моделей оптимальной сложности, где под сложностью понимается число параметров модели. Таким образом, в рамках данного метода осуществляется перебор многих моделей-претендентов с различным числом параметров по ряду критериев. В результате находится модель оптимальной структуры в виде одного уравнения или системы уравнений [54]. В работе [20] предлагается метод восстановления модели, в котором сначала следует этап выбора предполагаемой структуры из априорной информации, настройка параметров модели с использованием рекуррентных методов, а далее на основе имеющейся выборки измерений выполняется проверка предложенной модели. В случае получения неудовлетворительных результатов моделирования структура модели подлежит доработке, а параметры модели настраиваются заново. Второй подход состоит в выборе порядка разностного линейного уравнения. В данной области можно выделить несколько алгоритмов, позволяющих определить истинный порядок линейной модели  $k$  или же хотя бы ограничить число возможных порядков модели  $k_{max}$ . К последним относится так называемый тест на нормальность распределения (Normalitytest), а также алгоритм, основанный на вычислении коэффициента детерминанта (Determinantratio test). Среди алгоритмов, позволяющих определить точный порядок  $k$ , можно выделить: статистический F-тест (Statistical F-test), тест на независимость

(Independencetest) и алгоритм, основанный на вычислении ошибки сигнала (Signalerrortest). Еще одним методом, позволяющим определить порядок, является метод структурной идентификации динамических систем на основе анализа информационных портретов, изложенный в [59]. Здесь предложена процедура нахождения порядка модели, основанная на минимизации ширины интервала изменения коэффициента структурности. В настоящем разделе предполагается новый метод определения структуры линейного динамического объекта, основанный на применении непараметрической теории идентификации [76; 77; 79]. В основу предлагаемого метода ложится правило выделения существенных переменных в зависимости от коэффициента размытости  $c_s$  ядерной функции  $H(\cdot)$  в непараметрической модели, предложенное профессором А.В. Медведевым в [75].

**Постановка задачи идентификации.** Пусть объект представляет собой одномерную динамическую систему и описывается дискретным уравнением (1.5.1). При идентификации динамической системы (1.5.1) ее параметрическую модель естественно принять в форме:

$$x_s = f_s(x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_t, \alpha), \quad (1.6.1)$$

где  $\alpha$  – вектор параметров, подлежащий оцениванию на основании обучающей выборки. Таким образом, в случае линейной динамической системы определение структуры динамического объекта (1.5.1) сводится к определению переменных, входящих в состав модели (1.6.1).

В рассматриваемой задаче контроль входных/выходных переменных осуществляется через одинаковые интервалы  $\Delta t$ . Производя соответствующие измерения, получаем исходную выборку входных/выходных переменных  $\{x_i, u_i, i = 1, s\}$ , где  $s$  – объем выборки. Задача состоит в определении запаздывающих на определенные такты выходных переменных



$x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ , которые необходимо учесть в модели (1.6.1), что позволит сделать предположение о параметрической структуре модели динамического объекта (1.5.1).

**Выделение существенных переменных.** В классическом случае задача идентификации состоит в оценивании класса операторов на основе выборки  $\{x_i, u_i, i = 1, s\}$ . Таким образом, в качестве оценки модели объекта может быть принято условное математическое ожидание вида:

$$x_s(t) = M\{x(t) / u(t)\}. \quad (1.6.2)$$

В случае когда динамический объект описывается дифференциальным уравнением, при дискретизации, итоговое разностное уравнение будет содержать последовательно все переменные:  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$ . Этому соответствует блок-схема моделирования, изображенная на рис. 1.5. Тогда в качестве непараметрической модели объекта можно использовать модель, в которой все коэффициенты разностного уравнения будут учтены:

$$x_s^t = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s x_i \cdot H\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \prod_{j=1}^k \frac{1}{c_s^{x^j}} H\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^{x^j}}\right). \quad (1.6.3)$$

Следует учитывать, что модель вида (1.6.3) можно использовать только при равных интервалах измерения  $\Delta t$ . Оптимальные параметры размытости  $c_s^{*x^1}, c_s^{*x^2}, \dots, c_s^{*x^k}$  при наличии обучающей выборки находятся из задачи минимизации показателя соответствия выхода объекта  $x_t$  и выхода модели  $x_s^t$ , основанного на методе скользящего экзамена, когда в модели (1.6.3) по индексу  $i$  исключается  $q$ -е наблюдение переменной, предъявляемой для экзамена:

$$R(c_s^{*x^1}, c_s^{*x^2}, \dots, c_s^{*x^k}) = \sum_{q=1}^s (x_s^q - x_t^q)^2 = \min_{c_s^{x^1}, c_s^{x^2}, \dots, c_s^{x^k}}, q \neq i, \quad (1.6.4)$$

где индекс  $i$  фигурирует в формуле (1.6.3).

Существенным в оценке (1.6.3) является то, что в соответствии с каждой выходной запаздывающей переменной  $x_{s-1}, \dots, x_{s-k}$  на некоторые величины ставится свой коэффициент размытости ядра  $c_s^{x^1}, \dots, c_s^{x^k}$ .

Из представленных выше моделей видно, что степень вклада той или иной выходной переменной из правой части уравнений в итоговое значение оценки зависит от

$$\frac{1}{c_s^{x^j}} H\left(\frac{x_{s-j} - x_{t-j}}{c_s^{x^j}}\right). \quad (1.6.5)$$

Что касается первого множителя  $\frac{1}{c_s^{x^j}}$  из (1.6.5), наблюдается следующая зависимость: чем меньше  $c_s^{x^j}$ , тем больший вклад значение  $\frac{1}{c_s^{x^j}}$  вносит в итоговую оценку. Таким образом, можно построить следующую цепочку неравенств:

$$\text{если } c_s^{x^1} < c_s^{x^2} < \dots < c_s^{x^k}, \text{ то } \frac{1}{c_s^{x^1}} > \frac{1}{c_s^{x^2}} > \dots > \frac{1}{c_s^{x^k}}. \quad (1.6.6)$$

Рассмотрим вторую составляющую уравнения (1.6.5). Коэффициенты  $c_s^{x^j}$  и ядерная функция  $H(\cdot)$  должны удовлетворять следующему свойству:

$$\frac{1}{c_s^w} \int_{\Omega(u)} \dot{I} \left( \frac{w - w_i}{c_s^w} \right) dw = 1, \quad (1.6.7)$$

где  $w$  – некоторая переменная. Исходя из данного условия, при учете, что  $c_s^{x^1} = c_s^{*x^1}, c_s^{x^2} = c_s^{*x^2}, \dots, c_s^{x^k} = c_s^{*x^k}$ , можно построить следующую последовательность неравенств:

если  $c_s^{*x^1} < c_s^{*x^2} < \dots < c_s^{*x^k}$ , то

$$H\left(\frac{x_{s-1} - x_{t-1}}{c_s^{*x^1}}\right) < H\left(\frac{x_{s-2} - x_{t-2}}{c_s^{*x^2}}\right) \dots < H\left(\frac{x_{s-k} - x_{t-k}}{c_s^{*x^k}}\right).$$

Приведем пример. Пусть  $c_s^{*x^1}$  коэффициент размытости ядра при  $x_{s-1}$ , а  $c_s^{*x^2}$  – при  $x_{s-2}$ . Если  $c_s^{*x^1} < c_s^{*x^2}$ , то  $H\left(\frac{x_{s-1} - x_{t-1}}{c_s^{*x^1}}\right) < H\left(\frac{x_{s-2} - x_{t-k}}{c_s^{*x^2}}\right)$ , и тогда выходная переменная  $x_{s-1}$  имеет большее влияние на выходную величину, чем  $x_{s-2}$ . Графически это выражается следующим образом (рис. 1.6.1).

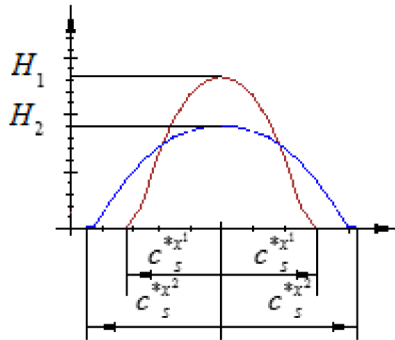


Рис. 1.6.1. Зависимость величины значения ядерной колоколообразной функции  $H(\cdot)$  от величины коэффициента размытости ядра  $c_s$

На рис. 1.6.1:  $H_1 = H\left(\frac{x_{s-1} - x_{t-1}}{c_s^{*x^1}}\right)$ ,  $H_2 = H\left(\frac{x_{s-2} - x_{t-k}}{c_s^{*x^2}}\right)$ .

Алгоритм вычисления значимых переменных  $x_{s-j}$  строится по следующей схеме. Сначала задаем начальное значение  $k$ . Строим модель по формуле (1.6.3) и считаем относительную ошибку моделирования  $W_0$ :

$$W = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (x_i - x_i^s)^2 / \sum_{i=1}^s \frac{1}{s-1} (m_x - x_i)^2},$$

где  $m_x$  – математическое ожидание.

Далее на каждой  $i$ -й итерации выполняем следующий набор действий.

1. Для каждого коэффициента  $c_s^{x^1}, \dots, c_s^{x^k}$  находится оптимальное значение:  $c_s^{x^1} = c_s^{*x^1}, c_s^{x^2} = c_s^{*x^2}, \dots, c_s^{x^k} = c_s^{*x^k}$ .

2. Находим из всех полученных значений максимальное –  $c_{\max\_s}^{x^j}$ .

3. Строим модель по формуле (1.6.3), исключая множитель  $H\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^{*x^j}}\right)$ , при учете, что j-номер при  $c_{\max\_s}^{x^j}$ .

4. Считаем относительную ошибку  $W_i$ .

Данные действия будут повторяться, пока  $W_i \geq W_{i-1}$ .

Предложенный алгоритм верен также для случая непараметрической оценки, принятой в виде:

$$x_s^f = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \cdot \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^{x[j]}}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^{x[j]}}\right)}. \quad (1.6.8)$$

Точность предложенного алгоритма была проверена в ходе проведения многочисленных вычислительных экспериментов, в которых исследуемые динамические объекты описывались различными разностными уравнениями. Для иллюстрации работоспособности предложенного алгоритма ниже будет рассмотрен пример восстановления структуры линейного динамического объекта.

**Вычислительный эксперимент.** Для вычислительного эксперимента был выбран объект, описывающийся уравнением вида:

$$x_t = 2.69 \cdot x_{t-1} - 2.46x_{t-2} + 0.73x_{t-3} + 0.015u_t. \quad (1.6.9)$$

Зададим начальное значение  $k = 6$ . Результаты моделирования с использованием формулы (1.6.8) представлены на рис. 1.6.2.

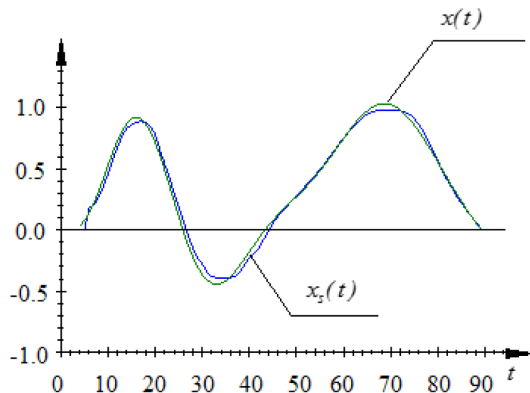


Рис. 1.6.2. Результаты моделирования процесса (1.6.9) при значении  $k=6$

Относительная ошибка моделирования:  $W_0 = 0,017$ . Далее находим оптимальные коэффициенты с использованием метода деформированного многогранника. Найденные коэффициенты равны:  $c_4^* = 0,675$  при  $u_t$ ,  $c_1^* = 0,131$  при  $x_{t-1}$ ,  $c_2^* = 0,186$  при  $x_{t-2}$ ,  $c_3^* = 0,412$  при  $x_{t-3}$ ,  $c_5^* = 1,023$  при  $x_{t-4}$ ,  $c_6^* = 1,988$  при  $x_{t-5}$ ,  $c_7^* = 1,876$  при  $x_{t-6}$ . Зависимость между полученными коэффициентами и значениями колоколообразной функции представлена на рис. 1.6.3.

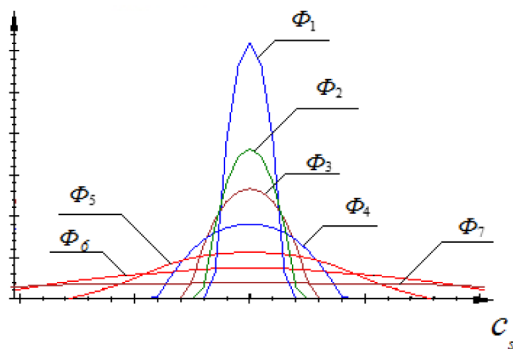


Рис. 1.6.3. Зависимость величины значений ядерной колоколообразной функции  $\Phi(\cdot)$  от величин полученных оптимальных коэффициентов размытости ядра  $c_s^{*u}, c_s^{*x^1}, \dots, c_s^{*x^6}$

На рис. 1.6.3:

$$\Phi_1 = \Phi\left(\frac{u_s - u_t}{c_s^{*u}}\right), \Phi_2 = \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{t-1}}{c_s^{*x^1}}\right), \dots, \Phi_7 = \Phi\left(\frac{x_{s-6} - x_{t-6}}{c_s^{*x^6}}\right).$$

После выполнения всех этапов алгоритма были исключены переменные:  $x_{t-4}$ ,  $x_{t-5}$ ,  $x_{t-6}$ . Таким образом, полученная итоговая структура динамического объекта равна:

$$x_s = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + \beta u_t,$$

что соответствует структуре разностного уравнения объекта (1.6.9), а непараметрическая модель имеет вид:

$$x_t^s = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \cdot \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^{x[1]}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^{x[2]}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^{x[3]}}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^{x[1]}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^{x[2]}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^{x[3]}}\right)}. \quad (1.6.10)$$

Результаты моделирования с использованием формулы (1.6.10) представлены ниже.

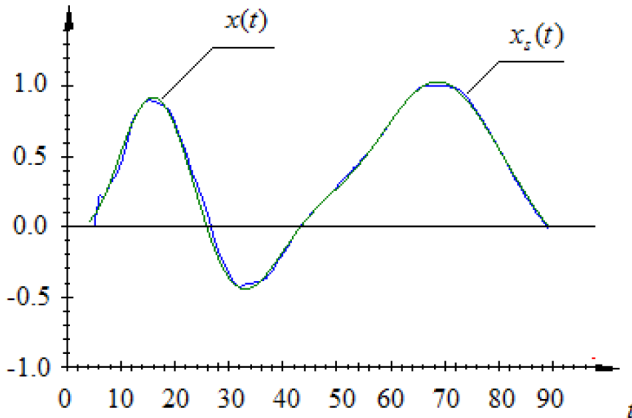


Рис. 1.6.4. Результаты моделирования процесса (1.6.9) при использовании модели (1.6.10)

Относительная ошибка моделирования равна  $W_3 = 0,005$ . Таким образом, можно сделать вывод, что использование данного алгоритма позволяет значительно улучшить качество непараметрической модели путем определения глубины памяти динамического процесса, если последняя из априорной информации неизвестна.

Для оценки эффективности разработанного непараметрического алгоритма было произведено сравнение с известными методами, позволяющими определить порядок разностного уравнения линейного динамического объекта, а также с алгоритмом, осуществляющим перебор всех возможных порядков модели, в котором лучшим является тот, при котором относительная ошибка моделирования будет минимальной. В качестве исследуемого объекта был взят объект, описываемый разностным уравнением (1.6.9). Исследования проводились в условиях действия внешних помех. Порядок  $k$  определялся из диапазона 1–10. Результаты сравнения представлены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

**Сравнение эффективности работы алгоритмов определения  $k$**

	Допустимый уровень помех, %	Время вычисления точного порядка $k$ , мсек	Возможность определения $k$ в условиях нормального функционирования
Statistical F-test	14	5923	Да
Independencetest	8	4997	Да
Signal error test	9	5320	Нет
Перебор	14	4377	Да
Непараметрический алгоритм	16	3209	Да

Таким образом, предлагаемый непараметрический алгоритм более устойчив к внешним помехам и позволяет определить точный порядок модели динамического объекта за меньшее количество времени в условиях нормального функционирования объекта.

Непараметрический алгоритм может быть применен также и к нелинейным динамическим системам. В этом случае алгоритм определяет только глубину памяти объекта, что позволяет частично параметризовать непараметрическую модель и как следствие повысить качество моделирования. Ниже будет подробно рассмотрен данный случай.

## 1.7. Непараметрические алгоритмы идентификации объектов с памятью

Как отмечалось ранее, линейные динамические объекты могут описываться либо линейными дифференциальными уравнениями вида:

$$\alpha_k \frac{d^k x}{dt^k} + \alpha_{k-1} \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + x(t) = u(t), \quad (1.7.1)$$

либо их разностными аналогами:

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \beta_{t-k} + u_t, \quad (1.7.2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  и  $\beta_1, \dots, \beta_k$  – неизвестные параметры в соответствующих уравнениях. Блок-схема идентификации подобного рода процессов была представлена на рис. 1.5. Схема, изображенная на рис. 1.5, является классической, рассматриваемой в теории управления [134]. Следует отметить, что рассмотрение динамического процесса с помощью данной схемы не является единственным и не охватывает всех особенностей реально протекающих процессов, зависящих от их характера, свойств, средств контроля и т. п. Ниже бу-



дет рассмотрена схема, более адекватная многим существующим реальным задачам практики. Так, например, одна из переменных процесса, например  $x_{t-2}$  может отсутствовать, а конечное выходное воздействие может зависеть только от переменных  $x_{t-1}, x_{t-3}$  и входного воздействия  $u_t$ :

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-3} + \beta_3 + u_t. \quad (1.7.3)$$

Таким образом, блок-схема идентификации процесса (1.7.3) примет вид, изображенный на рис. 1.7.1.

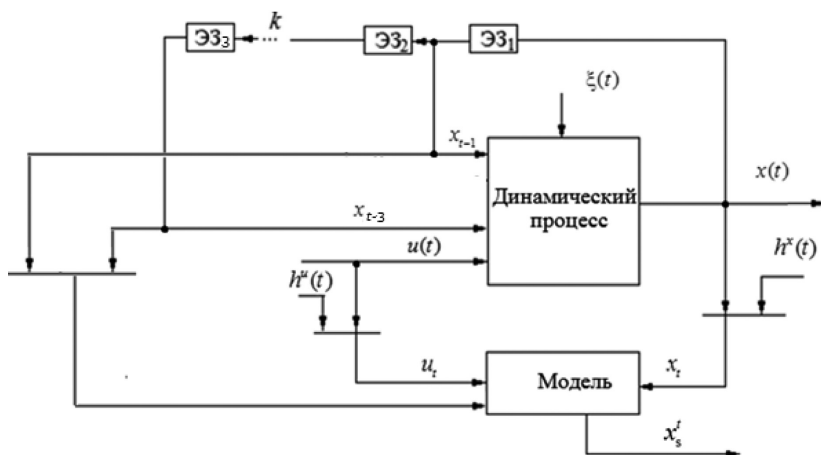


Рис. 1.7.1. Блок-схема моделирования объекта с памятью при фиксированных запаздывающих на соответствующее число тактов выходных переменных

Подобного рода объекты ранее описывались рядом авторов, как:

- сезонные процессы (Бокс, Дженкинс) [20];
- циклические временные ряды (Рао, Кашьяп) [62];
- объекты с памятью (Фельдбаум) [128].

Все описанные выше процессы характеризуются выраженным циклическим поведением с некоторым периодом  $T$ . Один из важных вопросов при работе с данным классом

объектов – имеет ли разностное уравнение объекта с памятью соответствующий аналог в виде дифференциального уравнения. Рассмотрим следующую ситуацию. В случае когда динамический объект описывается дифференциальным уравнением, при дискретизации, итоговое разностное уравнение будет содержать все переменные:  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$ . Дискретизацию дифференциального уравнения можно осуществить множеством способов. Одним из методов получения дискретных аналогов дифференциального уравнения является метод конечных разностей – численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$a \frac{d^3 x}{dt^3} + b \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + dx(t) = u(t). \quad (1.7.4)$$

При использовании метода конечных разностей дискретными аналогами первой, второй и третьей производных будут являться следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x}{dt^3} &= \frac{x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} - x_{t-3}}{h^3}; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}}{h^2}; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x_t - x_{t-1}}{h}. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Подставляя аналоги производных в дискретном виде (1.7.5) в формулу (1.7.4), получаем следующее уравнение:

$$a \frac{x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} - x_{t-3}}{h^3} + b \frac{x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}}{h^2} + c \frac{x_t - x_{t-1}}{h} + dx_t = u_t. \quad (1.7.6)$$

Выражая из (1.7.6) выходную переменную процесса  $x_t$ , получаем:

$$x_t = \frac{\left(\frac{3a}{h^3} + \frac{b}{h^2} + \frac{c}{h}\right)x_{t-1} - \left(\frac{3a}{h^3} + \frac{b}{h^2}\right)x_{t-2} + \frac{3a}{h^3}x_{t-3} + u_t}{\frac{a}{h^3} + \frac{b}{h^2} + \frac{c}{h} + d}. \quad (1.7.7)$$

Предположим, что коэффициент при  $x_{t-2}$  равен 0. Это возможно при:

$$\frac{\frac{3a}{h^3} + \frac{b}{h^2}}{\frac{a}{h^3} + \frac{b}{h^2} + \frac{c}{h} + d} = 0. \quad (1.7.8)$$

Выражение (1.7.8) равняется нулю при равенстве нулю числителя:

$$\frac{3a}{h^3} + \frac{b}{h^2} = 0. \quad (1.7.9)$$

Так как коэффициенты  $a$  и  $b$  постоянны и не равны нулю, шаг дискретизации  $h$  также является положительным числом, не равным нулю. Выражение (1.7.9) выполняется только при одном определенном значении шага дискретизации  $h$ , равном:

$$\begin{aligned} 3a + bh &= 0 \\ h &= \frac{-3a}{b}. \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Таким образом, предположение о том, что коэффициент при  $x_{t-2}$  может быть равен нулю при любом  $h$ , неверно. То есть коэффициент при  $x_{t-2}$  дифференциального уравнения

третьего порядка может обратиться в ноль только при единственном  $h$ . Соответственно, при отличных от (1.7.10) значениях шага дискретизации, при отсутствии переменной  $x_{t-2}$  в уравнении процесса разностное уравнение не будет иметь аналогов среди дифференциальных уравнений в непрерывном времени.

Следующим вопросом, касающимся объектов с памятью, является отношение данного типа процессов к линейным. Для ответа на этот вопрос воспользуемся принципом суперпозиции. Рассмотрим следующий объект с памятью:

$$x_t = 0.6x_{t-1} - 0.3x_{t-5} + u_t. \quad (1.7.11)$$

Переходная характеристика данного процесса имеет вид, представленный на рис. 1.7.2:

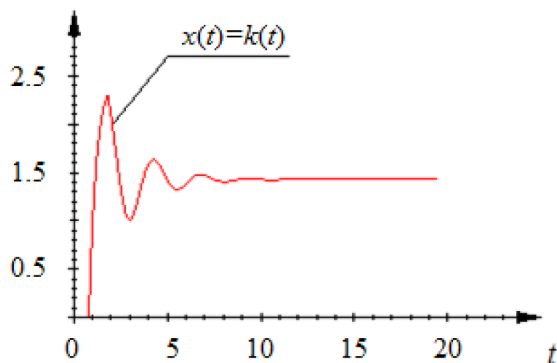


Рис. 1.7.2. Переходная характеристика процесса (1.7.11)

Принцип суперпозиции выполняется, если выполняется следующее условие: при суммировании любых двух входных сигналов соответствующие выходные сигналы суммируются. Пусть на объект поступают два входных воздействия:  $u_1(t) = \cos(0.5t)$  и  $u_2(t) = 0.6 \sin(t)$ . Графики входных воздействий  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и их суммы  $u_1(t) + u_2(t)$  представлены на рис. 1.7.3:

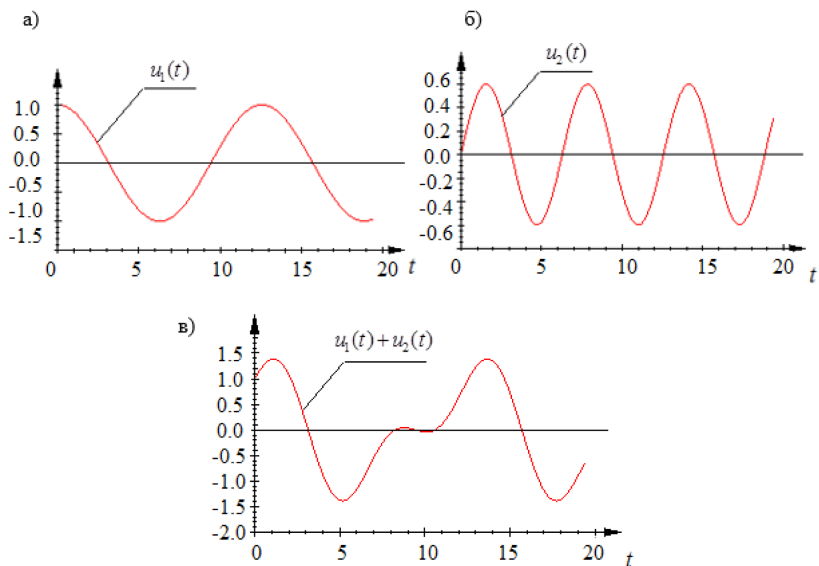


Рис. 1.7.3. Графики входных воздействий: а)  $u_1(t) = \cos(0.5t)$ ,  
 б)  $u_2(t) = 0.6\sin(t)$  в)  $u_1(t) + u_2(t) = \cos(0.5t) + 0.6\sin(t)$ ;

Если система является линейной, то, исходя из принципа суперпозиции, должно выполняться равенство (1.6.1). Из аналитических расчетов следует, что равенство (1.6.1) для процесса (1.7.11) выполняется. Графическое подтверждение данного факта представлено на рис. 1.7.4.

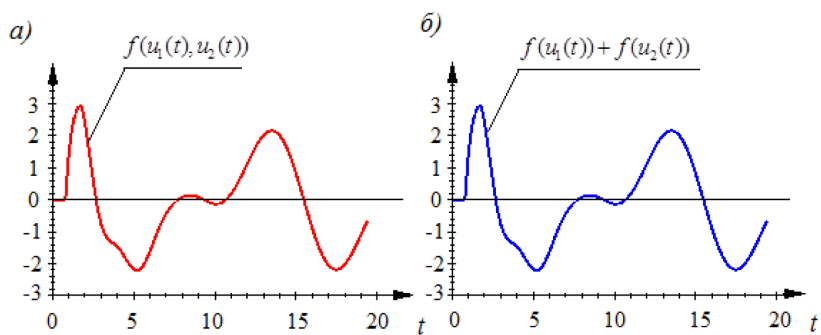


Рис. 1.7.4. Графики функций:  $f(u_1(t), u_2(t))$  и  $f(u_1(t)) + f(u_2(t))$

Таким образом, объекты с памятью типа (1.7.11) являются линейными динамическими объектами.

**Методы идентификации объектов с памятью.** В книге [62] авторы приводят следующую классификацию моделей, описывающую динамические объекты с памятью.

Класс 1. Подкласс моделей авторегрессии, используемых в моделировании «циклических» временных рядов, содержащий члены вида  $x_{t-T}$ , где  $T$  приблизительно равно периоду:

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \dots + a_m x_{t-m} + \mathbf{a}_T \mathbf{x}_{t-T} + \omega_t \quad (1.7.12)$$

Если  $T=10$ , значит, в модели (1.7.12) отсутствуют члены  $x(t-3), \dots, x(t-9)$ . В данном случае говорят, что модель (1.7.12) имеет несплошные авторегрессионные члены.

Класс 2. Ковариационно-стационарные ряды. Это модели авторегрессии с добавлением детерминированного тренда:

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \dots + a_m x_{t-m} + \omega_t + F, \quad (1.7.13)$$

где  $F$  – функция тренда.

Класс 3. Интегрированная модель авторегрессии с периодом  $T$ .

Ни один из вышеописанных классов моделей не является универсальным. Так, авторами [62] были исследованы несколько процессов и сделан вывод, что для каждого объекта с памятью необходимо подбирать свой класс моделей. Подробно авторами был исследован процесс солнечной активности. Выборка данных содержала 222 ежегодных наблюдения за период с 1747 по 1989 г. Было замечено, что в выборке имеются систематические колебания с периодом, примерно равным 11 годам. Данный процесс неоднократно изучался, начиная с работ Юла (1927), и чаще всего описывался моделями авторегрессионного типа. При этом наиболее согласованной с данными была модель второго порядка вида:

$$x_t = \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (1.7.14)$$

Р.Л. Рао и А.Р. Кашьяп рассмотрели пять различных моделей:

$$\begin{aligned}
 x_t &= \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t \\
 x_t &= \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t \\
 x_t &= \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_{10} x_{t-10} + \varepsilon_t \\
 x_t &= \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_{11} x_{t-11} + \varepsilon_t \\
 x_t &= \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_3 \cos \omega_1 t + \theta_4 \sin \omega_1 t + \varepsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{1.7.15}$$

и установили опытным путем, что наиболее подходящей моделью является авторегрессионная модель вида  $x_t = \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_{10} x_{t-10} + \varepsilon_t$ , имеющая несплошные авторегрессионные члены. Следует заметить, что несмотря на то, что период  $T=11$  годам является известной величиной, модель  $x_t = \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \theta_{11} x_{t-11} + u_t$  менее согласована с исходными данными. Таким образом, разработка алгоритмов, позволяющих восстановить структуры модели для объектов с памятью, является на сегодняшний день актуальной задачей.

Также следует выделить класс методов, имеющих в основе переборные алгоритмы поиска оптимальной модели. Рассмотрим следующий случай. Допустим, из имеющейся априорной информации известно, что максимальный порядок, который может иметь уравнение объекта, равен 5. Пример обратного перебора в случае выбора максимально возможного порядка  $k = 5$  представлен ниже:

$$\begin{aligned}
 x_t &= \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \beta_4 x_{t-4} + \beta_5 x_{t-5} + u_t \\
 x_t &= \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \beta_4 x_{t-4} + u_t \\
 x_t &= \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + u_t \\
 x_t &= \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + u_t \\
 x_t &= \beta_1 x_{t-1} + u_t
 \end{aligned}
 \tag{1.7.16}$$

Причем возможные модели (1.7.16) могут быть использованы только в случае, когда исследуемый процесс точно может быть описан дифференциальным уравнением или его соответствующим аналогом. Если же мы имеем дело с объектом с памятью, то количество возможных моделей для максимальной глубины памяти  $k=5$  возрастает до 29 уравнений. Естественно, что с возрастанием максимально возможного порядка модели число предполагаемых моделей будет увеличиваться. Таким образом, использование переборных методов также не является целесообразным при работе с подобного рода объектами.

**Идентификация объектов с памятью с использованием метода наименьших квадратов.** Допустим, из априорной информации уравнение объекта и параметрическая структура модели остаются неизвестными. При этом известно, что глубина памяти равна  $k = 3$ , а также имеется выборка входных/выходных переменных процесса  $(x_t, u_t, i = 1, s)$ . Для примера подобного процесса возьмем следующее уравнение:

$$x_t = 1.33x_{t-1} - 0.48x_{t-3} + u_t, \quad (1.7.17)$$

где  $u(t) = 0.038\sin(t)$ .

Делая вывод из имеющейся априорной информации, а именно, информации о линейности динамического объекта и значении глубины памяти, в качестве модели процесса целесообразно взять следующую параметрическую структуру:

$$\hat{x}_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + u_t, \quad (1.7.18)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – неизвестные параметры, которые определяются путем решения задачи минимизации квадратичного показателя соответствия выхода объекта и выхода модели:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sum_{k=1}^s (x_k - \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + \alpha_3 x_{k-3} + u_k)^2 = \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, k \neq i. \quad (1.7.19)$$



Решая соответствующую систему уравнений, находим значения параметров модели:  $\alpha_1 = 3.113, \alpha_2 = -3.273, \alpha_3 = 1.165$ . Результаты моделирования процесса (1.7.17) при входном воздействии:  $u_2(t) = 0.5\cos(0.6t) + 0.7\sin(0.4t)$  и найденных значениях параметров представлены на рис. 1.7.5.

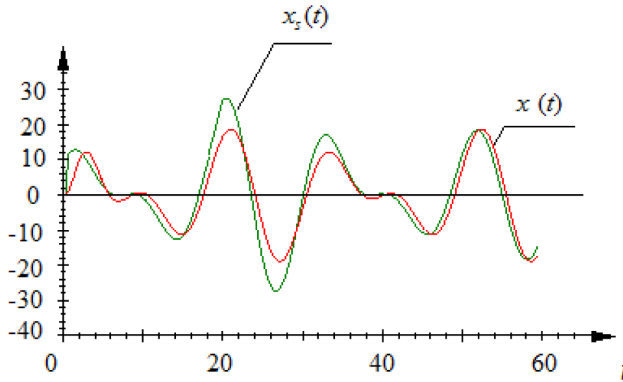


Рис. 1.7.5. Результаты моделирования объекта с памятью при использовании метода наименьших квадратов

Относительная ошибка моделирования в представленном эксперименте составляет  $W=0.308$ . Таким образом, исходя из результатов моделирования, а именно, величины относительной ошибки, а также несоответствия найденных значений параметров модели ( $\alpha_1 = 3.113, \alpha_2 = -3.273, \alpha_3 = 1.165$ ) истинным значениям ( $a_1 = 1,33, a_2 = 0, a_3 = 0,48$ ), можно сделать вывод, что данный метод не применим при идентификации объектов с памятью даже при условии знания значения глубины памяти из априорной информации.

**Непараметрическая идентификация объектов с памятью.** Непараметрические модели для объектов с памятью рассматриваются в двух вариантах. Один из них тесно связан с описанием объекта в виде интеграла Дюамеля. Второй путь состоит в частичной параметризации объекта,

то есть соответствует условиям как параметрической, так и непараметрической неопределенности.

В случае когда динамический объект описывается дифференциальным уравнением, как уже упоминалось ранее, при дискретизации, итоговое разностное уравнение будет содержать переменные:  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$ . Тогда в качестве непараметрической модели объекта можно использовать модель, в которой все коэффициенты разностного уравнения будут учтены (1.4.4). Если в случае описания объекта в виде дифференциального уравнения или его разностного аналога выбор непараметрической модели не представляет труда, то специальным вопросом является выбор вида модели для случая объекта с памятью. Допустим исследуемый процесс описывается, например, уравнением (1.7.17).

При выборе модели для подобного рода процесса возможно применить модель вида:

$$x_t^s = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}, \quad (1.7.20)$$

где последовательно учтены все запаздывающие на соответствующее число тактов выходные переменные, а также модель, где учтены только выходные переменные, непосредственно от которых зависит выход процесса:

$$x_t^s = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \cdot \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}. \quad (1.7.21)$$

Проверим различие двух представленных моделей в ходе численного исследования.

**Вычислительный эксперимент.** Пусть исследуемый объект является динамическим и описывается уравнением вида:

$$x_t = 0,1 \cdot x_{t-1} - 0,2 \cdot x_{t-3} + u_t. \quad (1.7.22)$$

Переходная характеристика данного объекта имеет вид, представленный на рис. 1.7.6.

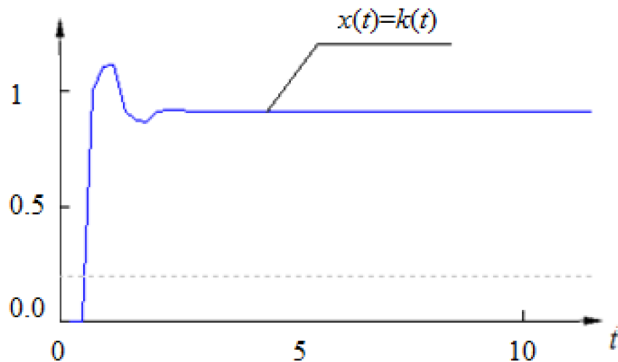


Рис. 1.7.6. *Переходная характеристика объекта с памятью (1.7.22)*

Пусть входное воздействие имеет вид:  $u(t) = \sin(0,5 \cdot t)$ . Модель объекта, полученная с помощью оценки (1.7.21), представлена на рис. 1.7.7.

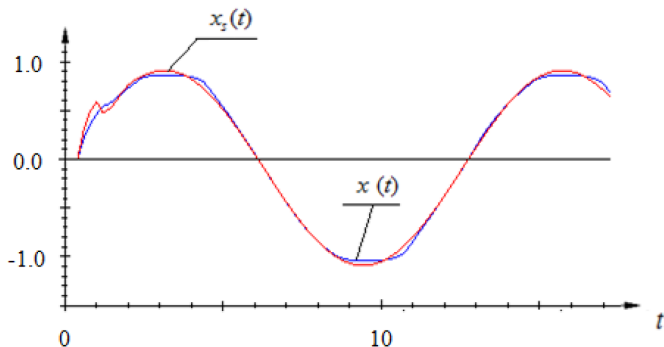
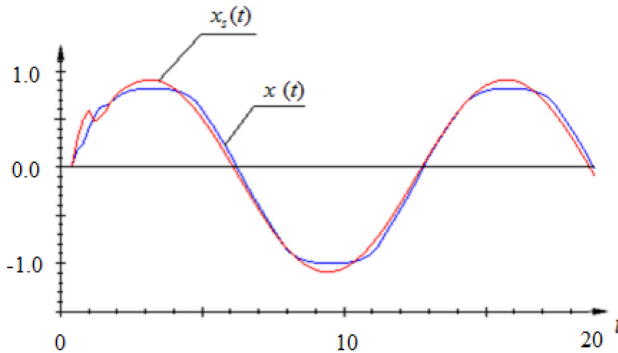


Рис. 1.7.7. *Результаты моделирования объекта с памятью (1.7.22) при частично известной параметрической структуре с помощью оценки (1.7.21)*

В данном эксперименте относительная ошибка моделирования равна  $W=0,189$ . Как можно увидеть из рис. 1.7.7 и значения относительной ошибки, полученная модель достаточно точна, и модели вида (1.7.21) могут эффективно использоваться при идентификации подобных процессов.

На рис. 1.7.8 представлены выход модели объекта и модель объекта, полученная с помощью модели (1.7.20).



*Рис. 1.7.8. Результаты моделирования объекта с памятью (1.7.22) при неизвестной параметрической структуре с использованием оценки (1.7.20)*

Относительная ошибка в данном случае возрастает до значения  $W= 0,206$ . Как видно из полученных графиков, данную модель также можно назвать удовлетворительной, хотя, очевидно, что она уступает первой. Вышеописанный алгоритм применим в условиях, когда в априорной информации содержатся сведения о величине  $k$  — глубины памяти динамического объекта. В условиях непараметрической неопределенности данный подход недостаточно эффективен. Возможным вариантом уточнения структуры модели объекта с памятью является применение алгоритма, подробно описанного в пункте 1.5. Рассмотрим процесс восстановления структуры модели для объекта с памятью. Пусть объект описывается следующим дискретным уравнением:

$$x_t = 0.2 \cdot x_{t-1} + 0.4x_{t-3} + 0.5u_t. \quad (1.7.23)$$

Выберем в качестве начального значения  $k = 4$ . Относительная ошибка моделирования, полученная на первой итерации, равна  $W_0 = 0,105$ . Далее следует этап нахождения оптимальных коэффициентов:  $c_4^* = 0,124$  при  $u_t$ ,  $c_1^* = 0,231$  при  $x_{t-1}$ ,  $c_2^* = 0,393$  при  $x_{t-2}$ ,  $c_3^* = 0,129$  при  $x_{t-3}$ ,  $c_5^* = 0,425$  при  $x_{t-4}$ . После исключения переменных  $x_{t-2}$  и  $x_{t-4}$  относительная ошибка моделирования сократилась до  $W_2 = 0,012$ , а параметрическая структура была найдена в виде:

$$x_s = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-3} + \beta u_t,$$

что соответствует структуре дискретного уравнения (1.7.23).

Еще одним из вариантов решения проблемы идентификации подобного рода объектов является применение непараметрических алгоритмов, основанных на использовании интегралов свертки, конкретнее интеграла Дюамеля (1.3.2), так как исследуемый класс динамических объектов относится к классу линейных систем.

Пусть исследуемый объект является динамическим и описывается уравнением вида:

$$x_t = 0,9 \cdot x_{t-1} - 0,25 \cdot x_{t-3} + 0.19u_t, \quad (1.7.24)$$

а входное воздействие имеет вид:  $u(t) = \sin(0,5 \cdot t)$ . Переходная характеристика данного процесса представлена на рис. 1.7.9.

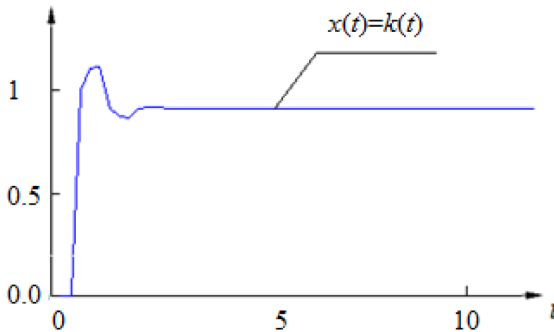


Рис. 1.7.9. Переходная характеристика процесса (1.7.24)

Модель объекта, полученная при использовании уравнения (1.3.2), представлена на рис. 1.7.10.

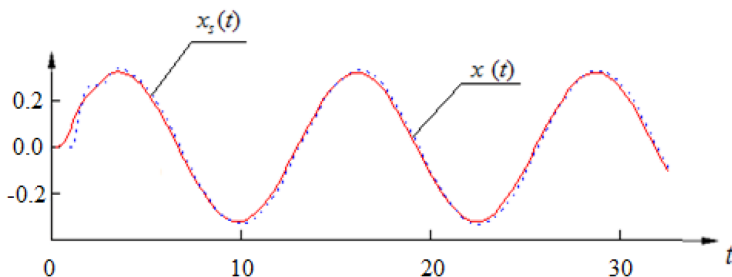


Рис. 1.7.10. Результаты моделирования объекта с памятью (1.7.24)

Относительная ошибка моделирования для данного эксперимента равна  $W = 0,12$ . Как и в предыдущем случае, можно сделать вывод, что непараметрический алгоритм (1.3.2) успешно справляется с задачей идентификации и модели вида (1.3.2) могут эффективно использоваться при идентификации динамических объектов с памятью.

## 1.8. Методы моделирования нелинейных динамических систем

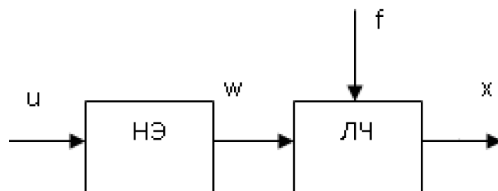
Рассмотрим задачу исследования нелинейных динамических систем, то есть систем, в состав которых входит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением (называемое «нелинейное звено» или «нелинейный элемент»). При этом уравнение считается нелинейным, если его коэффициенты являются функциями некоторых координат или их производных, а также когда некоторые координаты уравнения входят в него в виде произведений или степени, отличной от первой [16]. Нелинейной является зависимость, для которой не выполняется основное свойство линейности – принцип суперпозиции.

При исследовании реальных объектов и процессов достаточно часто требуется в моделях этих объектов отражать их динамические свойства. Любой объект можно представить в виде некоторой зависимости выходных переменных от входных. Таким образом, объект реагирует (выход) на возмущение, оказываемое входным (управляющим) воздействием, а характер такой реакции описывается некоторым законом. Динамические свойства объекта влияют на его реакцию, изменяя ее скорость, ускорение и другие свойства, то есть они обусловлены внутренними свойствами самого объекта и определяют характер поведения системы. Влияние, оказываемое динамическими свойствами, существенно и должно быть отражено в моделях для того, чтобы они обладали свойством адекватности, то есть совпадения соответствующих свойств модели и объекта в отношении цели моделирования.

Динамические объекты отличаются от статических наличием инерционности, силы, которая, помимо входных воздействий, воздействует на объект и изменяет его реакцию на эти воздействия. Реакция линейной динамической системы однозначно описывается его переходной характеристикой. Другой важный параметр, определяемый в динамических системах, – «время переходного процесса», в течение которого выход объекта достигает установившегося состояния. Наличие у объекта выраженных переходных процессов, то есть их значительная длительность во времени, – это фактор, указывающий на динамичность объекта.

При описании нелинейных систем дифференциальными уравнениями формируются уравнения для каждого устройства системы, линеаризуя, где возможно, характеристики устройств. Полученная в результате система дифференциальных уравнений состоит из линеаризованной динамической части, а также одного или нескольких нелинейных уравнений. Таким образом, большое число нелинейных си-

стем можно представить в виде контура с последовательным включением нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ), как показано на рис. 1.8.1[121].



*Рис. 1.8.1. Общая схема нелинейной системы:  
НЭ – нелинейный элемент; ЛЧ – линейная часть*

Если система содержит несколько нелинейных элементов, то их в ряде случаев можно заменить одним с результирующей статической характеристикой.

В общем случае нелинейные элементы могут быть разделены на существенно и несущественно нелинейные. Нелинейность считается несущественной, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе качественно не отличаются от процессов в реальной системе. Если такая замена невозможна и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то нелинейность является существенной [29]. Наиболее распространена классификация нелинейных систем по типу статических и динамических характеристик. Эти характеристики могут быть однозначными или нет, симметричными или несимметричными относительно начала координат.

Для построения математической модели используются теоретические и экспериментальные методы. Как показывает опыт, накопленный при проектировании и исследовании различных систем, математическая модель, сформированная только на основе теории, обычно значительно отли-



чается от реальной системы. Поэтому при проектировании реальных систем совместно с теоретическими исследованиями проводятся эксперименты, уточняющие и определяющие математические модели системы [102; 121].

Методы определения математических моделей динамических систем по результатам экспериментальных исследований являются предметом теории идентификации. Математическая модель в данном контексте означает математическое описание динамики поведения какой-либо системы или процесса в частотной или временной области.

В работе рассматриваются методы моделирования стационарных нелинейных динамических объектов в условиях, когда информации о порядке дифференциального или конечноразностного уравнения, описывающего объект, нет. Другими словами, рассматриваются методы моделирования объектов с непараметрической неопределенностью. Модели такого типа не требуют наличия дополнительной информации, кроме информации о классе моделей, удовлетворительно описывающих объект идентификации.

Нелинейная динамическая система (объект с памятью) в общем виде может быть представлена в дискретном времени следующим образом [134]:

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-m}, \alpha), \quad (1.8.1)$$

где  $u$  – входное (управляющее воздействие),  $x$  – выход,  $f$  – некоторая функция (функционал),  $m, n$  – «глубина» памяти соответственно входной и выходной переменных, которая может быть найдена на основании априорной информации об объекте (рассматриваются системы, для которых  $m, n$  неизвестны),  $\alpha$  – вектор неизвестных параметров, подлежащих определению по результатам наблюдений входных/выходных переменных. В этом случае задача идентификации нелинейных динамических систем рассматривается в условиях частичной непараметрической неопределенности.

Самые распространенные методы идентификации нелинейных систем могут быть условно разделены на следующие группы:

- методы, основанные на представлении системы в виде суммы рядов Вольтерра;

- методы, основанные на линеаризации характеристик системы;

- методы, основанные на представлении системы в виде различных сочетаний линейного динамического и нелинейного безынерционного блоков (модели класса Винера и Гаммерштейна).

Каждый из названных методов не является универсальным, так как они применяются только для некоторых классов нелинейных систем. Рассмотрим некоторые из указанных методов подробнее.

*Методы, основанные на представлении системы в виде суммы рядов Вольтерра.* В теории моделирования нелинейных динамических систем распространен универсальный аппарат функциональных рядов Вольтерра, представляющий реакцию нелинейной системы на внешнее воздействие в виде ряда [11; 12; 13; 26; 111; 112; 163; 170 и др.]:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i, t=0 \dots T, \quad (1.8.2)$$

где  $u(t)$  и  $x(t)$  – значения соответственно входного и выходного сигналов, уравнение описывает систему при нулевых начальных условиях, то есть при  $t=0$   $u(0)=0$ . Функции  $w_m(\tau)$ ,  $m=1, 2, \dots$  – ядра Вольтерра, которые подлежат идентификации. В этом выражении предполагается, что импульсные характеристики  $w_0(t)$ ,  $w_i(t_p, \dots, t_p)$ ,  $i=1, 2 \dots$  соответствуют устойчивым системам:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} w_0(\tau) = 0; \quad \lim_{\tau_1, \dots, \tau_i \rightarrow \infty} w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = 0 \quad (1.8.3)$$

и физически реализуемым системам, т. е.

$$w_0(t) = 0 \text{ при } t < 0; \quad w_i(t_p, \dots, t_p) = 0 \text{ при } t_k < 0 \quad (k=1, \dots, i). \quad (1.8.4)$$

Задача идентификации нелинейных динамических систем состоит в восстановлении (оценке параметров  $w_m$ ) уравнений процесса по наблюдениям входных/выходных переменных объекта. Кроме того, необходимо тем или иным способом выбрать или определить порядок системы  $m$ , т. е. число элементов ряда. Если его взять малым, то точность модели может оказаться недостаточной. Если же  $m$  взять заведомо большим, то объем вычислений возрастет значительно быстрее, чем точность модели.

Ряд Вольтерра является обобщением интеграла свертки, широко используемого в теории для описания поведения динамических систем. В результате можно построить модель системы в виде параллельного соединения звеньев, соответствующих каждому из слагаемых ряда. Ограничившись первым слагаемым, получим описание системы через интеграл Дюамеля:

$$\hat{x}(t) = \int_0^t w_1(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (1.8.5)$$

причем для идентификации ядра  $w_1$  (в данном случае его значение соответствует величине весовой характеристики линейной системы) достаточно найти реакцию объекта на тестовый сигнал в виде единичной функции Хевисайда, то есть переходную функцию системы.

Для моделирования существенно нелинейных объектов используется конечный отрезок ряда (1.8.2), состоящий из  $m \geq 2$  слагаемых, то есть:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^m \int_0^t \cdots \int_0^t w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i u(t - \tau_j) d\tau_j. \quad (1.8.6)$$

Построение модели нелинейной динамической системы часто связано с дополнительными исследованиями, учитывающими специфику моделируемого объекта. Для описания

нелинейных систем рядами Вольтерра существует множество методов. В общем виде рассмотрим несколько из них.

Предлагаемый в [11–13] подход основан на применении некоторого семейства входных возмущений, реакция системы на которые позволит получить оценки сечений ядер Вольтерра различного порядка. В этом случае выходной сигнал после каждого эксперимента должен учитывать составляющую, отражающую вклад только  $m$ -го слагаемого. Предполагается также, что входное возмущение  $u(t)$  – скалярная функция от времени, что обеспечивает симметричность ядер Вольтерра  $w_m$ ,  $m=2, n$  по всем переменным. Таким образом, вводится некоторое семейство пробных возмущений, имеющее  $(m-1)$  параметров, например:

$$u_{t_1, \dots, t_{(m-1)}}(t) = e(t) + \sum_{i=1}^{m-2} ((-1)^i \cdot e(t - \sum_{j=1}^i t_j)) + (-1)^{m-1} \cdot e(t - \sum_{j=1}^{m-1} t_j),$$

$$t=0..T \quad t_i=0..T \quad m \geq 2. \quad (1.8.7)$$

Тогда идентификация ядра  $w_m$  сводится к решению  $m$ -мерного линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода.

*Определение характеристик стохастических объектов по наблюдениям входного и выходного процессов* [36; 37; 52; 53; 71 и др.]. При построении моделей некоторых динамических объектов в большинстве случаев статистические характеристики входного и выходного процессов неизвестны. Вместо этого используют их оценки по измерениям реализаций процессов.

Модель исследуемого объекта строится при помощи функционального ряда Вольтерра вида (1.8.2) [26]. Реализации процессов  $u(t)$  и  $x(t)$  наблюдаются на конечных интервалах времени  $T_m^{(1)} \leq t \leq T_m^{(2)}$ , где  $m$  – номер соответствующего интервала ( $m=1, 2$ ). Критерием близости выхода объекта и его модели на каждом из интервалов наблюдения

является функционал, оценивающий среднеквадратичную погрешность:

$$F_m = \frac{1}{\Delta T_m} \int_{T_m^{(1)}}^{T_m^{(2)}} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt; \quad (1.8.8)$$

$$\Delta T_m = T_m^{(2)} - T_m^{(1)}.$$

Запишем его выражение через импульсные характеристики  $w_i(t_p, \dots, t_p)$ :

$$F_m = \tilde{x}^2(t) - 2 \sum_{i=0}^N \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \tilde{R}_i^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_i) \times$$

$$\times d\tau_1 \dots d\tau_i + \sum_{i,k=0}^N \int_0^{T_0} w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) w_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \times \quad , \quad (1.8.9)$$

$$\times \tilde{K}_{i+k}^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_i, \lambda_1, \dots, \lambda_k) d\tau_1 \dots d\tau_i d\lambda_1 \dots d\lambda_k,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^2(t) &= \frac{1}{\Delta T_m} \int_{T_m^{(1)}}^{T_m^{(2)}} x^2(t) dt; \\ \tilde{R}_i^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_i) &= \frac{1}{\Delta T_m} \int_{T_m^{(1)}}^{T_m^{(2)}} x(t) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_i) dt; \\ \tilde{K}_{i+k}^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_i, \lambda_1, \dots, \lambda_k) &= \frac{1}{\Delta T_m} \int_{T_m^{(1)}}^{T_m^{(2)}} u(t - \tau_1) \dots \\ &\dots u(t - \tau_i) u(t - \lambda_1) \dots u(t - \lambda_k) dt; \\ \tilde{K}_k^{(m)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) &= \frac{1}{\Delta T_m} \int_{T_m^{(1)}}^{T_m^{(2)}} u(t - \lambda_1) \dots u(t - \lambda_k) dt; \end{aligned} \right\} \quad (1.8.10)$$

Выражения (1.8.10) представляют собой оценки (автокорреляционной и взаимокорреляционной) моментных функций [71], построенные на реализациях процессов  $x(t)$  и  $u(t)$  в интервале  $[T_m^{(1)}, T_m^{(2)}]$ . Критерий  $F_m$  достигает минимума по  $w_i(t_p, \dots, t_i)$ , если:

$$\sum_{k=0}^N \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} w_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \tilde{K}_{n+k}^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) d\lambda_1 \dots d\lambda_k = \tilde{K}_n^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \\ t_1, \dots, t_n \stackrel{?}{=} 0, n=0, 1, \dots, N. \quad (1.8.11)$$

Выражение (1.8.11) определяет систему линейных интегральных уравнений относительно импульсных характеристик  $w_k(l_p, \dots, l_k)$ . При этом при переходе от одного интервала наблюдения  $m$  к другому  $m+1$  система изменяется. Для решения системы уравнений (1.8.11) можно использовать метод последовательных приближений, задавая набор начальных значений импульсных характеристик  $w_0^{(0)}(\tau_0)$ ,  $w_1^{(0)}(\tau_1), \dots, w_N^{(0)}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ . На интервале наблюдения  $m$  определяются оценки моментных функций  $\tilde{K}_{n+k}^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  и  $\tilde{R}_n^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Затем проводится рекуррентная процедура, позволяющая уточнять импульсные характеристики  $w_n^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$  по их предыдущим значениям, т. е. приблизить значения импульсных характеристик к тем, которые являются решением системы уравнений (1.8.10). Таким образом, если параметры алгоритма выбраны оптимально, то он позволяет получить такой набор импульсных характеристик, при котором достигается минимум функционала  $F$  (1.8.9).

Особенностью данного метода можно назвать то, что при вычислении значения импульсных характеристик критерием близости выхода объекта и его модели на каждом из интервалов наблюдения является функционал, оценивающий среднеквадратичную погрешность (1.8.8). Однако чтобы получить значения данного функционала, нужно иметь статисти-

ческие характеристики ансамбля реализаций процессов  $x(t)$  и  $x_j = \hat{b}$  либо наблюдать все реализации в этом ансамбле. Поэтому при восстановлении характеристик часто используется только функционал  $F_m$ . В этом случае возникают ошибки в работе алгоритма, связанные с неверным вычислением значений корреляционных функций в (1.8.10), которые невозможно адекватно оценить по единственной реализации  $x(t)$ .

Аппарат рядов Вольтерра универсален, т. е. не требует какого-то определенного вида или класса моделируемых нелинейных систем. Используя его, можно доказать ряд теоретических положений, например, его можно отобразить из временной области в частотную [16; 23]. Алгоритмы данного метода хорошо разработаны в теоретическом плане. При практическом построении моделей рядами Вольтерра исследователи сталкиваются с некоторыми проблемами. Типичная проблема связана с выбором подходящего порядка системы ( $m$ ), то есть количество элементов ряда, сумма которых описывала бы систему с требуемой точностью. В технических приложениях, где допустимо априорное предположение об относительно небольших величинах входных возмущений, возможно использование небольшого  $n$ :  $n < 3$  [13]. Для некоторых методов существует также проблема выбора тестовых возмущений, которые при идентификации каждого  $w_m$  ядра исключают влияние на отклик системы иных слагаемых, кроме  $m$ -го [11]. Основная трудность работы с рядами Вольтерра состоит в их многомерности. Определение ядра Вольтерра первого порядка  $w1(t1)$  – это одномерная задача. Определение ядра второго порядка  $w2(t1, t2)$  – это уже двухмерная задача. Экспериментаторы обычно вынуждены ограничиваться ядром третьего порядка  $w3(t1, t2, t3)$ , так как далее возникают значительные вычислительные трудности. Применение рядов Вольтерра требует проведения большого числа экспериментов над системой, что не всегда осуществимо.

*Методы, основанные на линейаризации системы.* Линейаризация является одним из методов приближенного представления нелинейных объектов, при котором исследование системы заменяется анализом линейной системы, в некотором смысле эквивалентной исходной. Идея линейаризации заключается в использовании линейной системы для аппроксимации поведения нелинейного объекта в окрестности некоторой точки. Среди подходов к линейаризации можно отметить следующие: метод замены переменных, кусочно-линейная аппроксимация, статистическая и гармоническая линейаризация др. [6; 90].

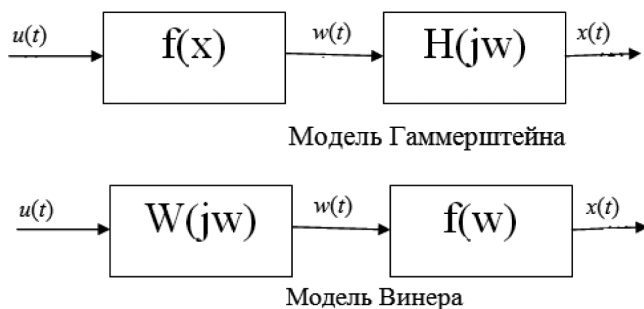
Применяя линейаризацию, можно выяснить многие качественные и количественные свойства нелинейной системы. Однако методы линейаризации имеют ограниченный характер, т. е. эквивалентность исходной нелинейной системы и ее линейного приближения сохраняется лишь для ограниченных пространственных или временных масштабов системы. Причем если система переходит с одного режима работы на другой, то необходимо изменить и ее линейаризованную модель. Особенностью данного класса методов можно считать то, что обычно линейаризация хорошо работает для слабо нелинейных объектов. Для существенно нелинейных объектов во многих случаях линейаризация неприемлема, так как «выхолащивает» нелинейную суть объекта исследования.

*Методы, основанные на представлении системы в виде моделей Винера и Гаммерштейна.* Основная особенность нелинейных динамических систем заключается в том, что они одновременно обладают нелинейными и динамическими свойствами, которые невозможно разделить. Описание нелинейной динамической системы в форме передаточного коэффициента (по аналогии с линейной системой) приводит к бесконечному многообразию передаточных звеньев  $H(j\omega)$ , тогда каждой реализации входного воздействия  $u(t)$  и отклика  $x(t)$  соответствует своя функция  $H(j\omega)$  [36; 37; 52].



Для упрощения моделирования нелинейный объект может быть представлен в виде некоторой комбинации линейных динамических и безынерционных нелинейных блоков. Таким образом, модель, которая описывает исследуемый объект с требуемой точностью, представляет собой наилучшую комбинацию линейных и нелинейных элементов и их параметров.

Простейшие модели нелинейного динамического объекта представляют собой последовательное соединение двух блоков. Первый вариант – модель Гаммерштейна – содержит на входе статический нелинейный блок, к выходу которого подсоединен линейный динамический блок. Второй вариант – модель Винера – получается в случае соединения блоков в обратном порядке [18; 52; 57; 58; 61; 123; 144; 143 и др.].



*Рис. 1.8.2. Модели класса Винера и Гаммерштейна*

Чтобы получить более точное описание нелинейного динамического объекта, необходимо использовать модели, которые могут состоять из множества параллельно соединенных простейших моделей. Требование применения множества параллельных ветвей модели интерпретируется как результат ряда последовательных итерационных процедур приближения. При каждой новой итерации строится дополнительная параллельная ветвь, уточняющая модель

исследуемого объекта [52]. Количество параллельных ветвей в составе модели зависит от сходимости итерационной процедуры.

В зависимости от того, на основе какого вида моделей строились итерационные процедуры приближения, может быть получена параллельная модель Гаммерштейна (рис. 1.8.3) или Винера (рис. 1.8.4).

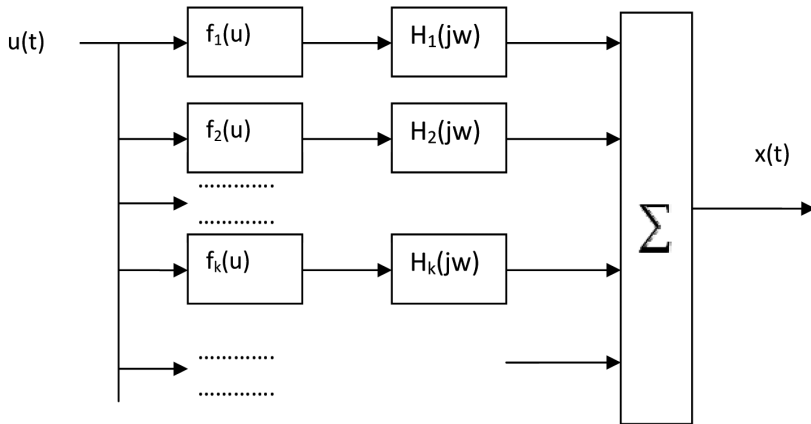


Рис. 1.8.3. Параллельная модель Гаммерштейна

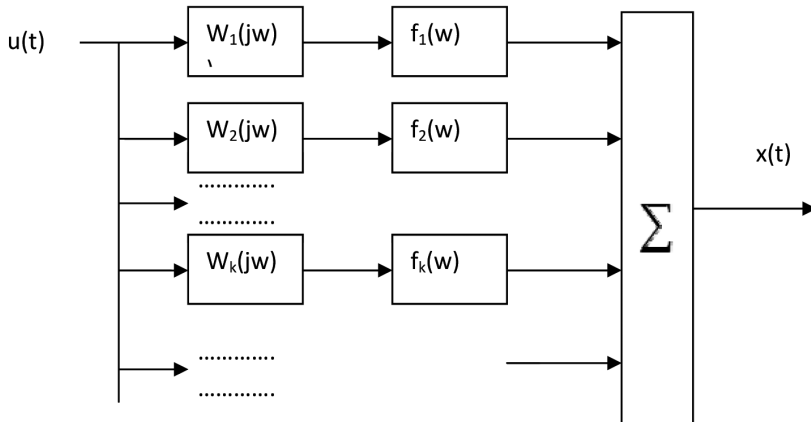


Рис. 1.8.4. Параллельная модель Винера

Преимуществом использования таких моделей (рис. 1.8.2) является их относительная простота. При этом нелинейные и динамические свойства исследуемого объекта разделены и сосредоточены во входном и выходном блоках. Линейный динамический блок должен воспроизводить динамические свойства исследуемого объекта, нелинейный блок – имитировать его нелинейные свойства. Однако простейшие модели часто описывают реальный объект лишь приближенно.

Особенность использования параллельных моделей с неограниченным числом ветвей (рис. 1.8.3, 1.8.4) состоит в избавлении от решения сложной задачи выбора структуры модели. Например, простейшая последовательная модель Винера примерно половину реальных объектов описывает лучше, чем простейшая модель Гаммерштейна. «Для большинства реальных объектов вопрос о выборе структуры параллельной модели определяется уже не точностью модели, а возможностями эффективной идентификации ее параметров» [22].

Для модели Винера часто применяют ряды Вольтерра. Разработан аппарат многомерных преобразований сигналов во временной и частотной областях. Существует также ортогональный многомерный корреляционный алгоритм идентификации ядер функционального ряда Вольтерра-Винера. В соответствии с ним любая модель Винера, содержащая любые нелинейные элементы, может быть симметризована [11] (ядра Вольтерра делаются симметричными). Недостатком реализации корреляционных процедур идентификации на практике являются их многомерность и трудность реализации идеального «белого шума», необходимого в большинстве таких методов. Предлагается подход к идентификации моделей Винера и Гаммерштейна, основанный на оценивании отдельно линейного динамического и нелинейного элементов систем. При этом характеристики исследуемых систем оцениваются на основании измерений входных и выходных переменных процесса как непараметрические статистики.

## 1.9. Непараметрическая модель систем класса Винера

Рассматриваются непараметрические модели нелинейных динамических систем, представленных в виде моделей класса Винера или Гаммерштейна при частично параметризованной структуре объекта. Постановка задачи идентификации такой динамической системы поясняется на рис. 1.9.1.

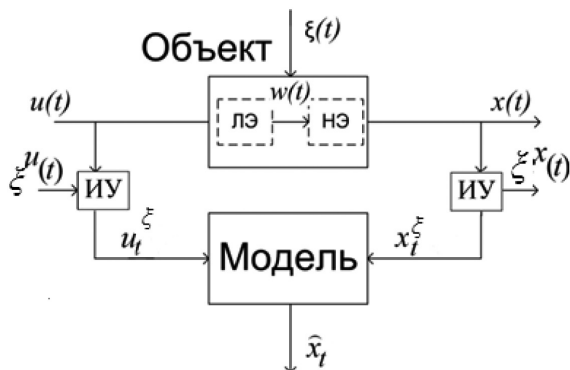


Рис. 1.9.1. Схема задачи идентификации нелинейной динамической системы

Примечание: Объект – система (нелинейный динамический объект), состоящая из последовательно расположенных ЛЭ – линейной динамической и НЭ – нелинейной статической частей (рассматриваемые элементы могут находиться в различном сочетании), ИУ – измерительное устройство,  $u(t)$  – входная переменная объекта,  $x(t)$  – выходная переменная,  $u_t^\xi, x_t^\xi$  – наблюдения переменных процесса в моменты времени  $t$ ,  $\xi(t)$  – случайное воздействие,  $\xi^u(t), \xi^x(t)$  – случайные факторы в каналах измерения переменных, такие что  $M(\xi) = 0, D(\xi) < \infty, \hat{x}(t)$  – выход модели.

Исходные данные о состоянии исследуемого объекта представляют собой выборку статистически независимых наблюдений реакции объекта на входное воздействие  $u(t)$ :  $\{u_i, x_i, i = \overline{1, s}\}$ . Существует возможность проведения экспериментов. Параметры и порядок дифференциального уравнения, которым может быть описана линейная динами-

ческая часть системы, неизвестны. Нелинейность в объекте описывается функцией, вид которой предполагается известным с точностью до набора параметров.

Нелинейный элемент может представлять собой одно из следующих звеньев.

1. Квадратор, который задан следующим соотношением:

$$x(t) = a \cdot (w(t))^2. \quad (1.9.1)$$

2. Звено с насыщением (с порогом насыщения  $a$ ):

$$x(t) = \begin{cases} w(t), & |w| \leq a \\ b \cdot \text{sign}(w(t)), & |w| > a \end{cases} \quad (1.9.2)$$

3. Элемент, описываемый произвольной функциональной зависимостью:

$$x(t) = f(w(t), a). \quad (1.9.3)$$

По наблюдаемым входным/выходным переменным процесса необходимо построить математическую модель стохастического объекта, адекватно описывающую его поведение при произвольном входном воздействии и наличии аддитивной помехи на выходные данные. Таким образом, задача сводится к установлению и исследованию зависимости между сигналом  $u(t)$ , поданным на ее вход, и сигналом  $x(t)$ , который получен на ее выходе.

В работе исследуются динамические системы, которые могут быть представлены в виде последовательного соединения линейного динамического и безынерционного нелинейного блоков, называемые «модель Винера» [75; 76; 79; 81]. Общая схема приведена на рис. 1.9.2.

Во многих случаях параметризовать линейный элемент (ЛЭ) не представляется возможным из-за недостатка априорной информации, при этом структура нелинейного элемента может быть известна с точностью до параметров.

В результате задача идентификации формулируется в условиях как параметрической, так и непараметрической неопределенности [76]. Необходимо на основании измерений входа и выхода объекта построить математическую модель из условия минимума критерия оптимальности.

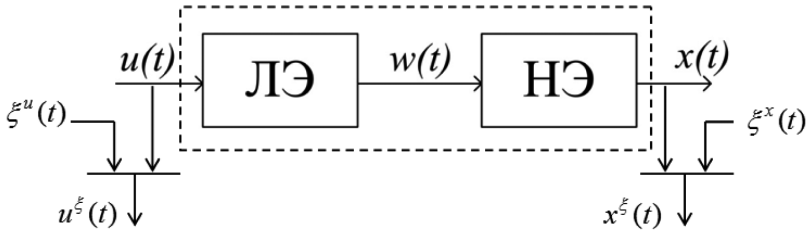


Рис. 1.9.2. Модель Винера, ЛЭ и НЭ – линейная динамическая и нелинейная части системы соответственно

Примечание: ЛЭ – линейный элемент, НЭ – нелинейная функция,  $u(t)$  – входная переменная,  $w(t)$  – выход линейной части объекта (не измеряемый),  $x(t)$  – выходная переменная объекта.

Основная идея алгоритма, предлагаемого для построения моделей систем класса Винера, заключается в использовании непараметрических оценок для описания связей системы, информация о которых по каким-то причинам неизвестна (в данном случае измерению недоступны значения выхода линейной динамической части системы), а также параметрическом оценивании нелинейных функций.

Линейная динамическая система может быть описана интегралом свертки (Дюамеля), поэтому модель ЛЭ системы класса Винера примет вид:

$$w(t) = \int_0^t h'(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (1.9.4)$$

где  $h(t-t)$  – переходная функция линейной части системы.

Пусть структура нелинейного элемента в модели Винера, описываемая функцией  $x(t) = f(w, a)$ , задана с точностью до набора параметров  $a$ . Как видно из рис. 1.9.2, значение выхода исследуемого объекта вычисляется как некоторая функция от значения  $w(t)$ :

$$x(t) = f(w, \bar{a}), \quad (1.9.5)$$

где  $f(w(t))$  – нелинейный оператор, структура которого известна в общем виде,  $\bar{a}$  – неизвестные параметры, значение которых необходимо оценить на основании реализации  $\{x(t_i), \hat{w}(t_i), i = \overline{1, s}\}$ . Тогда математическая модель исследуемого объекта примет вид [66; 67; 137]:

$$\hat{x}(t) = \hat{f} \left( \int_0^t h'(t - \tau) u(\tau) d\tau, \hat{a} \right) = \hat{f} \left( \int_0^t k(t - \tau) u(\tau) d\tau, \hat{a} \right), \quad (1.9.6)$$

где  $k(t)$  – весовая функция ЛЭ системы.

Математическая модель нелинейного объекта класса Винера может быть представлена в виде (1.9.6), где вместо неизвестной весовой функции  $k(t)$  и параметров нелинейного элемента  $\bar{a}$  используются их оценки. Но требуемые оценки могут быть получены, если бы имелась выборка  $\{x_i, w_i, i = \overline{1, s}\}$ , которая отсутствует. Таким образом, необходимо при тех же условиях эксперимента (то есть значениях входного воздействия, шага дискретизации и величины помехи), в которых были получены измерения входных/выходных величин системы  $\{u_i, x_i\}, i = \overline{1, s}$ , сформировать выборку  $\{u_i, w_i\}, i = \overline{1, s}$ , где  $u_i$  – измерения входных воздействий и  $w_i$  – оценка выхода линейной части системы. При этом оценка  $\hat{w}(t)$  рассчитывается по результатам дополнительных экспериментов с системой (алгоритм оценивания  $w_i$  зависит от типа нелинейности системы) [136]. В случае когда структура и параметры нелинейного элемента

системы неизвестны, оценивать вид нелинейного звена системы можно следующим образом: на вход объекта последовательно подаются некоторые сигналы  $u_i = const$  разной величины, затем снимаются значения выхода системы в установившемся режиме для каждого входного воздействия. В результате получим обучающую выборку, на основании которой строится модель нелинейной части системы.

Для пояснения алгоритма идентификации линейного элемента исследуемого процесса сначала предположим, что измерение его выхода  $w(t)$  может быть оценено каким-то образом, т. е. получена выборка  $\{u_i, w_i\}, i = \overline{1, s}$ .

Значение переходной функции  $h(t)$  представляет собой реакцию линейного динамического элемента системы на входное воздействие  $u(t)=1$ , то есть  $h(t)=w(t/u(t)=1)$ . При этом значение  $w(t)$  недоступно для измерения. Возможно измерить только выход нелинейного объекта (обозначим его  $x^1(t)$ ), который будет иметь значение, равное  $x^1(t)=f(h(t))$ .

Когда для некоторых классов нелинейных элементов выражение (1.9.5), описывающее нелинейность, может быть разрешено относительно  $w(t)$  [67]:

$$w(t) = \hat{f}^{-1}(x(t), \alpha), \quad (1.9.7)$$

тогда можно записать:

$$f^{-1}(x(t_j), \alpha) \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{t_j - t_i}{C_m}\right) = \sum_{i=1}^m w(t_i) \Phi\left(\frac{t_j - t_i}{C_m}\right). \quad (1.9.8)$$

В общем случае на основании полученной выборки, минимизируя среднеквадратичный критерий  $\sum_{j=1}^s (x_j - \hat{x}_j)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \omega}$ , можно найти оценки параметров  $\alpha$  и  $\hat{w}_i, i = \overline{1, s}$  [76]. Задача нахождения оценки переходной функции ЛЭ и параметров НЭ  $\alpha$  свелась к решению системы уравнений относительно  $s+k$  переменных, где  $k$  – размерность вектора  $\alpha$ .



Тогда значения переходной функции линейного элемента системы в дискретные моменты времени могут быть оценены следующим образом:

$$h_i = w_i^1 = \hat{f}^{-1}(x_i^1, a), \quad (1.9.9)$$

где  $x_i^1$  – экспериментально полученные значения выхода исследуемого объекта при подаче на вход воздействия  $u(t)=1(t)$ ,  $h_i$  – значения оценки переходной характеристики линейного элемента системы в дискретные моменты времени  $t_i$ , полученные по выборке  $u(t_i)=1(t_i), x(t_i), i=1, s$ . Алгоритмы оценивания неизвестной функции  $f^1(x, a)$  и ее параметров  $\bar{a}$  зависят от вида функции нелинейного элемента и будут подробно описаны в следующих пунктах раздела. На основании выборки дискретных значений  $h_i$  можно оценить переходную функцию системы в виде непараметрической оценки регрессии [45; 78; 79]:

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{s \cdot c_s} \cdot \sum_{i=1}^s h_i \cdot H\left(\frac{t-t_i}{c_s}\right), \quad (1.9.10)$$

где  $H(\cdot)$  – колоколообразная функция, вид которой допускает проведение операции дифференцирования. В этом случае непараметрическая оценка весовой функции, которая является производной по времени от переходной, примет следующий вид:

$$\hat{k}(t) = \hat{h}'(t) = \frac{1}{s \cdot c_s} \cdot \sum_{i=1}^s h_i \cdot H'\left(\frac{t-t_i}{c_s}\right). \quad (1.9.11)$$

Подставив оценку весовой функции в интеграл Дюамеля в соответствии с (1.9.4), получим непараметрическую модель, оценивающую выход ЛЭ [79]:

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{s c_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{h}_i \cdot H'\left(\frac{t-\tau_j-t_i}{c_s}\right) u(\tau_j) \Delta \tau, \quad (1.9.12)$$

где  $\tau$  – переменная интегрирования,  $\Delta t$  – шаг дискретизации выборки.

Тогда в соответствии с полученными оценками неизвестных величин непараметрическая модель системы класса Винера (1.9.6) примет вид:

$$\hat{x}(t) = \hat{f}\left(\int h'(t-\tau)u(\tau)d\tau, \hat{a}\right) = \hat{f}\left(\frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i/\Delta t} \hat{h}_i \cdot H'\left(\frac{t-\tau_j-t_i}{c_s}\right) u(\tau_j)\Delta\tau, \hat{a}\right), (1.9.13)$$

где  $f\{w(t), a\}$  – оценка нелинейной функции,  $\hat{a}$  – оценка параметров НЭ системы,  $\hat{h}(t)$  – оценка переходной функции линейного элемента системы.

В общем виде получен алгоритм, позволяющий строить непараметрические модели нелинейных динамических систем, представленных в виде модели класса Винера. Для реализации алгоритма необходимо оценить значение переходной функции линейного элемента системы, а также параметры нелинейности. Приведенная непараметрическая модель не требует наличия полной информации о структуре объекта, в отличие от большинства других подходов.

Вид нелинейности системы класса Винера предполагается известным с точностью до набора параметров. На рис. 1.9.3 приведены графики НЭ квадратора и звена с насыщением.

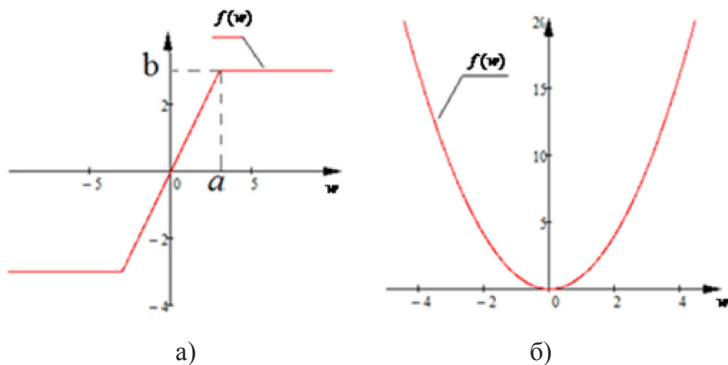


Рис. 1.9.3. Общий вид НЭ: а) звено с насыщением; б) квадратор

Далее рассмотрим описанный выше общий алгоритм идентификации нелинейных систем класса Винера с применением непараметрических процедур более подробно и для различных типов нелинейных элементов в системе, включая метод оценки параметров нелинейных элементов системы.

### 1.9.1. Моделирование систем класса Винера с квадратором

Пусть объект состоит из последовательно соединенных безынерционных нелинейных (НЭ) и динамических линейных элементов (ЛЭ) и имеет структуру системы класса Винера (рис. 1.9.2). Нелинейная часть системы представляет собой квадратор и может быть описана функцией:  $f(w) = aw^2$ ,  $a = const$ . Тогда выход исследуемого объекта вычисляется следующим образом:  $x(t) = f(w, a) = aw^2$ . При этом значения  $w(t)$  являются недоступными для измерения. Обозначим переходную характеристику ЛЭ системы  $w(t, u(t) = 1) = h(t)$ . Выход нелинейной системы равен  $x^1(t) = ah^2(t)$ , то есть оценку  $h(t)$  можно выразить через выход исследуемого нелинейного процесса [137]:

$$h(t) = \sqrt{x^1(t)/a}. \quad (1.9.14)$$

При произвольном входном воздействии и нулевых начальных условиях выход линейной части системы описывается выражением (1.9.12) или при замене интеграла его численным аналогом и применении непараметрических процедур для оценивания переходной функции линейного элемента системы:

$$\hat{w}(t) = \int_0^t h'(t-\tau)u(\tau)d\tau = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{h}_i \cdot H' \left( \frac{t-\tau_j-t_i}{c_s} \right) u(\tau_j)\Delta\tau. \quad (1.9.15)$$

С учетом (1.9.14) оценка выхода линейного элемента примет вид:

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \sqrt{\frac{x_i^1}{a}} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau, \quad (1.9.16)$$

где  $a$  – неизвестный параметр квадратора.

Непараметрическая модель нелинейного объекта тогда примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= a \left[ \frac{1}{sc_s} \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \sqrt{x_i^1} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \sqrt{x_i^1} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \sqrt{a \hat{h}^2(t_i)} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]^2, \end{aligned} \quad (1.9.17)$$

где  $x^l(t_i)$  – реакция нелинейной системы на единичное входное воздействие.

*Вычислительный эксперимент.* Рассмотрим нелинейную динамическую систему класса Винера, поведение которой имитируется следующим образом: линейная часть объекта описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$2 \cdot x''(t) + 0.3x'(t) + x(t) = u(t).$$

Нелинейный элемент представляет собой квадратор с параметром  $a=4,37$ . При построении модели системы, описывающие ее уравнения, неизвестны, они используются только для получения выборки измерений входных и выходных переменных. На рис. 1.9.4–1.9.5 показаны результаты моделирования такой системы.

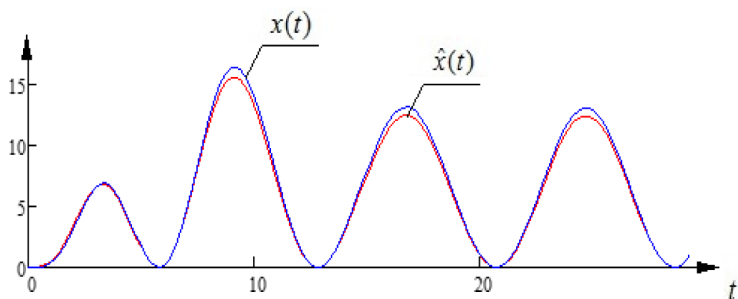


Рис. 1.9.4. Результат идентификации процесса класса Винера

Примечание:  $x^*(t)$  – модель нелинейной системы,  $x(t)$  – выход системы, объем выборки  $s=150$ , помеха 0 %, шаг дискретизации  $\Delta t=0,2$ , помеха 0 %, входное воздействие:  $u(t)=2\cos(0,4t)$ , относительная средняя ошибка моделирования 1,9 %

На рис. 1.9.4 (и далее) приняты следующие обозначения:  $x(t)$  – выход объекта,  $\hat{x}(t)$  – выход модели. Добавим к значениям выхода объекта помеху в размере 5 % от его величины:

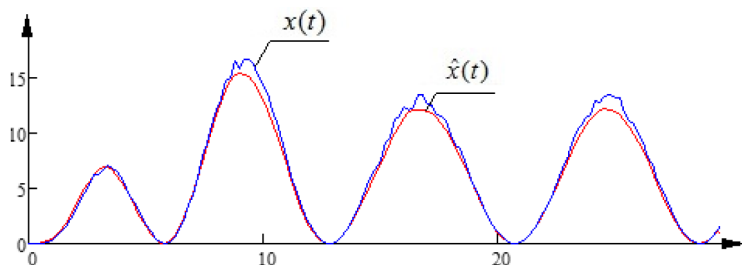


Рис. 1.9.5. Результат идентификации процесса класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 5 %,  $u(t)=2\cos(0,4t)$ , относительная средняя ошибка моделирования 2,5 %

Из рисунков видно, что предложенная непараметрическая модель достаточно точно описывает исследуемую систему, в том числе и при наличии помех в измерениях данных.

Рассматривается модель класса Винера, нелинейная часть которой представляет собой квадрат в об-

щем виде, т. е. нелинейный элемент описывается функцией  $x(t) = f(w(t)) = aw^2 + bw + c$ , где  $a, b, c = const$  – неизвестные параметры. Выход нелинейной системы при единичном входном воздействии может быть рассчитан следующим образом:

$$x^1(t) = ah^2(t) + bh(t) + c, \quad (1.9.18)$$

где  $h(t)$  – переходная функция линейной части системы. Однако значения  $h(t)$  недоступны для измерения. Для того чтобы выразить переходную функцию через выход нелинейной системы, составим квадратное уравнение:  $ah^2 + bh + c - x^1 = 0$ . Его решением является выражение:

$$\hat{h}(t) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a}, \quad (1.9.19)$$

где параметры  $a, b, c$  – неизвестны.

Параметры уравнения предлагается находить следующим образом.

Пусть в дифференциальном уравнении, описывающем линейную динамическую часть системы, коэффициент усиления равен единице. То есть ЛЭ может быть описан уравнением вида  $ax''(t) + bx'(t) + c = u(t), c = 1$ . При подаче на вход системы единичного воздействия выход ЛЭ системы  $w(t) = h(t)$  стремится к единице. При этом выход нелинейного объекта в соответствии с (1.9.19) стремится к величине, равной  $(a+b+c)$ , т. е. к значению  $f(1)$ . При  $u(t) = 2$  значение выхода ЛЭ  $w(t) = 2h(t)$ , его установившееся значение  $w^{ycm}(t) = 2$  и выход объекта  $x(t) = f(2h(t))$  стремятся к величине  $x^{ycm}(t) = f(2)$ .

Таким образом, предлагается провести серию  $m$  экспериментов, в ходе которых на вход системы подаются воздействия  $u_j = r_j, r_j = const$ . При этом  $u_j = u_{\min} + j \cdot \Delta u$ . Тогда при произвольном входном воздействии:  $u(t) = m$  значение выхода ЛЭ  $w(t) = m \cdot h(t)$ ,  $w^{ycm}(t) = m$  и выход объекта

$x(t) = f(m \cdot h(t))$ ,  $x^{ycm}(t) = f(m)$ . В результате получим выборку объема  $m$ :

$$\{U, Q\}: U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}, \quad (1.9.20)$$

где  $q_i$  – установившееся значение выхода системы при входном воздействии  $u_i$ . Причем, как показано выше,  $q_i = f(u_i)$ . Полученная в ходе эксперимента выборка показана на рисунке 1.9.6.

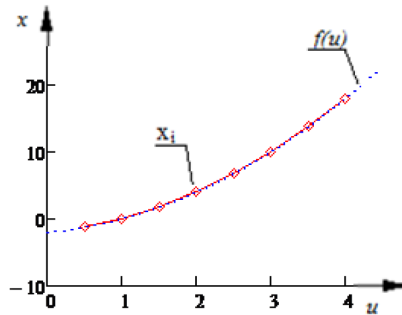


Рис. 1.9.6. Функция  $f(u)$ , описывающая НЭ системы,  $x$  – ее оценка (элементы выборки)

В общем случае параметры квадратичного уравнения можно найти по известным значениям трех его точек, т. е. по результатам 3 экспериментов. Если для уравнения  $y = ax^2 + bx + c$  известны координаты 3 различных точек его графика  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , его коэффициенты могут быть найдены как:

$$a = \left( y_3 - \frac{x_3(y_2 - y_1) + x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \right) / \left( x_3(x_3 - x_1 - x_2) + x_1x_2 \right),$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - a(x_1 + x_2),$$

$$c = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} + ax_1x_2.$$

Однако в реальных условиях на входные/выходные переменные системы действуют помехи в каналах измерения. Тогда по выборке (1.9.20) модель нелинейного элемента нужно оценивать не по трем точкам, так как такая оценка не будет адекватна. Модель нелинейного элемента может быть построена по нескольким точкам с применением различных методов аппроксимации, например, метода наименьших квадратов или как непараметрическую оценку функции регрессии. Таким образом, получим оценку нелинейной части объекта в виде:

$$\hat{f}(w) = \hat{a}w^2 + \hat{b}w + \hat{c}. \quad (1.9.21)$$

При произвольном входном воздействии и нулевых начальных условиях выход линейного звена системы может быть вычислен в виде (1.9.19) или с учетом рассчитанного значения переходной функции ЛЭ:

$$w(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^l)}}{2a} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau, \quad (1.9.22)$$

$x^l$  – выход системы при единичном входном воздействии.

Модель нелинейного объекта класса Винера  $x(t) = \hat{f}(w(t), a, b, c)$  где примет вид:

$$\begin{aligned} x(t) = & a \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^l)}}{2a} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]^2 + \\ & + b \cdot \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^l)}}{2a} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right] + c, \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

где  $a, b, c$  – оценки параметров функции  $f(w)$ .

Пусть в линейной части системы коэффициент усиления отличен от единицы. Тогда в обучающей выборке (1.9.20) значения  $q_i$  будут прямо пропорциональны  $f(u_i)$ . Нелинейный блок системы, имеющий вид  $f(w) = aw^2 + bw + c$ , в ре-



зультате оценки параметров может быть описан функцией  $f(w) = a^1 w^2 + b^1 w + c^1$ , где  $a^1, b^1, c^1$  – оценки параметров НЭ.

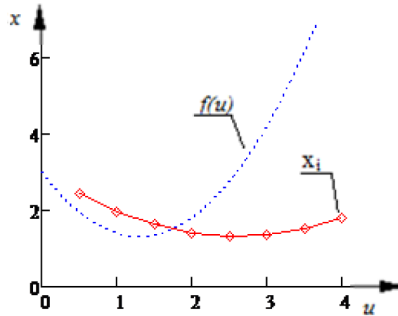


Рис. 1.9.7. Функция  $f(u)$ , описывающая НЭ системы,  $x$  – ее оценка (элементы выборки)

В итоге в качестве оценки нелинейного элемента объекта имеем функцию  $\hat{f}(u) = a^1 w^2 + b^1 w + c^1$ , параметры которой отличаются от истинных. Оценка переходной функции ЛЭ с учетом рассчитанных параметров:

$$\hat{h}(t) = \frac{-b^1 \pm \sqrt{(b^1)^2 - 4a^1(c^1 - x^1)}}{2a^1}. \quad (1.9.24)$$

При произвольном входном воздействии оценка выхода линейной части системы может быть рассчитана следующим образом:

$$w(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \frac{-b^1 \pm \sqrt{(b^1)^2 - 4a^1(c^1 - x^1)}}{2a^1} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta\tau. \quad (1.9.25)$$

Тогда модель нелинейного объекта  $\hat{x}(t) = \hat{f}(\hat{w}(t), a^1, b^1, c^1)$  примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & a^1 \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \frac{-b^1 \pm \sqrt{(b^1)^2 - 4a^1(c^1 - x^1)}}{2a^1} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta\tau \right]^2 + \\ & + b^1 \cdot \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \frac{-b^1 \pm \sqrt{(b^1)^2 - 4a^1(c^1 - x^1)}}{2a^1} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta\tau \right] + c^1. \end{aligned} \quad (1.9.26)$$

При  $u(t) = 1(t)$  выход системы равен  $x^1(t) = a \cdot h^2 + b \cdot w + c$ , где  $h(t)$  – переходная функция ЛЭ,  $a, b, c$  – неизвестные (истинные) значения параметров НЭ. Выразим переходную характеристику ЛЭ через известное значение выхода  $x$ :

$$h(t) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a}. \quad (1.9.27)$$

Выразим оценку переходной функции через параметры НЭ системы:

$$\hat{h}(t) = \frac{-b \cdot h(t) \pm \sqrt{b^2 (h(t))^2 - 4a(c - x^1)}}{2a \cdot h(t)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a \cdot h(t)}. \quad (1.9.28)$$

Если предположить истинные параметры нелинейного элемента системы известными, модель (1.9.26) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(\hat{w}(t)) = f\left(\frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a} \cdot H'\left(\frac{t - \tau_j - t_i}{c_s}\right) u(\tau_j) \Delta \tau\right) = \\ &= a \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a} \cdot H'\left(\frac{t - \tau_j - t_i}{c_s}\right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]^2 + \\ &+ b \cdot \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i/\Delta t} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x^1)}}{2a} \cdot H'\left(\frac{t - \tau_j - t_i}{c_s}\right) u(\tau_j) \Delta \tau \right] + c, \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

где  $x^1_i$  – реакция нелинейной системы на единичное воздействие,  $a, b, c$  – реальные параметры НЭ системы,  $a^1, b^1, c^1$  – рассчитанные параметры. Так как (1.9.27) и (1.9.28) идентичны, можно сделать вывод, что модель (1.9.26) адекватно описывает исследуемую систему.

*Вычислительный эксперимент 1.* Рассмотрим нелинейную динамическую систему класса Винера, состоящую из квадратора ( $a=2$ ) и разностного аналога дифференциального уравнения  $3 \cdot x''(t) + 1.3x'(t) + x(t) = u(t)$  (имитирующего объект):

$$x_t = 1,9x_{t-1} - x_{t-2} + 0,005u_t. \quad (1.9.30)$$

Структура и параметры уравнения, описывающего процесс, неизвестны. По выборке входных и выходных переменных процесса построена его непараметрическая модель, график которой представлен на рис. 1.9.8.

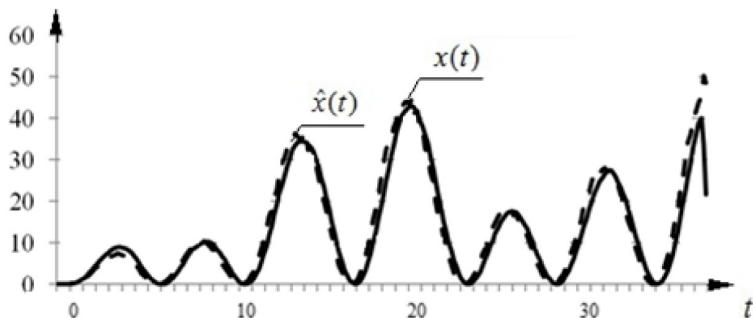


Рис. 1.9.8. Результаты моделирования системы класса Винера,  $x(t)$  – выход системы,  $2.9 \cdot w''(t) + 1.3 \cdot w'(t) + w(t) = u(t)$ . – выход модели,  $s=250$ , помеха 5 %,  $u(t)=3\cos(0,5t)+\sin(0,2t)$ , ошибка моделирования 2,6 %

**Вычислительный эксперимент 2.** Рассматривается система класса Винера, линейная часть которой имитируется уравнением (1.9.30), нелинейный элемент –  $f(z) = z^2 + 1,6z - 2$ . Оценка параметров НЭ:  $a1=1,01$ ,  $b1=1,61$ ,  $c1=-2$ . На рисунках представлены результаты моделирования при  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .

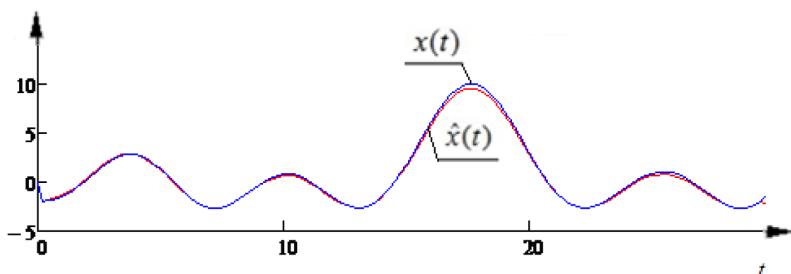


Рис. 1.9.9. Результат моделирования системы класса Винера,  $x(t)$  – выход системы,  $\{u_i, x_i\}, i = 1, s$  – выход модели,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 0 %, относительная ошибка моделирования 1,1 %

Добавим помеху, значение которой составляет 5 % от величины выходной переменной:

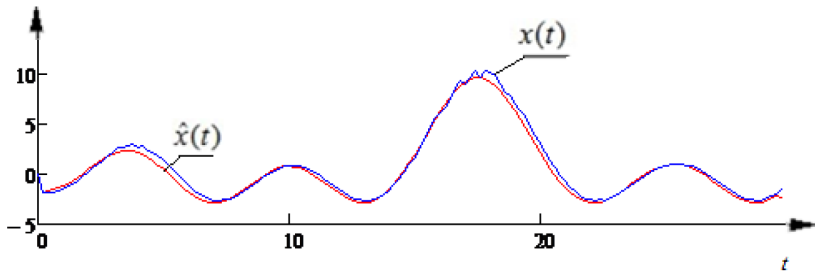


Рис. 1.9.10. Результаты моделирования системы класса Винера, объем выборки  $s=150$ , шаг дискретизации выборки  $\Delta t=0,2$ , помеха 5 %, относительная средняя ошибка моделирования 2,5 %

*Вычислительный эксперимент 3.* Рассмотрим систему класса Винера, поведение линейного динамического блока которого имитируется следующим образом:

$$1.5 \cdot x''(t) + 0.7x'(t) + 2x(t) = u(t). \quad (1.9.31)$$

Нелинейный элемент  $f(z) = z^2 - 2,6z + 3$ . На рис. 1.9.11–1.9.12 представлены модели данной системы.

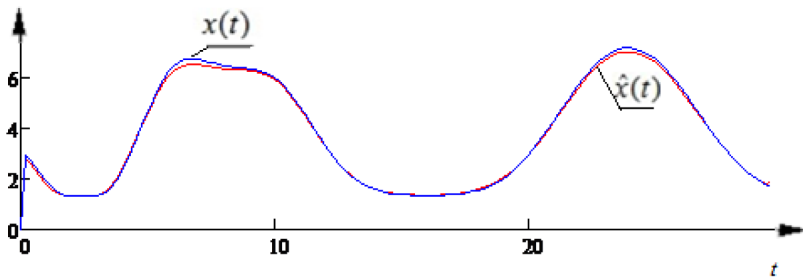


Рис. 1.9.11. Результаты моделирования системы класса Винера, объем выборки  $s=150$ , шаг дискретизации  $\Delta t=0,2$ , помеха 0 %, относительная средняя ошибка моделирования 1 %, входное воздействие:  $u(t)=2\cos(0,4t)$

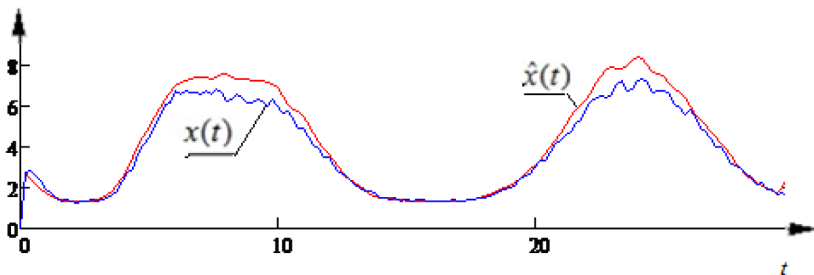


Рис. 1.9.12. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 7 %,  $u(t)=2\cos(0,4t)$ , относительная средняя ошибка моделирования 5,3 %

Анализируя результаты моделирования, отметим, что предлагаемые алгоритмы позволяют достаточно точно оценивать значения выхода исследуемой системы при различных входных воздействиях.

### 1.9.2. Моделирование систем класса Винера с насыщением

Пусть нелинейное звено системы класса Винера описывается звеном с насыщением. В данном случае параметры нелинейного элемента предлагается определить опытным путем в результате экспериментов над системой. Для построения модели такой системы предлагается следующий алгоритм.

1. Проводится серия  $m$  экспериментов, в ходе которых на вход системы подаются воздействия различной величины:  $u_{i,j} = r_j$ ,  $r_j = const$ . При этом величина входных воздействий рассчитывается следующим образом: выбираются границы допустимых значений входных воздействий  $u_{\min} \leq u(t) < u_{\max}$ , далее определяется шаг дискретизации:  $\Delta u = (u_{\max} - u_{\min}) / m$ ,  $u_j = u_{\min} + j \cdot \Delta u$ . В результате получим выборку:  $\{u_j, x_j^{ycm}\}$ ,  $j = 1, \bar{m}$ , где  $x^{ycm} = x^y$  — установившееся значение выхода исследуемой системы.

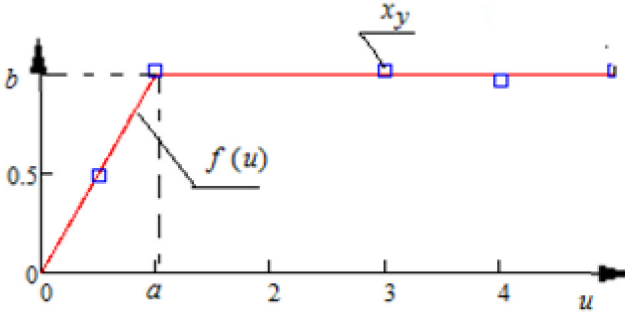


Рис. 1.9.13. Элементы обучающей выборки  $\{u_j, x_j^{ycm}\}, j=1, \bar{m}$

2. По данной выборке оцениваются параметры НЭ системы:

- находится расстояние между двумя соседними измерениями обучающей выборки:  $\Delta_j = |x_j^y - x_{j-1}^y| / \Delta j$ , где  $\Delta u$  – шаг дискретизации;

- оценивается порог нелинейности  $\hat{a} = x_j^y$ , если  $\Delta j < \varepsilon, \varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  – некоторая малая величина (заданная исследователем);

- оценка параметра  $\hat{b} = 1/m \cdot \sum_{j=1}^m x_j^y$ , где  $x_j = \hat{a}$  и  $x_j = x_{j-1}^{ycm}$ .

- оценка нелинейного элемента системы может быть получена в виде:

$$\hat{f}(w) = \begin{cases} \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \cdot w & , |w| \leq \hat{a} \\ \hat{b} & , |w| > \hat{a} \end{cases} \quad (1.9.32)$$

3. На вход объекта подается ступенчатая функция, значение которой не превышает порога  $a$ . В результате может быть получена оценка переходной характеристики ЛЭ  $h(t)$  и построена модель линейной части объекта в виде интеграла Дюамеля.

4. Строится модель объекта, выход которой вычисляется как значение функции, описывающей НЭ, аргументом которой является выход ЛЭ объекта:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \hat{f}(w(t)) \\ \hat{w}(t) = \int_0^t h'(t-\tau)u(\tau)d\tau, \end{cases} \quad (1.9.33)$$

где  $\hat{f}(\cdot)$  – оценка функции (1.9.32), описывающей нелинейность системы,  $\hat{w}(t)$  – оценка выхода линейного элемента,  $h(t)$  – переходная функция системы.

*Вычислительный эксперимент 1.* Рассматривается нелинейная динамическая система класса Винера, состоящая из звена с насыщением с параметрами  $b=0,75$ ,  $a=1$  и разностного аналога дифференциального уравнения (имитирующего линейный блок):  $x_t = 2x_{t-1} - 0,97x_{t-2} + 0,005u_t$ . Результат моделирования приведен на рис. 1.9.14.

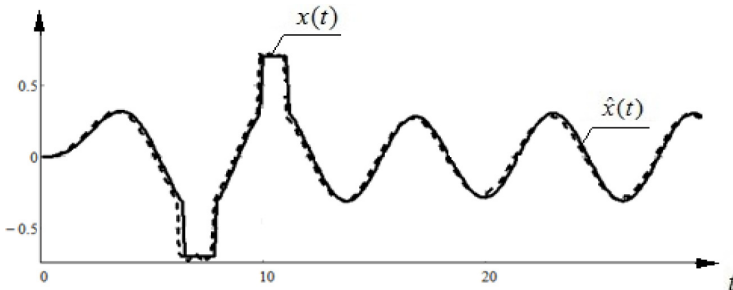


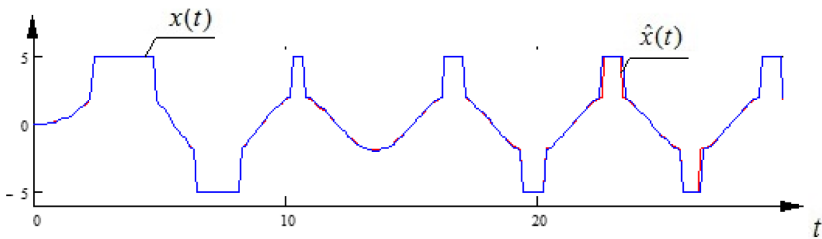
Рис. 1.9.14. Результаты оценки выхода  $x(t)$ ,  $s=200$ , шаг дискретизации  $\Delta t=0,15$ , помеха 5 %,  $u(t)=0,35\sin(t)$ , ошибка моделирования 2 %

Анализируя результат работы модели нелинейного динамического объекта с видом нелинейности типа звено с насыщением, можно сделать вывод о том, что непараметрическая модель достаточно точно описывает систему при различных входных воздействиях.

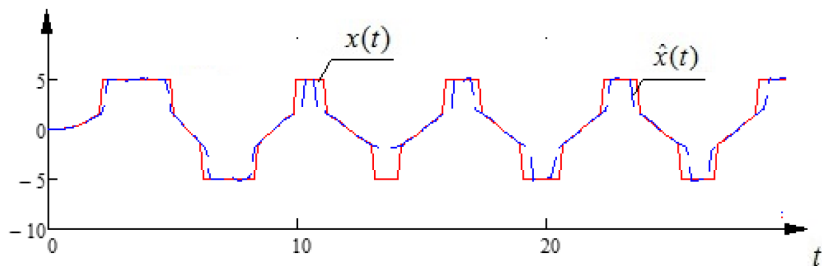
*Вычислительный эксперимент 2.* Рассматривается некоторый нелинейный динамический объект, линейная часть которого имитируется дифференциальным соотношением второго порядка:

$$2.9w''(t) + 1.27w'(t) + w(t) = u(t). \quad (1.9.34)$$

Выход нелинейного процесса равен:  $x(t) = f(w(t))$ ,  $f(\cdot)$  – функция, описывающая НЭ системы. Нелинейный элемент – звено с насыщением с параметрами:  $b=5$ ,  $a=2$ . Результат моделирования данного объекта при различном уровне помех в каналах измерения (0 и 5 %) представлен на рис. 1.9.15–1.9.16.



*Рис. 1.9.15. Результаты моделирования системы класса Винера, объем выборки  $s=250$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 0 %, ошибка моделирования 2,31 %,  $u(t)=5\sin(t)$*



*Рис. 1.9.16. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=250$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 5 %, относительная средняя ошибка моделирования 2,56 %,  $u(t)=5\sin(t)$*



Проанализировав результаты работы модели нелинейного динамического объекта с известным видом нелинейности (звено насыщения, квадрат), можно сделать вывод, что непараметрическая модель достаточно точно описывает данную систему при различных значениях параметров нелинейной части объекта, в условиях зашумленности каналов связи в пределах 1–6 %, при различном объеме выборки и различных входных воздействиях.

### 1.10. Непараметрическая модель нелинейных систем класса Гаммерштейна

Рассматривается еще один тип системы, составленной из линейного динамического и нелинейного статического блоков, у которой нелинейный элемент предшествует линейному (система класса Гаммерштейна), общая схема которой приведена на рис. 1.10.1.

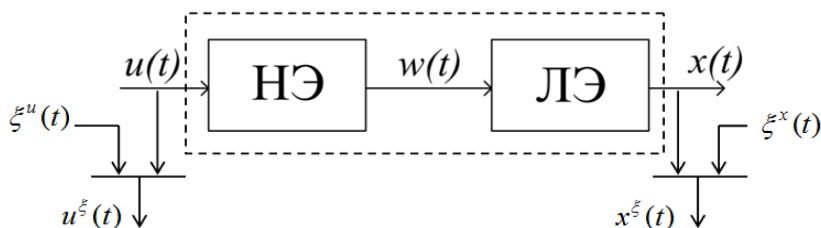


Рис. 1.10.1. Схема нелинейной системы  
(ЛЭ – линейная динамическая часть, НЭ – нелинейный элемент системы,  
 $w(t)$  – выход промежуточного звена объекта

Пусть помехи в каналах измерения системы приведены к выходу и вход  $u(t)$  известен точно, а выход  $x(t)$  измеряется со случайными ошибками. Выход нелинейного элемента  $w(t)$  измерению недоступен. Система находится в условиях, когда параметризованная структура ЛЭ неизвестна, а структура НЭ известна с точностью до параметров. Необходи-

димом на основании измерений выхода объекта при известном входном воздействии построить модель, удовлетворяющую условию минимума квадратичного критерия [76]. Как видно из рис. 1.10.1, связь между входной  $u(t)$  и выходной  $x(t)$  переменными объекта при нулевых начальных условиях может быть описана уравнениями [76; 136]:

$$\begin{aligned} w(t) &= f(u(t), a), \\ x(t) &= \int_0^t h(t - \tau) w(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

или, исключая переменную  $w(t)$ ,

$$x(t) = \int_0^t h'(t - \tau) f(u(\tau), a) d\tau, \quad (1.10.2)$$

где  $h(t)$  – переходная функция динамического элемента;  $f(u, a)$  – нелинейная функция своих аргументов  $a$ , заданная с точностью до вектора неизвестных параметров  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  размерности  $K$ . Соотношение (1.10.2) описывает модель Гаммерштейна, для идентификации которой необходимо найти весовую функцию ЛЭ и вектор параметров  $\bar{a}$ .

Пусть  $x^1(t)$  – реакция нелинейного объекта на входной сигнал  $u(t) = 1(t)$ ,  $x(t)$  – реакция объекта на некоторый тестовый сигнал  $u(t)$ , форма которого отличается от ступенчатого, например,  $u(t) = t$  или  $u(t) = \sin(t)$ . Измерения сигналов  $x^1(t)$  и  $\Delta u = (u_{\max} - u_{\min})/m$  в дискретные моменты времени образуют выборки наблюдений  $\{u_i, x_i^1, t_i, i = \overline{1, s}\}$   $u(t)_j = r_j$ , и  $\{u_i, x_i, t_i, i = \overline{1, s}\}$  соответственно.

Сначала ставится задача идентификации ЛЭ системы. Сигнал  $u(t) = 1(t)$  после прохождения НЭ сохраняет ступенчатую форму, но меняет свое значение:

$$w^1(t, u(t) = 1) = f(1(t), \alpha) = \beta, \quad (1.10.3)$$

где  $\beta$  – константа. Обозначим  $h_\beta(t) = \beta \cdot h(t)$ . Выход нелинейной системы (1.10.2) при входном сигнале  $u(t) = f(t)$  запишется в виде:

$$x^1(t) = \int_0^t h'_\beta(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.10.4)$$

Тогда  $x^1(t)$  можно рассматривать как модель некоторой линейной системы с переходной функцией  $h_\beta(t)$ .

Весовая функция  $k_\beta(t) = \frac{d}{dt} x^1(t)$  и ее оценка  $\hat{k}_\beta(t)$  могут быть получены на основе выборки  $\{u_i, x_i^1, t_i, i = \overline{1, s}\}$ . В результате оценка весовой функции  $\hat{k}_\beta(t)$  определяется с точностью до неизвестного параметра  $\beta$ . Модель (1.10.2) примет вид:

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{k}_\beta(t - \tau) w(\tau) d\tau = \int_0^t \hat{k}_\beta(t - \tau) f(u(\tau), \bar{a}) d\tau. \quad (1.10.5)$$

Оценки параметров  $\bar{a}$  находятся на основе выборки измерений  $\{u_i, x_i, i = \overline{1, s}\}$  реакции объекта  $x(t)$  на входной сигнал  $u(t)$  произвольной формы как решения экстремальной задачи:

$$\sum_{i=1}^s (x_i - \hat{x}(t_i))^2 \rightarrow \min_{\alpha}, \quad (1.10.6)$$

к которой приводит критерий оптимальности (1.10.6) с квадратичной функцией  $Q(t)$ . Экстремальная задача (1.10.6) может быть решена с помощью большого числа хорошо разработанных методов оптимизации.

В общем виде получены алгоритмы, позволяющие строить непараметрические модели нелинейных динамических систем, представленных в виде модели Гаммерштейна. Далее приводятся частные случаи моделей систем, когда нелинейный элемент представляет собой квадрататор и звено с насыщением.

### 1.10.1. Модель систем класса Гаммерштейна с квадратором

Пусть имеем систему, представленную в виде модели Гаммерштейна (рис. 1.10.1). Причем нелинейная часть системы представляет собой квадратор, описываемый функцией вида:  $f(u) = au^2$ , где  $a = \text{const}$ . Выход НЭ тогда  $w(t) = f(u, a) = au^2$ . Выход нелинейного объекта рассчитывается следующим образом:

$$x^1(t) = \int_0^t h'(t-\tau)w(\tau)d\tau = a \int_0^t h'(t-\tau)u^2(\tau)d\tau = a \int_0^t h'(t-\tau)d\tau. \quad (1.10.7)$$

Выход  $x^1(t)$  при  $u(t)=1$  может считаться оценкой переходной функции линейного элемента, значение которой умножено на некоторый коэффициент, то есть  $x_1(t) = ah(t)$ .

Тогда оценка переходной функции ЛЭ выражается как:

$$\hat{h}(t) = x^1(t) / a. \quad (1.10.8)$$

При произвольном входном воздействии и нулевых начальных условиях выход линейной части системы описывается выражением (1.10.7). С учетом (1.10.8) модель исследуемого объекта примет вид:

$$\hat{x}(t) = a \int_0^t h'(t-\tau)u^2(\tau)d\tau = a \int_0^t \hat{x}^1(t-\tau)u^2(\tau)d\tau. \quad (1.10.9)$$

Далее приводится непараметрическая модель нелинейного объекта, представленного в виде модели Гаммерштейна с квадратором:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{x}_i^1 \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) u^2(\tau_j) \Delta \tau, \quad (1.10.10)$$

где  $x^1(t)$  – реакция нелинейной системы на единичное входное воздействие.

*Вычислительный эксперимент 1.* Рассмотрим систему Гаммерштейна, состоящую из квадратора с параметром

$a=3$  и разностного аналога дифференциального уравнения  $x_t = 1.9x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + 0,005u_t$  (имитирующего объект). Результаты моделирования данного объекта при различных входных воздействиях представлены на рис. 1.10.2–1.10.3.

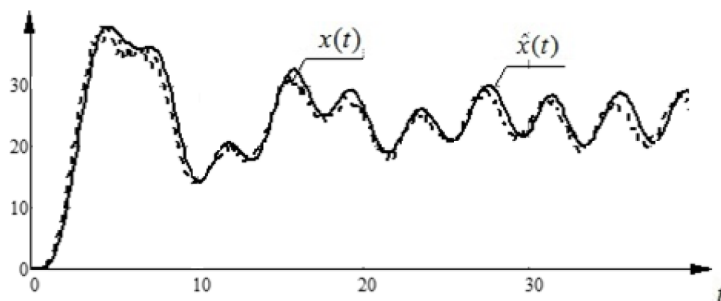


Рис. 1.10.2. Результат моделирования системы класса Гаммерштейна, объем выборки  $s=300$ , входное воздействие:  $u(t)=4\sin(0,8t)$ , шаг  $\Delta t=0,117$ , помеха 5%, относительная ошибка моделирования 3,2%

Добавим к выходу объекта помеху 5% от значения выходного сигнала.

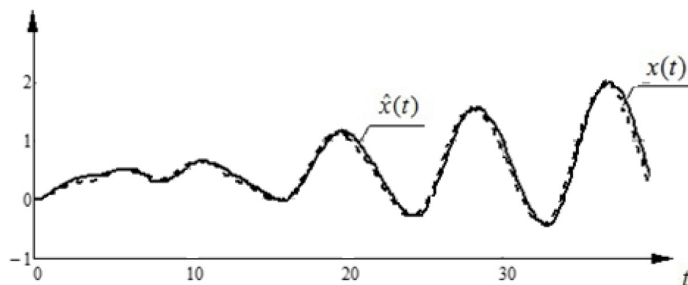


Рис. 1.10.3. Результат моделирования системы класса Гаммерштейна,  $s=300$ ,  $\Delta t=0,117$ , помеха 5%,  $u(t)=0,5\cos(0,75t)+0,01t$ , относительная ошибка моделирования 2,88%

*Вычислительный эксперимент 2.* Рассмотрим нелинейную систему класса Гаммерштейна с квадратом ( $a=3$ ), линейный элемент которой имитируется с помощью

разностного аналога дифференциального уравнения:  $x_t = 1.9x_{t-1} - 0.91x_{t-2} + 0,004u_t$ . Результаты моделирования системы в различных условиях представлены на рис. 1.10.4.

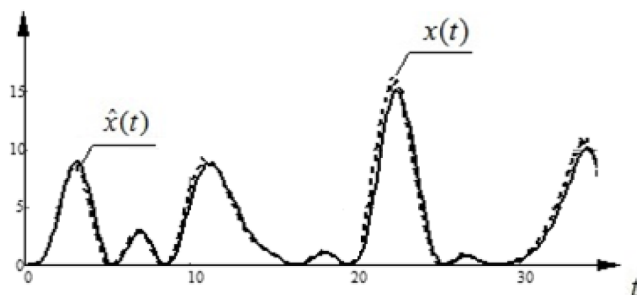


Рис. 1.10.4. Результаты моделирования системы класса Гаммерштейна,  $s=300$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 5 %, относительная средняя ошибка моделирования 2,29 %,  $u(t)=2\cos(0,6t)+e^{\sin(t)}$

Анализируя модели нелинейного динамического объекта с квадратом, отметим, что непараметрическая модель достаточно хорошо описывает систему при различных значениях параметров нелинейной части объекта, в условиях зашумленности каналов связи, при различных входных воздействиях.

### Модель систем класса Гаммерштейна с насыщением

Рассмотрим нелинейную динамическую систему класса Гаммерштейна, нелинейность в которой представлена звеном с насыщением, то есть описывается функцией вида:

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \cdot u & , |u| \leq \hat{a} \\ \hat{b} & , |u| > \hat{a} \end{cases}, \quad (1.10.11)$$

где  $a$ ,  $b$  – некоторые неизвестные параметры.

Модель системы в общем виде может быть описана уравнением вида (1.10.2), где неизвестными являются значения параметров функции  $f(u, a, b)$  и переходная характеристика линейного элемента системы.

Параметры функции, описывающей НЭ, предлагается оценить по следующей схеме.

1. Проводится серия  $m$  экспериментов, в ходе которых на вход системы подаются воздействия  $u_{i,j} = r_j, r_j = const$ . При этом  $u_j = u_{\min} + j \cdot \Delta u, u_{\min} \leq u(t) < u_{\max}$ . Далее определяется шаг дискретизации  $\Delta u = (u_{\max} - u_{\min}) / m$ .

Если  $u(t_j) = r_j$ , то выход нелинейного элемента  $w(t_j) = \frac{b}{a} r_j$ , если  $r_j \leq a$ , или, в противном случае,  $w(t_j) = b$ . Выход нелинейного объекта равен значению переходной характеристики линейного элемента  $h(t)$ , умноженной на некоторый коэффициент.

Ниже в табл. 1.8.1 представлены обобщенные данные о значениях различных переменных нелинейной динамической системы при подаче на ее вход воздействий различной величины.

Таблица 1.8.1

**Обобщение экспериментов для определения параметров нелинейного элемента**

$u(t)$	$w(t)$	$x(t)$	$x_{ycm}$
1	2	3	4
$r_1$	$\frac{b}{a} r_1$	$\hat{x}(t) = \frac{br_1}{a} \int_0^t h'(t-\tau)u(\tau)d\tau = \frac{br_1}{a} \cdot \hat{h}(t)$	$\frac{br_1}{a} \cdot h_y$
$r_2$	$\frac{b}{a} r_2$	$\hat{x}(t) = \frac{br_2}{a} \cdot \hat{h}(t)$	$\frac{br_2}{a} \cdot h_y$
$r_3$	$\frac{b}{a} r_3$	$\hat{x}(t) = \frac{br_3}{a} \cdot \hat{h}(t)$	$\frac{br_3}{a} \cdot h_y$
...	...	...	...

1	2	3	4
$r_k > a$	$b$	$\hat{x}(t) = b \int_0^t h'(t-\tau)u(\tau)d\tau = b \cdot \hat{h}(t)$	$b \cdot h_y$
...	...	...	...
$r_m > a$	$b$	$\hat{x}(t) = b \cdot \hat{h}(t)$	$b \cdot h_y$

Получим обучающую выборку, составленную из значений входных воздействий и установившегося значения выхода системы:  $\{u_j, x(t_j) = x_y\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , на основании которой параметры НЭ оцениваются следующим образом.

2. Находится расстояние между соседними измерениями:  $d_j = |x_j - x_{j-1}| / \Delta u$ , где  $\Delta u$  – шаг дискретизации по  $u$ .

3. В соответствии с видом функции (1.10.11) строится оценка параметров нелинейного элемента.

Модель нелинейного объекта класса Гаммерштейна с насыщением:

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{h}'(t-\tau) \hat{f}(u(\tau), \hat{a}, \hat{b}) d\tau. \quad (1.10.12)$$

Численный вариант данной модели:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{h}_i \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) \hat{f}(u(\tau_j)) \Delta \tau. \quad (1.10.13)$$

*Вычислительный эксперимент.* Рассмотрим нелинейную динамическую систему класса Гаммерштейна, состоящую из звена с насыщением ( $a=2$   $b=0,3$ ) и разностного аналога дифференциального уравнения:  $x_t = 1.804x_{t-1} - 0.874x_{t-2} + 0,0375u_t$ . Отметим, что вид уравнения, описывающего динамический процесс, и параметры  $a$ ,  $b$  при построении непараметрической модели неизвестны,



известны только реализации, полученные в ходе экспериментов. На рис. 1.10.5–1.10.6 приведены модели описанного объекта при различных входных воздействиях.

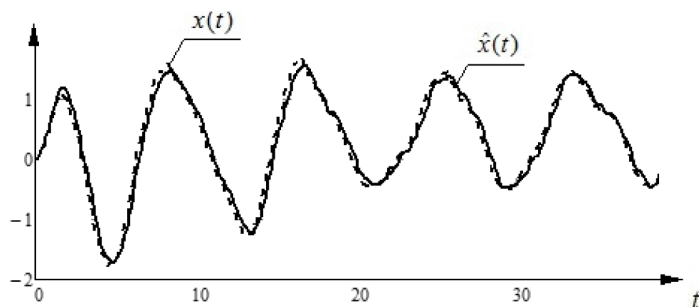


Рис. 1.10.5. Результаты моделирования, объем выборки  $s=300$ , помеха 5 %, входное воздействие  $u(t)=0,5\cos(0,75t)+0,01t$

Далее подадим на вход объекта  $u(t)=5\cos(0,7t)\cos(0,4t-0,2)$ .

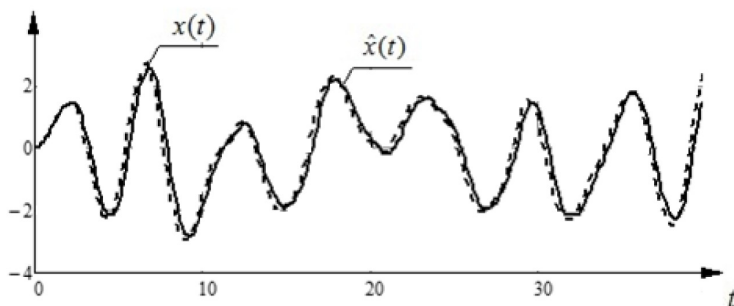


Рис. 1.10.6. Результаты моделирования,  $x(t)$  – выход системы, объем выборки  $s=200$ , помеха 5 %, входное воздействие  $u(t)=5\cos(0,7t)\cos(0,4t-0,2)$

Проанализировав результаты работы модели нелинейного динамического объекта с видом нелинейности типа звена насыщения и квадратора, можно сделать вывод о том, что непараметрическая модель достаточно точно описывает систе-

му при различных значениях параметров нелинейной части объекта, в условиях зашумленности каналов связи, при различном объеме выборки и различных входных воздействиях.

### **1.11. Определение вида нелинейности моделей Винера и Гаммерштейна**

Рассматривается нелинейная динамическая система класса Винера или Гаммерштейна, вид нелинейного элемента которой неизвестен. Необходимо построить модель такой системы. Ранее были описаны алгоритмы определения параметров функции НЭ системы в случае, когда задана ее параметрическая структура. Обобщим данные процедуры на случай непараметрической неопределенности, когда неизвестны структура и параметры функции, описывающей НЭ. Основная идея алгоритма оценивания нелинейного блока систем класса Винера и Гаммерштейна в данном случае состоит в формировании обучающей выборки на основании результатов дополнительных экспериментов. По данной выборке модель нелинейного блока системы может быть построена с применением непараметрического подхода.

*Оценка нелинейного блока моделей класса Винера.* Для простоты будем предполагать, что в линейной части системы типа Винера коэффициент усиления равен единице. Тогда при подаче на вход системы единичного воздействия выход ЛЭ будет равен его переходной характеристике  $h(t)$  и его значение будет стремиться к единице. При этом выход нелинейного объекта  $x(t) = f(w)$  будет стремиться к величине  $f(1)$ , где  $f(w)$  – функция НЭ системы. При входном воздействии  $u(t)=2$  выход линейного элемента будет равен значению переходной функции, умноженному на величину  $u(t)$ , то есть  $w(t)=2h(t)$ , и будет стремиться к 2. Выход объекта  $x(t)=f(2h(t))$  будет стремиться к значению  $f(2)$ .

Для получения обучающей выборки проводится серия из  $m$  экспериментов, в ходе которых на вход системы последовательно подаются воздействия  $u_j = r_j = u_{\min} + j \cdot \Delta u$ , где  $j = \overline{1, m}$ ,  $u_{\min} \leq u(t) < u_{\max}$  – принятые границы допустимых значений входных воздействий,  $B^{-1} = f^{-1}(u)$  – шаг дискретизации обучающей выборки.

Проведя серию экспериментов, можем получить следующую выборку:

$$\{U, Q\}: U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}, \quad (1.11.1)$$

где  $q_i$  – установившееся значение выхода системы  $x(t)$  при входном воздействии  $u(t) = r_i$ . Причем  $q_i = f(r_i)$ . Если коэффициент усиления системы отличен от единицы, в выборке (1.11.1) значения  $q_i$  пропорциональны  $f(u_i)$ , т. е.  $q_i = C f(u_i)$ ,  $C$  – коэффициент пропорциональности. На рис. 1.11.1 показаны график функции  $f(u_i)$  и точки выборки (1.11.1), по которым строится оценка НЭ системы.

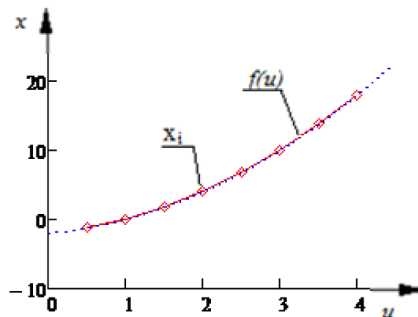


Рис. 1.11.1. Общий вид нелинейного элемента системы (квадратор), функция, описывающая НЭ объекта,  $f(u)$ ,  $x_i = q_i$  – обучающая выборка (1.11.1)

На основании обучающей выборки  $\{U, Q\}$  предлагается строить оценку функции нелинейного звена объекта в виде  $q = \hat{f}(u)$ , а также зависимость  $u = g(q) = f^{-1}(q)$ , где  $g(q)$  – оценка функции, обратной к  $f(u)$ .

Пусть  $\{u_i, q_i\}, i = \overline{1, s}$  – выборка статистически независимых наблюдений значений величин  $(u, q)$ , распределенных с неизвестной плотностью вероятности  $p(u, q)$ . Априори вид нелинейной стохастической зависимости  $q = f(u)$  не задан, но известно, что оператор  $f(x)$  имеет однозначный характер. Для построения математической модели функции  $f(u)$  можно использовать формулу непараметрической оценки регрессии Розенבלата-Парзена:

$$\hat{f}(u) = \frac{\sum_{i=1}^m q_i \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_m}\right)}{\sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{u - u_i}{c_m}\right)}, \quad (1.11.2)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – колоколообразная функция,  $c_s$  – параметр размытости,  $\{u_i, q_i\}$  – выборка объема  $m$ .

Выбор оптимального параметра размытости осуществляется путем минимизации среднеквадратичной ошибки по параметру  $c_s$ :

$$W(c_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (q_i - \hat{f}(u_i))^2 \rightarrow \min_{c_m}. \quad (1.11.3)$$

Оценку функции  $u = f^{-1}(q)$  получаем в виде:

$$\hat{g}(q) = \hat{f}^{-1}(q) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \Phi\left(\frac{q - q_i}{C_m}\right)}{\sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{q - q_i}{C_m}\right)}. \quad (1.11.4)$$

В общем случае оценка (1.11.2) восстанавливает лишь часть нелинейного звена  $f(u)$  при  $u > 0$ , однако необходимо определить вид функции при любом аргументе. Для этого предполагаем, что функция НЭ симметрична относительно оси ординат  $f(-u) = f(u)$  или  $f(-u) = -f(u)$ . Таким образом, можно считать, что вид нелинейности системы определен с помощью оценок (2.3.2), (1.11.4). Выход исследуемого нелинейного объекта:

$$x(t) = \hat{f}(w), \quad (1.11.5)$$

где  $w(t)$  – выход линейного элемента системы, оценка  $f(w)$  определяется согласно (1.11.2). Неизвестным здесь остается значение  $w(t)$ . При единичном входном воздействии выход нелинейной системы  $x^l(t) = f(h(t))$ , то есть значения переходной функции ЛЭ  $h(t)$ :

$$h(t) = f^{-1}(x^l(t)) = \hat{g}(x^l(t)), \quad (1.11.6)$$

где  $x_i^l$  – реакция нелинейной системы на единичное входное воздействие.

При произвольном входном воздействии модель линейного элемента:

$$w(t) = \int_0^t h'(t-\tau)u(\tau)d\tau = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{g}(q_i) \cdot H' \left( \frac{t-\tau_j-t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau. \quad (1.11.7)$$

Получим непараметрическую оценку прогноза выхода нелинейного объекта класса Винера в условиях неопределенности:

$$\hat{x}(t) = \hat{f} \left[ \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{g}(x_i^l) \cdot H' \left( \frac{t-\tau_j-t_i}{c_s} \right) u(\tau_j) \Delta \tau \right]. \quad (1.11.8)$$

*Вычислительный эксперимент 1.* Схема проведения экспериментов и получения обучающей выборки.

Рассмотрим систему класса Винера. Линейная часть объекта описывается дифференциальным уравнением:  $2x''(t) + 0.3x'(t) + 1.5x(t) = u(t)$ . Нелинейный элемент – квадрататор. При последовательной подаче на вход  $u(t) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 10$  получим выборку объемом 15, состоящую из значений входных и соответствующих им выходных величин объекта.

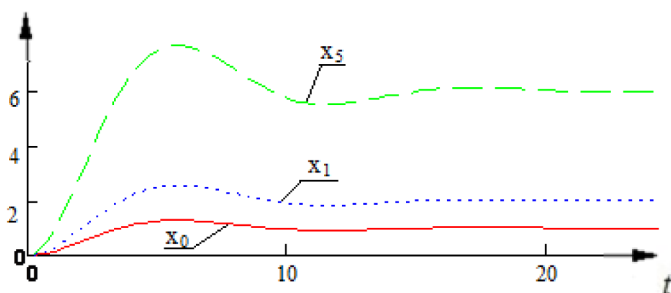


Рис. 1.11.2. Реакция объекта  $x_i$  на тестовые входные возмущения

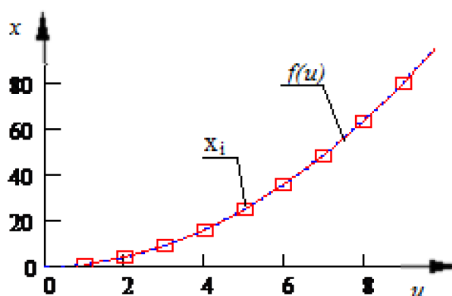


Рис. 1.11.3. Функция НЭ  $f(u)$ ,  $x_i$  – выборка значений системы на тестовые возмущения

По точкам полученной выборки при помощи непараметрической оценки регрессии восстанавливаем общий вид нелинейной части системы.

Как видно из рис. 1.11.4, непараметрическая модель НЭ дает достаточно точное описание исследуемой функции  $f(u)$ .

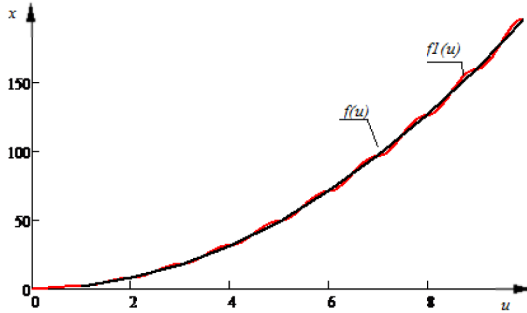


Рис. 1.11.4. Функция НЭ  $f(u)$ ,  $\hat{f}(u)$  – ее непараметрическая оценка

*Оценка нелинейного блока моделей класса Гаммерштейна.* Рассмотрим задачу идентификации системы класса Гаммерштейна (рис. 1.10.1). Исходная информация соответствует условиям непараметрической неопределенности, т. е. структура и параметры моделей как динамического, так и безынерционного блоков системы неизвестны. Требуется построить модель системы на основании измерений входных/выходных переменных.

При подаче на вход системы воздействия  $u(t) = 1(t)$  выход нелинейного блока  $f(1(t)) = c1$ . Выход исследуемого объекта стремится к:

$$x^1(t) = \int_0^t h'(t - \tau) 1(\tau) d\tau = c1 \int_0^t h'(t - \tau) d\tau, \quad (1.11.9)$$

где  $h(t)$  – переходная функция линейного звена системы. Тогда при некотором произвольном входном воздействии  $u(t) = r, r = const$  выход нелинейного  $w(t)$  и линейного  $x(t)$  блоков системы равен соответственно следующим величинам:

$$w(t) = f(r) = R, R = const, x(t) = r \int_0^t h'(t - \tau) d\tau = f(r) \int_0^t h'(t - \tau) d\tau. \quad (1.11.10)$$

Для получения обучающей выборки проводится серия из  $m$  экспериментов, в ходе которых на вход системы последовательно подаются воздействия  $u_{i,j} = r_j, r_j = \text{const}$ . При этом  $u_j = u_{\min} + j \cdot \Delta u$ . В результате получим выборку:

$$\{U, Q\}: U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}, \quad (1.11.11)$$

где  $q_i$  – установившееся значение выхода системы  $x(t)$  при входном воздействии  $u(t) = u_i$ . Причем значения  $q_i$  будут пропорциональны  $f(u_i)$ , т. е.  $q_i = C f(u_i)$ ,  $C$  – коэффициент пропорциональности.

Оценку зависимости величины установившегося значения выхода  $q$  от величины входного сигнала  $u$  строим в виде непараметрической оценки регрессии.

$$\hat{f}(u) = \frac{\sum_{i=1}^m q_i \Phi\left(\frac{u - u_i}{C_m}\right)}{\sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{u - u_i}{C_m}\right)}, \quad (1.11.12)$$

где  $u_i$  и  $q_i$  – элементы выборки,  $m$  – объем выборки. Значения полученной оценки  $q = \hat{f}(u)$  в каждой точке  $u$  будут прямо пропорциональны значениям функции НЭ  $f(u)$ . Будем полагать, что вид нелинейности системы определен в виде (1.11.12). Тогда выход нелинейного блока может быть вычислен как:

$$w(t) = \hat{f}(u(t)). \quad (1.11.13)$$

Выход нелинейной системы при единичном входном воздействии:

$$x(t, u(t) = 1) = x^1(t) = f(1) \int_0^t h'(t - \tau) l(\tau) d\tau = f(1) h(1). \quad (1.11.14)$$

Тогда оценка переходной функции:  $\hat{h}(t) = x^1(t) / \hat{f}(1)$ .



Модель системы класса Гаммерштейна при произвольном входном воздействии:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \frac{x_i^1}{\hat{f}(1)} \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) \hat{f}(u(\tau_j)) \Delta \tau. \quad (1.11.15)$$

Предложенный алгоритм позволяет во многих случаях оценить вид нелинейности динамической системы класса Винера или Гаммерштейна, находящейся в условиях непараметрической неопределенности, а также построить ее модель. Исключение составляют системы с неоднозначной нелинейностью. Например, люфт, так как предлагаемый метод оценки не позволяет получить адекватную оценку функции, описывающей НЭ объекта.

В качестве примера рассмотрим систему класса Винера, линейная часть которого описывается следующим дифференциальным соотношением:

$$1.9 \cdot x''(t) + 0.4x'(t) + x(t) = u(t). \quad (1.11.16)$$

Задача идентификации ставится в условиях неопределенности, когда структура и параметры функции нелинейного элемента неизвестны. Требуется проведение дополнительных экспериментов для формирования обучающей выборки объема  $m$ . Приведем примеры моделей систем с различным видом НЭ.

*Вычислительный эксперимент 2.* Пусть нелинейный элемент системы (1.11.16) – звено с насыщением с параметрами  $a=0,4$ ,  $b=1$ . Входное воздействие:  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .

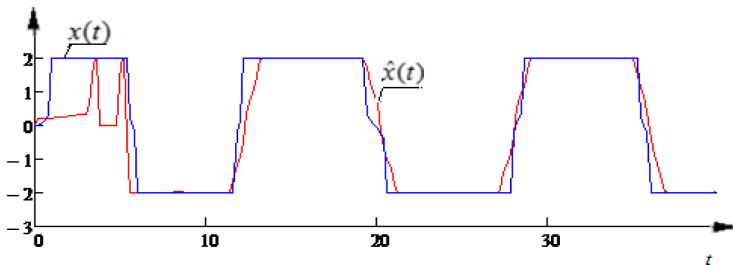


Рис. 1.11.5. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,15$ , помеха 0 %, объем обучающей выборки  $m=20$ , относительная ошибка моделирования 8,5 %

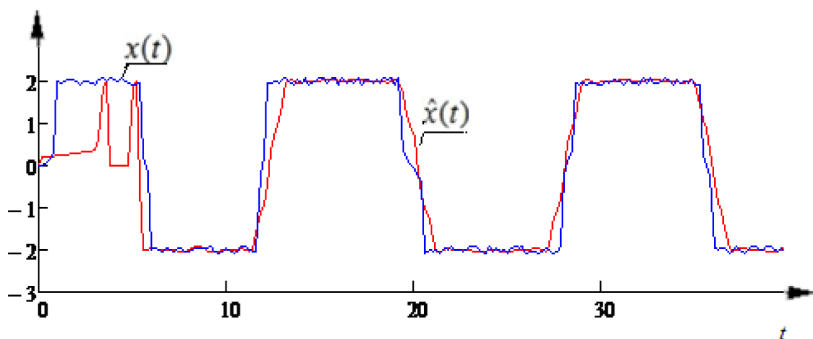


Рис. 1.11.6. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,15$ , помеха 5 %,  $m=20$ , относительная ошибка моделирования 8,9 %

*Вычислительный эксперимент 3.* Нелинейный элемент системы класса Винера – квадратор  $f(w) = 2w^2$ , линейный блок описывается выражением (1.11.16). На рис. 1.11.7 представлена непараметрическая модель линейного элемента системы, построенная по выборке объема  $m=20$ .

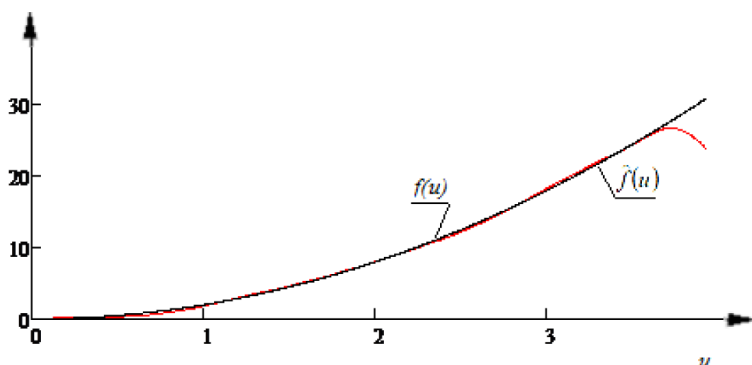


Рис. 1.11.7.  $f(u)$  – функция НЭ системы,  $\hat{f}(u)$  – ее модель (непараметрическая оценка)

На рис. 1.11.8 приведена оценка выхода системы класса Винера при входном воздействии:  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .

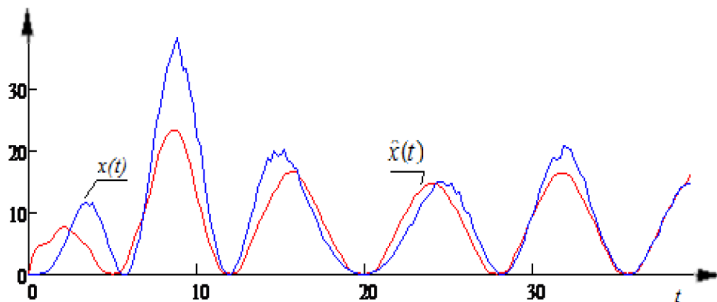


Рис. 1.11.8. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,2$ , помеха 5 %, ошибка моделирования 7,6 %

В данном случае модели строятся в условиях неопределенности, и так как объем обучающей выборки, по которой оценивается НЭ, составляет всего 15–20 точек, ошибка идентификации достаточно большая (7–8 %). Для улучшения качества моделей требуется увеличить объем дополнительных экспериментов  $m$ .

*Вычислительный эксперимент 4.* Нелинейный элемент системы класса Винера описывается соотношением  $f(w) = w^3 + w$ , ЛЭ – (1.11.16). Объем обучающей выборки  $m=50$ . На рис. 1.11.9 приведена модель системы при  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .

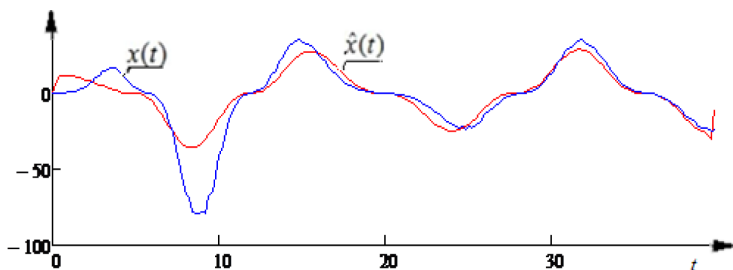
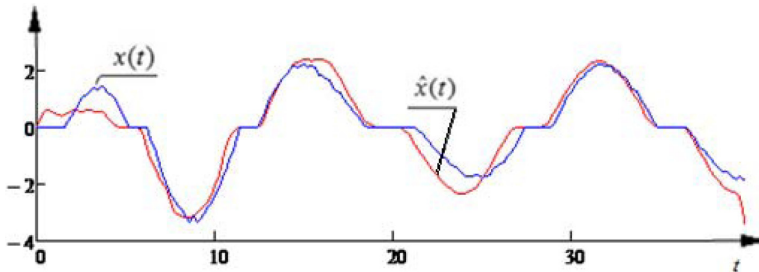


Рис. 1.11.9. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ ,  $\Delta t=0,15$ , помеха 5 %, относительная средняя ошибка модели 5,5 %

*Вычислительный эксперимент 5.* Линейный элемент системы класса Винера имитируется выражением (1.11.16), НЭ описывается соотношением:

$$f(w) = \begin{cases} w-1 & |w| \leq 1 \\ 0 & |w| > 1 \end{cases}$$

Объем обучающей выборки  $m=10$ . На рис. 1.11.10 приведены модели исследуемой системы при различном уровне помех в каналах измерения переменных (0 %, 5 %) и входном воздействии:  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .



*Рис. 1.11.10. Результаты моделирования системы класса Винера,  $s=150$ , шаг дискретизации  $\Delta t=0,15$ , помеха 5 %, ошибка моделирования 6,1 %*

В данном случае может быть получен достаточно точный прогноз поведения системы, находящейся в условиях неопределенности.

*Вычислительный эксперимент 6.* Линейная часть исследуемого объекта класса Гаммерштейна имитируется дифференциальным соотношением:

$$1.87 \cdot x''(t) + 0.35x'(t) + x(t) = u(t). \quad (1.11.17)$$

Нелинейный элемент представляет собой функцию  $f(w) = w^3 + w$ . Примем объем обучающей выборки  $m=50$ .

На рис. 1.11.11 приведены модели исследуемой системы при входном воздействии:  $u(t)=2\cos(0,4t)$ .

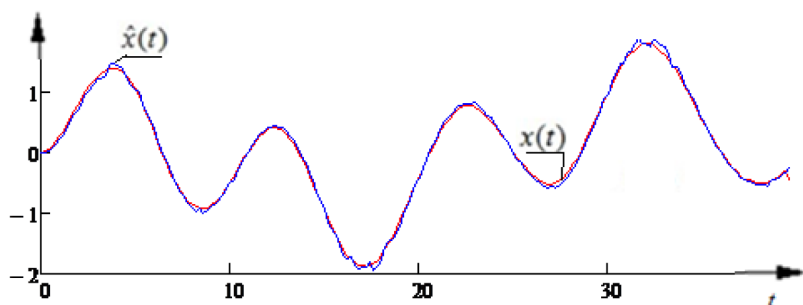


Рис. 1.11.11. Результаты моделирования системы класса Гаммерштейна,  $s=150$ , шаг дискретизации  $\Delta t=0,15$ , помеха 5 %, ошибка моделирования 1,85 %

Проанализировав результаты численных исследований, можно сделать вывод, что непараметрические алгоритмы построения нелинейных динамических систем являются помехоустойчивыми при уровне помех в пределах 5–7 % от абсолютного значения выхода объекта.

В целом непараметрические алгоритмы идентификации динамических объектов с неизвестным типом нелинейного элемента достаточно точно описывают нелинейные системы класса Винера и Гаммерштейна, находящиеся в условиях непараметрической неопределенности. Для реализации алгоритмов требуется проведение дополнительных экспериментов, однако их количество намного меньше, чем потребуется для описания исследуемого объекта в параметрическом виде. При этом сигналы, которые требуется подавать на вход системы, соответствуют тем, которые используются при ее нормальном функционировании (то есть нет необходимости выбирать какой-то определенный класс входных воздействий, например, «белый шум»).

## 1.12. Идентификация нелинейных динамических объектов с использованием метода определения порядка разностного уравнения модели

В случае неизвестной параметрической структуры нелинейного блока предлагается использовать следующий подход, основанный на применении непараметрической оценки регрессии, в которой учитывается информация о глубине памяти нелинейного динамического процесса. Алгоритм идентификации нелинейных динамических систем строится следующим образом. На основании правила выделения существенных переменных определяется глубина памяти динамического процесса  $k$ , которая в дальнейшем используется в непараметрической модели (1.4.4) или в модели (1.5.3). Схема определения глубины памяти динамического процесса подробно была описана в 1.6. Таким образом, в непараметрических моделях (1.4.4), (1.5.3) присутствуют только те переменные, которые были отобраны алгоритмом.

*Вычислительный эксперимент.* Пусть объект описывается следующим нелинейным уравнением (1.13.2). В описываемом эксперименте обучающая выборка формируется следующим образом. Пусть серия различных входных воздействий  $u_1(t) - u_4(t)$  описывается уравнениями (1.13.3), графики которых представлены на рисунке 1.13.1.

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 0.6 + 0.3 \cdot \sin(0.15 \cdot t); u_2(t) = 0.5 + 0.2 \cdot \cos(0.05 \cdot t); \\u_3(t) &= 0.23 + 0.1 \cdot \sin(0.2 \cdot t); u_4(t) = 0.1 + 0.4 \cdot \sin(0.2 \cdot t); \quad (1.13.3) \\u_5(t) &= 0.3 + 0.8 \cdot \sin(0.05 \cdot t).\end{aligned}$$

Полученные значения формируют общую выборку входных переменных  $u(t)$ , определенную в интервале  $u(t) \in [-0.5, 1.1]$ . Значения входной переменной  $u(t)$  подставля-

ются в уравнение (1.13.2). Таким образом, мы получаем выборку входных/выходных переменных  $\{x_i, u_i, i=1, s\}$ , где  $s$  – объем обучающей выборки. В данном случае  $s = 500$ .

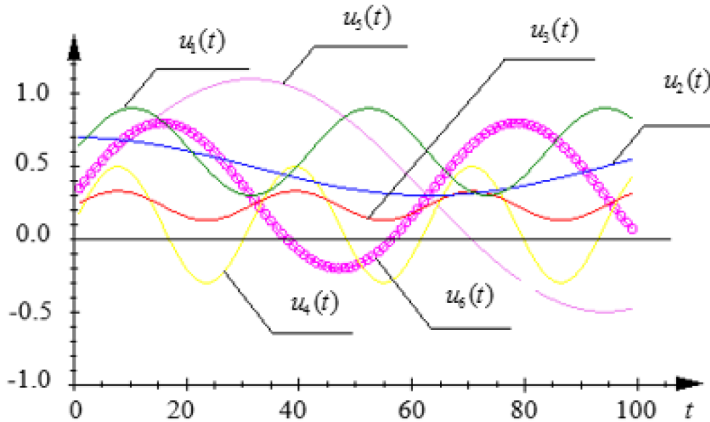


Рис. 1.13.1. Серия входных воздействий  $u_1(t) - u_6(t)$

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма идентификации сформируем новую выборку входных воздействий  $u_6(t) = 1 + 0.5 \cdot \sin(0.1 \cdot t)$ . Алгоритм идентификации проводится по следующей схеме. Зададим начальное значение  $k = 6$ . Далее построим модель по формуле (1.4.4). Относительная ошибка моделирования равна  $W = 0,017$ . Далее находим оптимальные коэффициенты:  $c_4^* = 0,38$  при  $u_t$ ,  $c_1^* = 0,231$  при  $x_{t-1}$ ,  $c_2^* = 0,378$  при  $x_{t-2}$ ,  $c_3^* = 0,456$  при  $x_{t-3}$ ,  $c_5^* = 1,876$  при  $x_{t-4}$ ,  $c_6^* = 1,999$  при  $x_{t-5}$ ,  $c_7^* = 1,983$  при  $x_{t-6}$ . После выполнения всех этапов алгоритма были исключены переменные:  $x_{t-4}, x_{t-5}, x_{t-6}$ . Таким образом, полученная итоговая структура динамического объекта равна:

$$x_s = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + \beta u_t,$$

что соответствует структуре разностного уравнения объекта (1.13.2), а непараметрическая модель имеет вид:

$$x_s = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s x_i \cdot H\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \cdot \frac{1}{c_s^{x^1}} \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^{x^1}}\right) \cdot \frac{1}{c_s^{x^2}} H\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^{x^2}}\right) \cdot \frac{1}{c_s^{x^3}} H\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^{x^3}}\right). \quad (1.13.4)$$

Прогноз выходной переменной  $x_6(t)$  с использованием непараметрической модели (1.13.4) представлен на рис. 1.13.2.

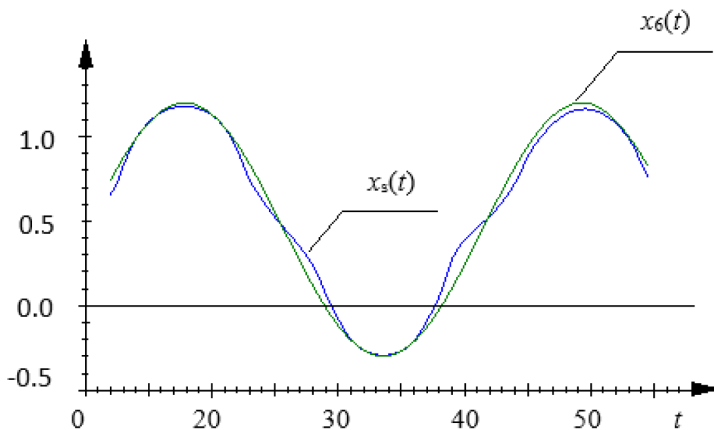


Рис. 1.13.2. Выход объекта (1.13.2)  $x_6(t)$  и выход непараметрической модели (1.13.4)  $x_s(t)$  при подаче на вход входной переменной  $u_6(t)$

Относительная ошибка идентификации для первого эксперимента равна  $W = 0,12$ , что говорит об удовлетворительном качестве аппроксимации. Увеличим степень нелинейности. Пусть уравнение объекта описывается в виде:

$$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3}^{1,2} + 1,5u_t. \quad (1.13.5)$$

Пусть на процесс (1.13.5) действует аддитивная помеха  $\xi(t) = 5\%$ , распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1. Для моделирования случайной величины, распределенной по нор-



мальному закону, использовался метод полярных координат. Коэффициент  $k$  был найден таким же образом, что и ранее. Результаты идентификации объекта (1.13.5) при подаче на вход входного воздействия  $u_6(t)$  показаны на рис. 1.13.3.

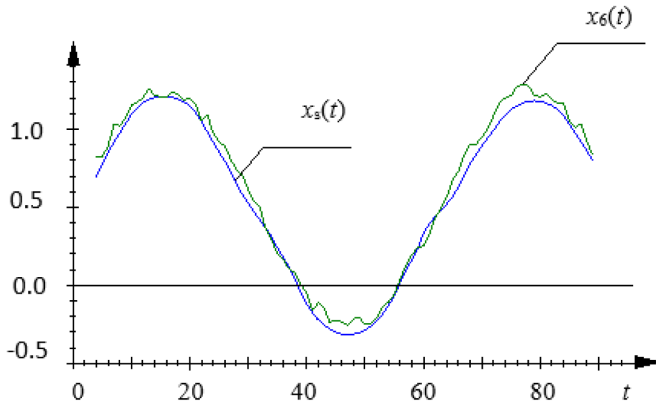
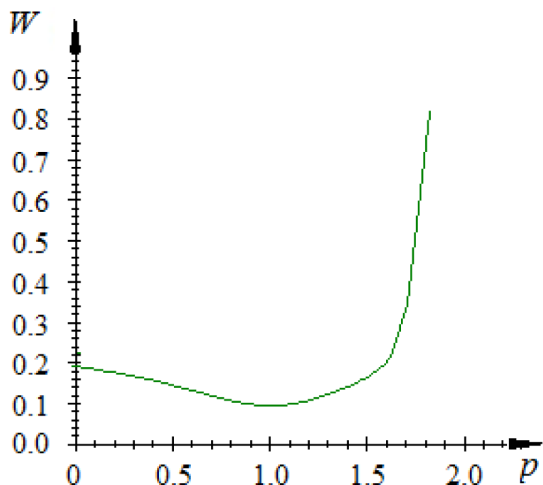


Рис. 1.13.3. Выход объекта (1.13.5)  $x_6(t)$  и выход непараметрической модели (1.13.4)  $x_s(t)$  при подаче на вход входной переменной  $u_6(t)$ , при помехе  $\xi(t) = 5\%$

Относительная ошибка идентификации для второго эксперимента равна  $W = 0,19$ , что также говорит об удовлетворительном качестве модели, даже при достаточно высоком уровне внешней помехи, действующей на процесс. Из анализа рис. 1.13.3 и значений относительной ошибки  $W$  можно сделать вывод, что несмотря на то, что процесс (1.13.5) не относится к классу линейных, непараметрический алгоритм (1.13.4) справляется с задачей идентификации и также может быть применим и для идентификации нелинейных динамических процессов.

Рассмотрим зависимость относительной ошибки моделирования  $W$  от показателя степенной функции  $p$  (рис. 1.13.4). Показатель степени будет изменяться у переменной  $x_{t-3} : x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3}^p + 1,5u_t$ .



*Рис. 1.13.4. Зависимость между относительной ошибкой моделирования  $W$  от показателя степенной функции  $p$*

Из рис. 1.13.4 видно, что, если показатель степенной функции менее 1,5, относительная ошибка моделирования достаточно низкая. Напротив, при повышении показателя степени более 1,13 наблюдается резкое повышение относительной ошибки. Применение подобных моделей при управлении различными нелинейными динамическими объектами будет подробно рассмотрено в главе 2.

## Глава 2.

# АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

---

### 2.1. Общие сведения о задаче управления

Задача управления динамическим объектом состоит в формировании таких управляющих воздействий  $u(t)$ , которые обеспечивают приведение выходной переменной объекта  $x(t)$  к задающему воздействию  $x^*(t)$  [85; 86]. При этом состояние динамической системы определяется значениями контролируемых входных переменных  $u(t)$ ,  $\mu(t)$ , значениями выходов объекта в предыдущие моменты  $x(t-1), x(t-2), \dots$ , а также значениями неконтролируемых переменных  $\lambda(t)$ . Все контролируемые входные величины можно разделить на управляющие  $u(t)$  и неуправляющие  $\mu(t)$ . К управляющим воздействиям  $u(t)$  относятся подаваемые на объект возмущающие воздействия со стороны регулятора с целью приведения выхода объекта к желаемому состоянию. К неуправляющим воздействиям  $\mu(t)$  относятся возмущения, которые поступают на управляемый объект со стороны внешней среды и приводят к отклонениям выходных величин от задающего воздействия [46].

Система управления должна состоять из двух основных элементов: управляемого объекта, в котором протекает некоторый процесс, подлежащий управлению, и регулятора – устройства, которое осуществляет функции управления объектом [44; 125]. Простейшая функциональная структурная схема управления показана на рис. 2.1.1.

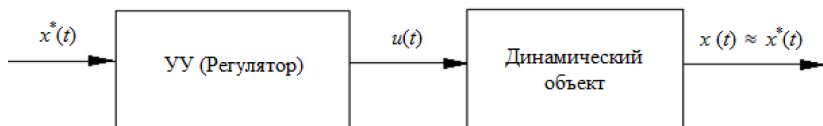


Рис. 2.1.1. Разомкнутая прямая схема управления

На рис. 2.1.1 приняты следующие обозначения –  $u(t)$  – входное управляющее воздействие,  $x(t)$  – выход объекта,  $x^*(t)$  – задающее воздействие. Следует отметить, что при построении системы управления необходимо учитывать, что равенства задающего  $x^*(t)$  и выходного воздействия  $x(t)$  достичь сложно из-за внешних помех, действующих на объект, допущенных неточностей при восстановлении обратного оператора и т. д. В этом случае необходимо введение в схему управления обратной отрицательной связи, которая вносит коррективы в управляющее воздействие по ходу ведения процесса (рис. 2.1.2).

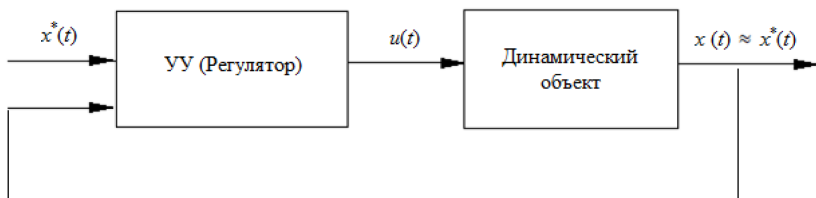


Рис. 2.1.2. Схема управления с обратной связью

В зависимости от характеристик системы и объема априорной и текущей информации отдается предпочтение той или иной схеме управления. На сегодняшний день существует множество методов, применяемых при решении задачи управления [28; 29; 114]. Значительную роль на ранних этапах формирования теории автоматического регулирования сыграли работы Дж. Максвелла, И.А. Вышнеградского, А. Стодола [74]. Авторами рассматривались различные во-

просы, связанные с теорией автоматического регулирования, такие как использование обратной связи при управлении, вопросы устойчивости и другие. Я.З. Цыпкиным [134] разработаны основы теории адаптивных систем. Вопросами дуального управления впервые начал заниматься А.А. Фельдбаум [128]. Теория автоматического управления по возмущению была разработана Г.В. Щипановым, В.С. Кулебакиным, Б.Н. Петровым. Ими были затронуты проблемы компенсации возмущений и инвариантности. Основы теории оптимального управления были заложены Л.С. Понтрягиным, А.М. Летовым и Н.Н. Красовским. Под термином «оптимальное управление» понимается формирование такой управляющей стратегии, которая обеспечивает минимум или максимум некоторой целевой функции с точки зрения выбранного критерия или набора критериев [98]. Активно развиваются методы адаптивного непараметрического управления [83]. Ниже будут рассмотрены некоторые алгоритмы регулирования, применяемые при управлении динамическими процессами.

**Типовые алгоритмы управления.** Одними из наиболее широко распространенных на практике регуляторов являются типовые П-, ПИ- и ПИД-регуляторы. Типовые регуляторы являются классическими в теории автоматического регулирования. Настройка параметров регулятора может осуществляться либо вручную, либо автоматически. При этом процесс настройки должен включать два основных этапа: идентификацию модели управляемого объекта и настройку оптимальных параметров регулятора. Прежде чем выбрать начальные приближения параметров, необходимо определиться с целью управления и используемыми критериями качества [69].

Среди задач, для решения которых используются П-, ПИ-, ПИД-регуляторы, встречаются задачи поддержания определенного значения параметра, программного управ-

ления и другие. Пусть поставлена задача слежения, т. е. на вход объекта подается желаемая траектория  $x^*(t)$ . Все типовые регуляторы предполагают наличие обратной связи. П-регулятор выдает управление, пропорциональное значению ошибки,  $e = x - x^*$  с коэффициентом пропорциональности  $K_1$ . И-регулятор выдает управление, пропорциональное интегралу ошибки с коэффициентом пропорциональности. ПИ-регулятор является комбинацией П- и И-регуляторов, результатом их последовательного подключения. Д-регулятор генерирует управляющее воздействие, пропорциональное производной регулируемой величины с коэффициентом пропорциональности. ПИД-регулятор является комбинацией всех трех регуляторов.

Совершенно ясно, что качество регулирования различного рода зависит от настроек соответствующих регуляторов и в ряде случаев оказывается недостаточно эффективным. Для построения схемы управления необходимо выбрать коэффициенты, которые бы обеспечивали прежде всего устойчивость и, желательно, наилучшее, в смысле выбранного критерия, качество управления. Настройка регулятора выполняется после того, как были каким-либо методом, используя идентифицированную модель, вычислены начальные приближения параметров. Она может производиться вручную, основываясь на правилах, полученных из опыта, теоретического анализа и численных экспериментов.

**Адаптивные алгоритмы управления.** Большинство разработанных на сегодняшний день алгоритмов управления относится к классу параметрических. Это означает, что на этапе постановки задачи управления предполагается, что известна параметрическая структура модели исследуемого объекта с точностью до параметров из имеющейся априорной информации. Данный подход получил значительное развитие в рамках теории адаптивных управляющих систем [2; 103; 116; 132],

которая предполагает предварительную параметризацию объекта. Адаптивные системы при формировании управляющих воздействий используют текущую информацию об объекте исследования [104; 129; 129]. Следует отметить, что в большинстве случаев имеющейся априорной информации бывает недостаточно для обоснованного выбора параметрической структуры модели динамического объекта. Одной из характерных ситуаций является недостаток текущей информации из-за отсутствия соответствующих средств контроля.

**Дуальное управление.** Существенный интерес представляет развитие теории дуального управления. Недостаток априорной информации об объекте исследования приводит к необходимости совмещать изучение объекта и управление им. При таком управлении управляющие воздействия носят двойственный характер. Они служат средством изучения, познания объекта, но также и средством приведения объекта к требуемому состоянию. Такое управление, при котором управляющие воздействия носят двойственный характер, называют дуальным управлением. Дуальное управление было открыто А.А. Фельдбаумом в 1960 г. и развито на основе теории статистических решений [128]. Следует отметить, что обобщающиеся системы управления являются системами «с памятью», т. е. они не только способны изучать характеристики объекта, но и, сохраняя их в памяти, вырабатывать рациональные управляющие воздействия. Проблему дуального управления также рассматривал Я.З. Цыпкин в [132]. В данной постановке задачи управления необходимы сведения о параметрической структуре модели объекта исследования. Дальнейшее развитие теории дуального управления получила в исследованиях различных авторов, в частности В. Виттенмарка [172]. В последней работе обращается внимание на громоздкость аналитических результатов по синтезу оптимального алгоритма управления и осуществляется подмена алгоритмов управле-

ния в виде неоптимальных дуальных регуляторов. Отметим, что при постановке задачи распределение вероятностей помехи и параметрическая модель объекта предполагаются известными. Такой подход применим только к управлению хорошо изученными процессами, параметрическая структура модели которых известна. Еще одним примером применения дуальных адаптивных алгоритмов управления в условиях параметрической неопределенности является разработка алгоритма регулирования неустойчивым объектом [147]. В данной работе для синтеза дуального регулятора применяется бикритериальный подход, в котором используются два критерия, соответствующие двум целям дуального управления. Как и в предыдущем случае, разрабатываемый алгоритм регулирования применим в условиях, когда структура модели объекта или регулятора задана с точностью до параметров. Некоторые вопросы, касающиеся дуального управления, а именно синтез систем дуального управления, связанный с методом наибольшего правдоподобия при отсутствии априорной информации о неизвестных параметрах объекта разрабатывался В.П. Живолядовым в работе [46]. В дальнейшем были разработаны алгоритмы дуального адаптивного управления для линейных стохастических систем с постоянными, но неизвестными параметрами [153; 171], а также были исследованы различные методы управления линейной дискретной системой с нестационарными случайными параметрами в присутствии помех [167]. Как уже говорилось ранее, в приведенных выше исследованиях задачи управления рассматривались в условиях параметрической неопределенности. В случае когда структура динамического процесса не определена с точностью до вектора параметров, одним из возможных путей решения задачи управления является применение нейронных сетей [146]. Ниже основное внимание будет уделено разработке непараметрических адаптивных систем управления, сохраняющих составляющие дуализма.



В случае когда априорной информации недостаточно, чтобы выбрать параметрическую структуру модели исследуемого процесса, естественно использовать теорию непараметрической системы управления [77; 80; 81].

## 2.2. Алгоритмы непараметрического управления с использованием метода обратного оператора

Метод обратных операторов – это метод управления техническими объектами со многими регулируемыми переменными, основанный на применении в контуре управления обратной модели объекта [19; 33]. Впервые для синтеза многомерных систем управления данный метод был описан в работе [101].

Рассмотрим подробно идею автоматического управления различными объектами, в том числе и динамическими с помощью устройств, синтезированных методом обратного оператора. Введем оператор объекта  $A$ , описывающий процесс, т. е.  $x(t) = A < u(t) >$  [83].

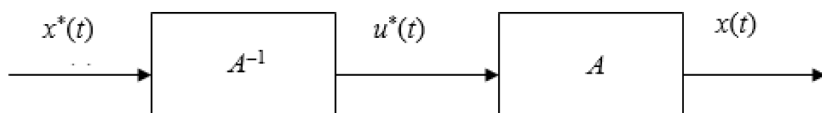


Рис. 2.2.3. Идеальная схема управления

Идея управления заключается в следующем. Данное устройство управления осуществляет преобразование вектора измеряемых переменных в вектор управляющих воздействий, причем оператор такого преобразования  $A^{-1}$  является обратным к оператору  $A$ , которым описывается объект [33]:

$$\begin{aligned}
 A^{-1}x(t) &= A^{-1}A < u(t) >, \\
 u(t) &= A^{-1}x(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

Задавая желаемую траекторию выходной переменной  $x(t) = x^*(t)$ , находим из (2.2.1) идеальное значение управляющего воздействия  $u^*(t)$ . Таким образом, (2.2.1) может быть отнесен к категории идеальных регуляторов. Однако проблема состоит в том, что в большинстве случаев его построить нельзя, тем более, что оператор  $A$  неизвестен. В условиях недостатка априорной информации об операторе  $A$  одним из путей решения данной проблемы является использование непараметрических алгоритмов управления, что будет подробно показано ниже.

На рис. 2.2.4 представлена блок-схема управления рассматриваемого процесса.

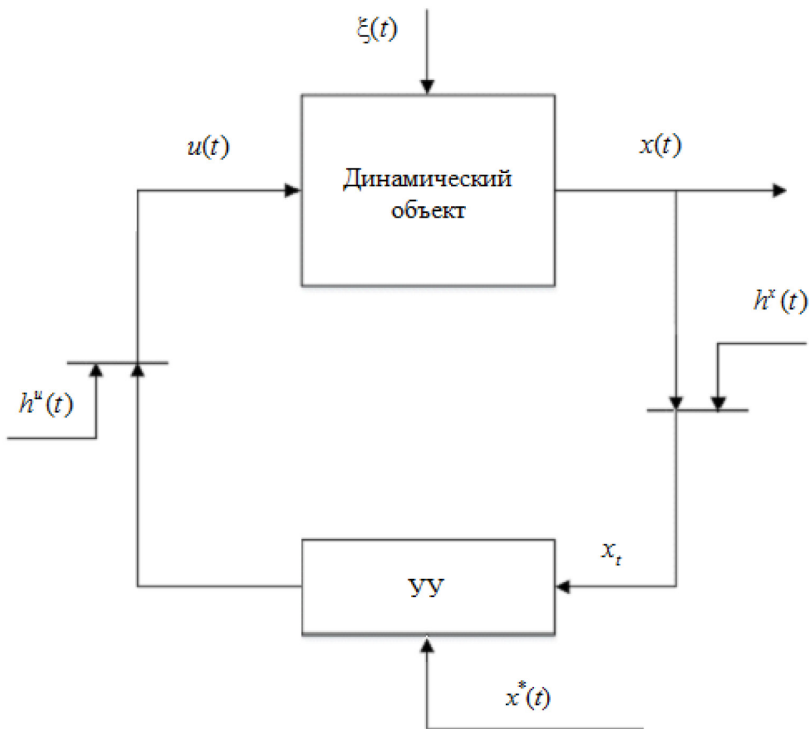


Рис. 2.2.4. Блок-схема управления динамическим объектом

На рис. 2.2.4 приняты обозначения:  $u(t)$  – входная переменная объекта,  $x(t)$  – выходная переменная объекта,  $(t)$  – непрерывное время, индекс  $t$  – дискретное время,  $x_t^*$  – задающее воздействие, УУ – устройство управления, случайные помехи измерений  $h_t^u, h_t^x$ , соответствующих переменных процесса,  $\xi(t)$  – векторная случайная помеха. Контроль переменных осуществляется через интервал  $\Delta t$ . Снимая значения показателей, мы получаем исходную выборку входных/выходных переменных  $\{x_i, u_i, i = \overline{1, s}\}$ , где  $s$  – объем выборки, индекс  $h$  у переменных объекта из соображения простоты опущен.

Непараметрический алгоритм дуального управления имеет вид [80]:

$$u_{s+1} = u_s^* + \Delta u_{s+1}, \quad (2.2.2)$$

где  $u_s^*$  – составляющая, накапливающая информацию об объекте исследования, а  $\Delta u_{s+1} = \varepsilon(x_{s+1}^* - x_s)$  – «изучающие» поисковые шаги.

Схема дуального управления представлена на рис. 2.2.5.

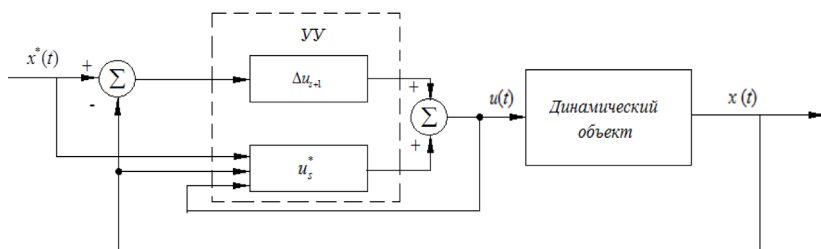


Рис. 2.2.5. Схема дуального управления динамическим объектом

Дуализм алгоритма (2.2.2) заключается в следующем. На первых тактах управления основную роль при формировании управляющих воздействий играет слагаемое  $\Delta u_{s+1}$  из формулы (2.2.2). Но уже по мере накопления информации об объекте возрастает роль слагаемого  $u_s^*$ .

**Управление многомерной линейной динамической системой.** Пусть объект представляет собой многомерную линейную динамическую систему. Схема управления представлена на рис. 2.2.6.

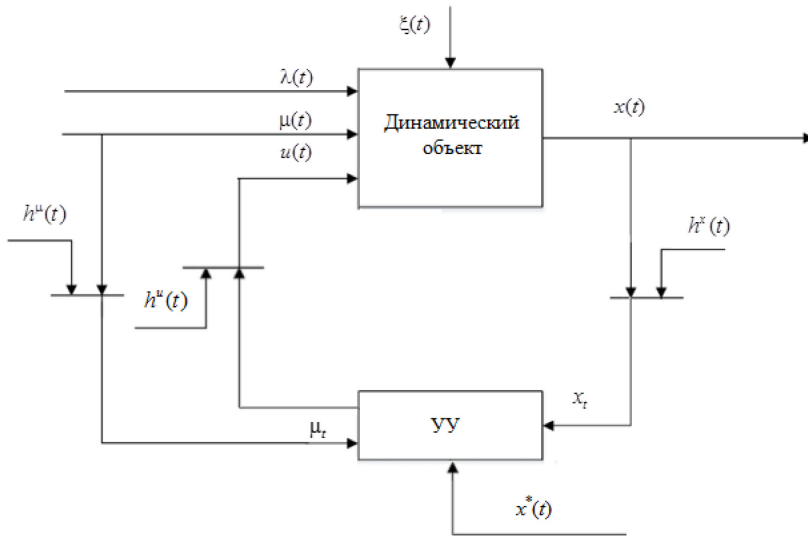


Рис. 2.2.6. Схема управления многомерным линейным динамическим объектом

Так как обратный оператор  $A^{-1}$  имеет аналогичный вид, как и прямой оператор линейной динамической системы  $A$ , то и оценка обратного оператора имеет такую же структуру, что и модель линейной динамической системы (1.3.2). В многомерном же случае оценку обратного оператора можно записать в виде:

$$u_{n,s}^*(t) = \int_0^t \frac{1}{s c_s} \sum_{j=1}^s \omega_{n,j} H' \left( \frac{t - \tau - t_i}{c_s} \right) x_n^*(\tau) d\tau, \quad (2.2.3)$$

где  $u_s$  – оценка «обратного» оператора,  $\omega_i$  – реализация «обратной» переходной,  $x^*(t)$  – задающее воздействие. Обо-

значим так же, как и в первой главе, все возможные входные воздействия: управляемые  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{n1})$ , неуправляемые, но контролируемые  $\mu_t \in (\mu_{1t}, \dots, \mu_{n1})$ , и неконтролируемые  $\lambda_t \in (\lambda_{1t}, \dots, \lambda_{n1})$  через переменную  $\rho_t \in (\rho_{1t}, \dots, \rho_{nt})$ . Ниже приводится схема управления объектом с векторным входом с учетом вышеописанного алгоритма (рис. 2.2.7).

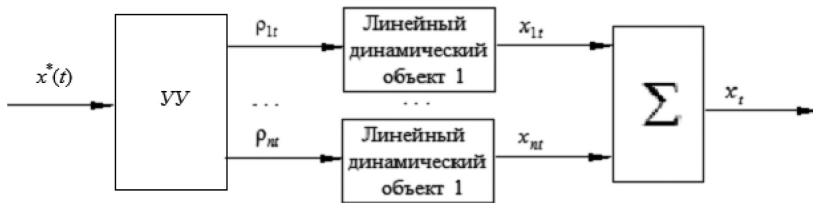


Рис. 2.2.7. Разомкнутая схема управления многомерным линейным динамическим объектом

При применении данного алгоритма необходимо решение задачи неоднозначности при формировании управляющих воздействий. В данном случае необходимо выбрать для каждого звена системы соответствующее задающее воздействие, например, путем введения некоторой ценовой функции  $Q(q_1, \dots, q_n)$ , где  $q_1, \dots, q_n$  – веса для каждого управляющего воздействия, которые определяются путем решения задачи минимизации ценовой функции:

$$Q(q_1, \dots, q_n) = x_s(u_{n,s}, \mu_k, \lambda_k, q_1, \dots, q_n) = \min_{q_1, \dots, q_n}. \quad (2.2.4)$$

С учетом полученных весов из функции (2.2.4) находим управляющее воздействие для  $n$ -го звена системы.

Как уже отмечалось в параграфе 1.4, динамическая система может быть описана дискретным уравнением вида:

$$x_t = F(x_{t-1}, \dots, x_{t-k}, u_t, \xi_t). \quad (2.2.5)$$

С учетом переобозначений (1.4.2) схема управления динамическим процессом может быть показана на следующей

схеме (рис. 2.2.8), которая иллюстрирует модель динамической системы в дискретном времени, сведенную к модели статической системы, когда на вход последней поступают не только переменные  $u_t$ , но и  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$ . И т. д.

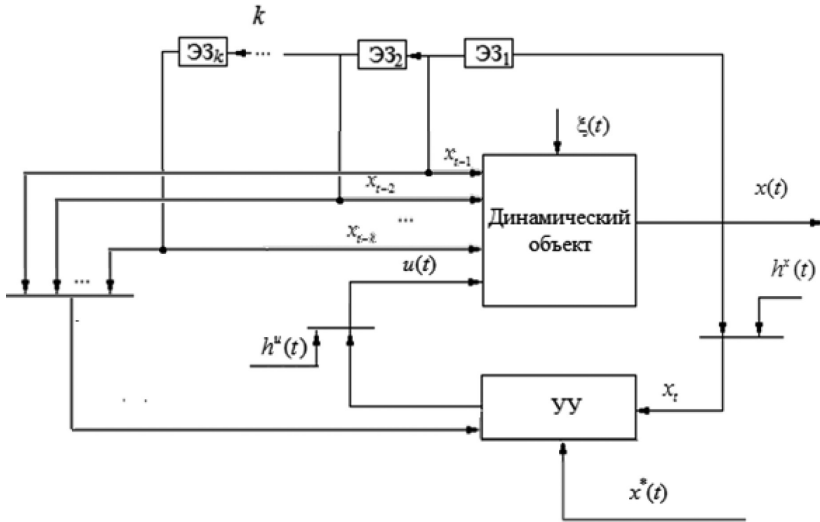


Рис. 2.2.8. Блок-схема управления динамическим процессом

В данном случае в качестве прямого оператора  $A$  можно принять выражение (1.4.4). Тогда обратным оператором  $A^{-1}$  будет выражение (2.2.6):

$$u_s^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \cdot \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s}\right)}. \quad (2.2.6)$$

Выражение (2.2.6) является слагаемым  $u_s^*$  из уравнения (2.2.2).

*Вычислительный эксперимент.* Пусть объект описывается разностным уравнением:

$$x_t = 2,581 \cdot x_{t-1} - 2,206 \cdot x_{t-2} + 0,619x_{t-3} + 0,065u_t. \quad (2.2.7)$$

Сравним результаты управления линейным динамическим объектом с использованием непараметрического алгоритма управления (2.2.6) с результатами управления типовым алгоритмом, в качестве которого был выбран ПИД-алгоритм. Объем выборки  $(u_i, x_i)$  равен 100. Приведем работу двух алгоритмов управления при изменяющемся задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции (рис. 2.2.9).

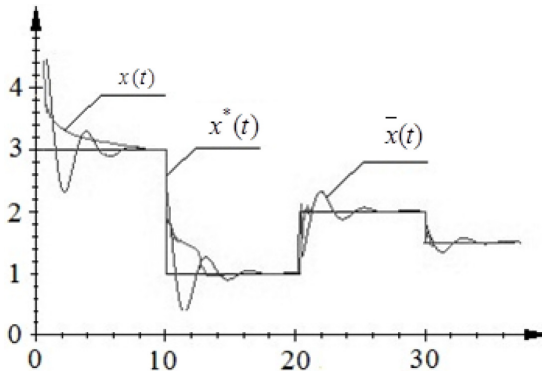


Рис. 2.2.9. Управление динамическим объектом (2.2.7) при ступенчатом задающем воздействии

На рис. 2.2.9 приняты следующие обозначения:  $x(t)$  – выход объекта при управлении непараметрическим регулятором,  $\bar{x}(t)$  – выход объекта при управлении ПИД-регулятором,  $x^*(t)$  – задающее воздействие.

В данном эксперименте качество управления оценивалось по двум характеристикам:

1) время регулирования  $t_p$  – время с начала управления до момента, когда выходная величина отличается от задания не более некоторой заданной величины  $\alpha$ . Обычно принимают:  $\alpha = 0,05y_{уст.}$ ;

2) относительная ошибка управления  $W_p$ , равная суммарному отклонению фактического выхода процесса от задающего воздействия в течение времени регулирования по отношению к задающему воздействию, выраженная в относительных величинах (в %):

$$W_p = \frac{1}{S} \frac{\sum_{i=1}^S |x_i - x_i^*|}{x^*}.$$

Показывает степень отклонения выходной величины от задания, выраженную в процентах.

Подробные результаты управления приведены в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

**Результаты сравнения непараметрического алгоритма дуального управления с ПИД-алгоритмом**

Тип регулятора	$W_p, \%$	$T_p$
ПИД	0,17	8,07
Непараметрический алгоритм дуального управления	0,16 (на этапе накопления информации) 0,007 (после прохождения этапа накопления информации)	8,15 (на этапе накопления информации) 1,1 (после прохождения этапа накопления информации)

На рис. 2.2.10 подробно представлено поведение слагаемых алгоритма дуального управления.

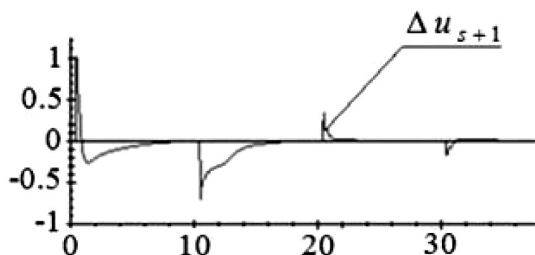


Рис. 2.2.10. Поведение составляющего управляющего воздействия



Рассмотрим работу непараметрического дуального алгоритма управления подробнее. Обучение управлению начинается с первой диады наблюдений  $x_1, u_1$ . На начальной стадии управления необходимо некоторое время (накопленные выборки) для приведения объекта в заданное состояние. На данном этапе большую роль при формировании управляющего воздействия играет переменная  $\Delta u_{s+1}$  из формулы (2.2.2), что показано на рис. 2.2.10. В дальнейшем большее значение имеет слагаемое  $u_s^*$ . После прохождения этапа обучения выходная переменная процесса  $x(t)$  почти мгновенно достигает задающего воздействия  $x^*(t)$ . На рис. 2.2.11 представлено управление исследуемым объектом при внешнем возмущении, равном  $\xi(t) = 7\%$ , задающее воздействие имеет вид ступенчатой функции.

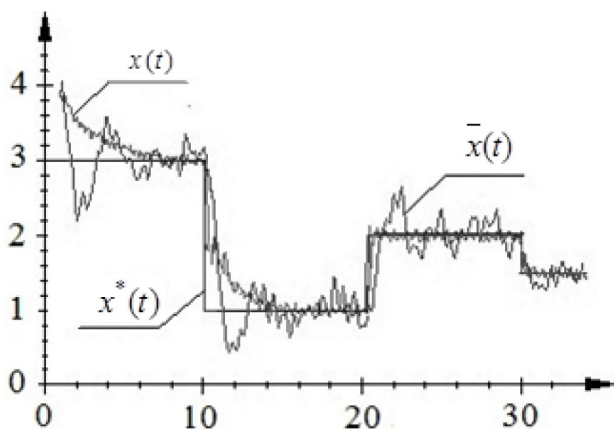


Рис. 2.2.11. Результаты управления при ступенчатом задающем воздействии, при помехе  $\xi(t) = 7\%$

Как можно заметить из рис. 2.2.11, непараметрический алгоритм управления наиболее устойчив к внешним возмущениям, действующим на процесс, по сравнению с типовым ПИД-алгоритмом регулирования.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 2.2.12, когда  $x^*(t)$  имеет вид траектории:

$$x^*(t) = 1.25 + \sin(0.5t). \quad (2.2.8)$$

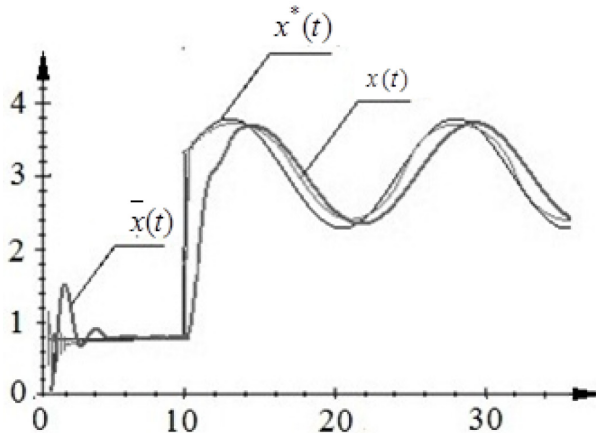


Рис. 2.2.12. Результаты управления при задающем воздействии, имеющем вид траектории (2.2.8)

Как мы можем заметить из рис. 2.2.12, качество управления ПИД-регулятора значительно уступает непараметрическому алгоритму дуального управления (2.2.2). После прохождения этапа обучения, который происходит на первых тактах управления, выходная переменная процесса  $x(t)$  практически сразу достигает значения задающего воздействия  $x^*(t)$ . Ошибка регулирования у непараметрического регулятора в данном случае равна  $W_p = 0,12$ , ПИД-регулятора  $-W_p = 0,26$ . Представим случай, когда  $x^*(t)$  задается случайным образом (рисунки 2.2.13).

На рис. 2.2.13 показано, как ведет себя алгоритм при случайном задающем воздействии. В этом эксперименте представлен случай, когда непараметрический алгоритм дуального управления явно превосходит типовой ПИД-регулятор.

На сегодняшний день ни один из известных регуляторов не справляется с задачей управления при таком варианте  $x^*(t)$ . Следует также отметить, что на практике такого рода задающее воздействие не встречается, однако это представляет интерес с теоретической точки зрения.

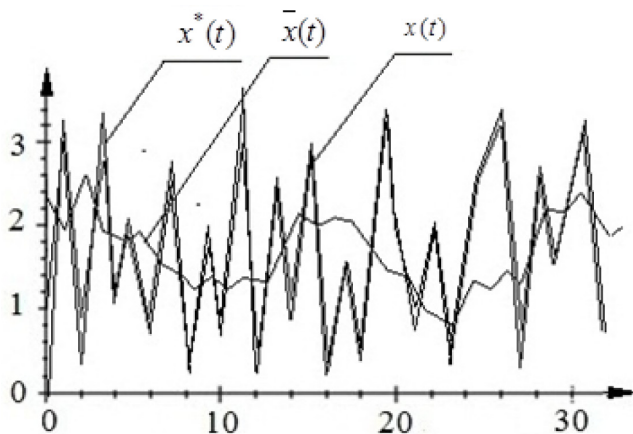


Рис. 2.2.13. Результаты управления при случайном задающем воздействии  $x^*(t)$

Результаты управления динамическим объектом с использованием непараметрического дуального алгоритма управления (2.2.2) также сравнивались с известными [47] результатами по управлению квазиоптимальной по быстродействию системой управления высокого порядка. Качество управления оценивалось по времени регулирования ( $tp$ ). В качестве примера приведем работу двух алгоритмов управления при изменяющемся задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции для объекта, представляющего последовательное соединение трех апериодических звеньев, передаточная функция которого имеет вид:

$$W_p = W_1 \cdot \dots \cdot W_n.$$

Дифференциальное уравнение аperiodического звена равно

$$T_p \frac{dx}{dt} + x(t) = ku(t),$$

а передаточная функция

$$W = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Таким образом, передаточная функция трех аperiodических звеньев равна

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \\ &= \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \\ &= \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 T_2 T_3 s^3 + T_1 T_2 s^2 + T_1 T_3 s^2 + T_1 s + T_2 T_3 s^2 + T_2 s + T_3 s + 1)} = \frac{x}{u} \end{aligned}$$

$$x(t)(T_1 T_2 T_3 s^3 + T_1 T_2 s^2 + T_1 T_3 s^2 + T_1 s + T_2 T_3 s^2 + T_2 s + T_3 s + x(t)) = k_1 k_2 k_3 u(t)$$

$$x(t)(T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + x(t)) = k_1 k_2 k_3 u(t)$$

$$T_1 T_2 T_3 \frac{dx^3}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \frac{dx^2}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{dx}{dt} + x(t) = k_1 k_2 k_3 u(t).$$

Из чего следует, что при  $T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 2, k = 1, d = 0.001$  дифференциаторе уравнение равно

$$\frac{dx^3}{dt^3} + 3.5 \frac{dx^2}{dt^2} + 3.5 \frac{dx}{dt} + x(t) = u(t),$$

а его разностный аналог:

$$x_i = 2.997x_{i-1} - 2.993x_{i-2} + 0.997x_{i-3} + 9.965 \cdot 10^{-10} u_i.$$

Подробные результаты сравнения непараметрического дуального алгоритма управления с квазиоптимальной по быстродействию системой управления высокого порядка, а также с ПИД-регулятором приведены в табл. 2.2.2.

**Результаты сравнения непараметрического алгоритма  
дуального управления с квазиоптимальной  
по быстродействию системой управления  
и с ПИД-регулятором**

Тип регулятора	<i>Tr</i>
ПИД	7,9
Непараметрический алгоритм дуального управления	8,1 (на этапе накопления информации) 1,2 (после прохождения этапа накопления информации)
Квазиоптимальная по быстродействию система управления высокого порядка	3,5

Таким образом, вычислительный эксперимент показал, что использование предлагаемого непараметрического алгоритма после прохождения этапа накопления информации позволяет сократить время регулирования при равных условиях внешних помех и объема выборок по сравнению с типовым ПИД-регулятором и квазиоптимальной по быстродействию системой управления высокого порядка.

**Управление нелинейным динамическим объектом.** Рассмотрим возможность применения непараметрических алгоритмов для управления разными типами нелинейных динамических объектов. В первом эксперименте рассмотрим линейный динамический объект, который описывается следующим уравнением:

$$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t. \quad (2.2.9)$$

Результаты непараметрического управления объектом (2.2.9) с использованием алгоритма дуального управления (2.2.2), где  $u_s^*$  равно (2.2.6) представлены на рис. 2.2.14. На рис. 2.2.14 представлен случай активного накопления информации, то есть исходная обучающая выборка до проведения эксперимента отсутствовала.

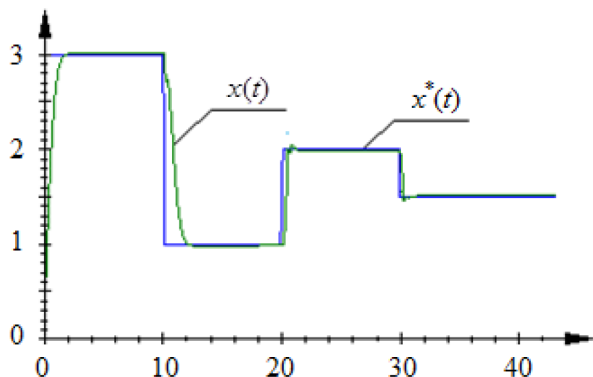


Рис. 2.2.14. Управление линейным динамическим объектом (2.2.9)

Относительная ошибка управления для первого эксперимента равна  $W_p = 0,076$ , что говорит о хорошем качестве непараметрического управления. При анализе рис. 2.2.14 можно наблюдать, как ведет себя дуальный алгоритм управления при активном накоплении информации. На начальных тактах управления (с 1 по 20 такт) алгоритму требуется большее время для приведения объекта к задающему воздействию, так как на данном этапе происходят обучение и накопление выборки. После прохождения этапа обучения, начиная с 20 такта, при изменении задающего воздействия  $x^*(t)$  выходная переменная объекта  $x(t)$  практически сразу достигает значения  $x^*(t)$ . Рассмотрим возможность применения непараметрического алгоритма управления (2.2.2) для нелинейных динамических систем. В следующих экспериментах в качестве исследуемых объектов будут выступать динамические объекты с разной степенью нелинейности.

Пусть разностное уравнение динамического объекта содержит степенные функции, когда уравнение объекта описывается в виде:

$$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,2} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t. \quad (2.2.10)$$

Результаты управления объектом (2.2.10) при активном накоплении информации представлены на рис. 2.2.15.

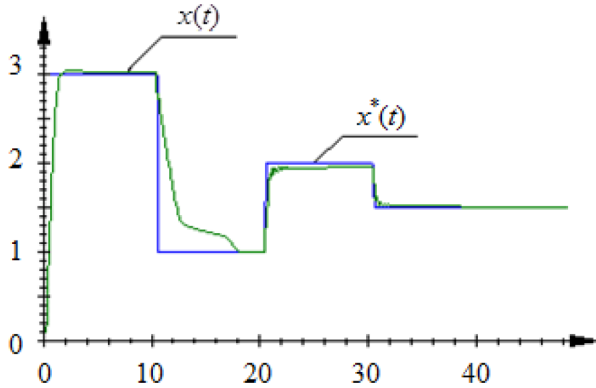


Рис. 2.2.15. Управление нелинейным динамическим объектом (2.2.10)

Для эксперимента, изображенного на рис. 2.2.15, относительная ошибка управления объектом (2.2.10) равна  $W_p = 0,045$ . Введем помеху  $\xi = 5\%$  (помеха приложена к измерению выходной переменной, распределенной по нормальному распределению). Результаты управления для данного эксперимента представлены на рис. 2.2.16.

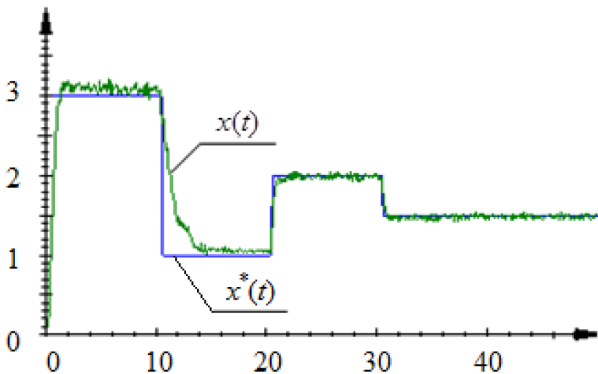


Рис. 2.2.16. Управление нелинейным динамическим объектом (2.2.10), помеха  $\xi = 5\%$

Таким образом, из анализа рис. 2.2.15–2.2.16 и значений относительных ошибок управления  $W_p$  можно сделать вывод, что непараметрический алгоритм управления (2.2.2) успешно справляется с задачей регулирования нелинейных динамических систем даже в случае активного накопления информации, а также при влиянии внешних помех на объект исследования.

В табл. 2.2.3 приведена информация о зависимости относительной ошибки моделирования от вида исследуемой функции.

Таблица 2.2.3

**Зависимость относительной ошибки управления  
от вида уравнения объекта**

Вид уравнения	Относительная ошибка управления
1	2
I. Линейное уравнение $x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,076
II. Нелинейные уравнения (алгебраические) $x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,2} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,085
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2}^{1,2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,088
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3}^{1,2} + 1,5u_t$	0,113
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,2} - 0,3 \cdot x_{t-2}^{1,2} + 0,4 \cdot x_{t-3}^{1,2} + 1,5u_t$	0,124
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,5} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,115
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^2 - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,66
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2}^2 + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,78



1	2
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot \sqrt{x_{t-3}} + 1,5u_t$	0,082
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1}^{1,5} - 0,3 \cdot \sqrt{x_{t-2}} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,23
$x_t = 0,2 \cdot \frac{1}{x_{t-1}} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,456
III. Нелинейные уравнения (трансцендентные)	
$x_t = 0,2 \cdot \sin(x_{t-1}) - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,105
$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot \log_{10}(x_{t-2}) + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,128
$x_t = 0,2 \cdot e^{x_{t-1}} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 1,5u_t$	0,89
$x_t = 0,2 \cdot \cos(x_{t-1}) - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot \sin(x_{t-3}) + 1,5u_t$	0,117

Из анализа табл. 2.2.3 можно сделать следующие выводы: если разностное уравнение динамического объекта содержит степени до второго порядка, алгоритм управления (2.2.2) успешно справляется с задачей регулирования нелинейным динамическим объектом. Относительная ошибка управления  $W_p$  увеличивается, если степенная функция вводится для переменной, коэффициент при которой вносит большее влияние на выходную величину, при этом при повышении степени качество управления значительно ухудшается. Если степень при некоторой переменной в разностном уравнении равна 2 или более, то управление нелинейным динамическим объектом с использованием алгоритма управления (2.2.2) невозможно. Если разностное уравнение объекта содержит дробные степени, алгоритм управления (2.2.2) также справляется с задачей приведения выходной переменной к желаемому значению. Из результатов данного вычис-

лительного эксперимента видно, что даже при возведении в степень каждой переменной качество управления достаточно высоко. Также можно заметить, что если в разностном уравнении динамического объекта содержатся тригонометрические или логарифмические функции, то применение алгоритма управления (2.2.2) возможно. Значительное ухудшение качества управления наблюдается при наличии экспоненциальной функции в уравнении объекта. При отрицательных степенях качество управления также значительно снижается.

**Управление объектом с памятью.** Пусть объект представляет собой динамическую систему и описывается уравнением:  $x_t = f(x_{t-1}, x_{t-3}, u_t)$ . Выбор составляющей  $u_s^*$  из (2.2.2), так же, как и в случае непараметрической идентификации, представляет собой сложный вопрос. С одной стороны, возможно учитывать все переменные до высшего порядка:  $x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}$

$$u_s^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \cdot \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-2} - x_{i-2}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)} \quad (2.2.11)$$

либо учитывать только переменные, непосредственно от которых зависит выход объекта:  $x_{t-1}, x_{t-3}$ .

$$u_s^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \cdot \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-1} - x_{i-1}}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{x_{s-3} - x_{i-3}}{c_s^x}\right)} \quad (2.2.12)$$

Исследуем различие между двумя подходами в ходе численного эксперимента. Пусть исследуемый объект является динамическим и описывается уравнением вида:

$$x_t = 0.4 \cdot x_{t-1} - 0.3 \cdot x_{t-3} + u_t \quad (2.2.13)$$

Переходная характеристика данного процесса представлена на рис. 2.1.17.

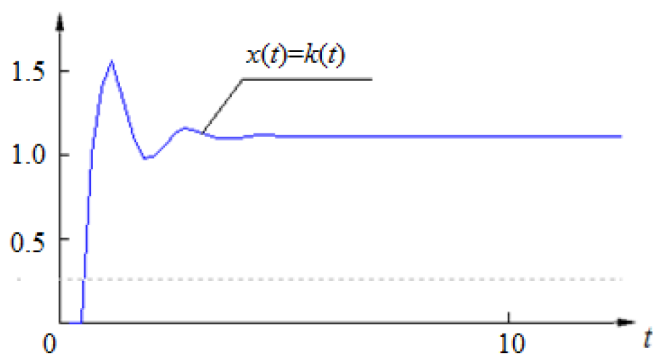


Рис. 2.2.17. Переходная характеристика процесса (2.2.13)

Пусть управляющее воздействие, поступающее на вход объекта с регулятора, описывается уравнением (2.2.2), где  $u_s^*$  равно (2.2.12). Пусть задание имеет вид ступенчатой функции. В таком случае результат управления имеет вид, представленный на рис. 2.2.18.

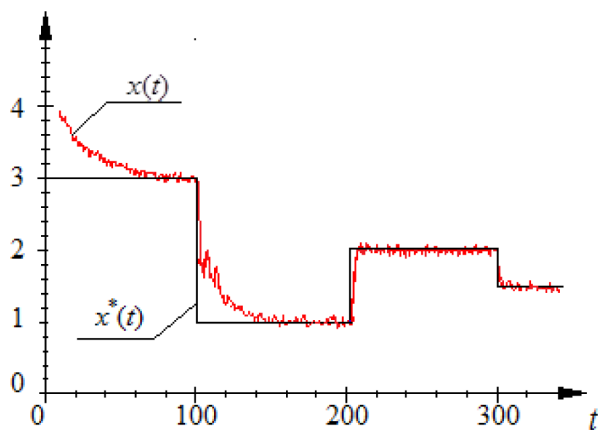


Рис. 2.2.18. Результат управления при частично известной параметрической структуре

На рис. 2.2.19 представлены результаты управления при действии внешней помехи  $\xi = 5\%$ .

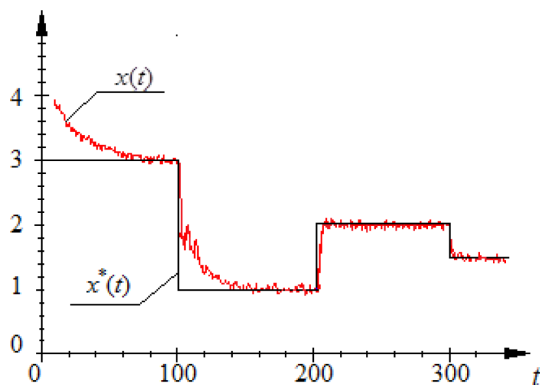


Рис. 2.2.19. Результат управления при частично известной параметрической структуре, при уровне помех  $\xi = 5\%$

На рис. 2.2.18 относительная ошибка управления равна  $W_p = 0,072$ , на рис. 2.2.19 –  $W = 0,13$ . В данной ситуации задача управления решается в условиях как параметрической, так и непараметрической неопределенности, так как структура динамического объекта частично известна. Сравним полученные результаты со случаем, когда  $u_s^*$  будет равно (2.2.11) (рис. 2.2.20).

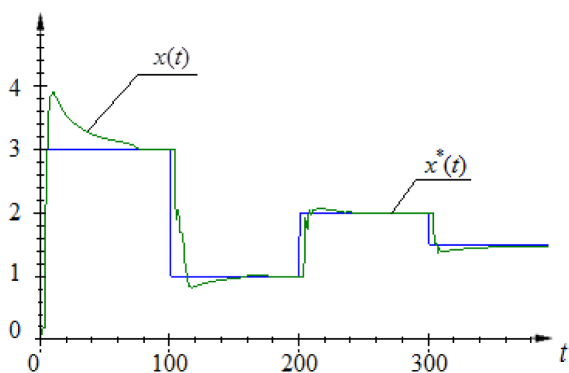


Рис. 2.2.20. Результат управления при неизвестной параметрической структуре

Относительная ошибка управления для случая, представленного на рис. 2.2.20, равна  $W_p=0,12$ . Как мы можем заметить, так же, как и в случае непараметрической идентификации, непараметрическое управление оказывается намного эффективней тогда, когда в формуле для вычисления управляющего воздействия, поступающего на объект, учитываются только переменные, которые влияют на выходное воздействие.

**Управление многомерной динамической системой.** Рассмотрим управление динамической многомерной системой при непараметрическом и параметрическом уровне априорной информации. Пусть объект представляет собой динамическую систему и описывается уравнением:

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}, u_1, \dots, u_2, \lambda_t, \xi_t). \quad (2.2.14)$$

Схема управления представлена на рис. 2.2.21.

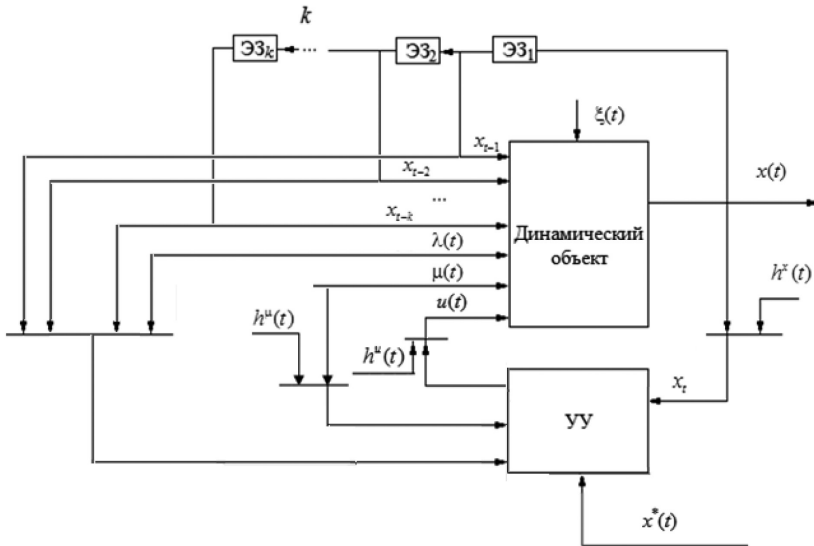


Рис. 2.2.21. Схема управления многомерным динамическим объектом при параметрическом и непараметрическом уровне априорной информации

В рассматриваемой ситуации входное управляющее воздействие представляет собой вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^m$ . Управляющее воздействие  $u_1$  может быть выбрано произвольно из  $\Omega(u_1)$ . Для вычисления управляющего воздействия  $u_{2,s}^*$  воспользуемся следующей формулой:

$$u_{2,s}^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_2^i \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_s^{u_1}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-k}}{c_s}\right) \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^{x_i}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_s^{u_1}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-k}}{c_s}\right) \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^{x_i}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s}\right)}. \quad (2.2.15)$$

Управляющее воздействие  $u_2$  вычисляется с учетом управляющего воздействия  $u_1$ . В конечном счете вычисление  $u_m$  производится в соответствии с формулой:

$$u_{m,s}^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_m^i \prod_{l=1}^{m-1} \Phi\left(\frac{u_l - u_l^i}{c_s^{u_l}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^{x_i}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-k}}{c_s}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{l=1}^{m-1} \Phi\left(\frac{u_l - u_l^i}{c_s^{u_l}}\right) \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^{x_i}}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-k}}{c_s}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{\mu_{js} - \mu_{ji}}{c_s}\right)}. \quad (2.2.16)$$

Расчет коэффициента размытости ядра  $c_s^u$  по каждой компоненте производится в соответствии со следующей формулой:

$$c_s^u = \rho \left| u_{s+1} - u^0 \right|, \quad (2.2.17)$$

где коэффициент  $\rho > 1$ ,  $u^0$  – точка из выборки  $\{u_i\}, i = \overline{1, s}$ , по своему значению наиболее близкая к значению точки  $u_{s+1}$ .

Таким образом, вычисление вектора управляющего воздействия  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^m$  осуществляется покомпонентно.

Для вычислительного эксперимента был выбран объект, описывающийся уравнением вида:

$$x_t = 0.2 \cdot x_{t-1} - 0.4 \cdot x_{t-3} + u_{1t} + u_{2t} + u_{3t} + \mu_t + \lambda_t. \quad (2.2.18)$$

Переходная характеристика данного процесса представлена на рис. 2.2.22.

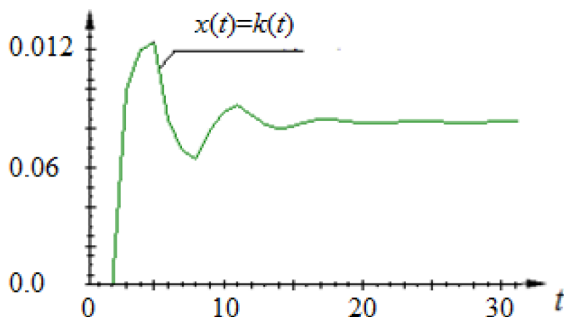


Рис. 2.2.22. *Переходная характеристика процесса (2.2.18)*

Входная неконтролируемая переменная равна:  $\lambda(t) = 0.01\sin(0,05 \cdot t)$ , график переменной представлен на рис. 2.2.23:

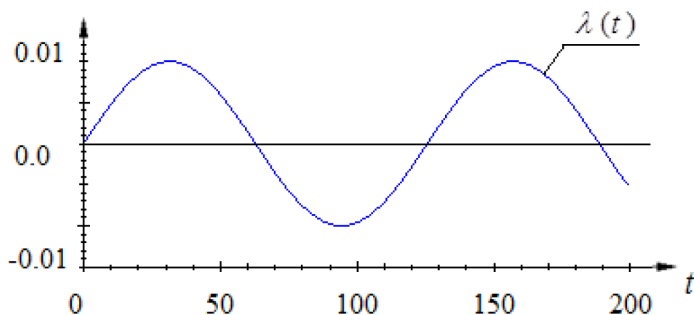


Рис. 2.2.23. *Входная неконтролируемая переменная  $\lambda(t) = 0.01\sin(0,05 \cdot t)$*

Входная контролируемая, но не управляющая переменная равна:  $\mu(t) = 0.1\sin(0,1 \cdot t)$  (рис. 2.2.24).

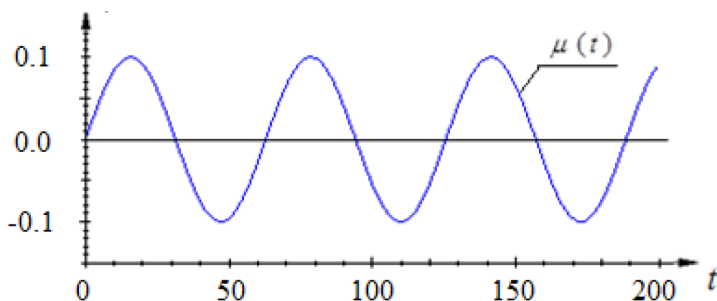


Рис. 2.2.24. Входная контролируемая неуправляемая переменная  $\mu(t) = 0.1 \sin(0,1 \cdot t)$

Так как управление  $u_1$  может быть задано произвольным из  $\Omega(u_1)$ , то зададим его в виде уравнения:  $u_1 = 0.3 \cos(0.2t)$ . Соответствующий график представлен на рис. 2.2.25.

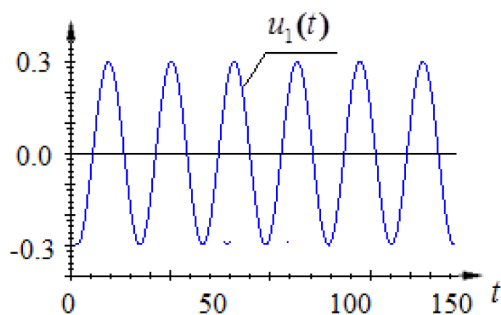


Рис. 2.2.25. Управляемое входное воздействие  $u_1(t)$

Пусть задающее воздействие имеет вид некоторой траектории. Результаты управления представлены на рис. 2.2.26.

Относительная ошибка регулирования для эксперимента, представленного на рис. 2.2.26, равна  $W_p = 0,09$ . Управляемые входные воздействия  $u_1(t), u_2(t)$ , вычисленные с использованием алгоритма (2.2.16) и поступающие на вход исследуемого процесса, изображены на рис. 2.1.27, 2.1.28 соответственно.



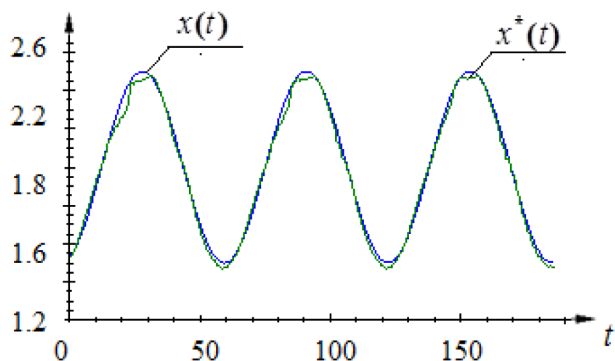


Рис. 2.2.26. Управление объектом (2.2.18) при задающем воздействии, имеющем вид траектории

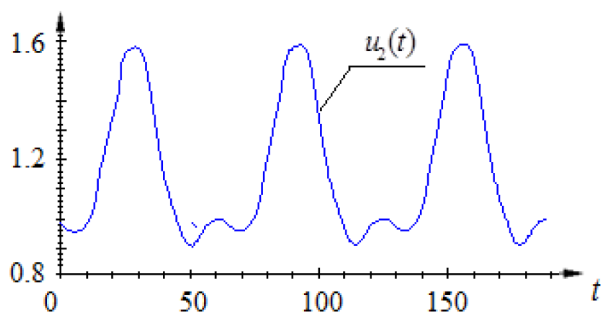


Рис. 2.2.27. Управляемое входное воздействие  $u_2(t)$

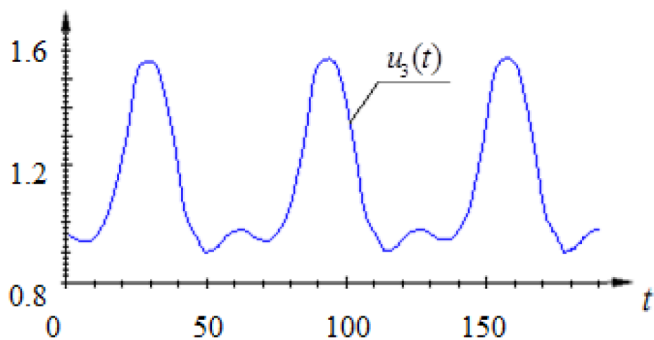


Рис. 2.2.28. Управляемое входное воздействие  $u_3(t)$

Увеличим амплитуду и частоту колебаний неконтролируемой входной переменной. Новое значение примет вид:  $\lambda(t) = 0.2 \sin(0,1 \cdot t)$  (рис. 2.2.29).

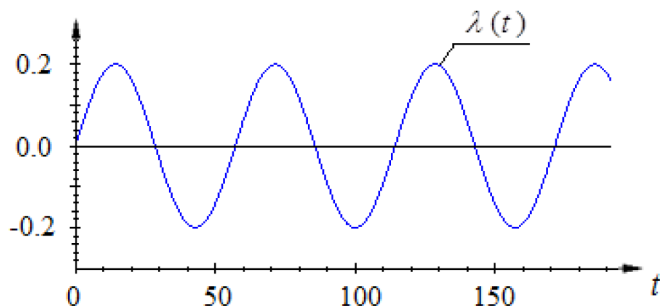


Рис. 2.2.29. Входная неконтролируемая переменная процесса  $\lambda(t) = 0.2 \sin(0,1 \cdot t)$

Результаты управления при данном неконтролируемом воздействии представлены на рис. 2.2.30. Задающее воздействие по-прежнему имеет вид траектории:

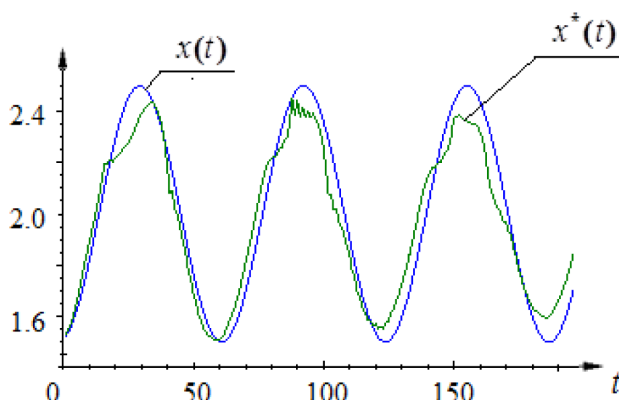


Рис. 2.2.30. Управление объектом (2.2.18) при  $\lambda(t) = 0.2 \sin(0,1 \cdot t)$

Относительная ошибка регулирования для эксперимента, изображенного на рис. 2.2.30, составляет  $W_p = 0,17$ . При дальнейшем увеличении (больше, чем значения кон-

тролируемых переменных) неконтролируемой входной переменной  $\lambda(t)$  непараметрический алгоритм дуального управления перестает справляться с задачей регулирования. Подобные условия проиллюстрированы на рисунках ниже. Пусть неконтролируемая переменная равна  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,25 \cdot t)$  (рис. 2.2.31):

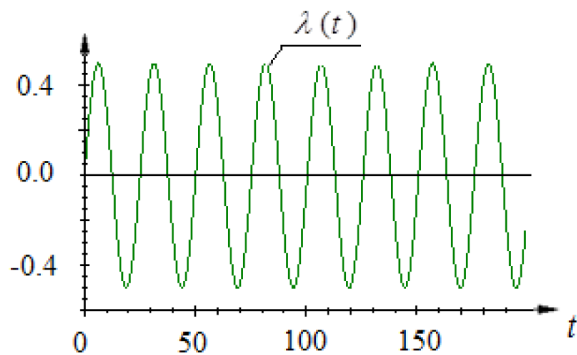


Рис. 2.2.31. Неконтролируемая входная переменная  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,25 \cdot t)$

Результаты управления при неконтролируемом воздействии, представленном на рис. 2.2.31, изображены на рис. 2.2.32:

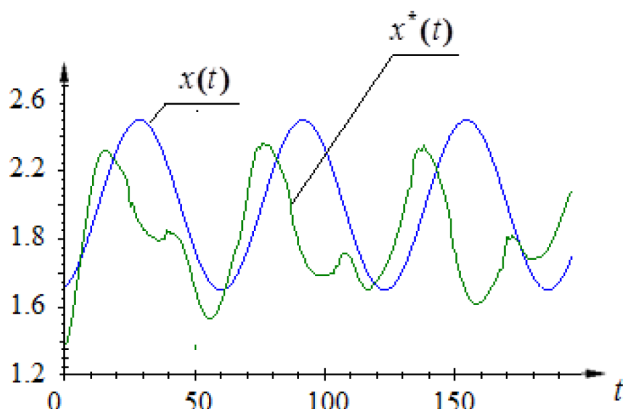


Рис. 2.2.32. Управление объектом (2.2.18) при  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,25 \cdot t)$

Пусть задающее воздействие имеет вид ступенчатой функции. Входная неконтролируемая переменная равна:  $\lambda(t) = 0.01\sin(0,1 \cdot t)$ , график переменной представлен на рис. 2.2.33.

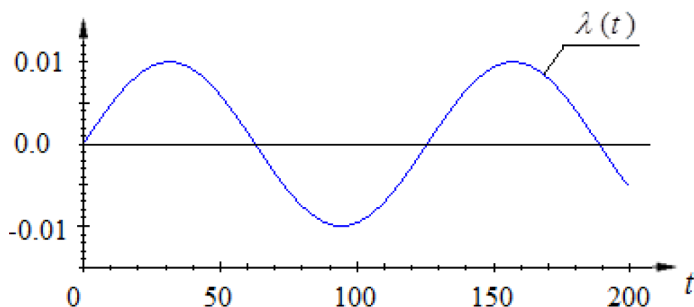


Рис. 2.2.33. Входная неконтролируемая переменная  $\lambda(t) = 0.1\sin(0,25 \cdot t)$

Входная контролируемая, но не управляемая переменная равна:  $\mu(t) = 0.1\sin(0,1 \cdot t)$  (рис. 2.2.34).

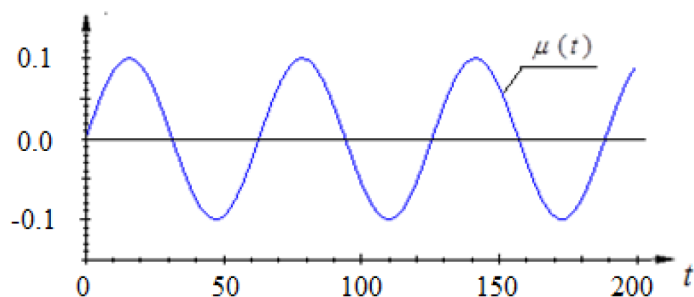


Рис. 2.2.34. Входная контролируемая неуправляемая переменная  $\mu(t) = 0.1\sin(0,1 \cdot t)$

Управление объектом (2.2.18) при вышеописанных условиях представлено на рис. 2.2.35.

Рассмотрим зависимость качества регулирования с использованием непараметрических алгоритмов дуального управления от уровня помех, действующих на объект.

Пусть задающее воздействие имеет вид ступенчатой функции, внешняя помеха равна  $\xi = 7\%$  (рис. 2.2.36).

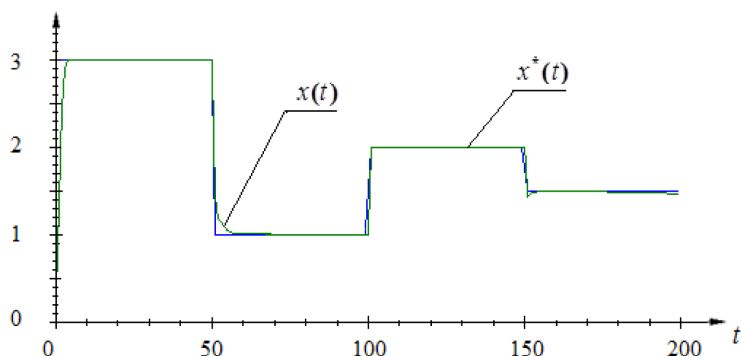


Рис. 2.2.35. Результаты управления при задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции

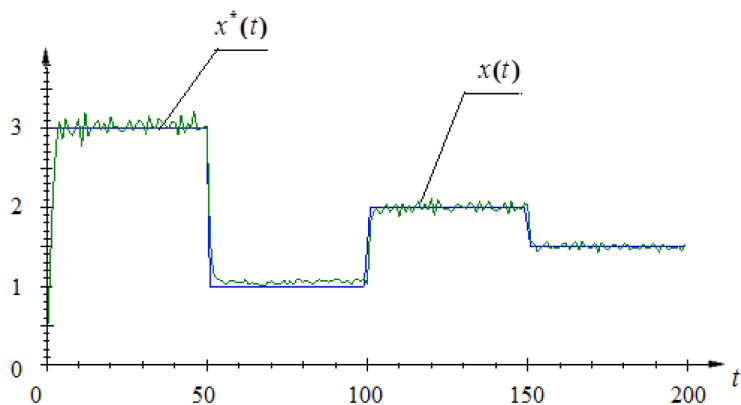


Рис. 2.2.36. Результаты управления при задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции, при внешней помехе  $\xi = 7\%$

Относительная ошибка регулирования для случая, представленного на рис. 2.2.36, равна  $W_p = 0,17$ . Как можно заметить из анализа рис. 2.2.35–2.2.36, непараметрический алгоритм дуального управления устойчив к внешним воздействиям, хотя, естественно, ошибка регулирования возросла по сравнению с предыдущим случаем.

Увеличим влияние неконтролируемой входной переменной. Новое значение примет вид:  $\lambda(t) = 0.2\sin(0,15 \cdot t)$  (рис. 2.2.37).

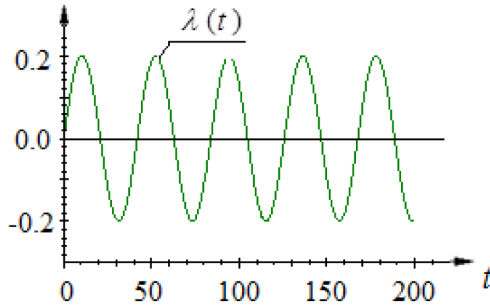


Рис. 2.2.37. Входная неконтролируемая переменная  $\lambda(t) = 0.2\sin(0,15 \cdot t)$

Результаты управления при  $\lambda(t) = 0.2\sin(0,15 \cdot t)$  представлены на рис. 2.2.38.

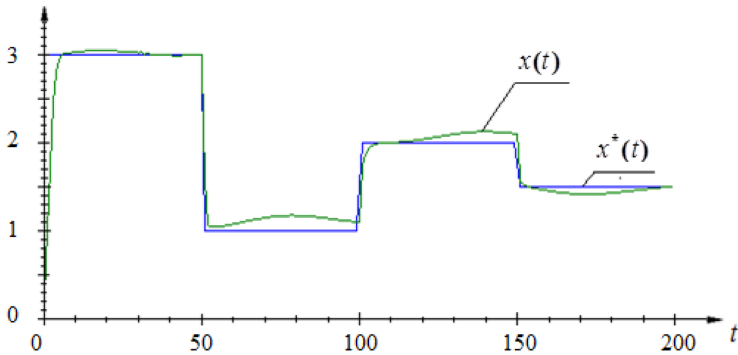


Рис. 2.2.38. Управление объектом (2.2.18) при задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции,  $\lambda(t) = 0.2\sin(0,15 \cdot t)$

Увеличим амплитуду и частоту колебаний неконтролируемой переменной  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,2 \cdot t)$  (рис. 2.2.39). Результаты управления при данных условиях представлены на рис. 2.2.40.

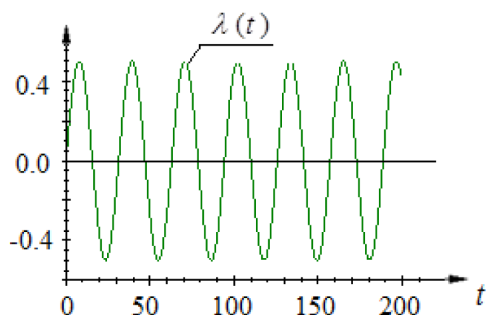


Рис. 2.2.39. Неконтролируемая входная переменная  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,2 \cdot t)$

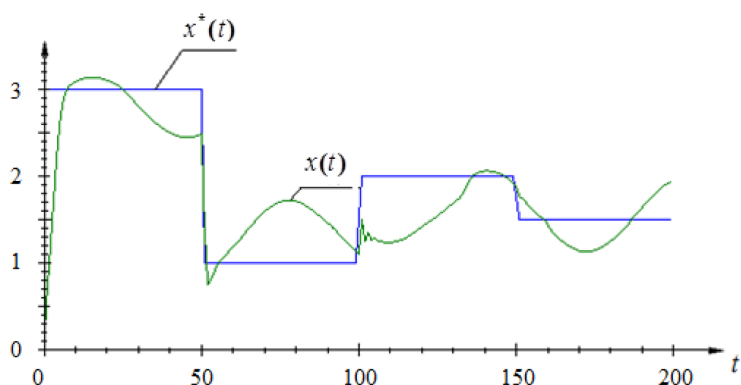


Рис. 2.2.40. Управление процессом при значительном увеличении неконтролируемой переменной, равной  $\lambda(t) = 0.5\sin(0,2 \cdot t)$ , и задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции

Так же, как и в экспериментах, приведенных в первой главе, при значительном увеличении влияния входной неконтролируемой переменной  $\lambda(t)$  на выход объекта  $x(t)$ , в данном случае увеличение амплитуды и частоты колебаний, точность прогноза модели и, как следствие этого, качество управления значительно снижаются. Дальнейшее увеличение  $\lambda(t)$  приводит к ситуации, когда управление объекта становится невозможным. На сегодняшний день единственным способом повышения качества и точности управления является введение дополнительных средств контроля.

## 2.3. Многоконтурные системы управления

Отличительной особенностью замкнутых систем регулирования является наличие хотя бы одного контура обратной связи, которая называется главной обратной связью [92]. Как уже отмечалось ранее, в системах автоматического управления под термином «обратная связь» понимается воздействие результатов функционирования какой-либо системы (объекта) на характер этого функционирования [33]. То есть в такого рода системах управления при формировании управляющих воздействий  $u(t)$  используется информация об отклонениях фактического выхода объекта  $x(t)$  от задающего воздействия  $x^*(t)$ . При этом система управления, которая имеет только одну (главную) обратную связь, то есть один контур управления, называется соответственно одноконтурной системой управления. Большинство современных систем автоматического регулирования, помимо главной обратной связи, имеют одну или даже несколько дополнительных. Таким образом, многоконтурной системой автоматического управления называется система, содержащая два или более контуров, по которым осуществляются связи между различными возмущающими воздействиями, с целью реализации управленческих функций. Математическое описание многоконтурных систем автоматического управления выполняется в виде отдельных уравнений всех рассматриваемых контуров. Введение дополнительных контуров управления связано с реализацией той или иной функции, к которым могут относиться, например, функции идентификации системы, настройки параметров, компенсации возмущений и другие функции [33]. Ниже будут рассмотрены задачи, решение которых получено с использованием введения дополнительных контуров управления.

### 2.3.1. Непараметрическое управление макрообъектом

В настоящее время широко распространенными типами регуляторов при управлении различными процессами явля-



ются устройства управления, в основе которых лежит использование стандартных законов регулирования (П-, ПИ-, ПИД-регуляторы и их разновидности). Следует отметить, что в ряде случаев качество управления при использовании подобных систем оказывается недостаточно эффективным. В основном это вызвано двумя факторами. Во-первых, типовые регуляторы при формировании управляющих воздействий  $u(t)$  используют информацию об отклонении выходной величины  $x(t)$  от задающего воздействия  $x^*(t)$ , при этом данные о неуправляемых входных воздействиях  $\mu(t)$ , которые также влияют на выход процесса  $x(t)$ , часто не учитываются. Во-вторых, типовые регуляторы не являются обучающими, адаптивными. Это означает, что при переводе объекта от одного задающего воздействия к другому регулятор не будет улучшать своих рабочих характеристик. Это значительно увеличивает время перерегулирования, и как следствие, повышает возможность выхода за пределы технологического регламента. Но и исключение из общей схемы управления типовых регуляторов в большинстве случаев не является целесообразным. Это связано с тем, что типовые регуляторы, широко используемые в промышленности, в большинстве своем являются аналоговыми, следовательно, наиболее надежными по сравнению с цифровыми устройствами. Следует отметить также, что некоторые технологические объекты уже содержат в себе встроенные типовые регуляторы, демонтаж и замена которых не выгодны, так как требуют привлечения дополнительных денежных средств.

В связи с этим остается актуальным вопрос о разработке новых управляющих систем, позволяющих решить данные проблемы. С учетом вышеперечисленного представляется целесообразным ввести внешний контур управления, содержащий адаптивное управляющее устройство, которое в процессе функционирования улучшает рабочие свойства управляющей системы. Основная задача данного устройства управления – это корректирование работы типового ре-

гулятора. Введение внешнего контура позволит повысить качество управления существующей системы без вывода из эксплуатации функционирующих типовых регуляторов. Таким образом, качество управления технологическим процессом повышается без потери надежности общей системы управления и привлечения дополнительных средств.

В условиях непараметрической неопределенности, когда на объект, кроме управляющего воздействия, поступает неуправляемая переменная  $\mu_t$ , структура модели процесса может быть описана уравнением:

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}, u_t, \mu_t). \quad (2.3.1.1)$$

Для изложения дальнейшего нам понадобится анализ следующей блок-схемы (рис. 2.3.1).

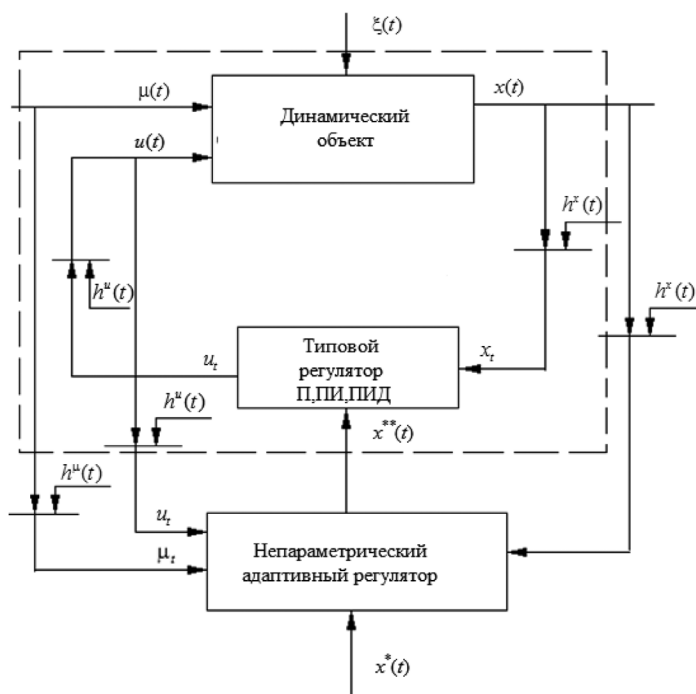


Рис. 2.3.1. Двухконтурная система управления дискретно-непрерывными динамическими процессами

На рис. 2.3.1 приняты обозначения:  $(t)$  – непрерывное время, индекс  $t$  – дискретное время,  $x_t^*$  – задающее воздействие для внешнего контура,  $x_t^{**}$  – задающее воздействие для внутреннего контура,  $h_t^u$ ,  $h_t^x$  – случайные помехи измерений соответствующих переменных процесса,  $\xi(t)$  – векторная случайная помеха. Контроль переменных осуществляется через интервал времени  $\Delta t$ . Таким образом, можно получить исходную выборку входных/выходных переменных  $\{x_i, u_i, \mu_i, i = 1, s\}$ , где  $s$  – объем выборки, индекс  $h$  у переменных объекта из соображения простоты опущен.

Примечательно, что встроенный в систему управления регулятор сохранен, но добавлен внешний контур управления, несущий в себе черты обучаемости и дуализма. Предлагаемое устройство управления не будет заменять типовой регулятор (формирование управляющих входных воздействий продолжает осуществлять типовой регулятор). Разрабатываемое устройство управления будет введено как внешнее устройство по отношению к типовому регулятору.

В условиях, когда параметрическая структура объекта может быть частично параметризована, в качестве модели процесса (2.3.1.1) может быть принята следующая непараметрическая оценка функции регрессии по наблюдениям  $\{x_i, u_i, \mu_i, i = 1, s\}$ :

$$\bar{x}_t = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \cdot \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{\mu_s - \mu_i}{c_s^\mu}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_s - u_i}{c_s^u}\right) \Phi\left(\frac{\mu_s - \mu_i}{c_s^\mu}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}. \quad (2.3.1.2)$$

Если принять в качестве прямого оператора  $A$  выражение (2.3.1.2), то обратным оператором будет выражение (2.3.1.3):

$$u_s^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \cdot \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{\mu_s - \mu_j}{c_s^\mu}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x}\right) \Phi\left(\frac{\mu_s - \mu_j}{c_s^\mu}\right) \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_{s-j} - x_{i-j}}{c_s^x}\right)}. \quad (2.3.1.3)$$

Выражение (2.3.1.2) является слагаемым  $u_s^*$  из уравнения (2.2.2).

Для вычислительного эксперимента был выбран объект, описывающийся уравнением вида:

$$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} - 0,3 \cdot x_{t-2} + 0,4 \cdot x_{t-3} + 0,3\mu_t + u_t. \quad (2.3.1.4)$$

Пусть управление задано в виде уравнения:  $u(t) = \sin(0,5 \cdot t)$ , а неуправляемая, но контролируемая переменная равна:  $\mu(t) = \cos(0,01 \cdot t)$ . Построим модель объекта с помощью непараметрической модели (2.3.1.2). Результаты моделирования представлены на рис. 2.3.2.

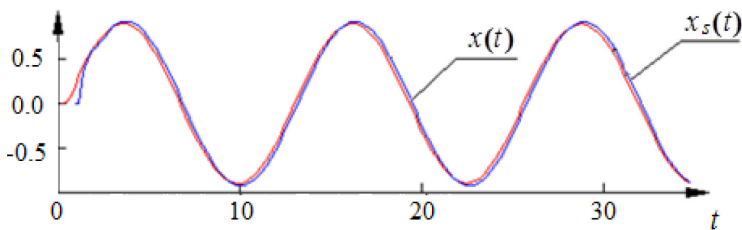
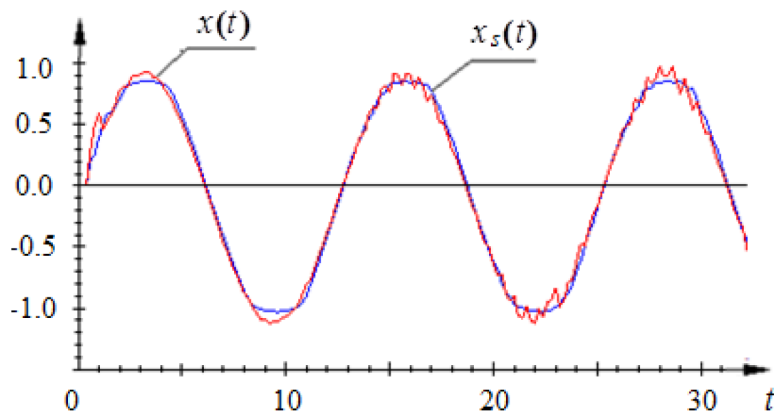


Рис. 2.3.2. Результаты идентификации процесса (2.3.1.4) при использовании модели (2.3.1.2)

На рис. 2.3.2  $x_s(t)$  – выход модели объекта. Относительная ошибка моделирования равна  $W=0,015$ . В данном случае глубина памяти  $k$  является известной величиной. Как можно заметить из рис. 2.3.2 и значения относительной ошибки моделирования  $W$ , непараметрическая модель (2.3.1.2) успешно справляется с задачей идентификации.

В следующем эксперименте величина помехи, действующей на объект, составляет  $\xi = 5\%$ . Управляющее воздействие задано в виде уравнения:  $u(t) = 0.7 \sin(0,5 \cdot t)$ . Результаты моделирования представлены на рис. 2.3.3.



*Рис. 2.3.3. Результаты идентификации процесса (2.3.1.4) при использовании модели (2.3.1.2) при помехе, действующей на объект, равной  $\xi = 5\%$*

Относительная ошибка моделирования для данного эксперимента равна  $W=0,023$ . Как можно заметить из рис. 2.3.3 при использовании непараметрической оценки (2.3.1.2) можно получить достаточно точный прогноз выходной переменной даже при условии действия внешних помех  $\xi$  на процесс.

Сравним результаты управления двухконтурной системой, содержащей непараметрический адаптивный регулятор (2.3.1.3) с системой управления, которая содержит только типовой регулятор, в качестве которого был выбран ПИ-регулятор. Объем выборки  $(u_i, \mu_i, x_i)$  равен 100. Приведем работу двух систем управления при изменяющемся задающем воздействии (рис. 2.3.4).

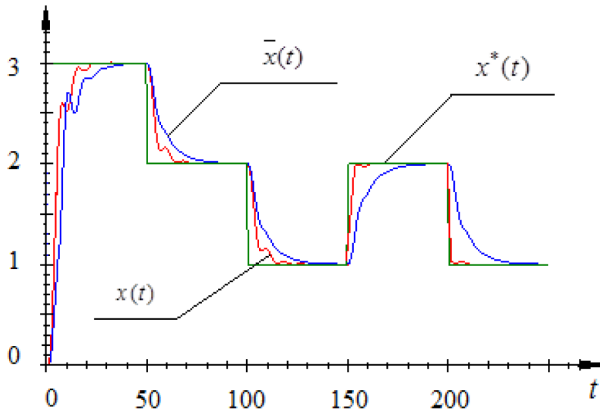


Рис. 2.3.4. Сравнение двухконтурной системы управления и системы, содержащей типовой ПИ-регулятор, при задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции

На рис. 2.3.4 приняты следующие обозначения:  $x(t)$  — значение выходной переменной объекта при управлении двухконтурной системой, содержащей непараметрический адаптивный регулятор,  $\bar{x}(t)$  — значение выходной переменной объекта при управлении ПИ-регулятором,  $x^*(t)$  — задающее воздействие. Ошибка регулирования в случае двухконтурной схемы равна  $W_p=0,07$ , для ПИ-регулятора ошибка возрастает до  $W_p=0,21$ .

На рис. 2.3.5 представлены графики задающего воздействия для ПИ-регулятора  $x^{**}(t)$  и задающего воздействия для двухконтурной схемы управления  $x^*(t)$ . Напомним, что задающее воздействие  $x^{**}(t)$  для типового ПИ-регулятора формирует внешний контур управления, содержащий непараметрический адаптивный регулятор.

Как видно из рис. 2.3.5, при переводе задающего воздействия  $x^*(t)$  для двухконтурной системы управления от одного значения к другому непараметрический адаптивный регулятор изменяет задающее воздействие  $x^{**}(t)$ , что позволяет типовому ПИ-регулятору быстрее достигать жела-

емого значения выходной переменной, что в конечном итоге приводит к уменьшению времени регулирования у типового ПИ-регулятора.

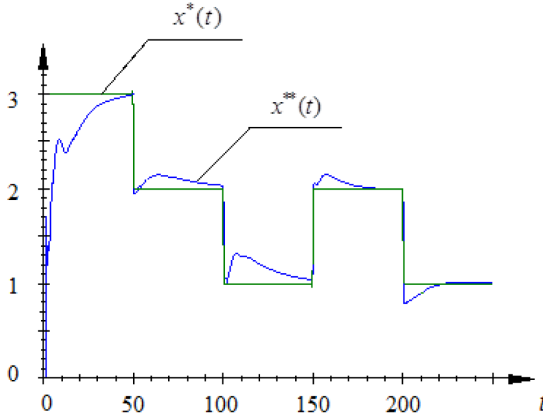


Рис. 2.3.5. Графики  $x^*(t)$  и  $x^{**}(t)$  при задающем воздействии, имеющем вид ступенчатой функции

На рис. 2.3.6 показано сравнение двух систем управления при задающем воздействии, имеющем вид траектории.

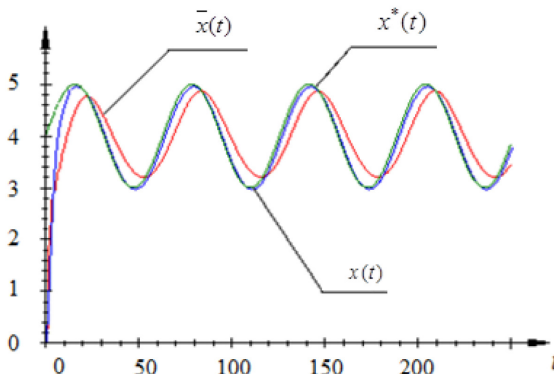


Рис. 2.3.6. Сравнение двухконтурной системы управления и системы, содержащей типового ПИ-регулятора при задающем воздействии, выбранном в виде траектории

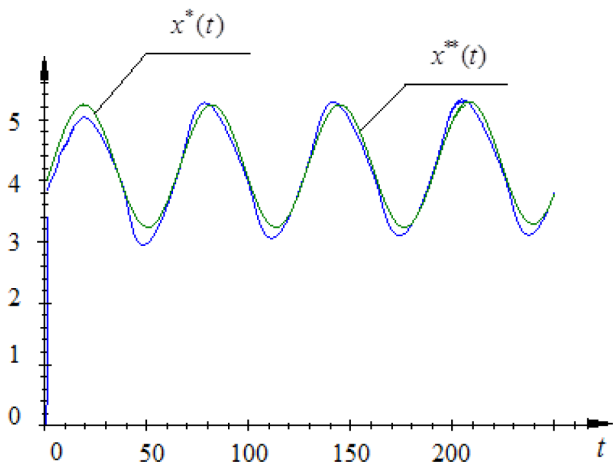


Рис. 2.3.7. Графики  $x^*(t)$  и  $x^{**}(t)$  при задающем воздействии, имеющем вид траектории

Из рис. 2.3.5–2.3.7 можно сделать вывод, что внешний контур управления корректирует типовой ПИ-регулятор путем изменения задающего воздействия  $x^{**}(t)$ , что приводит к более точному ведению управления в сравнении с системой управления, содержащей только типовой ПИ-регулятор.

### 2.3.2. Непараметрическое управление неустойчивым динамическим объектом

Несмотря на то что большинство технологических объектов относится к классу устойчивых, часто в качестве предмета автоматизации выступают динамически неустойчивые объекты управления. Примерами таких задач в технике являются управление статистически неустойчивым летательным аппаратом, управление обратным маятником в механике и другие. Неустойчивые объекты характеризуются возрастанием выходной величины  $x(t)$  при сколь угодно малом входном воздействии  $u(t)$ . Важность управления неустойчивым объектом заключается в том, что при выходе из строя



автоматической системы управления неустойчивый объект может представлять собой существенную опасность и для человека, и для окружающей среды.

Актуальность данной работы заключается в том, что проблема управления неустойчивой динамической системой решается в условиях, когда априорная информация не содержит сведений о параметрической структуре исследуемого объекта, то есть соответствует уровню непараметрической неопределенности. При решении задачи управления неустойчивым динамическим объектом возникает проблема обеспечения устойчивости системы автоматического управления [16]. Один из путей решения данного вопроса состоит в ведении стабилизирующих обратных связей, содержащих типовые алгоритмы регулирования. Наличие контура является необходимым структурным условием стабилизации неустойчивых объектов. В дальнейшем основное внимание будет уделено построению непараметрического алгоритма управления неустойчивым динамическим объектом в условиях непараметрической неопределенности.

Ниже более детально проанализируем известные методы управления неустойчивыми системами. В работе [27] алгоритм регулирования неустойчивым объектом представляет собой аналитическое решение задачи синтеза алгоритма управления по квадратичному критерию и критерию устойчивости. Это решение получается выбором функции Ляпунова в виде квадратичной формы. В данном случае для получения аналитического решения необходима информация о параметрической структуре исследуемого объекта. В работе [50] алгоритм управления предполагает формирование обратных связей по состоянию, при которых обеспечивается заданное расположение полюсов замкнутой системы. Данный алгоритм применим только в условиях параметрической неопределенности, так как при конструировании системы

стабилизации используется неустойчивая линейная модель в виде соединения типовых звеньев с известными передаточными функциями. В [127] разработан подход управления линейными системами с одним входом и одним выходом с неустойчивой нулевой динамикой в условиях, когда априорная информация содержит сведения о параметрической структуре объекта с точностью до параметров при неполной информации о векторах состояния. Идентификация параметров осуществляется в режиме реального времени. При решении задачи управления используются методы теории скользящих режимов при синтезе обратной связи. В [7] предложено решение задачи глобальной стабилизации неустойчивого состояния равновесия маятника, при этом уравнение движения маятника описывается нелинейным уравнением третьего порядка, линеаризация которого приводит к неустойчивой системе третьего порядка с одним положительным вещественным корнем. Предложенный алгоритм управления включает в себя две стадии: раскачивание маятника по энергетическому алгоритму скоростного градиента и стабилизация при помощи алгоритма управления со скользящим режимом. Еще одним примером управления типовым представителем структурно неустойчивых объектов обратным маятником является работа [25]. Так же, как и в предыдущем исследовании, управление осуществляется в условиях параметрической неопределенности, так как для описания объекта используются дифференциальные уравнения движения маятника в виде уравнений Лагранжа. В качестве устройства управления здесь принята типовая структура системы с регулятором, на вход которого поступает информация о состоянии объекта, а с выхода снимается сигнал, пропорционально преобразуемый в управляющее воздействие на объект. В дальнейшем формируются решающие правила в виде нечетких высказываний, на основе которых формируется результирующее управляющее воздействие. Другими примера-

ми рассматриваемых неустойчивых объектов являются аппараты вертикального взлета и посадки [140]. Для управления подобными объектами также необходимо их предварительное описание в виде математической модели, выраженной в виде определенной передаточной функции. Еще одним примером применения адаптивных алгоритмов управления неустойчивыми объектами в условиях параметрической неопределенности является разработка алгоритма дуального управления [147]. В данной работе для синтеза дуального регулятора применяется бикритериальный подход, в котором используются два критерия, соответствующие двум целям дуального управления: непосредственно управление объектом и повышение скорости оценивания параметров модели. В приведенных выше работах обязательным является выбор параметрической структуры модели или формирование гипотезы о наличии той или иной структуры. Совершенно ясно, что при работе с реальным процессом подобных моделей быть не может из-за эффекта неустойчивости. В этом случае отсутствует обычный для идентификации этап, связанный с экспериментированием на объекте с целью построения модели процесса.

При применении идеализированной схемы управления, приведенной на рис. 2.3. в 1.1., для управления неустойчивым объектом возникают две основные проблемы. Во-первых, оператор  $A$  в условиях непараметрической неопределенности неизвестен, во-вторых, в разомкнутом состоянии управлять неустойчивым объектом невозможно, так как неустойчивые системы характеризуются незатухающими переходными процессами. Это означает, что скорость изменения выходной величины в определенных режимах может возрастать теоретически неограниченно. Один из путей приведения неустойчивых объектов к устойчивым, следовательно, к управляемому состоянию, состоит в охвате их отрицательной обратной связью (рис. 2.3.8).

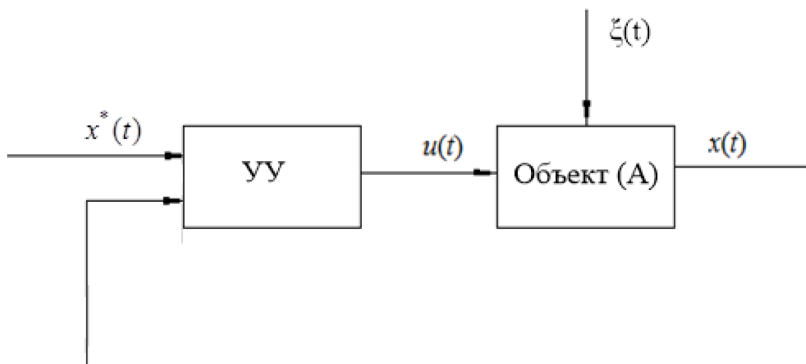


Рис. 2.3.8. Схема стабилизации неустойчивого динамического объекта

При этом при стабилизации объекта важен выбор типового регулятора и соответствующих настроек. Эффективное средство стабилизации неустойчивого объекта – охват его отрицательной обратной связью и использование регуляторов с передаточными функциями, содержащими форсирующие множители. Передаточные функции ПИ-, ПИД- и ПД-регуляторов, а также инерционно-форсирующие звенья содержат форсирующие множители, обеспечивающие стабилизацию. В условиях непараметрической неопределенности их применение является наиболее оправданным.

Рассмотрим схему непараметрического дуального управления, представленную на рис. 2.3.9.

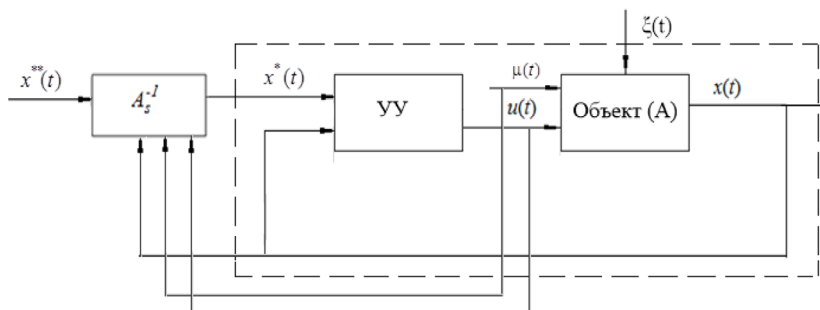


Рис. 2.3.9. Схема непараметрического дуального управления

Здесь  $A_s^{-1}$  – непараметрическая оценка обратного оператора  $A^{-1}$  по выборке наблюдений входных/выходных переменных объема  $s$ ,  $x^{**}(t)$  – задающее воздействие для непараметрического регулятора. В совокупности эти два блока представляют собой приближение к идеальному регулятору. В случае когда операторы  $A$  и  $A^{-1}$  неизвестны для описания объекта, целесообразным является использование непараметрической теории управления.

*Вычислительный эксперимент.* Для вычислительного эксперимента был выбран объект, описывающийся уравнением вида:

$$x_t = 2.021 \cdot x_{t-1} - 1.064x_{t-2} + 0.043u_t. \quad (2.3.2.1)$$

Переходная характеристика разомкнутой системы представлена на рис. 2.3.10.

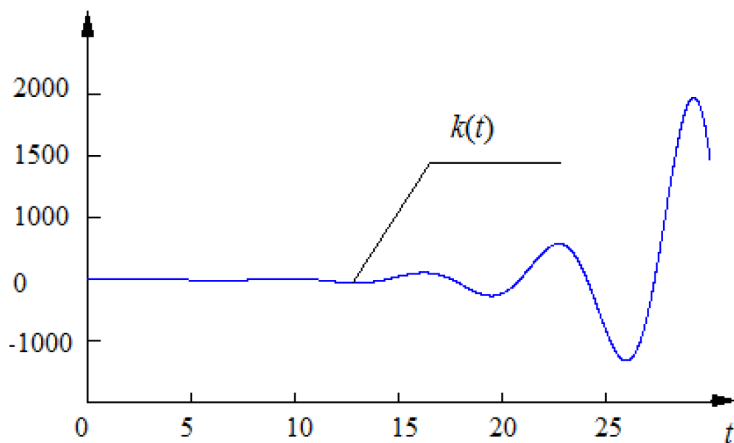


Рис. 2.3.10. Переходная характеристика неустойчивого объекта (2.3.2.1)

Как видно из рис. 2.3.10, переходная характеристика объекта (2.3.2.1) является незатухающей. Это означает, что данный объект относится к классу неустойчивых динамических объектов. Рассмотрим реакцию объекта на подачу на

вход различных воздействий. Пусть на вход объекта поступают следующие входные величины:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 5 - \exp(0.2t); \\ u_2(t) &= \cos(0.3t); \\ u_3(t) &= 0.2t; \\ u_4(t) &= \sin(0.3t). \end{aligned} \quad (2.3.2.2)$$

Выходы объекта при подаче соответствующих воздействий на вход представлены на рис. 2.3.11–2.3.12.

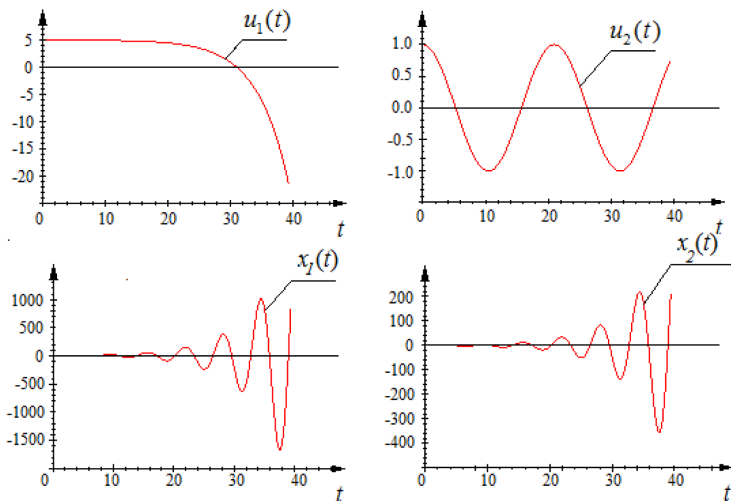


Рис. 2.3.11. Реакция системы при подаче на вход воздействий

Из рис. 2.3.11–2.3.12 можно сделать вывод, что подача на вход разомкнутой системы некоторого воздействия независимо от характера возмущения (убывания или возрастания) вызывает увеличение регулируемой величины с возрастающей скоростью. Таким образом, разомкнутая схема регулирования не подходит для управления объектом данного типа. Для ее дальнейшего применения необходимо стабилизировать динамический объект путем охвата его отрицательной обратной связью с использованием ПИД-регулятора.

В данном вычислительном эксперименте были приняты следующие коэффициенты ПИД-регулятора:  $\kappa = 10$ ,  $T_i = 1$ ,  $T_d = 1$ . Реакция замкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие представлена на рис. 2.3.13.

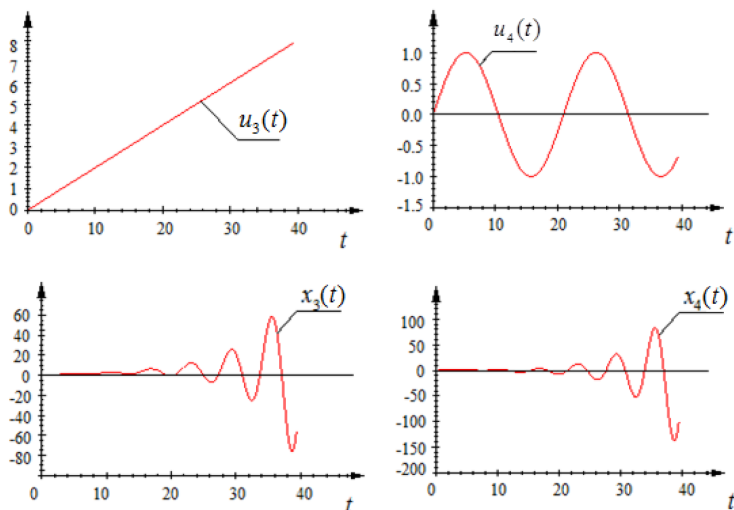


Рис. 2.3.12. Реакция системы при подаче на вход воздействий

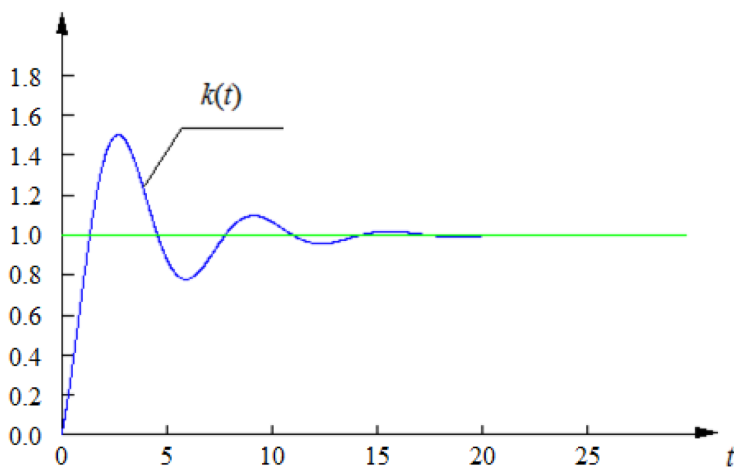


Рис. 2.3.13. Переходная характеристика замкнутой системы

Таким образом, введение обратной отрицательной связи, содержащей ПИД-регулятор с соответствующими значениями параметров, позволило привести изначально неустойчивый объект (2.3.2.1) к устойчивому виду.

Сравним результаты схемы управления, приведенной на рис. 2.3.9, содержащей непараметрический алгоритм управления (2.2.6) с одноконтурной схемой управления, в составе которой находится только ПИД-регулятор (рис. 2.3.8). Приведем работу двух алгоритмов управления при изменяющемся задающем воздействии (рис. 2.3.14).

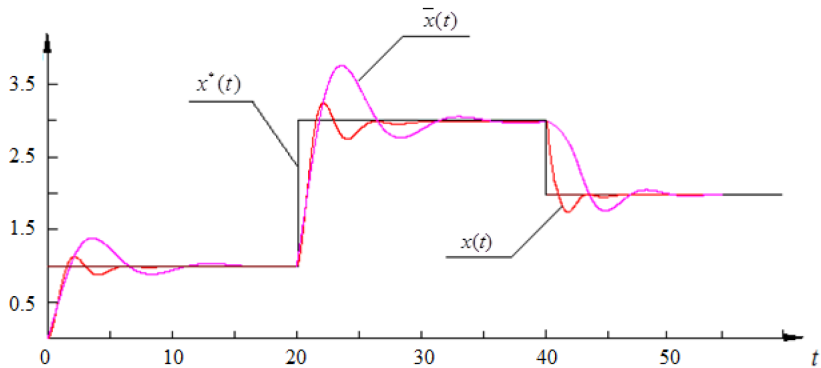


Рис. 2.3.14. Управление при задающем воздействии в виде ступенчатой функции

На рис. 2.3.14 приняты следующие обозначения:  $x(t)$  – выход объекта при управлении непараметрическим регулятором,  $\bar{x}(t)$  – выход объекта при управлении ПИД-регулятором,  $x^*(t)$  – задающее воздействие. Ошибка регулирования в случае непараметрического регулятора равна  $W_p=0,11$ , для ПИД-регулятора ошибка возрастает до  $W_p=0,24$ . Из анализа рис. 2.3.14 и значений ошибки регулирования можно сделать вывод, что непараметрическому регулятору необходимо меньше время для приведения объекта к цели при изменении задающего воздействия. Напротив,



ПИД-регулятор характеризуется большим временем регулирования. Рассмотрим случай, представленный на рис. 2.2.15, когда задание имеет вид траектории:

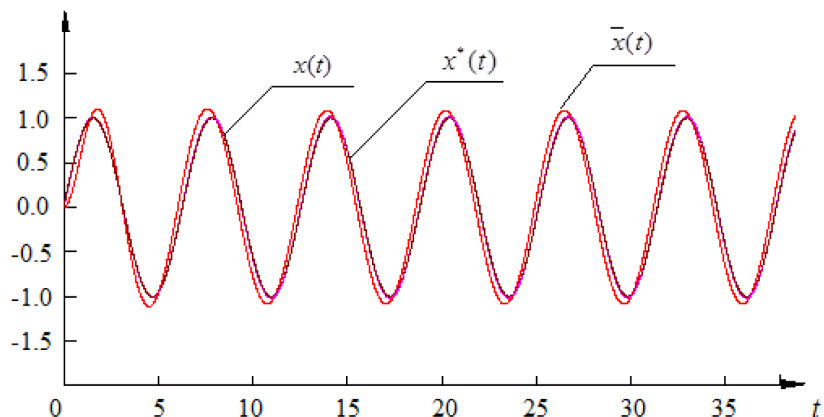


Рис. 2.2.15. Управление неустойчивым процессом при задающем воздействии, принятом в виде траектории

Как мы можем заметить из рис. 2.2.15, при управлении ПИД-регулятором выходная переменная объекта отстает от задающего воздействия, имеющего вид траектории. Напротив, непараметрический регулятор сразу с первых тактов управления приводит объект к желаемому состоянию. Ошибка регулирования у непараметрического регулятора в данном случае равна  $W_p = 0,07$ , ПИД-регулятора –  $W_p = 0,23$ .

## 2.4. Непараметрический алгоритм управления нелинейной динамической системой класса Винера

Рассмотрим нелинейный динамический объект, структура которого описывается дифференциальным уравнением неизвестного порядка. Поведение такого объекта часто может быть представлено в виде моделей класса Винера или Гаммерштейна. Общая идея построения закона управления

состоит во «включении» на входе объекта соответствующих обратных операторов. Подобная идея восходит к методу обратных операторов, известному в теории управления. Основное отличие непараметрических систем управления в данном случае состоит в том, что неизвестен вид уравнения, с точностью до параметров описывающего линейный блок, но уравнение, описывающее нелинейный элемент, известно с точностью до параметров.

Пусть объект управления представлен в виде модели Винера. Требуется сформировать управляющее воздействие, приводящее исследуемый объект в желаемое состояние. В данном случае схема системы управления, основанной на оценке обратного оператора ОУ, имеет вид [66]:

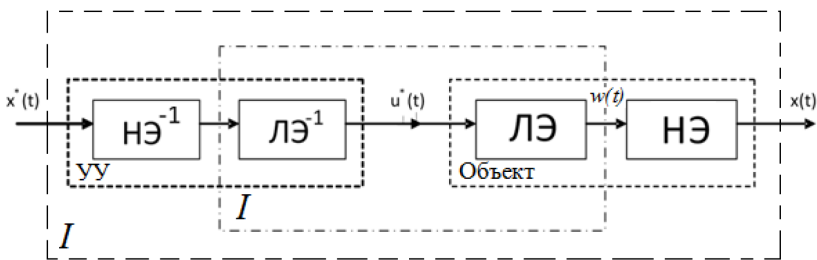


Рис. 2.4.1. Схема функционирования непараметрического регулятора для нелинейной динамической системы класса Винера,  $I$  – единичный оператор,  $ЛЭ^{-1}$  – оператор, обратный к  $ЛЭ$  системы,  $НЭ^{-1}$  – оператор, обратный к  $НЭ$

Преобразование входных сигналов объекта  $u(t) \in \Omega(u)$  в выходные сигналы  $ЛЭ$   $w(t) \in \Omega(w)$  можно рассматривать как некоторый линейный оператор  $A$ , действующий в пределах области определения  $\Omega(u)$  и переводящий  $\Omega(u)$  в  $\Omega(w)$ .  $ЛЭ$  исследуемого процесса в операторной форме будет описываться уравнением  $w(t) = A(u(t))$ , где  $A$  – неизвестный оператор, описывающий процесс.  $НЭ$  системы может быть представлен оператором  $B$ , преобразующим множества выходных сигналов  $ЛЭ$   $w(t) \in \Omega(w)$  в значения выхода объекта  $x(t) \in \Omega(x)$ .

Процесс может быть описан как последовательно соединенные линейный и нелинейный функционалы. Линейная часть системы представляется оператором  $A$ , нелинейная – оператором  $B$ . Получим описание системы в виде операторов:

$$w(t) = A\{u(t)\}, \quad (2.4.1)$$

$$x(t) = B\{w(t)\} = B\{A\{u(t)\}\}. \quad (2.4.2)$$

Тогда зависимость выходной величины объекта от входных воздействий:

$$x(t) = B\{A\{u(t)\}\}. \quad (2.4.3)$$

Пусть существуют обратные к  $A$  и  $B$  операторы, для которых справедливо выражение:  $AA^{-1} = I$ ,  $BB^{-1} = I$ , где  $I$  – единичный оператор. Тогда, зная желаемое значение выхода системы, можно сформировать управляющее воздействие. Управляющее воздействие, сформированное на основе обратного оператора системы, может быть описано как:

$$u^*(t) = A^{-1}\{B^{-1}\{x(t)\}\}. \quad (2.4.4)$$

Покажем, что, подавая на вход системы воздействие  $u^*(t)$ , сформированное по (2.4.4), получим выход  $x(t)$ , значение которого совпадает с задающим воздействием  $x^*(t)$ . Если найдем обратные операторы  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  для системы и «включить» на ее входе в обратном порядке, то, подавая на вход обратного оператора требуемую траекторию движения  $x^*(t)$ , получим:

$$x^*(t) = B\{A\{u^*(t)\}\} = B\{A\{A^{-1}\{B^{-1}\{x^*(t)\}\}\}\} = x^*(t). \quad (2.4.5)$$

Выражение (2.4.4) может считаться идеальным регулятором для системы класса Винера, находящейся в условиях частичной неопределенности. Задавая траекторию  $x^*(t)$ , можно найти из (2.4.4) значение  $u^*(t)$ .

Задача управления нелинейными динамическими системами (НДС) в виде модели класса Винера или, как это будет

показано далее, Гаммерштейна сводится к нахождению обратных операторов к функциям, описывающим линейную и нелинейную части системы. Основная проблема здесь состоит в отыскании обратных операторов, это является достаточно сложной задачей для НДС в связи с тем, что точное описание исследуемого процесса чаще всего отсутствует, что и ограничивает возможности применения метода обратных операторов.

Пусть объект класса Винера описывается нелинейным дифференциальным уравнением неизвестного порядка. В этом случае при ненулевых начальных условиях выход системы  $x(t)$  описывается следующей системой уравнений:

$$w(t) = h(0)u(0) + \int_0^t h'(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (2.4.6)$$

$$x(t) = f(w(t)), \quad (2.4.7)$$

где  $h(t)$  – переходная функция ЛЭ системы (неизмеряемая),  $f(\cdot)$  – функция, описывающая нелинейное звено. Оператор  $A^{-1}$ , обратный к  $A$  (описывающему линейную динамическую часть системы), будет также линейным и может быть описан интегралом свертки следующим образом:

$$u(t) = A^{-1}w(t) = \int_0^t v(\tau)w(t - \tau)d\tau, \quad (2.4.8)$$

где  $v(t)$  – переходная функция «обратного» процесса. «Снятие» переходных характеристик объекта – это традиционный прием, широко используемый в автоматике. Для моделей линейных динамических систем в виде интеграла Дюамеля может быть построен обратный оператор, где вход и выход процесса меняются местами. В этом обратном операторе присутствуют переходная и весовая функции в обратном направлении. Так как мы располагаем моделью, то

оценку требуемых характеристик можно реализовать только на модели [76; 136]. Для управления динамическим объектом, в котором реализуется тот или иной процесс, на входе объекта может быть «поставлен» «антиобъект» или обратный оператор, который и будет играть роль управляющего устройства (регулятора). При этом надо иметь в виду, что в реальных задачах исследователю часто неизвестен оператор объекта с необходимой для практики точностью.

Оператор  $A$  тогда в виде (2.4.6), а  $A^{-1}$  – выражением (2.4.7). Оператор  $B$  описывает функцию  $f(w)$ , причем, предположим, что существует обратный оператор  $B^{-1} = f^{-1}(x)$ . Управляющее воздействие, соответствующее (2.4.4):

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^t v'(t - \tau)w(\tau)d\tau \\ w(t) = f^{-1}(x^*(t)), \end{cases}, \quad (2.4.9)$$

где неизвестными являются:  $v(t)$  – переходная функция линейного звена объекта в направлении «выход–вход», а также обратная функция нелинейного звена  $f^{-1}(x)$ . Оценки данных неизвестных характеристик могут быть получены на модели объекта. Пусть построена непараметрическая модель системы в виде (1.9.13). При построении модели получена оценка функции, описывающей нелинейный элемент системы, следовательно, нужно найти оператор  $B^{-1}$ .

Задача сводится к нахождению обратной весовой функции ЛЭ системы по результатам экспериментов на модели. Обратной переходной функцией будем называть такое значение входной переменной  $u(t)$ , при котором выход ЛЭ  $w(t)=1$ , ее можно выразить из соотношения:

$$\hat{w}(t) = \int_0^t \hat{h}'(t - \tau)u(\tau)d\tau = 1. \quad (2.4.10)$$

То есть необходимо решить уравнение:

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{s \cdot c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta t} \hat{h}_i \cdot H' \left( \frac{t - \tau_j - t_i}{c_s} \right) \cdot u(\tau_j) \Delta \tau = 1 \quad (2.4.11)$$

относительно  $u(t)$ . Здесь значения величин  $h(t)$  и  $w(t)$  – физически не измеряемые. Однако имеются их оценки, полученные в результате построения модели исследуемого объекта. Полученное значение  $u(t)$  считается «обратной» переходной функцией и обозначается  $u(t_j) = v(t)$ :

$$\hat{v}(t) = \frac{1 - \frac{1}{s c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t-1} \hat{h}_i \cdot H' \left( \frac{t_j - t_i}{c_s} \right) \cdot f(u(t_j)) \Delta t}{\frac{1}{s c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \hat{h}_i \cdot H' \left( \frac{t - t_j - t_i}{c_s} \right) \cdot \Delta t}, \quad (2.4.12)$$

где  $\hat{h}_i = f^{-1}(x_i^1)$  – оценка переходной характеристики ЛЭ системы, которая получена при построении модели,  $x^1(t)$  – выход нелинейной системы при  $u(t)=1$ .

По полученным дискретным значениям  $v(t)$  строим непараметрическую оценку переходной функции ЛЭ системы в направлении «выход–вход».

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{s \cdot c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \hat{v}_i \cdot H \left( \frac{t - t_i}{c_s} \right). \quad (2.4.13)$$

Управляющее воздействие, соответствующее (2.4.8), находится в виде:

$$u^*(t) = \int_0^t \hat{v}'(t - \tau) \hat{w}(\tau) d\tau \quad (2.4.14)$$

или в дискретном варианте:

$$u^*(t) = \frac{1}{s c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta \tau} \hat{v}_i \cdot H' \left( \frac{t - t_i - \tau_j}{c_s} \right) \cdot \hat{f}^{-1}(x^*(\tau_j)) \Delta \tau, \quad (2.4.15)$$

где  $v(t)$  – оценка переходной характеристики «обратного» линейного элемента системы,  $x^*(t)$  – задающее воздействие (желаемое значение выхода системы).

*Вычислительный эксперимент 1.* Рассмотрим нелинейную динамическую систему, состоящую из квадратора и численного аналога дифференциального уравнения (имитирующего объект):  $3x''(t) + 1,3x'(t) + x(t) = u(t)$ . Вид и параметры уравнения, описывающего процесс, неизвестны. Входное воздействие  $u(t) = 3\cos(0,5t) + \sin(0,2t)$ . Результат моделирования этого процесса представлен на рис. 2.4.2.

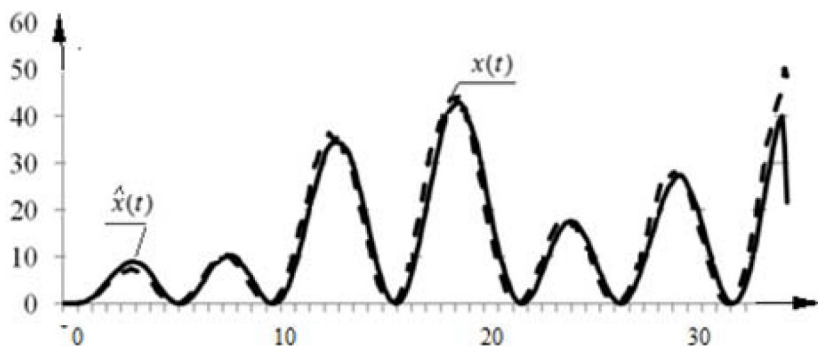


Рис. 2.4.2. Модель системы класса Винера,  
 $x$  – выход системы, погрешность 5 %

Как видно из рис. 2.4.2, непараметрическая модель дает достаточно точный прогноз значений реально протекающего процесса.

Далее представлен результат управления объектом непараметрическим управляющим устройством. Задающее воздействие в виде ступенчатой функции. На рис. 2.4.3 приведен результат управления с применением алгоритма (2.4.15).

Рис. 2.4.3 иллюстрирует достаточно хорошее качество управления динамическим объектом в условиях непараметрической неопределенности.

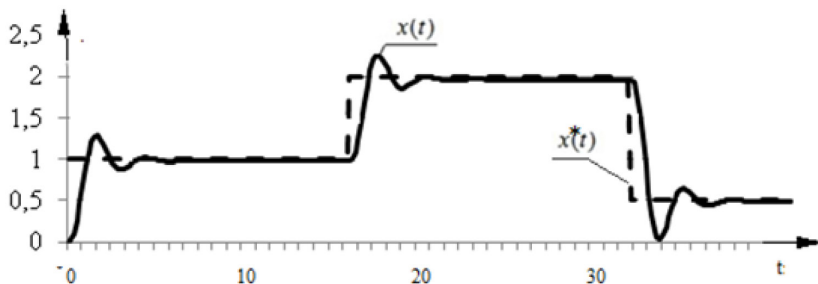


Рис. 2.4.3. Процесс управления объектом класса Винера,  $x(t)$  – выход управляемого объекта,  $x^*(t)$  – желаемое значение выхода, помеха 5 %

*Вычислительный эксперимент 2.* Рассмотрим некоторый нелинейный динамический объект, представленный в виде модели Винера. Поведение линейного блока объекта имитируется дифференциальным уравнением второго порядка:

$$3w''(t) + 1,3w'(t) + w(t) = u(t). \quad (2.4.16)$$

Нелинейный элемент – квадрат с параметром  $a=2$ . Структура и параметры линейной динамической части системы неизвестны. Для имитации такого объекта и получения значений его входных–выходных переменных применим метод конечных разностей как численный метод решения дифференциальных уравнений. Тогда численное решение (2.4.16):

$$x_i = 1,83x_{i-1} - 0,86x_{i-2} + 0,03, \quad (2.4.17)$$

где  $x_i$  – значение выхода системы на  $i$  итерации,  $t$  – время,  $\Delta t$  – шаг дискретизации выборки. Пусть исследуемая система в момент начала управления находилась в установившемся состоянии, что соответствует ненулевым начальным условиям.

При синтезе алгоритмов построения непараметрического регулятора, как уже отмечалось, неизвестны параметризованная структура и порядок уравнения, описывающего процесс.



Выборка значений выхода объекта  $\{t_i, x(t_i)\}, i = \overline{1, s}$  начинает накапливаться с момента времени, обозначенного  $t=0$  (момент начала наблюдения). Объем выборки  $s=200$ ,  $\Delta t=0,15$ . Пусть построена непараметрическая модель объекта класса Винера.

В соответствии с алгоритмом построения непараметрического регулятора требуется оценить «обратную» переходную функцию объекта из соотношения (2.4.12). Оценки «обратных» характеристик представлены на рис. 2.4.4.

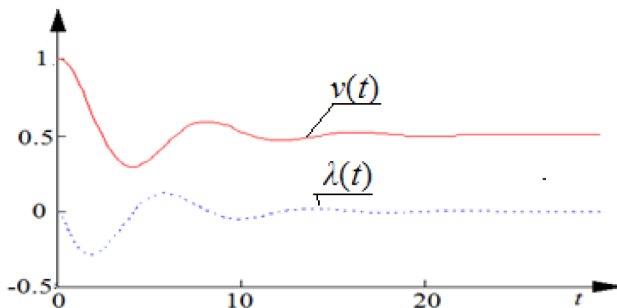


Рис. 2.4.4. «Обратные» характеристики системы класса Винера

На основе полученных обратных характеристик строится непараметрический регулятор для управления в виде (2.4.13).

Пусть задающее воздействие имеет вид ступенчатой функции. При отсутствии помех результат управления имеет вид (рис. 2.4.5).

На рис. 2.4.4 и далее приняты следующие обозначения:  $u(t)$  – управляющее воздействие,  $x^*(t)$  – задающее воздействие,  $x(t)$  – выход объекта,  $v(t)$  и  $\lambda(t)$  – соответственно переходная и весовая функции системы в направлении «выход–выход».

Из рис. 2.4.5 видно, что управляющее воздействие  $u(t)$  (рис. 2.4.5 – а) при изменении задающего воздействия  $x^*(t)$  достаточно быстро меняет значение выхода объекта, приводя его в соответствие желаемому состоянию  $x^*(t)$ .

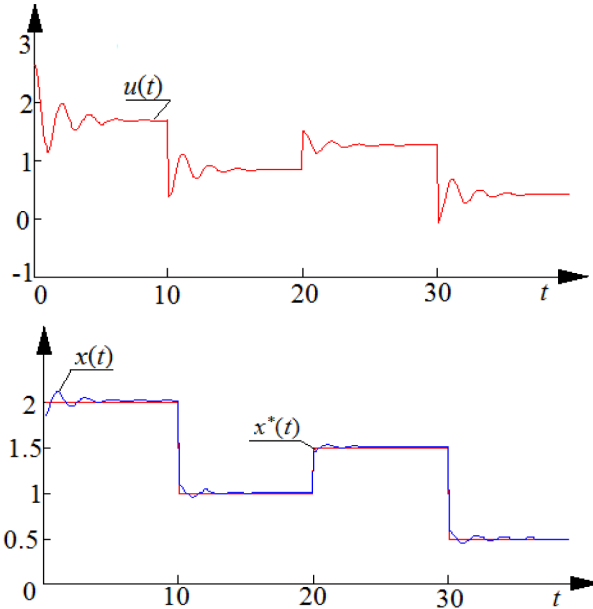


Рис. 2.4.5. Управление объектом при задании в виде ступенчатой функции и отсутствии помех, объем выборки  $s=300$ , ошибка управления  $0,00015$

Пусть задающее воздействие принято в виде траектории. При отсутствии помех результат управления имеет следующий вид:

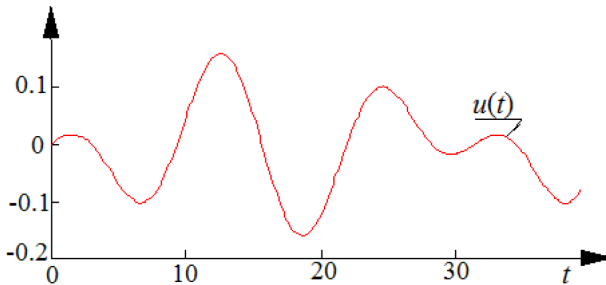


Рис. 2.4.6. Управление объектом при  $x^*(t)=0,2\sin(0,3t)\cos(t)$  при отсутствии помех, исходная выборка:  $s=300$ ,  $\Delta t=0,14$ , со случайной помехой 5%,  $\varepsilon=0,0007$

Как видно из рис. 2.4.6, так как ошибка регулирования достаточно небольшая, непараметрический регулятор обеспечивает выход объекта  $x(t)$  практически совпадающим с  $x^*(t)$  (среднеквадратическое отклонение между этими величинами составляет 0,0007).

Как можно видеть из рисунков, непараметрический регулятор обеспечивает достаточно точное приближение выхода объекта к желаемому значению.

Далее рассмотрим управление системой класса Винера с насыщением.

*Вычислительный эксперимент 3.* Рассмотрим некоторый нелинейный динамический объект, представленный в виде модели Винера. Поведение объекта имитируется следующим образом. Линейная часть описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$w''(t) + 1,2w'(t) + w(t) = u(t). \quad (2.4.18)$$

Нелинейный элемент – звено с насыщением с параметрами  $a=2$ ,  $b=5$ . Цель управления представляет собой ступенчатую функцию:

$$x^*(t) = \begin{cases} 1 + \sin(0.2t) & , t < 60 \\ 3 + 0.001t^2 & , 60 < t < 120 \\ 1 & , t > 120 \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Информация о структуре и параметрах динамической части системы отсутствует, структура нелинейного элемента задана с точностью до параметров. Исследователю доступны измерения входных/выходных переменных  $u(t)$ ,  $x^*(t)$ .

На рис. 2.4.7 представлены оценки обратной переходной и весовой функций непараметрического регулятора.

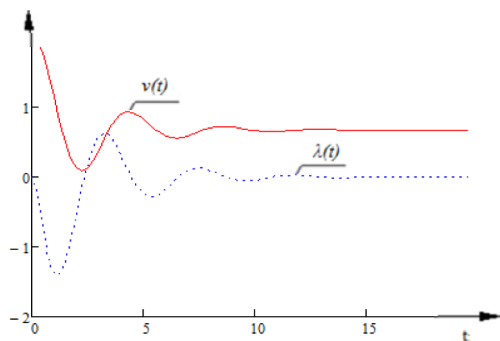


Рис. 2.4.7. Оценки обратной переходной  $v(t)$  и весовой  $\lambda(t)$  функций

На рис. 2.4.8 изображены реакции объекта, управляемого непараметрическим регулятором при задании (2.4.19), а также значение управляющего воздействия  $u(t)$ .

Качество управления оценивается с использованием относительной средней ( $W_H$ ) и среднеквадратической ошибок ( $w$ ).

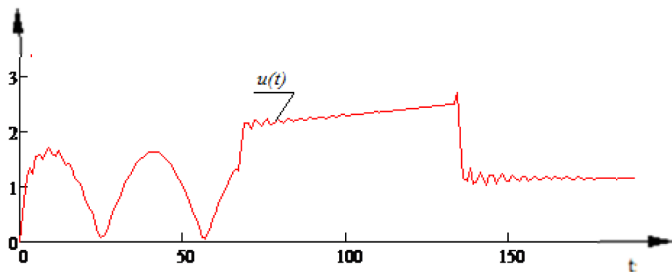


Рис. 2.4.8.

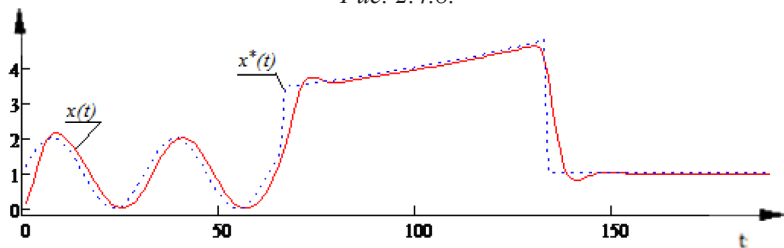


Рис. 2.4.9. Управление системой класса Винера, исходная выборка без помех  $s=200$ ,  $\Delta t=1$ ,  $w=0,149$ ,  $W_H=3,6\%$

Далее рассмотрим ситуацию, когда в каналах измерения выхода объекта действует помеха в размере 5 % от значения выхода. На рис. 2.4.10 приведены результаты управления.

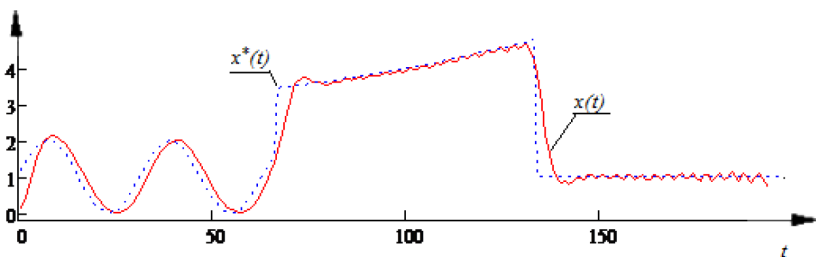


Рис. 2.4.10. Выход управляемого объекта: помеха 5 %,  $w=0,15$ ,  $W_H=5,2$  %

В результате экспериментов подтверждена работоспособность алгоритма построения непараметрического регулятора для нелинейных динамических систем класса Винера, в случае, когда нелинейный элемент системы представлял собой квадрататор и звено с насыщением.

Далее приводятся некоторые эксперименты по управлению для систем класса Винера, направленные на подтверждение работоспособности предложенного непараметрического алгоритма в различных условиях.

*Вычислительный эксперимент 4.* Исследуем зависимость качества регулирования от уровня случайных помех в каналах измерений. Рассмотрим систему класса Винера с квадрататором. Линейная часть имитируется дифференциальным уравнением:

$$4w''(t) + 1,5w'(t) + w(t) = u(t). \quad (2.4.20)$$

Нелинейный элемент представляет собой квадрататор с параметром  $a=3$ . Структура и параметры линейной динамической части системы неизвестны. Вид нелинейности предполагается известным с точностью до параметров. Объем выборки  $s=400$ , шаг дискретизации  $\Delta t=0,3$ .

Работа регулятора исследуется при наличии случайной аддитивной помехи в канале измерения выходных характеристик объекта. Рассматривались системы, где помехи в каналах измерения составляли 0 %, 3 %, 5 %, 7 %, 10 %, 15 % от величины выходного сигнала. На рис. 2.4.11 и 2.4.12 изображены реакции объекта, управляемого непараметрическим регулятором при различных задающих воздействиях.

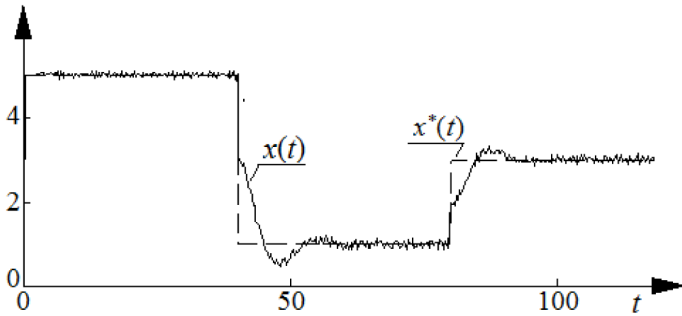


Рис. 2.4.11. Выход управляемого объекта, исходная выборка со случайной помехой 5 % от абсолютного значения выхода объекта  $s=400$ ,  $t=0,3$ ,  $w=0,0004$ ,  $W_H=3,2$  %

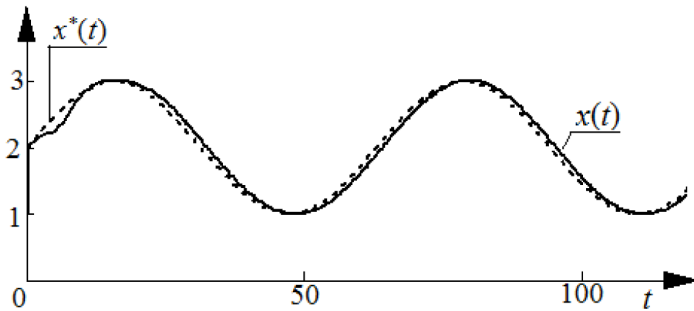


Рис. 2.4.12. Выход управляемого объекта, исходная выборка со случайной помехой 5 % от абсолютного значения выхода объекта,  $w=0,156$ ,  $W_H=2,75$  %

Как можно видеть из результатов экспериментов, алгоритм управления является помехоустойчивым при уровне помех в каналах измерения, не превышающих 5–7 % от зна-

чения выходного сигнала. При большей помехе в данных возникают ошибки при оценке обратного оператора, что существенно снижает качество управления (а при помехах более 15 % до 50–100 %). Для улучшения работы регулятора в данном случае необходимо применение замкнутой схемы.

## 2.5. Непараметрический алгоритм управления системой класса Гаммерштейна

Рассмотрим задачу управления динамическими системами, которые могут быть представлены в виде модели Гаммерштейна. Пусть линейная часть объекта описывается нелинейным дифференциальным уравнением неизвестного порядка. Вид функции нелинейного элемента известен.

Предлагается алгоритм управления, включающий выполнение двух этапов. Первый этап, как и ранее, сводится к тому, что по измеренным со случайной ошибкой реализациям управляющего входного и результирующего выходного процессов строится модель динамической системы. Следующий этап состоит в том, что модель объекта используется для получения переходных характеристик обратного оператора системы. Оценки обратных операторов позволяют синтезировать управляющее воздействие для желаемого выходного процесса. В данном случае схема управления имеет следующий вид:

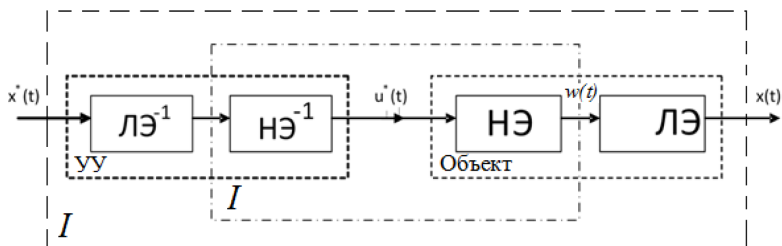


Рис. 2.5.1. Схема функционирования непараметрического регулятора для систем класса Гаммерштейна;  $I$  – единичный оператор,  $ЛЭ^{-1}$  – оператор, обратный к  $ЛЭ$  системы,  $НЭ^{-1}$  – оператор, обратный к  $НЭ$

Модели такой структуры состоят из двух элементов – линейной динамической части (описывается линейным оператором  $A$ ) и нелинейного элемента (описывается оператором  $B$ ), т. е. [66; 76]:

$$w(t) = B\{u(t)\}, \quad (2.5.1)$$

$$x(t) = A\{w(t)\} = A\{B\{u(t)\}\}, \quad (2.5.2)$$

где  $w(t)$  – выход нелинейного элемента системы,  $x(t)$  – выход объекта.

Выход объекта может быть представлен в операторной форме в виде:

$$x(t) = A\{B\{u(t)\}\}. \quad (2.5.3)$$

Тогда управляющее воздействие, сформированное на основании оценок обратных операторов, может быть описано как:

$$u(t) = B^{-1}\{A^{-1}\{x(t)\}\}. \quad (2.5.4)$$

При построении модели динамической системы класса Гаммерштейна в виде (1.10.5) получена оценка функции, описывающей нелинейный элемент системы. Следовательно, можно найти оператор  $B^{-1}$ .

Оператор  $A^{-1}$ , обратный к линейному оператору  $A$ , будет также линейным и поэтому может быть описан интегралом свертки:

$$w^*(t) = A^{-1}\{x^*(t)\} = \int_0^t \hat{v}'(t-\tau)x^*(\tau)d\tau, \quad (2.5.5)$$

где  $v(t)$  – оценка переходной функции «обратного» процесса, т. е. оператор  $A^{-1}$  оценивается в виде (1.10.4). Оператор  $B$  описывает функцию  $f(u)$ , причем предположим, что существует обратный оператор  $B^{-1} = f^{-1}(w)$ . Таким образом, управляющее воздействие вычисляется:



$$u^*(t) = B^{-1}A^{-1}(x^*(t)) = f^{-1}\left(\int_0^t v'(t-\tau)x^*(\tau)d\tau\right), \quad (2.5.6)$$

где  $f^{-1}(\cdot)$  – функция, описывающая обратный нелинейный оператор. При этом оценку обратной переходной функции можно получить, решив уравнение:

$$x(t) = \frac{1}{sc_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \hat{k}_i \cdot H'\left(\frac{t-t_i-\tau_j}{c_s}\right) \cdot w(\tau_j)\Delta\tau = 1 \quad (2.5.7)$$

относительно  $w(t)$ . Или, если учесть, что значение  $w(t)$  не измеряемо,

$$x(t) = \frac{1}{sc_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \hat{k}_i \cdot H'\left(\frac{t-t_i-\tau_j}{c_s}\right) \cdot f(u(\tau_j))\Delta\tau = 1 \quad (2.5.8)$$

относительно  $u(t)$ . Тогда задача сводится к нахождению оценки обратной переходной функции  $v(t)$ , которая в данном случае имеет вид:

$$\hat{v}(t) = \frac{1 - \frac{1}{sc_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t-1} \hat{h}_i \cdot H'\left(\frac{t_j-t_i}{c_s}\right) \cdot f(u(t_j))h}{\frac{1}{sc_s} \cdot \sum_{i=1}^s \hat{h}_i \cdot H'\left(\frac{t-t_j-t_i}{c_s}\right) \cdot h}, \quad (2.5.9)$$

где  $\hat{h}(t)$  – оценка переходной характеристики линейной части системы.

Управляющее воздействие находится в следующем виде:

$$u^*(t) = f^{-1}\left(\frac{1}{sc_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \hat{v}_i H'\left(\frac{t-t_i-\tau_j}{c_s}\right) \cdot x^*(\tau_j)\Delta\tau\right), \quad (2.5.10)$$

где  $f^{-1}(\cdot)$  – оценка функции, описывающей нелинейность. Подавая на вход системы воздействие (2.5.10), получим на

ее выходе реакцию, значение которой приближено к задающему воздействию  $x^*(t)$ .

*Вычислительный эксперимент 1.* Рассмотрим некоторый нелинейный динамический объект класса Гаммерштейна. Поведение объекта имитируется следующим образом. Линейная часть описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$4\omega''(t) + 0.9\omega'(t) + \omega(t) = u(t). \quad (2.5.11)$$

Нелинейный элемент представляет собой звено с насыщением с параметрами:  $b=2$ ,  $a=0,5$ . Пусть построена непараметрическая модель объекта. Объем выборки  $s=300$ . Будем полагать, что было проведено достаточное количество дополнительных экспериментов с системой (объем обучающей выборки примем как  $m=25$ ), поэтому ошибка модели – 1,4 %.

Оценки «обратных» характеристик представлены на рис. 2.5.2.

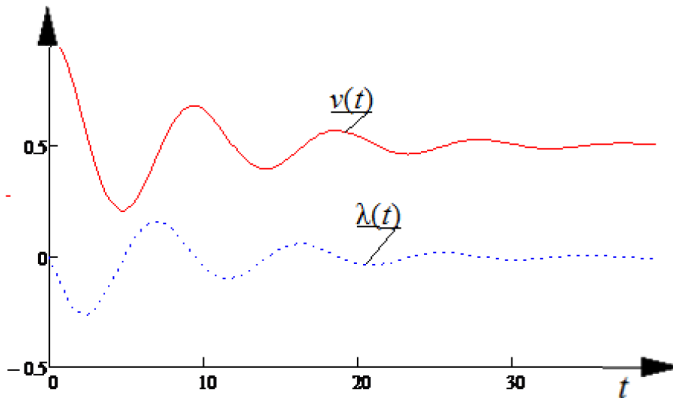


Рис. 2.5.2.  $v(t)$  и  $\lambda(t)$  – соответственно переходная и весовая функции линейного блока системы в направлении «выход–вход»

На основе полученных обратных характеристик строится непараметрический регулятор для управления объектом. Пусть задающее воздействие имеет вид ступенчатой функ-

ции. Пусть задающее воздействие имеет вид некоторой заданной траектории. На рис. 2.5.3 приведен результат управления системой, когда помехи в канале измерения выхода составляют 5 % от его абсолютного значения.

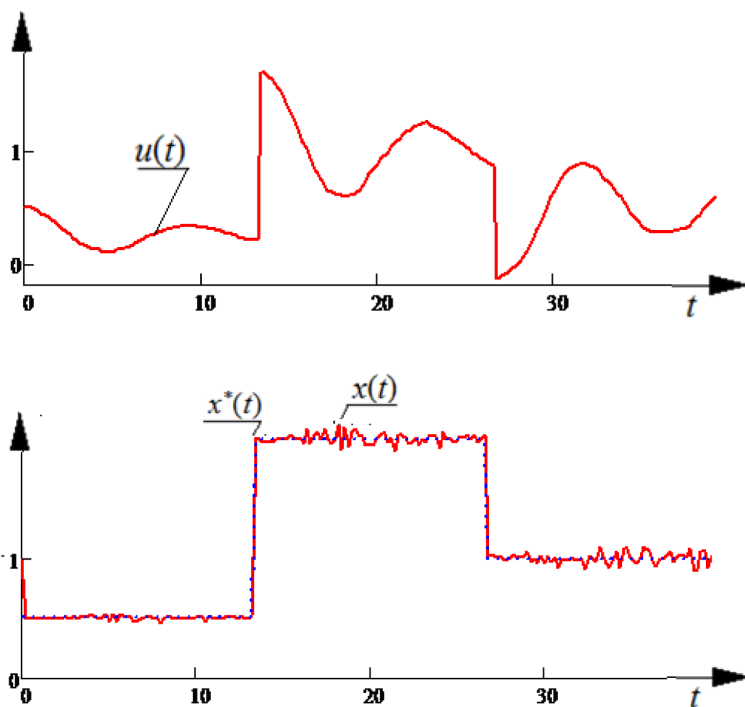


Рис. 2.5.3. Управление системой класса Гаммерштейна,  $s=300$ ,  $\Delta t=0,14$ , с помехой 5 % от абсолютного значения выхода объекта,  $w=2,97\%$

Из рис. видно, что управляющее воздействие  $u(t)$  при изменении задающего воздействия  $x^*(t)$  достаточно быстро меняет значение выхода объекта, приводя его в соответствие желаемому состоянию  $x^*(t)$ . Колебания значения выхода объекта в окрестностях требуемого значения связаны с отличием оценки обратных характеристик от их истинных значений.

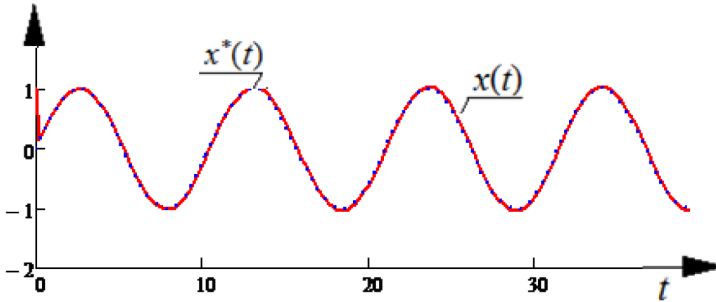


Рис. 2.5.4. Управление системой класса Гаммерштейна,  $s=300$ ,  $\Delta t=0,14$ , со случайной помехой 5 %,  $w=0,006$ ,  $x^*(t)=\sin(0.3t)$ , относительная средняя ошибка управления 1,05 %

Ошибка регулирования достаточно небольшая, т. е. непараметрический регулятор обеспечивает выход объекта  $x(t)$  практически совпадающим с  $x^*(t)$ .

Таким образом, как можно видеть из рисунков, непараметрический регулятор обеспечивает достаточно точное приближение выхода объекта к желаемому значению.

Проведем вычислительный эксперимент, возможно выходящий за рамки приложений, но имеющий значительный теоретический интерес. Сущность его состоит в том, что траектория желаемого значения выхода системы  $x^*(t)$  задается случайным образом (рис. 2.5.5):

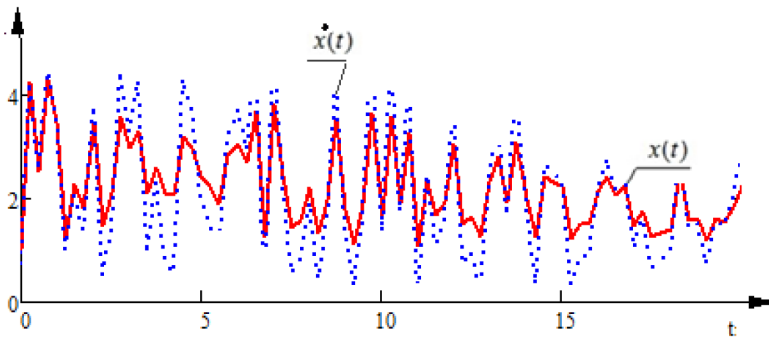


Рис. 2.5.5. Управление динамическим объектом при случайном задании  $x^*(t)$

В данном случае (рис. 2.5.5) дискретность контроля входных–выходных переменных была взята излишне большой, что и привело к невысокому качеству управления. В другом эксперименте уменьшим значение шага дискретизации выборки. В результате оценки обратных операторов получаются более точными.

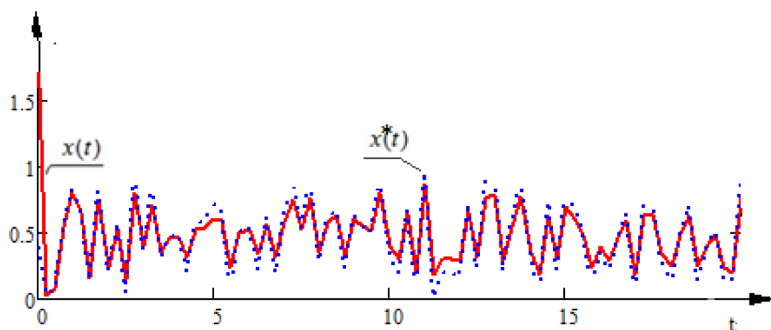


Рис. 2.5.6. Управление динамическим объектом при случайном задании  $x^*(t)$

И как следствие этого, более точное управление динамическим объектом класса Гаммерштейна, что и иллюстрируется рис. 2.5.6.

*Вычислительный эксперимент 2.* Исследуем работу непараметрического регулятора для управления системами класса Гаммерштейна. Для компьютерного моделирования природы процесса (объекта) было взято дифференциальное уравнение:

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = u. \quad (2.5.12)$$

Нелинейный элемент – квадратор. Исследователю недоступно знание параметрической структуры объекта и порядка уравнений, описывающих процесс. Уравнение используется только для генерации выборки, по которой строится модель, и для имитации объекта при проверке управления.

Исследуем эффективность работы непараметрического регулятора в зависимости от объема выборки  $s$  (и соответственно от значения шага дискретизации выборки).

В качестве задающего воздействия была использована ступенчатая функция, описываемая уравнением:

$$x^*(t) = \begin{cases} 2, & t < 10 \\ 1, & 10 \leq t < 20 \\ -1, & 20 \leq t < 30 \\ 0.5, & t \geq 30 \end{cases} \quad (2.5.13)$$

На рис. 2.5.7 изображена оценка переходной функции системы класса Гаммерштейна с квадрататором в направлении «выход–вход».

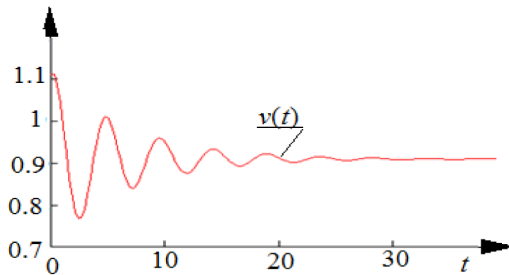


Рис. 2.5.7. Реализация переходной функции в направлении «выход–вход»

Ниже на рисунке представлено управляющее воздействие  $u_s(t)$ , полученное при задании  $x^*(t)$  (2.5.13).

На рис. 2.5.3–2.5.10:  $u_s(t)$  – управляющее воздействие,  $x^*(t)$  – задающее воздействие,  $x(t)$  – выход объекта, управляемого с применением  $u_s(t)$ .

На рис. 2.5.9 приведены значение управляющего воздействия и результат управления при увеличении объема выборки до  $s=350$ .

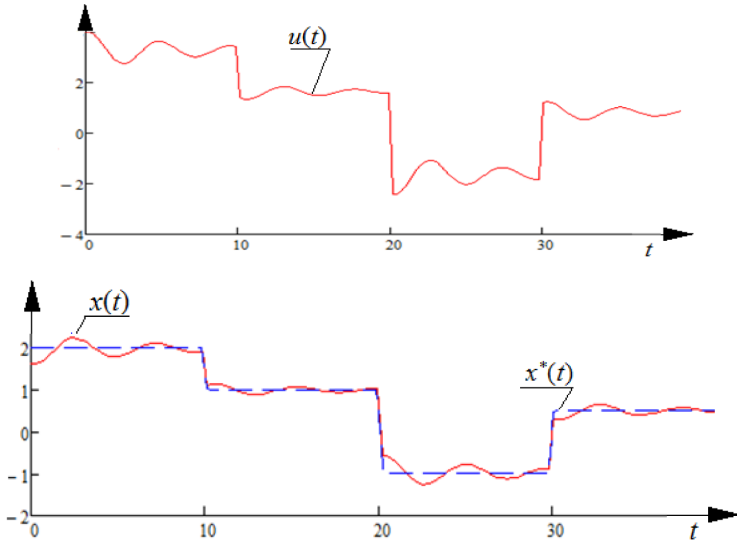


Рис. 2.5.8.  $u_s(t)$  – управляющее воздействие и  $x(t)$  – выход системы, управляемой непараметрическим регулятором, при объеме выборки  $s=150$

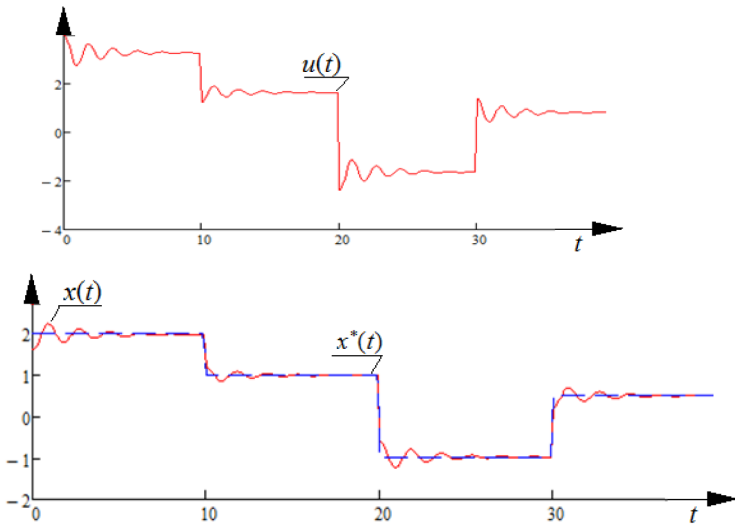


Рис. 2.5.9.  $u_s(t)$  – управляющее воздействие и  $x(t)$  – выход системы, управляемой непараметрическим регулятором, при объеме выборки  $s=350$

На рис. 2.5.10 приведено значение управляющего воздействия и результат управления при объеме выборки  $s=600$ .

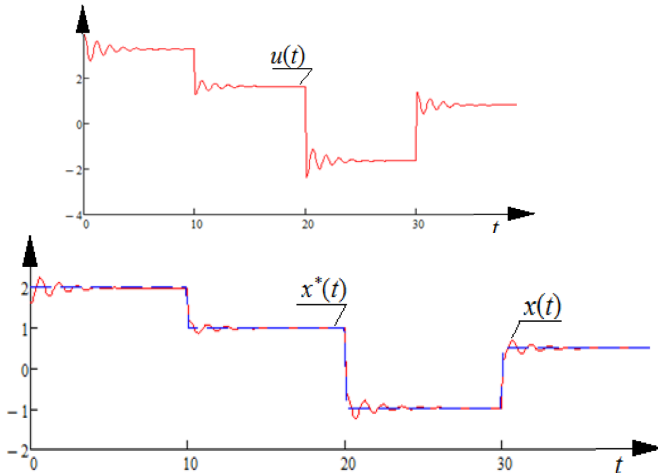


Рис. 2.5.10.  $u_s(t)$  – управляющее воздействие и  $x(t)$  – выход системы, управляемой непараметрическим регулятором при объеме выборки  $s=600$

Данные исследований обобщены в табл. 2.5.1, модели строились при объеме выборки  $s = \{100, 150, 350, 450, 600\}$ . В таблицу также включены результаты подобного исследования для системы класса Гаммерштейна, ЛЭ которой имитируется уравнением (2.5.12), а НЭ – звено с насыщением.

Таблица 2.5.1

**Зависимость среднеквадратической ошибки регулирования от объема выборки**

	Объем выборки				
	100, $\Delta t=0,4$	150, $\Delta t=0,25$	350, $\Delta t=0,12$	450, $\Delta t=0,08$	600, $\Delta t=0,06$
Система класса Гаммерштейна с квадратором					
$W^*$	0.018	0.01	$7.859 \cdot 10^{-3}$	$6.352 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$
Система класса Гаммерштейна с насыщением					
$W^*$	0.026	0.02	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$
* Среднеквадратическая ошибка регулирования					



Для полученных данных характерна следующая зависимость: с увеличением объема выборки среднеквадратическая ошибка регулирования уменьшается, а с уменьшением объема выборки увеличивается. Для практических приложений, требующих как можно лучшего качества работы непараметрического регулятора, необходимо по возможности увеличивать объем выборки за счет уменьшения шага дискретизации выборки.

Далее приведены результаты исследования работы непараметрического регулятора в зависимости от величины помехи  $\xi$ , действующей в каналах измерения. Были проведены эксперименты при различном уровне помех (0 %, 2 %, 5 %, 7 %, 10 %), объем выборки  $s=350$ . В качестве задающего воздействия была использована ступенчатая функция. На рис. 2.5.11 приведены значение управляющего воздействия и результат управления при отсутствии помех в каналах измерения переменных.

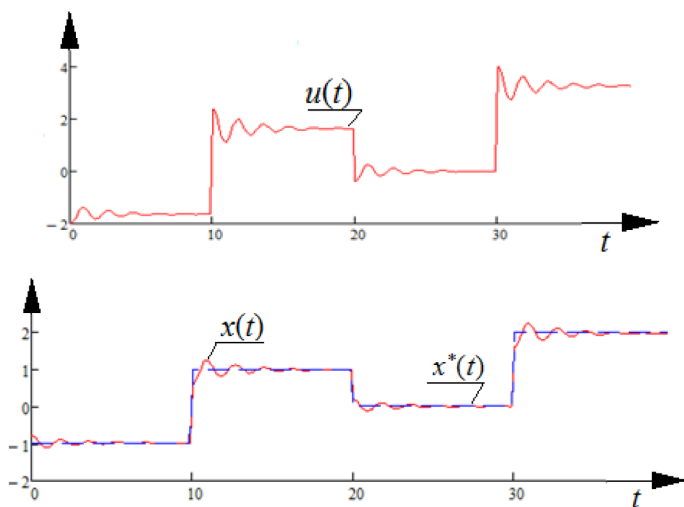


Рис. 2.5.11. Результат управления с применением непараметрического регулятора при уровне помех в каналах измерения  $\xi=0\%$

На рис. 2.5.12 показаны результаты управления системой класса Гаммерштейна, когда помехи в канале измерения выход составляли 5 % от его абсолютного значения.

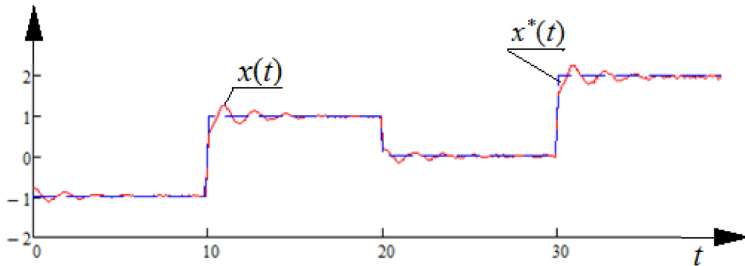


Рис. 2.5.12. Результат управления с применением непараметрического регулятора при уровне помех в каналах измерения  $\xi=5\%$

Полученные результаты обобщены в табл. 2.5.2. В работу вошли иллюстрации с величиной помехи  $\xi = \{0\%, 2\%, 5\%, 7\%, 10\%\}$ . Включены также результаты подобного исследования для системы класса Гаммерштейна, ЛЭ которой имитируется уравнением (2.5.12), а НЭ – звено с насыщением.

Таблица 2.5.2

**Зависимость среднеквадратической ошибки регулирования от уровня помех в каналах измерения**

	Величина помехи				
	0 %	2 %	5 %	7 %	10 %
Система класса Гаммерштейна с квадрататором					
$W^*$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$7.225 \cdot 10^{-3}$	$7.603 \cdot 10^{-3}$	$8.796 \cdot 10^{-3}$	0.05
Система класса Гаммерштейна с насыщением					
$W^*$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	0.01
* Среднеквадратическая ошибка регулирования					

Полученные результаты говорят о том, что при увеличении уровня помех среднеквадратическая ошибка регулирования увеличивается. При уровне помех в 7 % ошибка регулирования все еще остается допустимой, поэтому непараметрический регулятор является помехоустойчивым.

Анализируя результаты вычислительных экспериментов, следует отметить, что при различных настройках параметра размытости получим различное качество управления. Таким образом, при оптимальной настройке параметров регулятора качество управления нелинейным динамическим объектом класса Винера или Гаммерштейна достаточно высокое при различном виде задающих воздействий, а также в условиях помех.

## Глава 3.

# ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

---

### 3.1. Непараметрические модели и алгоритмы управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали

#### 3.1.1. Краткое описание технологического процесса

На сегодняшний день одной из крупнейших отраслей промышленности в России является черная металлургия, которая включает в себя добычу и обогащение руд черных металлов, в частности железной, хромовой и марганцевой, флюсовых известняков, огнеупорных глин, производств черных металлов, таких как чугун, углеродистая сталь, производство коксохимических материалов, ферросплавов и т. д. Основные виды продукции черной металлургии – руды, концентраты, окатыши, агломерат, чугун, сталь, горячекатаный и холоднокатаный прокат, стальные трубы, метизы и другие металлоизделия. Черная металлургия является основной базой развития машиностроения и многих других отраслей современной промышленности. Отличительной чертой данного производства является материалоемкость и энергоемкость производственного процесса [120]. Таким образом, разработка новых интеллектуальных программных решений, моделей, алгоритмов управления, позволяющих уменьшить расход материальных и энергетических ресурсов за счет их более оптимального использования и, как следствие, снизить себестоимость конечной выпускающей продукции, является важной и актуальной задачей для данной отрасли промышленности.

ОАО «ЕВРАЗ Западно-Сибирский металлургический комбинат» является крупнейшим российским поставщиком сортового металлопроката строительного, промышленного, транспортного назначения, метизов и товаров народного потребления, а также угольной продукции и продукции коксохимического производства. Выплавка стали на предприятии производится в конвертерах с последующей разливкой на машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). В состав сталеплавильного цеха входят плавильное отделение, отделение внепечной обработки и разливочный пролет.

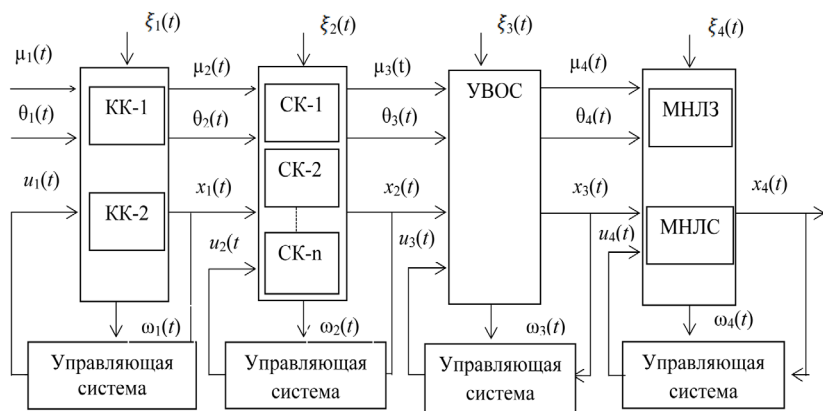


Рис. 3.1. Блок-схема технологического процесса производства стали

На рис. 3.1 приняты следующие обозначения:  $u_1, \dots, u_4$  – управляемые переменные процесса,  $\mu_1, \dots, \mu_4$  – не управляемые, но контролируемые переменные процесса,  $x_1, \dots, x_4$  – выходные переменные процесса,  $\xi_1, \dots, \xi_4$  – внешнее возмущение,  $\omega_1, \dots, \omega_4$  – дополнительные сведения о ходе процесса, используемые для управления, КК – кислородный конвертер, СК – сталеразливочный ковш, УВОС – установка внепечной обработки стали, МНЛС – машина непрерывного литья сляба, МНЛЗ – машина непрерывного

литья заготовки. Числа рядом с обозначениями указывают на порядковый номер установки.

Общий процесс изготовления стали на предприятии представляет собой совокупность нескольких технологических этапов. Сначала сталь выплавляется в конвертерах, затем после получения заданных температуры и содержания углерода осуществляют выпуск металла в сталеразливочный ковш (СК). Раскисление, науглероживание, легирование металла проводят на выпуске и в СК с последующей передачей на установку внепечной обработки стали (УВОС), которая может быть представлена одним или несколькими агрегатами (продувочный стенд, печь-ковш, вакуумная установка). На УВОС осуществляют корректировку химического состава, усреднение температуры и химического состава, дегазацию и модифицирование металла. Затем поверхность металла утепляют теплоизолирующей засыпкой и его передают на МНЛЗ. СК устанавливают на подъемно-поворотный стенд и поворачивают его в позицию разлива. После открытия шиберных затворов металл поступает в предварительно разогретые промежуточные ковши (ПК) и начинается разливка.

Процесс производства стали в кислородном конвертере состоит из технологических операций по переработке жидкого чугуна и лома путем подачи в расплав технически чистого кислорода, что обеспечивает удаление углерода и повышение температуры расплава [30]. Весь процесс можно разделить на этапы: загрузка лома, в наклонный конвертер через горловину при помощи завалочных машин ломового типа, заливка чугуна, продувка кислородом, загрузка шлакообразующих, слив стали и шлака. Конвертер представляет собой открытый сверху сосуд с огнеупорной внутренней поверхностью. В практике металлургического производства стали существует три схемы вду-

вания кислорода: сверху через погружаемую фурму, через расположенные в днище продувочные блоки и комбинированную. В данном случае кислород подается через водоохлаждаемую фурму, которая вводится в металл сверху. Из-за высокой интенсивности продувки кислородом продолжительность всей плавки в конвертерах 100–350 тонн (с последующими операциями) занимает около 40–50 минут. Время окончания продувки кислородом определяется по показаниям газоанализатора, а также по количеству затраченного кислорода. Время окончания продувки может прогнозироваться исходя из данных о предыдущих плавках. По окончании продувки производится повалка конвертера – наклон конвертера в горизонтальное положение для выпуска готовой плавки, отбор проб металла и шлака, замер температуры термоблоком.

Управление и контроль переменных по ходу кислородно-конвертерной плавки – важные этапы, обеспечивающие необходимый химический состав металла и его температуру, а также вес плавки. Несомненно, наличие высокоэффективных средств контроля и управления процессом позволяет рационально использовать материальные ресурсы при выплавке стали, в частности сокращают количество додувок и добавок охладителя и, как следствие, понижают себестоимость конечного продукта. Цель управления кислородно-конвертерной плавки стали – это получение стали заданной марки по содержанию углерода. Таким образом, задающим воздействием для системы управления кислородно-конвертерной плавки стали является заданное содержание углерода. Помимо этого значения, обязательно учитывать в качестве задания необходимую температуру стали, так как углерод характеризуется высокой скоростью выгорания и даже перегрев на малое количество времени может привести к получению другой марки стали.

### 3.1.2. Непараметрические модели процесса кислородно-конвертерной плавки стали

Системы автоматического управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали проектируются в основном на базе статистических или детерминированных моделей. В первом случае модель строится на основании накопленных в данных производственных условиях статистических материалов. Следует заметить, что для успешного функционирования статистических моделей важным является контроль измерений процесса. При недостатке соответствующих средств контроля входных/выходных переменных статистические модели могут быть неинформативными. Детерминированная модель плавки, в отличие от статистической, строится на основании фундаментальных законов и констант. Теоретической базой данного вида моделей явились исследования в области термодинамики и физической химии, в частности работы Дж. У. Гиббса [126]. На данном пути достаточную сложность представляют вопросы формализации процесса. Несмотря на то что даже в определенных условиях можно добиться достаточно точного описания детерминированными уравнениями состояний, основную сложность составляет этап настройки параметров модели, которые будут зависеть от индивидуальных условий каждой плавки. В связи с вышесказанным исследование в области идентификации и моделирования конвертерной плавки, разработки новых компьютерных решений в этой области на сегодняшний день остаются актуальными.

Общая схема идентификации процесса кислородно-конвертерной плавки стали представлена на рис. 3.2.

На рис. 3.2 приняты обозначения:  $u = (u_1, u_2, \dots, u_8)$  – управляемые переменные процесса,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$  – входные переменные процесса,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$  – выходные переменные процесса, переменные  $\omega_1$  и  $\omega_2$  представ-



ляют собой дополнительные сведения о ходе процесса, которые оператор использует для управления,  $\omega^*$  – задающее воздействие для оператора,  $\xi(t)$  – внешнее возмущение,  $x_s = (x_s^1, \dots, x_s^4)$  – модель процесса.

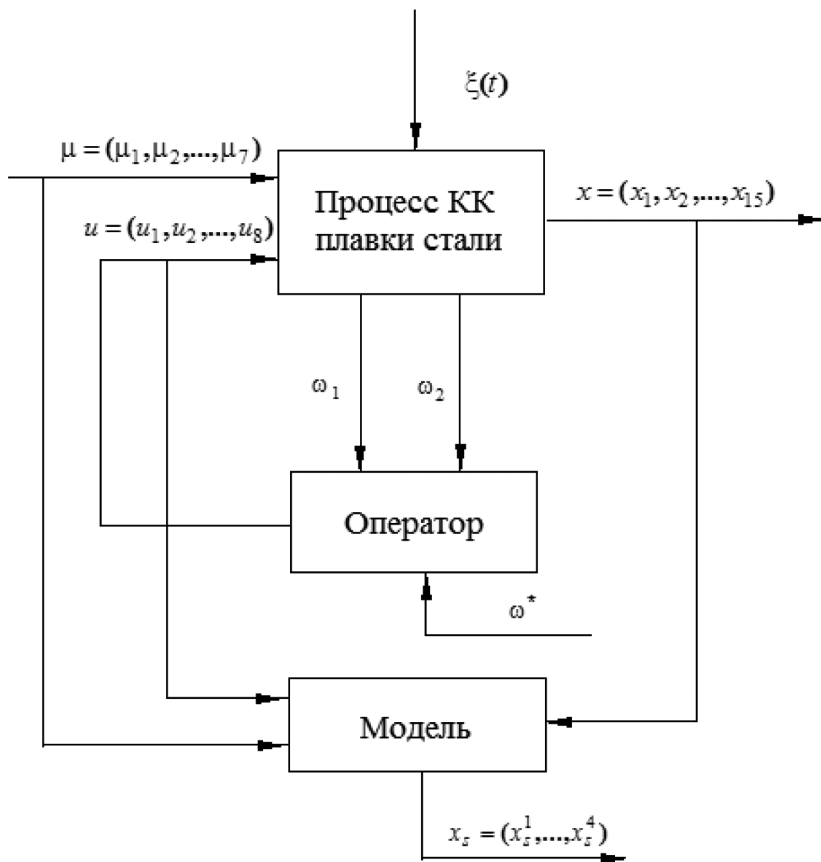


Рис. 3.2. Схема идентификации процесса кислородно-конвертерной плавки стали

Для исследования процесса кислородно-конвертерной плавки использовалась выборка входных/выходных переменных  $\{u_i, \mu_i, x_i\}, i = \overline{1, 200}$ , где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_8)$ ,

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$ . Выборка представляла собой измерения, полученные при выплавке стали марки GT в ККЦ № 2 ОАО «ЕВРАЗ Западно-Сибирский металлургический комбинат».

Процесс кислородно-конвертерной плавки стали относится к классу динамических процессов, однако вследствие недостатка соответствующих средств контроля входных/выходных переменных в работе рассматривается как безынерционный процесс с запаздыванием.

Для процесса кислородно-конвертерной плавки стали управляемыми переменными являются:  $u_1(t)$  – садка,  $u_2(t)$  – известь т,  $u_3(t)$  – электродный бой т,  $u_4(t)$  – флюс ФОМИ т,  $u_5(t)$  – агломерат офлюсованный т,  $u_6(t)$  – уголь ССО т. В качестве контролируемых неуправляемых по ходу плавки переменных  $\mu(t)$  выступают:  $\mu_1(t)$  (расход чугуна, т), химический состав заливаемого чугуна, (%) ( $\mu_2(t)$  – кремний Si,  $\mu_3(t)$  – магний Mn,  $\mu_4(t)$  – сера S,  $\mu_5(t)$  – фосфор P),  $\mu_6(t)$  (температура чугуна,  $^{\circ}\text{C}$ ),  $\mu_7(t)$  (расход лома, т). К помехам  $\xi(t)$ , действующим на процесс, можно отнести состояние сталевыпускного отверстия, качество лома, угар, усвоение присадок и др. Выходная переменная  $x(t)$ : химический состав металла на повалке, (%) ( $x_1(t)$  – алюминий Al,  $x_2(t)$  – углерод C,  $x_3(t)$  – магний Mn,  $x_4(t)$  – сера S,  $x_5(t)$  – фосфор P), химический состав конечного шлака на повалке, (%) ( $x_6(t)$  – CaO,  $x_7(t)$  – SiO<sub>2</sub>,  $x_8(t)$  – FeO,  $x_9(t)$  – MgO,  $x_{10}(t)$  – Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>,  $x_{11}(t)$  – S,  $x_{12}(t)$  – MnO,  $x_{13}(t)$  – P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>,  $x_{14}(t)$  (температура металла на повалке,  $^{\circ}\text{C}$ ). Дополнительные сведения о ходе процесса, которые оператор использует для управления:  $\omega_1$  (состав конвертерных газов) и  $\omega_2$  (температура конвертерных газов,  $^{\circ}\text{C}$ ).

Для вычислительного эксперимента было построено 5 непараметрических моделей вида (3.1) по важнейшим выходным переменным процесса:  $x_1(t)$  (алюминий),  $x_2(t)$

(углерод С),  $x_3(t)$  (марганец Mn),  $x_4(t)$  (S сера),  $x_5(t)$  (фосфор Р). Объем выборки в данном случае был равен  $s=250$ .

$$x_s^t = \frac{\sum_{i=1}^{250} x_i \cdot \prod_{j=1}^8 \Phi \left( \frac{u_s^j - u_i^j}{c_s^{u^j}} \right) \prod_{q=1}^7 \Phi \left( \frac{\mu_s^q - \mu_i^q}{c_s^{\mu^q}} \right)}{\sum_{i=1}^{250} \Phi \prod_{j=1}^8 \Phi \left( \frac{u_s^j - u_i^j}{c_s^{u^j}} \right) \prod_{q=1}^7 \Phi \left( \frac{\mu_s^q - \mu_i^q}{c_s^{\mu^q}} \right)}. \quad (3.1)$$

Для оценки полученных моделей была использована квадратичная ошибка:

$$R_s = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (x_i - x_i^s)^2, \quad (3.2)$$

где  $x_i$  – измеренное значение выходной переменной,  $x_i^s$  – полученная оценка,  $R_s$  – квадратичная ошибка.

Непараметрические модели были построены в режиме «скользящего среднего» для выходных переменных  $x_1(t) - x_5(t)$ . Полученные результаты представлены в табл. 3.1. В таблице показаны: квадратичная ошибка моделирования  $R_s$  (3.1), оценка дисперсии  $D_s$  выхода объекта  $x_i$ , а также ошибка прогнозирования  $W = R_s / D_s$ .

Таблица 3.1

### Результаты вычислительного эксперимента

Показатель \ Элемент	Ошибка $R_s$	Оценка дисперсии $D_s$ выходной переменной $x_i$	Отношение $W$
Алюминий, Al ( $x_1$ )	0,0055	0,025	0,221
Углерод, С ( $x_2$ )	0,000542	0,000234	0,232
Марганец, Mn( $x_3$ )	0,000205	0,000961	0,38
Сера, S ( $x_4$ )	0,000365	0,0000115	0,41
Фосфор, P ( $x_5$ )	0,0000093	0,0000179	0,52

На рис. 3.3 представлена непараметрическая модель вида (3.1) для переменной алюминий,  $Alx_1(t)$ .

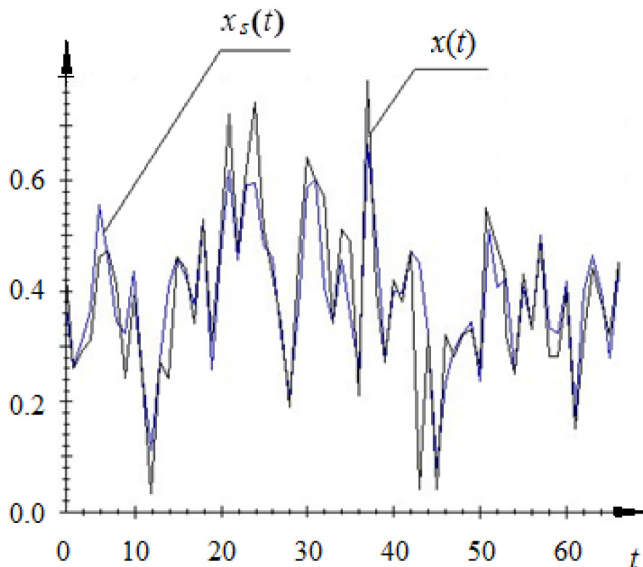


Рис. 3.3. Результаты моделирования процесса кислородно-конвертерной плавки. Выходная переменная  $Alx_1(t)$

Как видим, относительная ошибка моделирования для переменной алюминий,  $Alx_1(t)$  равна  $W = 0,221$ . Это говорит об удовлетворительном качестве моделирования, а также о том, что данную модель возможно использовать в целях управления.

### 3.1.3. Управление процессом кислородно-конвертерной плавки стали

Существенным недостатком существующей на предприятии системы управления является то, что в процессе кислородно-конвертерной плавки стали выходные переменные  $x(t)$  не контролируются в ходе выплавки, а становятся известны лишь на повалке при взятии пробы. В этой связи управ-

ление технологическим процессом по выходным переменным не осуществляется, хотя именно они определяют качество и, соответственно, стоимость выпускаемой продукции. На практике управление процессом осуществляется оператором в соответствии с показаниями газоанализатора ( $\omega_1(t), \omega_2(t)$ ).

В ходе исследований может быть предложена следующая двухконтурная схема управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали (рис. 3.4).

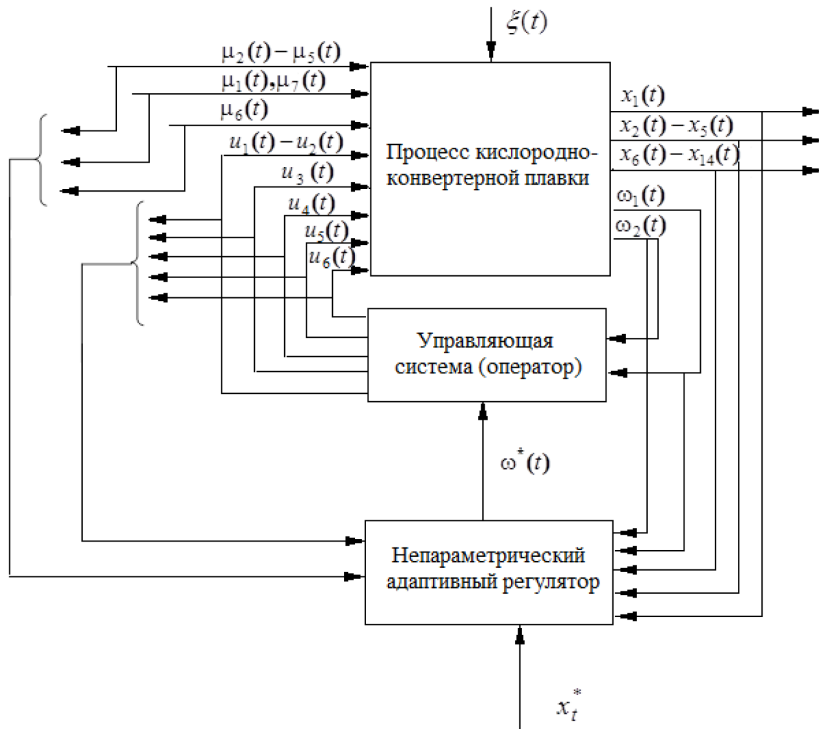


Рис. 3.4. Двухконтурная схема управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали

В предлагаемую схему введен внешний контур управления, содержащий непараметрический адаптивный регулятор. Особенностью данной схемы управления является способ

включений внешнего контура в общую систему управления: предлагаемое устройство управления не будет заменять существующую систему управления (формирование управляющих входных воздействий продолжает осуществлять оператор). Непараметрический адаптивный регулятор введен как внешнее устройство по отношению к оператору. Алгоритм управления осуществляется по формуле (2.2.3), где  $u_s^*$  равно:

$$u_s^* = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \cdot \prod_{q=1}^7 \Phi \left( \frac{\mu_s^q - \mu_i^q}{c_s^{\mu^q}} \right) \Phi \left( \frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x} \right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{q=1}^7 \Phi \left( \frac{\mu_s^q - \mu_i^q}{c_s^{\mu^q}} \right) \Phi \left( \frac{x_{s+1}^* - x_i}{c_s^x} \right)}. \quad (3.3)$$

Основная задача данного устройства управления – это корректирование работы оператора с целью повышения качества системы управления в целом.

### 3.1.4. Численные исследования

Полученные данные соответствуют случаю, когда оператор уже производил управление процессом. В связи с этим включение внешнего контура в соответствии с рис. 3.4, а именно формирование непараметрическим адаптивным регулятором задающего воздействия  $\omega^*(t)$  для оператора невозможно. В настоящем эксперименте внешний контур управления будет вычислять непосредственно управляющие воздействия  $u(t)$ .

Вследствие сложности проведения вычислительных экспериментов по управлению непосредственно на конвертере для верификации предложенных алгоритмов предлагается следующее численное исследование. Для вычисления управляющего воздействия  $\bar{u}_t$  в формуле (3.3) в качестве задающего воздействия будет выступать значение выхода объ-

екта на определенном моменте времени  $t$ :  $x_t = x_t^*$ . Полученное входное управляемое воздействие  $\bar{u}_t$  в дальнейшем будет использоваться в непараметрической модели (3.1) для вычисления выхода модели в момент времени  $\bar{x}_t$ . Вычисленные значения  $\bar{u}_t, \bar{x}_t$  сравниваются с реальными значениями входной и выходной переменных  $u_t, x_t$ .

На рис. 3.5 показан эксперимент по вычислению управляемой переменной известь  $u_3(t)$ :

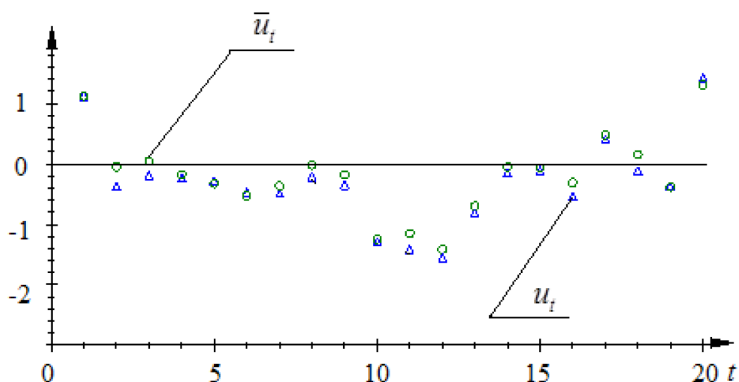


Рис. 3.5. Сравнение вычисленных управляющих воздействий процесса  $\bar{u}_t$  с реальными значениями  $u_t$

Таблица 3.1.2

**Сравнение вычисленных входной и выходной переменных процесса с реальными данными**

№	$\bar{x}_t$	$x_t$	$\bar{u}_t$	$u_t$
1	0,019	0,021	1,123	1,134
2	0,399	0,41	-0,046	-0,142
3	0,339	0,34	0,069	-0,091
4	0,569	0,53	-0,125	-0,128
5	0,681	0,69	-0,223	-0,210
6	0,270	0,23	-0,524	-0,504

Как показывают результаты численного исследования, вычисленные с использованием непараметрического алгоритма управления (3.3) и непараметрической модели (3.1) значения  $\bar{u}_t$  и  $\bar{x}_t$  практически совпадают с реальными значениями  $u_t, x_t$  в выбранный момент времени  $t$ , что говорит о том, что данные алгоритмы могут быть использованы для управления процессом кислородно-конвертерной плавки стали.

На рис. 3.6 показаны результаты управления процессом для выходной переменной алюминий  $x_1(t)$ . В данном эксперименте до 25 такта проиллюстрирована ситуация, когда процессом плавки управляет существующая на предприятии система управления (оператор), то есть приведены исходные данные. После 25 такта в систему управления добавляется внешний контур, формирующий управляющее воздействие  $u_1(t)$  (расход садки, т). В качестве задающего значения взята величина  $x_1^* = 0,4$ , выбранная произвольно, в пределах заданного технологического регламента.

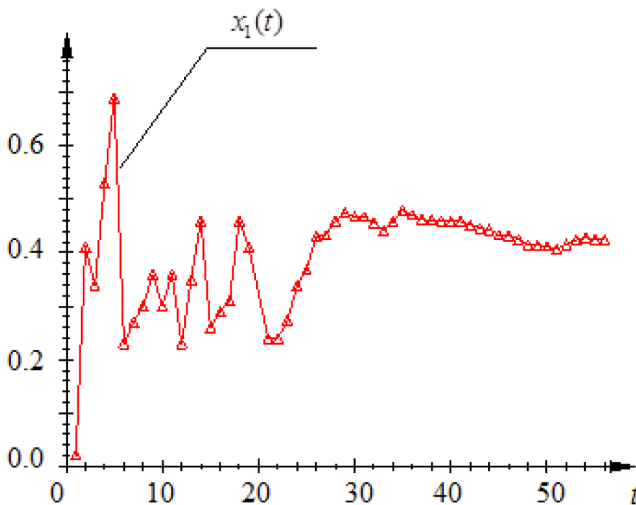


Рис. 3.6. Управление кислородно-конвертерной плавкой стали, выходная переменная алюминий  $x_1(t)$



Из анализа рис. 3.6 можно сделать вывод, что до включения в схему внешнего контура управление процессом ведется в рамках технологического регламента, но достаточно в широком диапазоне. После добавления непараметрического адаптивного регулятора фактический выход объекта практически совпадает со значением задающего воздействия. Таким образом управление объектом ведется более качественно.

На рис. 3.7 представлено управление кислородно-конвертерной плавкой стали. В качестве выходной переменной процесса взята переменная углерод  $x_2(t)$ . Задающее воздействие так же, как и в предыдущем случае, выбрано произвольно из технологического регламента и равно  $x_2^* = 0,05$ .

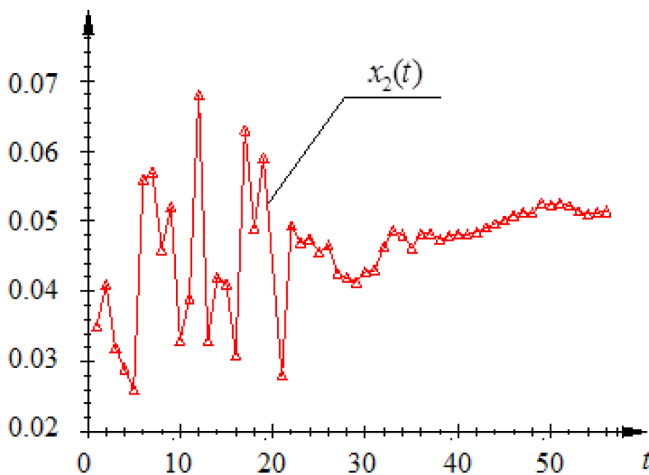


Рис. 3.7. Управление кислородно-конвертерной плавкой стали, выходная переменная углерод  $x_2(t)$ .

Из рис. 3.7 также можно сделать вывод, что использование непараметрического адаптивного регулятора позволяет значительно повысить качество управления без вывода из строя функционирующей на предприятии системы управления.

Таким образом, в рамках настоящей главы были построены непараметрические модели по важнейшим выходным переменным процесса кислородно-конвертерной плавки стали, а именно по переменным: алюминий, углерод, марганец, сера и фосфор. Результаты данных расчетов показали невысокую точность непараметрических моделей. Главным образом это связано с недостатком соответствующих средств контроля переменных процесса и, как следствие, малым объемом выборки. Также следует отметить, что процесс кислородно-конвертерной плавки стали относится к динамическим процессам, но из-за отсутствия должного контроля входных/выходных переменных процесса рассматривается как безынерционный процесс с запаздыванием и соответственно для идентификации применяются статические модели. Безусловно, динамические модели в данном случае оказались бы более эффективными, поэтому одним из путей решения данной проблемы является создание новых приемов измерения (контроля).

Из анализа предоставленных предприятием данных было установлено, что, хотя процесс и осуществляется в соответствии с технологическим регламентом, но не рациональным образом. В основном это обусловлено тем фактом, что управление технологическим процессом непосредственно по выходным переменным не осуществляется. Оператор, который выполняет функции управления, принимает решение по выработке управляющих воздействий, основываясь только на значениях косвенных переменных. Для улучшения качества управления была предложена двухконтурная схема регулирования, внешний контур которой содержит в себе адаптивное устройство управления. Приведенные численные исследования показали, что применение непараметрического алгоритма во внешнем контуре управления позволяет существенно улучшить ведение технологического процесса.

### 3.2.1. Краткое описание технологического процесса

Теплоэнергетика – одна из ведущих отраслей промышленности, занимающаяся преобразованием теплоты в другие виды энергии, в основном механическую и через нее в электрическую. Основу энергетики составляют тепловые электростанции различного типа (ТЭС, ТЭЦ, ГРЭС), использующие химическую энергию органического топлива. Теплоэлектроцентрали (ТЭЦ) вырабатывают электроэнергию с помощью паротурбинных установок, состоящих из котлоагрегата, паровой турбины и электрогенератора.

Исследуется производственный процесс Красноярской ТЭЦ-2, являющейся производственным филиалом ОАО «Енисейская территориальная генерирующая компания (ТГК-13)». В состав ТЭЦ входят следующие технологические установки: энергоблок (состоящий из котла барабанного, паровой турбины), генератор, вспомогательное оборудование. В котельном отделении Красноярской ТЭЦ-2 установлено шесть угольных паровых котлов (три котла БКЗ-420-140-ПТ1 производительностью по 420 (380) т/ч и три котла БКЗ-500-140 производительностью 500 т/ч). Котлы объединены поперечными связями и вырабатывают пар давлением 13,5 МПа и температурой 555 °С.

Специфика условий функционирования большинства ТЭЦ заключается в наличии физически и морально изношенного оборудования, устаревшей технологии регуляторов, ограниченности инвестиций в модернизацию и реконструкцию. В связи с этим важной задачей для повышения качества продукции предприятия является рациональное использование материальных ресурсов и, как следствие, снижение уровня себестоимости, в первую очередь за счет мобилизации интеллектуальных ресурсов и применения научных подходов к организации производства. Кроме того, несмотря на установку АСУ ТП, управление фактически

осуществляется оператором, который только ориентируется на измерение различных показателей. Также особенностью функционирования ТЭЦ, с которой связана неоптимальность ее работы, может считаться возникновение «недожогов», то есть неполное сгорание угля в котле, и «пережогов», связанных с нерациональным использованием топлива.

На ТЭЦ-2 установлены автоматические системы управления (АСУ). При этом операторам в реальном масштабе времени предоставляются данные о ходе процесса, осуществляется визуализация в виде графиков, отчетов, но окончательное решение о выборе того или иного управляющего воздействия остается за человеком. Поэтому одним из перспективных направлений исследований является интеграция в состав действующих АСУ технологическим процессом (АСУТП) диалоговых систем поддержки принятия решений, выбора режимных параметров, анализа качества технологических процессов.

Объектом изучения в данном разделе стал топливный котел № 1(6) (БКЗ-500-140 (КП-01)) ОАО «Красноярская ТЭЦ-2». Исследуется процесс сжигания угля в котлоагрегате, который в дальнейшем используется для получения электроэнергии и тепла. Процесс получения перегретого пара путем сжигания угля в котлоагрегате состоит из следующих периодов: загрузка топлива, помол топлива, подача в топку воздуха, сжигание топлива в топке для получения дымовых газов и тепла, подача питательной воды в экономайзер, циркуляция воды в барабан, получение и перегрев пара, отправление перегретого пара на турбины. На рис. 3.2.1 показана общая схема работы котлоагрегата ТЭЦ-2.

Предметом исследования является котельный агрегат БКЗ-500-140ПТ1 вертикально-водотрубный с естественной циркуляцией крупноблочной конструкции, предназначенный для получения пара высокого давления при сжигании ирша-бородинского бурого угля с жидким шлакоудале-

нием. Котлоагрегат однокорпусной с симметричным расположением поверхностей нагрева. Топка является первым восходящим газоходом. В верхнем горизонтальном газоходе расположены конвективные поверхности нагрева пароперегревателя. В нисходящем газоходе расположены первая и вторая ступени водяного экономайзера и вторая ступень воздухоподогревателя. Первая ступень воздухоподогревателя вынесена за пределы котлоагрегата.

**Схема процесса получения перегретого пара.** Схема работы котлоагрегата с естественной циркуляцией, работающего на угольной пыли, приведена на рис. 3.2.2. Основными рабочими элементами парового котла являются поверхности нагрева, которые представляют собой металлические трубчатые поверхности, омываемые, с одной стороны, горячими дымовыми газами, с другой – водой, пароводяной смесью, паром, воздухом.

Общая схема состоит из трех процессов, связанных с циркуляцией в котлоагрегате топлива, воды и воздуха.

*Угольная пыль.* Котельный агрегат оборудован системами пылеприготовления с промежуточными бункерами. Топливо из бункеров сырого угля подается в мельницы-вентиляторы, где производится размол топлива. Процесс приготовления пыли сочетается с сушкой топлива, которая осуществляется одновременно с размолом в мельницах, путем смешения топлива с сушильным агентом. При сжигании бурых углей в системе пылеприготовления угольная пыль, пройдя сепарационную шахту, вдувается в топку.

Необходимо обеспечить определенную тонкость помола топлива: чем тоньше помол, тем лучше происходит перемешивание топлива с воздухом, тем меньше величина коэффициента избытка воздуха и тем качественнее идет процесс горения. Регулирование подачи топлива осуществляется изменением числа оборотов ПСУ, а также с помощью регулятора толщины слоя.

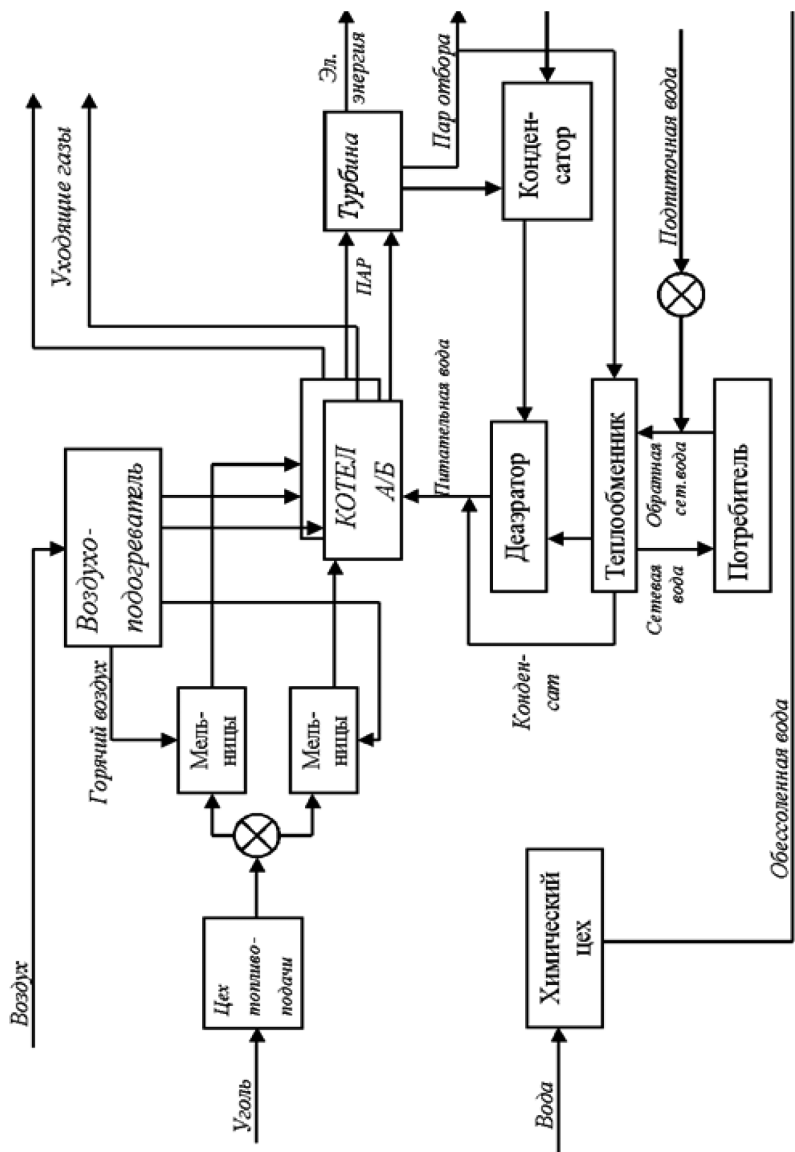


Рис. 3.2.1. Фрагмент схемы производства на Красноярской ТЭЦ-2

Для сушки топлива используется смесь топочных газов, забираемых из верхней части топочной камеры, и уходящих газов, забираемых после дымососа специально установленными для этой цели дымососами рециркуляции.

После мельницы аэросмесь поступает в инерционные сепараторы, где отделяются крупные частицы и возвращаются в мельницу. Далее аэросмесь поступает в пылевые циклоны, где происходит разделение пыли и сушильного агента. Пыль из циклонов поступает в промежуточный бункер, а сушильный агент мельничным вентилятором сбрасывается через сбросные горелки в топку. Транспортировка пыли в топку котла осуществляется воздухом от воздуходувок. Максимальный расход воздуха на один пылепровод – 310 м<sup>3</sup>/час.

Топочная камера парогенератора предназначена для сжигания органического топлива, частичного охлаждения продуктов сгорания за счет передачи теплоты топочным экранам и выделения из продуктов сгорания золы. Топка для сжигания топлива представляет собой большую камеру, стены которой заполнены экранными трубами, имеет в нижней части холодную воронку. В камере находится пережим, который делит топку на камеру горения и камеру охлаждения. Нижние части труб фронтного и заднего экрана образуют под для удаления шлака. В верхней части камеры охлаждения расположены два газозаборных окна для забора топочных газов в мельницы. Потолок топки и поворотного газохода экранированы трубами потолочного пароперегревателя.

Угольная пыль вдувается в топочную камеру вместе с необходимым для горения воздухом через горелки. Мелкие частицы угля в топочной камере сгорают, образуя факел, в ядре которого температура достигает 1500–2000 °С.

Стены топочной камеры покрыты трубами, образующими радиационные поверхности нагрева (экраны). По ним циркулируют вода и пароводяная смесь, образующаяся под

действием излучения факела. Продукты сгорания охлаждаются, на выходе из топочной камеры их температура снижается до 1000–1200 °С. Топочные экраны ограждают стены парогенератора от воздействия высоких температур в топке. Испарительная поверхность парогенератора – это трубчатая поверхность нагрева, в которой происходит испарение воды за счет теплоты дымовых газов. Дымовые газы передают теплоту поверхностям нагрева за счет лучеиспускания газов и конвекцией (непосредственно контакта с газами).

*Воздух.* Топочная камера имеет на фронтальной стене ряд круглых пылеугольных горелок, к которым из системы пылеприготовления подведено топливо с первичным и вторичным горячим воздухом. Необходимый для горения воздух (первичный) нагревается в воздухоподогревателе и вводится в топку вместе с пылью через горелки. Вторичный воздух способствует перемещению и быстрому сгоранию аэросмеси. При сжигании угольной пыли первичный воздух используется для транспортировки пыли к горелкам. Остальное количество воздуха подается непосредственно к горелкам.

Дутьевые вентиляторы подают холодный воздух в воздухоподогреватели из верхней части котельной, где температура может достигать 30 градусов и выше. Далее воздух подается через воздухоподогреватель и воздухопроводы в топку.

Выходящие из топочной камеры дымовые газы омывают последовательно пароперегреватели, водяной экономайзер и воздушный подогреватель. Омывая разреженный пучок труб (фестон) или отдельные змеевики пароперегревателя (ширмы), дымовые газы передают им теплоту частично конвекцией, частично радиацией и далее поступают в горизонтальный газоход, в котором располагаются змеевики конвективного пароперегревателя. По змеевикам движется пар, который, отнимая теплоту от продуктов сгорания, перегревается до температуры 510–560 °С. Продукты сгорания, охлаж-



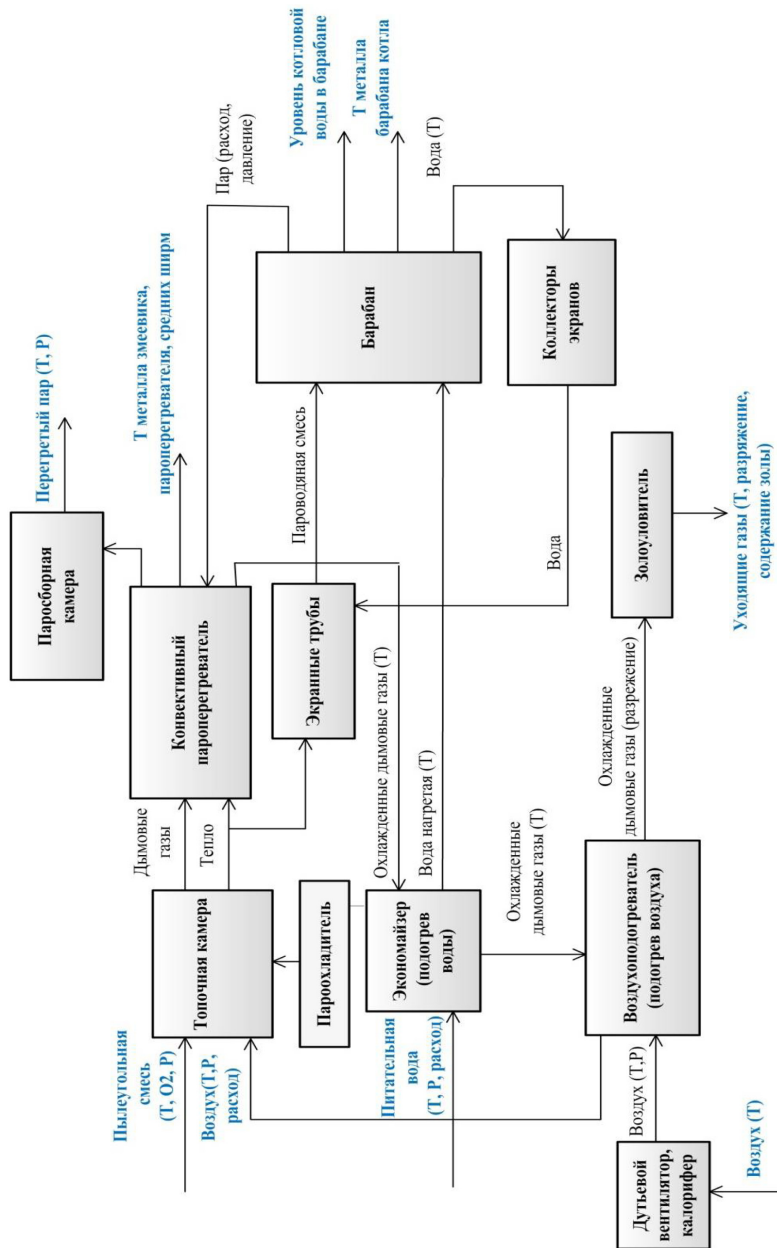


Рис. 3.2.2. Схема работы парового котла с естественной циркуляцией

денные в пароперегревателе до 500–600 °С, направляются в вертикальный опускной газоход, в котором расположены трубы водяного экономайзера. По трубам проходит питательная вода, которая нагревается и поступает в барабан котлоагрегата для пополнения испарившейся в экранях воды. Далее продукты сгорания поступают в воздухоподогреватель, где подогревают воздух, подаваемый затем через горелки в топку. Продукты сгорания охлаждаются в воздухоподогревателе до температуры 110–180 °С и поступают в золоуловитель (электрофильтр), в котором отделяется летучая зола, а затем дымососом выбрасывается в атмосферу через дымовую трубу при температуре уходящих газов 120÷160 °С.

Дутьевой вентилятор, дымососы, питательный насос, устройства пылеприготовления, золоулавливания, шлакозолоудаления и золоочистки являются вспомогательным оборудованием парогенератора. В нижней части топки предусмотрена система золошлакоудаления, которая состоит из холодной воронки, шлаковой шахты и канала гидрзолошлакоудаления. Очищенные от твердых примесей (летучей золы и уноса) в золоуловителях уходящие газы дымососами подаются в дымовую трубу [90].

*Вода.* Питательная вода по трубопроводу подается из экономайзера в барабан котла. Из барабана котловая вода, перемешанная с питательной, направляется по опускным трубам на питание испарительных поверхностей нагрева (топочных настенных экранов). В экранных трубах происходит частичное испарение воды, а в барабане пароводяная смесь разделяется на воду и пар.

Барабан котла с внутренним диаметром 1600 мм и толщиной стенки 112 мм выполнен из стали 16ГНМА. Средний уровень воды в барабане котла должен поддерживаться на 200 мм ниже геометрической оси барабана. Уровень воды в барабане котла измеряется системой водоуказательных при-

боров, который поддерживается постоянным при данной нагрузке. Различают два крайних по высоте уровня воды в барабане: низший и высший. Низший уровень воды определяется опасением оставить опускные трубы и их экраны без воды, а высший уровень устанавливается так, чтобы влажность пара не превышала допустимых значений, то есть пар не содержал большого количества капель воды.

Для обеспечения равномерного прогрева барабана при растопке предусмотрен паровой разогрев его от постороннего источника насыщенным паром. Схема парового разогрева барабана выполнена таким образом, что отбор пара производится от котлов ст. № 1, 3, 5. Барабаны всех котлов соединены общим коллектором. В барабане котла осуществляются обеспечение запаса воды в котле, разделение пароводяной смеси на воду и пар, а также поддержание концентрации примесей в котловой воде, следовательно, качество пара. Вода в барабане, замыкая цикл, снова поступает в опускные трубы и нижние коллекторы.

В барабане пар является насыщенным. Насыщенный пар проходит внутрибарабанные сепарационные устройства, оставляя в барабане часть влаги с примесями, и направляется по паропроводу на перегрев в пароперегреватель (трубчатую поверхность нагрева, которая служит для подогрева пара выше температуры насыщения). Пароперегреватель по характеру восприятия тепла делится на три части: радиационную, полурадиационную и конвективную. Радиационную часть составляют трубы, экранирующие потолок топочной камеры и верхнюю часть конвективного газохода. Полурадиационная часть состоит из топочных ширм на выходе в поворотный горизонтальный газоход. Конвективная часть расположена в поворотном горизонтальном газоходе котла.

Движение пара в пароперегревателе происходит двумя раздельными потоками. Кроме того, предусмотрено сме-

шивание потоков в смешивающих камерах потолочного пароперегревателя и растопочного пароохладителя. Это позволяет снизить температурные разверки в самих потоках и между ними.

Пар в перегревателе проходит последовательно потолочный перегреватель, ширмы, затем контуры конвективного перегревателя. Между ними расположен пароохладитель, впрыскивающий питательную воду для поддержания необходимой постоянной температуры перегрева пара. После пароохладителя перегретый пар поступает по паропроводам в турбину. Часть проработавшего в турбине пара используют в сетевых подогревателях для отпуска тепловой энергии с горячей водой бытовым потребителям и на отопление. Электрическая энергия от генераторов отводится через электрические трансформаторы линиями электропередачи высокого напряжения [92; 107; 109 и др.].

*Контроль состава воды.* При эксплуатации котлов необходимо обеспечить качество питательной воды в соответствии с нормами. Для осуществления химического контроля качества котловой воды и пара на котле имеются устройства для отбора проб. Отборы предусмотрены из следующих точек: вода из барабана; вода из выносных циклонов; насыщенный пар из пароперепускных труб; перегретый пар из магистрали; конденсат насыщенного пара; питательная вода на входе в водяной экономайзер. Вода с химического цеха называется подпиточной (питательной) и используется для восполнения потерь конденсата. Она поступает в конденсатор, туда же поступает отработанный пар с турбины. Конденсатор представляет собой теплообменный аппарат поверхностного типа (температура воды – 20°C). Питательная вода и конденсат подогреваются отработанным паром. Тепло этого пара передается питательной воде и за исключением небольшой потери рассеяния возвращается в котел.

### **3.2.2. Постановка задачи идентификации для процесса сжигания угля и получения перегретого пара в котлоагрегате**

Функционирование котлоагрегата ТЭЦ представляет собой процесс получения электроэнергии и тепла из перегретого (острого) пара, полученного в результате сжигания угля в топочной камере [115; 116]. Процесс является непрерывным с постоянно пополняющимися данными. Управляет процессом оператор, ориентирующийся на показатели различных параметров, полученных по датчикам системы автоматического управления. Управление ведется в соответствии с режимной картой процесса, где указаны допустимые пределы значений различных параметров. Вследствие быстротечности процесса оператор должен достаточно быстро принимать управленческие решения, опираясь при этом на технологический регламент процесса, а также на свой профессиональный опыт.

Измерения основных переменных процесса осуществляются во время протекания процесса и по его завершении. Данный процесс может быть рассмотрен как сложный (нелинейный) динамический процесс, состоящий из множества как динамических, так и безынерционных звеньев.

Основная задача процесса сжигания угля в котлоагрегате ТЭЦ заключается в получении определенной температуры перегретого пара для дальнейшей переработки его в электроэнергию на турбинах [107]. Для решения данной производственной задачи необходима модель расчета основных параметров процесса [92]. Разработка адекватной модели процесса сжигания угля ТЭЦ с приемлемой вычислительной сложностью, предназначенной прежде всего для ее использования в системе управления, продолжается в научном мире. Исследуемый процесс характеризуется сложными, динамическими многофакторными взаимодействиями и связями, возникающими по его ходу. В такой ситуации при-

емлемым решением может быть непараметрическая стохастическая аппроксимация некоторых связей «вход–выход».

В работе исследуется часть всего котлоагрегата (котел № 6). Общая схема функционирования котлоагрегата с указанием основных входных и выходных параметров представлена на рис. 3.2.3.

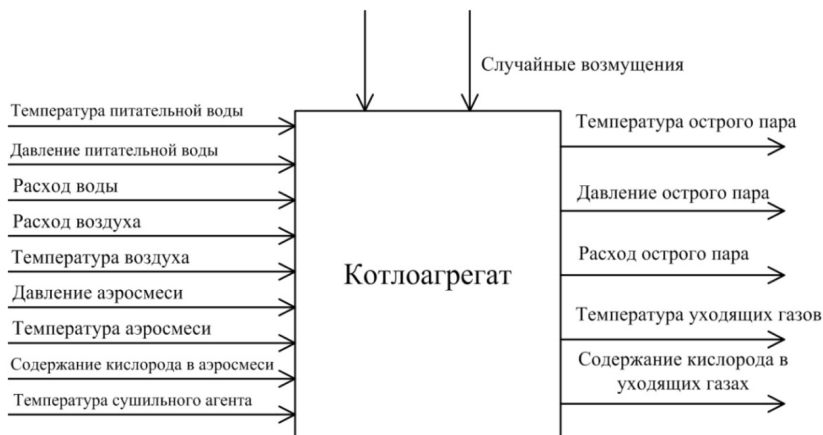


Рис. 3.2.3. Общая схема процесса получения перегретого пара в котлоагрегате

Входные контролируемые переменные можно разделить на управляемые по ходу процесса и неуправляемые. Применительно к процессу получения перегретого пара в котлоагрегате контролируемыми управляемыми переменными являются:  $u_1$  – температура пылеугольной смеси,  $^{\circ}\text{C}$ ,  $u_2$  – давление пылеугольной смеси,  $\text{кгс}/\text{м}^2$ ,  $u_4$  – расход питательной воды,  $\text{т}/\text{ч}$ ,  $u_7$  – давление воздуха,  $\text{кгс}/\text{м}^2$ ,  $u_9$  – расход воздуха,  $\text{м}^3/\text{ч}$ .

В качестве контролируемых неуправляемых по ходу процесса переменных  $\mu(t)$  выступают:  $\mu_1$  – содержание кислорода в пылеугольной смеси, %,  $\mu_2$  – температура питательной воды,  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\mu_3$  – давление питательной воды,  $\text{кгс}/\text{м}^2$ ,  $\mu_4$  – температура воздуха,  $\text{C}^{\circ}$ .

К помехам  $\xi(t)$  относят различные трудно формализуемые факторы, например, состояние датчиков измерения и регуляторов (в том числе временный выход из строя некоторых из них), действия операторов и др.

Выходные переменные  $x(t)$ :  $x_1$  – температура пара в паросборной камере,  $x_2$  – давление пара в паросборной камере,  $x_3$  – расход перегретого пара, т/ч,  $x_4$  – температура уходящих газов,  $x_5$  – содержание кислорода в уходящих дымовых газах, %.

Кроме параметров, приведенных на схеме 4.3, на процесс сжигания угля в котлоагрегате существенно влияют такие параметры, как характеристики топлива (его влажность, зольность, тонина помола, расход топлива), измерение которых на многих ТЭЦ не проводится (ведется не регулярно) или данные не автоматизируются (по ним нет базы данных). Важными для исследования процесса могут быть также данные химического анализа питательной воды.

В табл. 3.2.1 приведен список основных входных и выходных переменных процесса, данные измерений которых имелись в полученной на предприятии выборке.

Таблица 3.2.1

**Общий список выделенных входных  
и выходных переменных**

Обозначение	Наименование
1	2
Входные переменные	
<i>u1</i>	Температура пылеугольной смеси после мельницы-вентилятора
<i>u2</i>	Давление пылеугольной смеси после мельницы-вентилятора
<i>u3</i>	Содержание кислорода в пылеугольной смеси
<i>u4</i>	Расход питательной воды (к котлу), т/ч

Окончание табл. 3.2.1

1	2
$u_5$	Температура питательной воды (к котлу)
$u_6$	Давление питательной воды (к котлу)
$u_7$	Давление воздуха
$u_8$	Температура воздуха
$u_9$	Расход воздуха к горелкам
	Температура сушильного агента
Выходные переменные	
$x_1$	Температура пара в паросборной камере (перегретого пара)
$x_2$	Давление пара в паросборной камере (перегретого пара)
$x_3$	Расход перегретого пара
$x_4$	Температура дымовых (уходящих) газов за электро-фильтрами
$x_5$	Содержание кислорода в дымовых газах

Описание процесса горения угля в котлоагрегате с точки зрения теории управления поясняется на рис. 3.2.4.

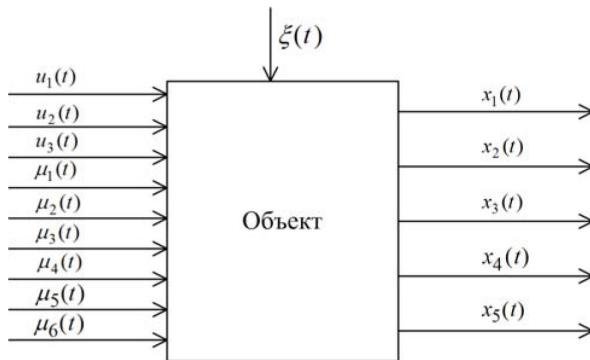


Рис. 3.2.4. Схема идентификации процесса получения перегретого пара в котлоагрегате ТЭЦ с точки зрения теории управления

На рисунке приняты обозначения:  $u(t)$  – вектор входных управляемых параметров;  $\mu(t)$  – вектор входных неуправ-



ляемых параметров;  $x(t)$  – вектор выходных параметров;  $\xi(t)$  – случайные возмущения,  $t$  – время.

Задача построения модели процесса сжигания угля в котлоагрегате рассматривалась в условиях неопределенности, когда параметризованная структура модели процесса считается неизвестной. Идентификация тогда возможна с применением методов непараметрической статистики, описанных ранее.

### 3.2.3. Обработка и анализ данных исследуемого технологического процесса

Для вычислительного эксперимента использовалась выборка реальных данных измерений входных/выходных переменных процесса на котлоагрегате ТЭЦ-2 за ноябрь 2014 года размером 83000 строк (измерения параметров производились каждые 30 секунд). Далее приводятся некоторые результаты обработки данных.

*Оценка плотности распределения вероятности переменных.* Обозначим  $P_i$  – плотность распределения входных и выходных параметров котлоагрегата;  $x_i$  – выходные переменные;  $u_i$  – входные переменные.

Плотность распределения вероятности каждой переменной  $p(x)$  будем находить как непараметрическую статистику от значений  $x_i$  выборки [78; 89]:

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{sc_s} \sum_{i=1}^s \Phi \left( \frac{x - x_i}{c_s} \right), \quad (3.2.1)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – колоколообразная ядерная функция,  $c_s$  – коэффициент размытости ядерной функции, значение которого настраивается путем минимизации среднеквадратической ошибки оценивания.

В качестве оценки условной плотности распределения будем использовать непараметрическую статистику [79; 89]:

$$P(x/u) = \frac{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{x-x_i}{c_s}\right) \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{u-u_i^j}{c_s^j}\right)}{c_s \sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{u-u_i^j}{c_s^j}\right)}, \quad (3.2.2)$$

где в качестве функции  $\Phi(\times)$  использована усеченная парабола.

На рис. 3.2.5 представлена оценка условной плотности температуры перегретого (острого) пара при фиксированных средних параметрах.

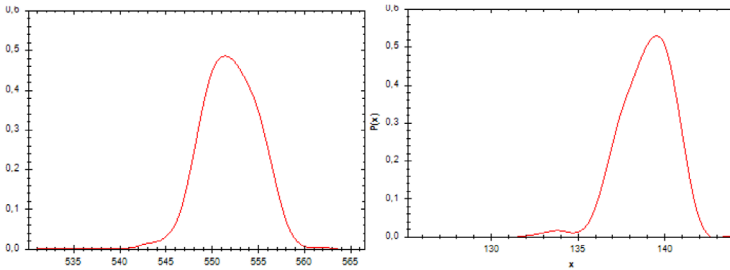


Рис. 3.2.5. Условная плотность температуры (а) и давления (б) перегретого пара

Далее на рис. 3.2.6–3.2.12 представлена оценка условной плотности распределения входных параметров котлоагрегата.

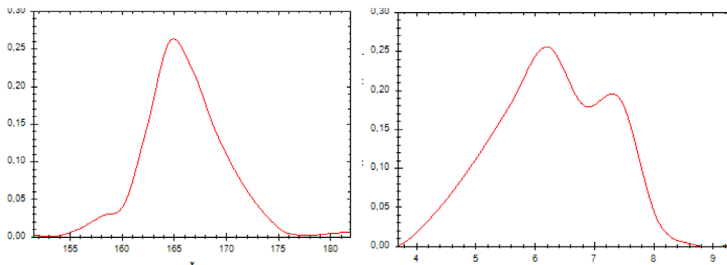
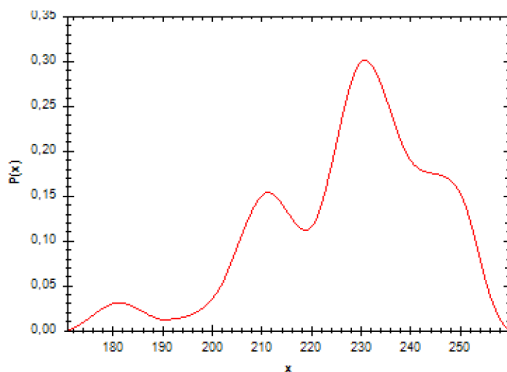
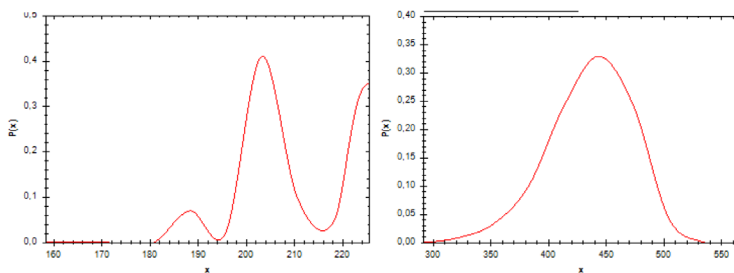


Рис. 3.2.6. Условная плотность температуры уходящих газов (а) и содержания кислорода в уходящих газах (б)

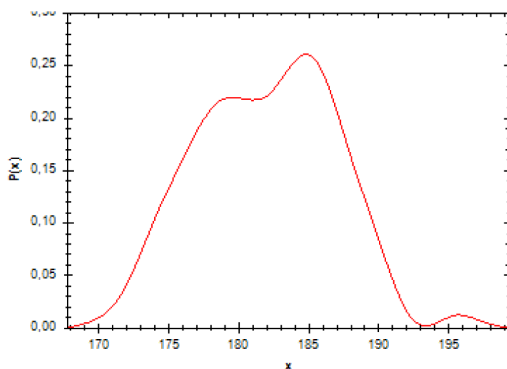


*Рис. 3.2.7. Условная плотность расхода перегретого пара*

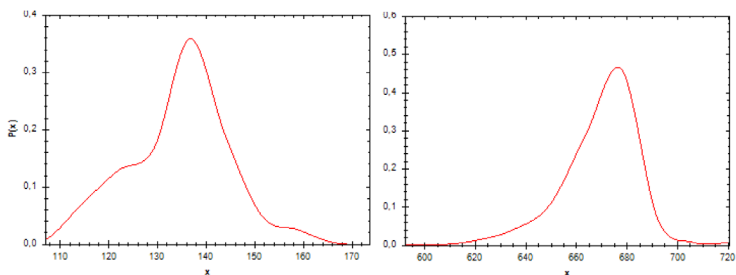
Безусловные плотности распределения входных переменных по алгоритму (3.2.1) представлены на рисунках ниже.



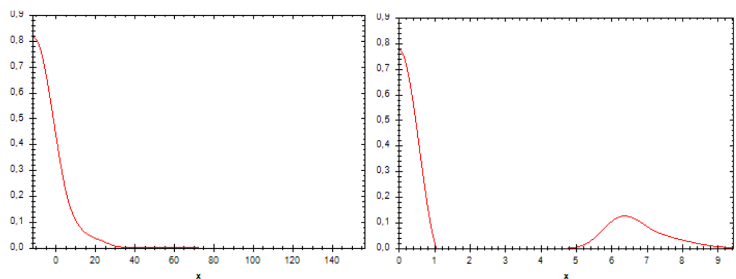
*Рис. 3.2.8. Плотность температуры (а) и расхода (б) питательной воды*



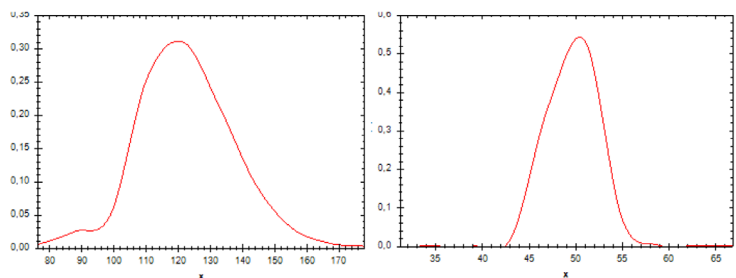
*Рис. 3.2.9. Плотность давления питательной воды*



*Рис. 3.2.10. Плотность температуры пылеугольной смеси после мельниц-вентиляторов (а) и температуры сушильного агента (б)*



*Рис. 3.2.11. Плотность давления пылеугольной смеси и содержания кислорода в пылеугольной смеси после мельницы-вентилятора*



*Рис. 3.2.12. Плотность давления воздуха в горелке и температуры воздуха*

Анализ оцененных плотностей вероятности входных/выходных переменных котлоагрегата во многих случаях показывает их полимодальность. Это связано с тем, что процесс ведется в различных режимах.

**Восстановление регрессионных зависимостей входных/выходных переменных котлоагрегата.** Имеются статистически независимые наблюдения входных и выходных переменных котлоагрегата, которые распределены с неизвестной плотностью вероятности. Необходимо оценить наличие нелинейной связи между остальными переменными. Для этого будем строить непараметрические оценки функции регрессии для переменных, коэффициент корреляции между которыми показывает отсутствие линейной связи [79]:

$$\hat{x}(\bar{u}) = \frac{\sum_{i=1}^s x_i \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{u^j - u_i^j}{c_s^j}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{u^j - u_i^j}{c_s^j}\right)}, \quad (3.2.6)$$

где  $s$  – объем выборки;  $k$  и  $m$  – соответственно количество входных и выходных параметров.

Важнейшими выходными переменными процесса являются переменные, относящиеся к перегретому пару (температура, давление, расход), а также дымовым газам (состав, температура). Для их прогноза были построены непараметрические модели вида (3.2.6). Для оценки точности полученных моделей была использована относительная ошибка вида:

$$R = \frac{\frac{1}{s} \sqrt{\sum_{i=1}^s (\hat{x}_i - x_i)^2}}{\sqrt{D}}, \quad (3.2.7)$$

где  $x_i$  – измеренное значение выходной переменной,  $\hat{x}_i$  – полученная оценка,  $D$  – оценка дисперсии.

На рис. 3.2.13–3.2.17 приводятся графики оценки некоторых зависимостей выходных переменных от входных за двухчасовой период, где по оси абсцисс – время, в которое оценивается значение выходной переменной, по оси ординат – значение выхода процесса в точке и его прогноз.

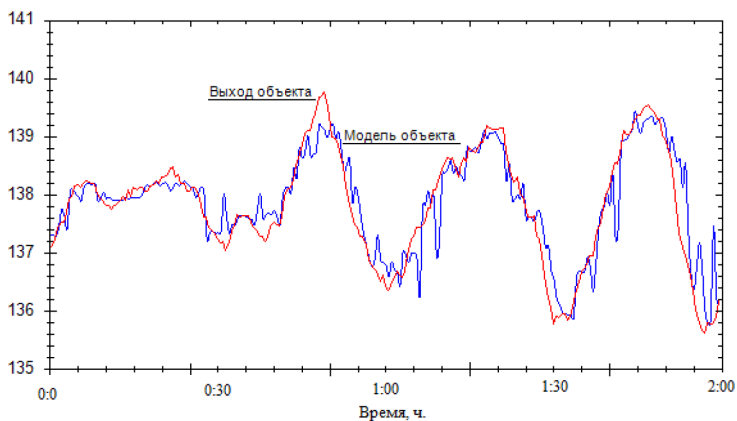


Рис. 3.2.13. Оценка зависимости давления перегретого пара от входных переменных, параметр алгоритма  $cs=0,14$ , относительная ошибка модели  $w=0,36$ , среднеквадратическое отклонение 1,05

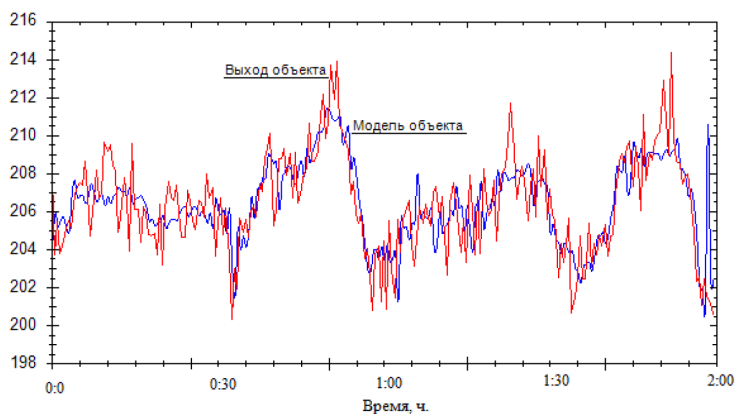


Рис. 3.2.14. Оценка зависимости расхода перегретого пара от входных переменных,  $cs=0,24$ , относительная ошибка модели  $w=0,36$ , среднеквадратическое отклонение 7,04

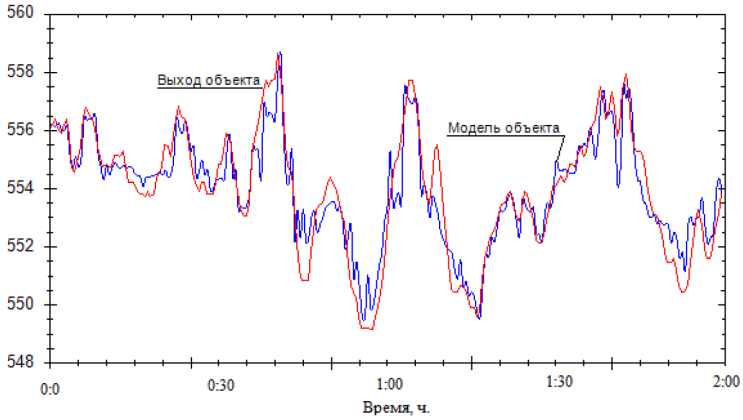


Рис. 3.2.15. Оценка зависимости температуры перегретого пара от входных переменных,  $cs=0,24$ , относительная ошибка модели  $w=0,34$ , среднеквадратическое отклонение 2,31

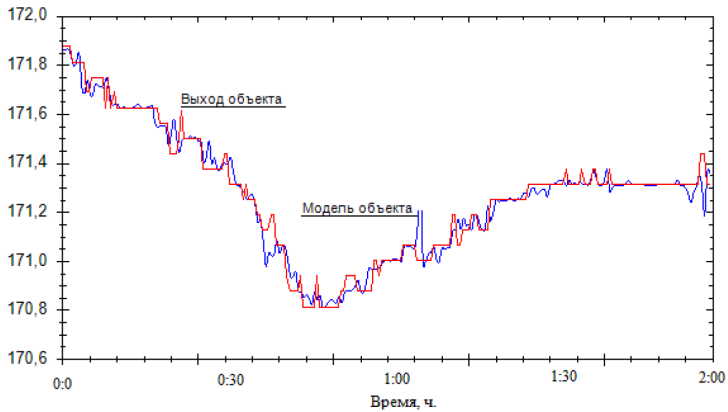


Рис. 3.2.16. Оценка зависимости температуры уходящих газов от входных переменных,  $cs=0,24$ , относительная ошибка модели  $w=0,02$ , среднеквадратическое отклонение 1,83

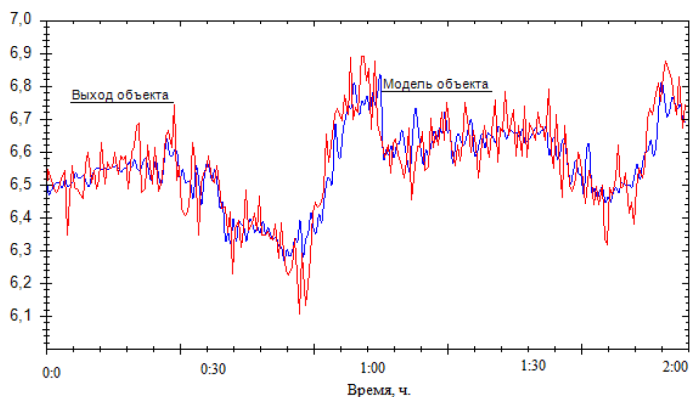


Рис. 3.2.17. Оценка зависимости содержания кислорода в уходящих газах от входных переменных,  $cs=0,24$ , относительная ошибка модели  $w=0,2$ , среднеквадратическое отклонение  $0,38$

В табл. 3.2.2 приведены сравнительные значения основных показателей, взятые из режимной карты котла (т. е. желаемые значения переменных), а также оценки данных величин, вычисленные по данным.

Таблица 3.2.2

### Характеристики основных показателей процесса

Показатель	Значение по режимной карте (желаемое)	Диапазон значений (по данным)	Оценка среднего значения	Среднеквадратическое отклонение
Температура питательной воды	230	158–232	214,32	11,8
Температура воздуха перед ВЗП	>50	32–70,1	51,5	2,43
Температура пылеугольной смеси	90–200	107–181	138,18	10,39
Температура перегретого пара	555	530–570	553,9	2,97
Давление перегретого пара, кгс/см <sup>2</sup>	135	124,4–145	139,9	1,43
Температура дымовых (уходящих) газов	152–158	151–184	167	3,99



Как видно из табл. 3.2.2, для большинства из приведенных переменных, разброс значений достаточно значительный. То есть процесс ведется таким образом, что основные выходные параметры, которые должны принимать определенное заданное значение, находятся в достаточно широких границах. В целом можно прийти к заключению, что процесс сжигания угля ведется недостаточно качественно с точки зрения расходования ресурсов.

Среднеквадратическая ошибка непараметрических моделей системы в некоторых случаях меньше дисперсии выходных переменных. Хотя и с разной степенью точности, но алгоритмический прогноз выходных переменных котлоагрегата возможен. Кроме того, в реальных условиях играют существенную роль случайные факторы и неучтенные входные переменные, от которых зависят значения выхода. Результаты прогноза в некоторых моделях могли бы быть улучшены, если учесть другие входные переменные – расход пылеугольной смеси, зольность и влажность топлива и др. Однако на многих ТЭЦ измерение этих переменных не проводится или эти данные не автоматизируются и, следовательно, не учитываются при ведении процесса. В связи с этим задача управления таким объектом является достаточно трудной.

#### **2.3.4. Предлагаемая схема управления процессом**

Задача регулирования процесса котлоагрегата состоит в том, чтобы находить значения подаваемых в котел питательной воды, топлива и воздуха, необходимых для обеспечения требуемой паропроизводительности котла при заданных параметрах пара. В настоящее время режимы ведения процесса сжигания угля определяются по «режимной карте» в зависимости от нагрузок на котлоагрегат. Основным сигналом для корректировки протекания топочного процесса является визуальное наблюдение. Режимные карты представ-

ляют собой наборы рекомендаций для поддержания технологического режима функционирования котлов, т. е. определенные ограничения, которые накладываются на параметры. Так, «режимная карта» представляет собой некоторое приближение модели процесса.

Задающее воздействие при управлении исследуемым процессом формируется исходя из требуемого значения следующих переменных: температура перегретого пара; давление перегретого пара; расход перегретого пара; содержание  $O_2$  в уходящих газах; температура уходящих газов [116].

При обследовании энергоблока № 6 Красноярской ТЭЦ-2 было зафиксировано 776 точек контроля (измерения параметров), которые условно можно разделить на группы:

- характеризующие качество технологического процесса (температура и давление перегретого пара, содержание кислорода в уходящих газах и т. д.);

- характеризующие техническое состояние оборудования (температура металла турбины, материалов котла, температура металла пароперегревателя и т. д.). По ним можно судить о качестве технологического процесса и техническому состоянию оборудования с точки зрения его эксплуатации.

На предприятии функционируют 6 контуров управления: регулятор давления пара на обдувку; регулятор общего воздуха; регулятор питания котла; регулятор разряжения; регулятор тепловой нагрузки (базовый, регулирующий); регулятор температуры перегретого пара; регулятор загрузки мельницы. Каждое из данных устройств управления работает по принципу пропорционально-интегрального регулятора (регулирование по рассогласованию).

При нормальной работе котлоагрегата на номинальных параметрах все регуляторы должны быть включены на автоматическое управление. О качестве работы регуляторов машинист котла судит по записям самопишущих приборов.

Регулирование не должно сопровождаться частыми значительными колебаниями регулирующих величин. Иначе машинист должен перейти на ручное дистанционное управление. Система регулирования обеспечивает поддержание заданного значения основных параметров:

- поддержание нормального давления перегретого пара на выходе котла ( $\pm 1,2$  кгс/см<sup>2</sup>); поддержание температуры свежего пара с допусками  $\pm 5^\circ\text{C}$  номинального значения;

- при повышении или понижении температуры пара сверх допустимой проверить работу регулятора температуры перегретого пара и режим горения в топке, устранить причины. Повышение температуры пара над нормальной может произойти вследствие загрязнения экранов, изменения положения факела в топке, избытка воздуха, повышения влажности топлива, резкого изменения нагрузки котла, понижения температуры питательной воды;

- равномерное питание котла водой (отклонение от среднего уровня воды в барабане не должно превышать 50 мм);

- расход воздуха на транспорт пыли в каждом пылеприводе и наличие давления в коллекторе сжатого воздуха;

- наличие разряжения под пылепитателями. Если в пылепровод или сопло сжатого воздуха попал посторонний предмет или влажная пыль, то возможно забивание пылепровода;

- правильное ведение топочного режима (требуется включать все горелки, добиваясь равномерного заполнения топки факелом). Изменяя количество топлива, поступающего в топку, соответственно изменять подачу воздуха и величину тяги. Воздушный режим поддерживать оптимальным для каждой нагрузки в соответствии с режимной картой котла;

- слежение за работой системы пылеприготовления, не допуская повышения температуры пылегазовой смеси за мельницей выше допустимой ( $90^\circ\text{C}$ ). Работа мельничной установки должна протекать при постоянной загрузке в соответствии с заданной тониной помола;

– регулирование температуры перегретого пара осуществляется во впрыскивающих пароохладителях первой и второй ступени впрыском конденсата:

- подачи воздуха в топку;
- разрежения вверху топки;
- уровня воды в барабане;
- температуры перегретого пара на выходе из котла;
- температуры пылеугольной смеси на выходе из мельниц;
- загрузка мельниц топливом;
- вентиляция мельницы.

Задающее воздействие для регуляторов контуров управления вырабатывает система управления качеством в соответствии с тем или иным технологическим режимом работы. Настройка регуляторов производится по переходным (разгонным) характеристикам объектов.

В ходе исследований может быть предложена следующая схема управления процессом сжигания угля в котлоагрегате (рис. 3.2.18).

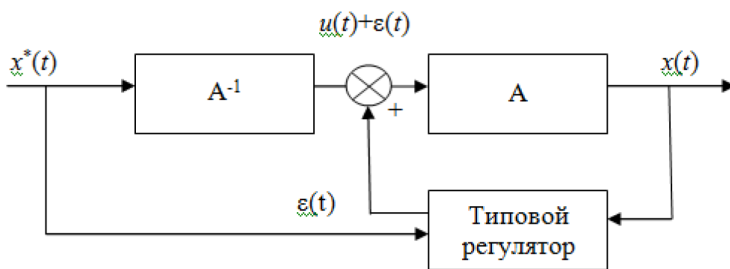


Рис. 3.2.18. Схема дуальной непараметрической системы управления

Примечание:  $A$  – оператор, описывающий управляемый объект (в данном случае котлоагрегат ТЭЦ),  $A^{-1}$  – устройство управления (УУ – непараметрическая оценка обратного оператора объекта),  $u$  – входная величина (управляемый параметр),  $x$  – выходная величина,  $x^*$  – задающее воздействие, поступающее на управляющее устройство,  $u_s^*$  – выход (оценка  $A^{-1}$ ).

Встроенный в систему управления типовой регулятор сохранен, но добавлен контур управления, основанный на знаниях об объекте (оценка обратного оператора) и обеспечивающий дуализм при формировании управляющего воздействия. Управляющее воздействие формируется из двух компонентов, где непараметрическое управляющее устройство является основным контуром адаптивного управления, основанным на знаниях исследователя об объекте. Дополнительным контуром управления является УУ, основанное на принципе обратной связи (т. е. невязке значений задающего воздействия и фактического значения выхода объекта). Управляющее воздействие рассчитывается для объекта, когда начальный объем выборки равен  $s$ , т. е. требуется найти значение управляющего воздействия на следующем шаге ( $s+1$ ). Непараметрический алгоритм дуального управления имеет вид [82–84]:

$$u_{s+1}^* = \tilde{u}_s + \Delta u_{s+1}, \quad (3.2.8)$$

где компонента  $\tilde{u}_s$  формируется непараметрическим регулятором, структура которого основана на оценке обратного оператора ОУ. Значение  $\Delta u_{s+1}$  – поисковые шаги, которые представлены невязкой значений задающего воздействия и выхода объекта.

В алгоритме (3.2.8) основная роль при формировании управляющего воздействия принадлежит первому слагаемому, так как его структура основана на модели исследуемого объекта и несет в себе знания о нем. Второе слагаемое  $\Delta u_{s+1}$  выполняет корректирующую роль, направленную на приведение объекта к желаемому состоянию, несмотря на возможную неточность оценки обратного оператора системы. В качестве непараметрической оценки обратного оператора объекта  $\tilde{u}_s$  может быть принята статистика:

$$\tilde{u}_s = \frac{\sum_{i=1}^s u_i \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{x_s^* - x_i^j}{c_s^x}\right) \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{\mu_s^j - \mu_i^j}{c_s^\mu}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{x_s^* - x_i^j}{c_s^x}\right) \prod_{j=1}^m \Phi\left(\frac{\mu_s^j - \mu_i^j}{c_s^\mu}\right)}, \quad (3.2.9)$$

где  $k$  – количество выходных переменных,  $m$  – количество входных неуправляемых переменных.

Невязка  $\Delta u_{s+1}$  может формироваться на основе алгоритма П-регулятора или ПИ-регулятора.

В процессе дуального управления объектом фигурируют как этап изучения объекта (использования знаний об объекте), так и этап приведения его к цели. Таким образом, в  $\tilde{u}_s$  сосредоточены «знания» об объекте, а  $\Delta u_{s+1}$  – «изучающие» поисковые шаги, корректирующие значение управляющего воздействия  $u_{s+1}^*$ . Тогда управляющее воздействие находится в соответствии с непараметрическим алгоритмом управления (3.2.8).

Были проведены экспериментальные исследования с использованием модели котлоагрегата, построена непараметрическая модель процесса сжигания угля в котлоагрегате на основе имеющихся данных. Эта модель в процессе эксперимента имитировала объект. ЛПР определяет значение неуправляемых входных переменных  $\mu(t)$  (например, температура питательной воды и содержание кислорода в пылеугольной смеси). Далее выбираются желаемые значения выходных переменных  $x(t)$  (температура перегретого пара). Фактически в качестве  $\mu(t)$  и  $x(t)$  при каждом фиксированном  $t$  брался некоторый эксперимент из имеющейся выборки. Получаемые управляющие воздействия (3.2.8) подавались не на объект, а на вход непараметрической модели, построенной на реальных данных.

Был проведен эксперимент по косвенной проверке непараметрических алгоритмов дуального управления по имею-

щимся данным. Следует иметь в виду, что настоящая, действенная проверка системы управления должна проводиться в полной мере на реально функционирующем объекте и созданной системе управления. Такая возможность представится при выполнении НИОКР.

Предварительная (приближенная) проверка непараметрических алгоритмов дуального управления осуществлялась по следующей схеме:

– на одной из реализаций имеющейся выборки строилась соответствующая непараметрическая модель;

– фиксировался некоторый момент времени  $t$  вне этой выборки, которому соответствовали значения выходной переменной  $x(t)$ , управляемой  $u(t)$  и контролируемой, но неуправляемой  $\mu(t)$ . При этом значение этой тройки переменных  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\mu(t)$  берется произвольно по  $t$  из имеющейся выборки реальных данных;

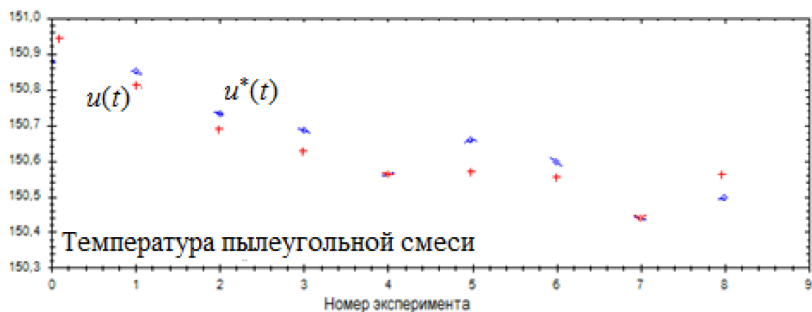
– для проверки работы регулятора выбранное произвольное значение выходной переменной  $x(t)$  принимается в качестве желаемого значения выхода  $x^*(t)$ , хотя оно и отличается от требуемого ( $555^\circ\text{C}$ ), а входные неуправляемые переменные принимаются равными  $\mu(t)$ ;

– вычисляется значение управляющего воздействия  $u^*(t)$ , которое приводило бы систему к заданному  $x^*(t)$ . Так как задание для регулятора было выбрано из реальной выборки и значение  $u(t)$  при фиксированном  $\mu(t)$  известно, то расчетное значение  $u^*(t)$  должно быть приблизительно равно значению  $u(t)$ ;

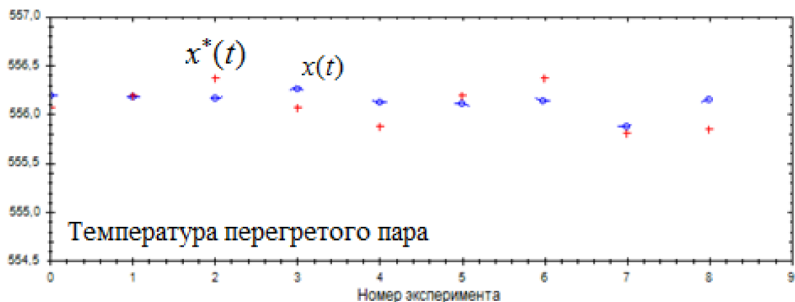
– подставляя в непараметрическую модель полученное значение  $u^*(t)$  и  $\mu(t)$ , даем прогноз  $\hat{x}(t)$ . Тогда значение  $\hat{x}(t)$  должно быть приблизительно равно  $x(t)$ .

Повторяя подобный эксперимент при различных значениях  $t$ , можно убедиться в работоспособности непараметрического алгоритма дуального управления. На рис. 3.2.19 приведен частный пример реализации такого эксперимен-

та, где управляемой переменной была температура перегретого пара, управляющее воздействие – температура пылеугольной смеси, входные неуправляемые переменные – значения температуры питательной воды и содержания кислорода в пылеугольной смеси.



а)



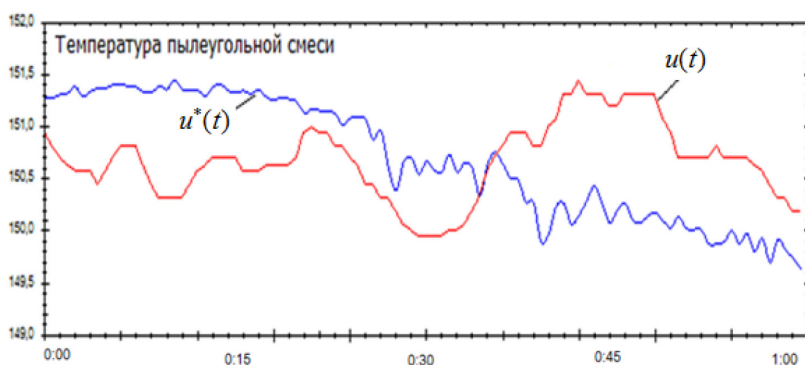
б)

Рис. 3.2.19. Пример расчета управляющих воздействий

На рис. 3.2.19 а): управляющее воздействие  $u(t)$  принималось равным значению температуры пылеугольной смеси из реальных данных,  $u^*(t)$  – рассчитанное значение управляющего воздействия, б): иллюстрирует качество управления, здесь  $x(t)$  – расчетный выход по модели, полученной при значении управляемой с помощью  $u(t)$  равного  $u^*(t)$ .



Экспериментальная проверка непараметрического алгоритма управления при различных задающих воздействиях по реальным производственным данным показала достаточно высокую точность. Получаемые управляющие воздействия подавались не на объект, а на модель, построенную по реальным данным. На рисунках приведены данные измерений температуры перегретого пара за 1 ноября 2014 года для котла № 6 (время наблюдения – 1 час, измерения проводятся каждые 30 секунд).

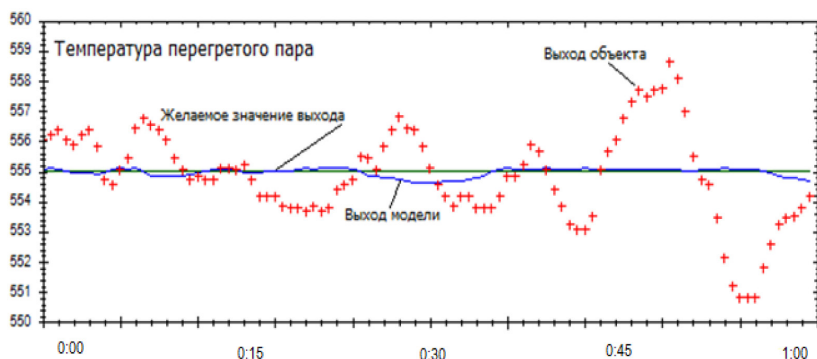


*Рис. 3.2.20. Выборочные значения управляемой входной переменной (температуры пылеугольной смеси) –  $u$ , оцененные –  $u^*$ .  
Задача стабилизации качества продукта  
(температура перегретого пара – 555 °C)*

Далее приведен результат прогноза значения температуры перегретого пара в зависимости от температуры пылеугольной смеси, содержания кислорода в пылеугольной смеси, температуры питательной воды к котлу и давления воздуха.

При этом сравнение подобных ситуаций по реальным данным позволяет судить о том, что качество управления стало несколько выше. То есть управление процессом с применением непараметрического регулятора предположительно позволит вести процесс сжигания угля в достаточно малой окрестности от заданных значений выхода. Это позво-

ляет существенно уменьшить ситуации, когда выход объекта значительно отличается от задания.



*Рис. 3.2.21. Оценка зависимости температуры пара в паросборной камере от температуры питательной воды в котле, температуры пылеугольной смеси после мельницы-вентилятора А и содержания кислорода в пылеугольной смеси, объем выборки  $s=100$ , относительная ошибка управления (среднеквадратическое отклонение от желаемого значения) = 2,45*

Внедрение интеллектуальной адаптивной системы управления на предприятии позволит осуществлять прогноз выходных данных процесса сжигания угля в котлоагрегате и корректировать режимы ведения процесса сжигания угля (температура питательной воды, температура воздуха и т. д.) при известных контролируемых неуправляемых параметрах (калорийность, химический состав топлива и др.) с целью достижения заданных значений параметров (температуры и давления перегретого (острого) пара и др.). Таким образом, экспериментальное исследование показало, что применение адаптивных непараметрических регуляторов на ТЭЦ может иметь значительный экономический эффект, позволит исключить возможность «пережогов» и «недожогов», что особенно важно при тех режимах ведения процесса сжигания угля, которые существуют на предприятии.

## Заключение

В монографии рассмотрены непараметрические модели и алгоритмы управления для различных классов динамических процессов. Задача исследования процессов ставится в условиях неполной априорной информации.

Задача идентификации в этом случае решалась как в условиях непараметрической неопределенности, когда были известны только качественные характеристики исследуемого объекта, а также в условиях, когда известной величиной могут являться некоторые элементы структуры объекта или порядок разностного уравнения динамического процесса.

В последнем случае априорная информация соответствовала одновременно как параметрическому, так и непараметрическому уровню неопределенности. Для уточнения непараметрических моделей был предложен алгоритм восстановления структуры динамического объекта. В случае линейного объекта алгоритм позволял восстановить структуру модели с точностью до параметров. В случае отношения исследуемого процесса к классу нелинейных систем алгоритм определял запаздывающие компоненты выходной переменной динамического объекта и, как следствие, порядок его разностного уравнения, что позволило частично параметризовать модель объекта и существенно повысить точность прогноза.

Рассмотрена также задача идентификации и управления нелинейными динамическими процессами класса Винера и Гаммерштейна, состоящими из совместно функционирующих линейного динамического и нелинейного безынерционного блоков. Предложены непараметрические алгоритмы моделирования систем такого класса, предполагающие оценивание параметров нелинейного элемента моделей, когда его структура задана в общем виде (квадратор, звено с насыщением). Основное отличие предлагаемых алгоритмов идентификации от известных заключается в возможно-

сти применения в условиях отсутствия информации о порядке и параметрах дифференциального уравнения. Разработан также модифицированный непараметрический алгоритм оценивания вида нелинейного элемента моделей классов Винера и Гаммерштейна, применимый к решению задачи идентификации в условиях неопределенности, когда параметрическая структура линейного динамического и нелинейного безынерционного блоков неизвестна. Данный алгоритм основан на непараметрическом оценивании линейной и нелинейной частей системы.

Во 2 главе монографии рассмотрена проблема адаптивного дуального управления. Были разработаны непараметрические алгоритмы дуального управления, основанные на применении метода обратного оператора. Также была предложена двухконтурная система управления динамическим объектом. Предлагаемый внешний контур предназначен для систем, в технологической цепочке которых уже функционирует типовой регулятор. Применение второго контура управления также целесообразно в случае неустойчивого динамического объекта. Здесь внутренний контур управления несет в себе задачи стабилизации объекта, а внешний контур – приведение выходной переменной объекта к задающему воздействию. В ходе многочисленных вычислительных экспериментов была подтверждена эффективность предложенных алгоритмов.

Предложены также адаптивные алгоритмы управления динамическими процессами класса Винера и Гаммерштейна в условиях недостатка априорной информации о порядке и параметрах линейного динамического блока. Предлагается класс алгоритмов непараметрического управления, который конструируется на основании снятых переходных характеристик объекта. Приведенные результаты численных исследований показывают эффективность предложенных непараметрических алгоритмов управления для процессов

класса Винера и Гаммерштейна в условиях помех, а также при задающих воздействиях различного вида.

Глава 3 работы посвящена описанию результатов применения представленных ранее алгоритмов для исследования и управления различными технологическими процессами. Представлены результаты исследований процесса кислородно-конвертерной плавки стали на примере работы кислородно-конвертерного цеха № 2 ОАО «ЕВРАЗ Объединенный Западно-Сибирский металлургический комбинат». Численные исследования данного процесса показали, что управление процессом хотя и ведется в соответствии с технологическим регламентом, принятым на предприятии, однако выходные переменные процесса отклоняются от заданного значения в достаточно большом диапазоне. Предлагаемая двухконтурная система управления позволит более рационально вести технологический процесс за счет, во-первых, использования более полной технологической информации о переменных процесса, а также за счет использования адаптивных алгоритмов управления. Преимущество предлагаемой схемы управления заключается в возможности интеграции внешнего контура управления в технологическую цепочку без вывода из строя регуляторов, которые уже реализованы и функционируют на предприятии.

Практическая значимость и эффективность разработанных моделей и алгоритмов управления была подтверждена также путем моделирования процесса сжигания угля в котлоагрегате ОАО «Красноярская ТЭЦ-2» и реализации эксперимента по управлению. Были построены непараметрические модели по выборочным данным для важнейших выходных переменных процесса. В качестве источников экономического эффекта при автоматизации энергоблока с применением предлагаемых алгоритмов могут быть уменьшение количества сжигаемого угля и экономия электроэнергии, а также существенное сокращение пережогов и недожогов.

## Библиографический список

1. Агафонов Е.Д. О проверке гипотезы линейности динамических систем // Вестник НИИ СУВПТ: сб. науч. трудов. Вып. 5. Красноярск: НИИ СУВПТ, 2000. С. 18–25.
2. Адаптивные модели сложных технологических процессов / Лапко А.В., Медведев А.В., Николаев А.Г. и др. // Адаптивные системы и их приложения. Новосибирск: Наука, 1978. С. 143–158.
3. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.
4. Айвазян С.А., Енюков И.С. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
5. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М., 2003. 278 с.
6. Александровский Н.М., Дейч А.М. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 167–188.
7. Андриевский Б.Р. Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // УБС. 2009. № 24. С. 258–280.
8. Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // Автоматика и телемеханика. 2010. № 4. С. 34–99.
9. Анисимов Д.Н., Мякинков Д.А. Особенности идентификации нелинейных динамических объектов методом экспоненциальной модуляции // Вестник МЭИ. 2012. № 2. С. 151–154.
10. Анисимов С.А., Зайцев И.С., Райбман Н.С., Яралов А.А. Типовые линейные модели объектов управления. М.: Энергоатомиздат, 1983. 264 с.
11. Апарцин А.С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 28–41.

12. Апарцин А.С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 28–41.
13. Апарцин А.С., Спиряев В.А. Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра // Оптимизация, управление, интеллект. 2006. № 2(10). С. 109–117.
14. Апраушева Н.Н., Конаков В.Д. Использование непараметрических оценок в регрессионном анализе // Заводск. лаб. 1973. № 5. С. 556–569.
15. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ: подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.
16. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 768 с.
17. Бессонов А.А., Загашвили Ю.В., Маркелов А.С. Методы и средства идентификации динамических объектов. Л.: Энергоатомиздат, 1989. 280 с.
18. Болквадзе Г.Р. Класс моделей Гаммерштейна в задачах идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 42–55.
19. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 112 с.
20. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Вып. 1. М.: Мир, 1974. 406 с.
21. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984. 472 с.
22. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984. 472 с.
23. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 448 с.
24. Васильев В.А., Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука, 2004. 508 с.
25. Васильев Е.М., Прокофьева Д.М. Нечеткое управление структурно неустойчивыми объектами // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Вып. № 10-1. Т. 8. С. 8–12.

26. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
27. Воронков В.С. Оптимальное насыщаемое управление неустойчивым объектом // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: материалы международной конференции. Минск, 2013. С. 93–96.
28. Воронов А.А. Основы теории автоматического регулирования и управления: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1977. 519 с.
29. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 с.
30. Воскобойников В.Г., Кудрин В.А., Якушев А.М. Общая металлургия. М.: Металлургия, 1998. 768 с.
31. Вятченников Д.Н., Кособуцкий В.В., Носенко А.А., Плотникова Н.В. Идентификация нелинейных динамических объектов во временной области // Вестник ЮУрГУ. 2006. № 14. С. 66–70.
32. Гаусс К.Ф.. Избранные геодезические сочинения / под общ. ред. С.Г. Судакова. М.: Изд-во геодезической литературы, 1957. 152 с.
33. Глушков В.М., Амосов Н.М., Артеменко И.А. Энциклопедия кибернетики. Киев, 1974. Т. 2. 543 с.
34. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 446 с.
35. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979.
36. Губарев В.В., Третьяков В.А. Модели объектов типа Гаммерштейна-Винера и имитационный метод оценивания их адекватности // Мягкие вычисления и измерения. СПб.: Изд.-во СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 2000. Т. 1. С. 151–153.
37. Губарев В.В., Третьяков В.А. Идентификация нелинейных систем типа Гаммерштейна-Винера с использованием характеристик, инвариантных и взаимно однозначных монотонным безынерционным функциональным преобразованиям случайных сигналов. Computer Data Analysis and Modeling. Proceedings of the Fifth International Conference. (Компьютерный анализ дан-



- ных и моделирование): сборник научных статей V Международной конференции. Минск: БГУ, 1998. Ч. 3. С. 104–109.
38. Гусаров В.М. Статистика. М.: ЮНИТИ, 2003. 463 с.
  39. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. М.: Мир, 1988. 408 с.
  40. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979. 240 с.
  41. Диалоговая система оптимизации и принятия решений для управления производственным комплексом с непрерывным характером технологического процесса / Волков В.И., Казаков Б.В., Медведев А.В. // Препринт ВЦ СО АН РАН СССР. 1985. № 14. Красноярск. 33 с.
  42. Дисперсионная идентификация / под ред. Н.С. Райбмана. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат лит-ры, 1981. 336 с.
  43. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, Физматлит, 1997. 336 с.
  44. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / пер. с англ. Б. И. Копылова. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
  45. Живоглядов В.П., Медведев А.В. Непараметрические алгоритмы адаптации. Фрунзе: Илим, 1974. 133 с.
  46. Живоглядов В.П. Об оптимальном дуальном управлении объектами с чистым запаздыванием // Автомат. и телемех. 1964. № 25:1. С. 54–66.
  47. Заварин А.Н. Использование априорной информации в непараметрических оценках функции регрессии // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 79–85.
  48. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999. 264 с.
  49. Заде Л., Чезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970. 589 с.
  50. Зенков С.М., Карцев Н.М., Митришкин Ю.В. Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке Т-15. I // Автомат. и телемеханика. 2014. № 2. С. 129–145.
  51. Иванилов А.А., Чайка С.Н. Непараметрические алгоритмы идентификации динамических систем // Препринт ВЦ СО АН СССР. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1979. 135 с.

52. Иванов А.И. Быстрая идентификация нелинейных динамических объектов: учебное пособие. Пенза, 1996. 229 с.: 46 ил.
53. Иванов А.И. Синтез нелинейных динамических моделей Винера-Гаммерштейна перераспределением памяти между входом и выходом // Автоматика и телемеханика. 1997. № 11. С. 21–32.
54. Ивахненко А.Г., Мюллер И.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев: Техника, 1984. 350 с.
55. Гельднер К., Кубик С. Нелинейные системы управления: пер. с нем. М.: Мир, 1987. 368 с.
56. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами. Успехи математических наук. М.: Наука, 1985. 244 с.
57. Каминскас В.А., Яницкене Д.Ю., Идентифицируемость нелинейных объектов класса Гаммерштейна // Автомат. и телемех. 1985. Вып. 9. С. 69–77.
58. Каминскас В.А. Идентификация динамических систем по дискретным измерениям. Вильнюс: Мокслас, 1982. Ч. 1. 372 с.
59. Карабутов Н.Н. Наблюдаемые информационные портреты и задача структурной идентификации // Труды VI Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '07. Москва, 29 января – 1 февраля 2007 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2007. С. 89–115.
60. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. М.: Наука, 1985. 336 с.
61. Кацюба О.А. Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности: монография. Самара: СамГУПС, 2008.
62. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным: пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 384 с.
63. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во МГУ, 1983. 328 с.
64. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Инфра-М, 1977. 302 с.

65. Колмогоров А.Н. К обоснованию метода наименьших квадратов // УМН. 1946. № 1:1(11). С. 57–70.
66. Коплярова Н.В., Медведев А.В. Непараметрические алгоритмы управления системами класса Гаммерштейна // Вестник СибГАУ им. М.Ф. Решетнёва. 2015. № 1. С. 62–73.
67. Коплярова Н.В. О непараметрической идентификации стохастических объектов класса Винера. Системы автоматизации в образовании, науке и производстве // Труды IX Всероссийской научно-практической конференции / под ред. С.М. Кулакова, Л.П. Мышляева. Новокузнецк: Изд. центр СибГИУ, 2013. С. 445–451.
68. Кошкин Г.М., Пивен И.Г. Непараметрическая идентификация стохастических объектов. Хабаровск: РАН Дальневосточное отделение, 2009. 336 с.
69. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М.: Наука, 1967. 397 с.
70. Кунцевич В.М. Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. № 4. С. 178–186.
71. Кучмасов А.В. Определение характеристик стохастических объектов по наблюдениям входного и выходного процессов // Математические модели и методы оптимизации. Решетневские чтения: материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов. Красноярск, 1998.
72. Ловчаков В.И., Сапожников М.Н. Синтез квазиоптимальных по быстродействию систем управления высокого порядка // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. Вып. 2. С. 136–147.
73. Льюнг Л. Идентификация систем. М.: Наука, 1991. 423 с.
74. Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1949. 432 с.
75. Медведев А.В. Адаптация и обучение в условиях непараметрической неопределенности // Фундаментальные исследования (физико-математические и технические науки). Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977. С. 92–97.

76. Медведев А.В. Непараметрические системы адаптации // Новосибирск: Наука, 1983. 173 с.
77. Медведев А.В. Теория непараметрических систем. Общий подход // Вестник СибГУ им. М.Ф. Решетнёва. 2008. № 3 (20). С. 134–146.
78. Медведев А.В. Теория непараметрических систем. Моделирование // Вестник СибГАУ. 2010. № 4 (30). С. 4–9.
79. Медведев А.В. Теория непараметрических систем. Процессы // Вестник СибГАУ. 2010. № 3 (29). С. 4–9.
80. Медведев А.В. О теории непараметрических систем управления // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 1 (22). С. 6–19.
81. Медведев А.В. Теория непараметрических систем. Управление I // Вестник Сибирского государственного университета им. акад. М.Ф. Решетнёва. 2013. № 2 (48). С. 57–63.
82. Медведев А.В. Теория непараметрических систем. Управление II // Вестник Сибирского государственного университета имени академика М.Ф. Решетнёва. 2013. № 3 (49). С. 85–90.
83. Медведев А.В. Основы теории адаптивных систем. Красноярск: Изд-во СибГАУ, 2015. 525 с.
84. Мелентьев Л.А. Системные исследования в энергетике. М.: Наука, 1979. 312 с.
85. Методы классической и современной теории автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. Т 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем управления. 656 с.
86. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005. 336 с.
87. Моркун Н.В. Пространственно-временная декомпозиция нелинейных динамических структур с распределенными параметрами на основе иерархического метода главных компонент I-NPCA // Вісник Криворізького національного університету. Збірник наукових праць. 2012. Випуск 33. С. 58–61.
88. Надарая Э.А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси, 1983. 194 с.

89. Нечаев Е.В., Лубнин А.Ф. Механические топки. Л.: Энергия, 1968. 311 с.
90. Новиков Н.Ф., Рукосуев Ю.А. Об адаптивных алгоритмах управления качеством // Адаптивные системы и их приложения. Новосибирск: Наука, 1978. С. 158–163.
91. Нормативный метод. Тепловой расчет котельных агрегатов. Л.: Энергия, 1973.
92. Основы автоматического регулирования и управления: учебн. пособие для неэлектротехн. специальностей вузов / под ред. Пономарева В.М. и Литвинова А.П. М.: Высшая школа, 1974. 439 с.
93. Павленко В.Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерра на основе данных измерений импульсных откликов // Электронное моделирование. 2010. Т. 32, № 3. С. 3–18.
94. Пащенко А.Ф. Моделирование нелинейных систем Винера-Гаммерштейна // Seventh International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2009). Ереван, 2009. С. 507–509.[линеаризация]
95. Пащенко А.Ф., Пащенко Е.Ф. Идентификация нелинейных систем в классе блочно-ориентированных моделей // Информатика и системы управления. 2010. № 4 (26). С. 149–160. [линеаризация]
96. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Основы системного анализа. Томск: НТЛ, 1997. 396 с.
97. Пирумов У.Г. Численные методы. М.: МАИ, 1998. 188 с.
98. Понтрягин А.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 391 с.
99. Попков Ю.С., Киселев О.Н., Петров Н.П. и др. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. Л.: Энергия, 1976. 404 с.
100. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.
101. Пухов Г.Е., Жук К.Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. Киев: Наукова думка, 1966. 218 с.

102. Райбман Н.С. Что такое идентификация? М.: Наука, 1970. 118 с.
103. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. М.: Сов. радио, 1966. 159 с.
104. Растригин Л.А. Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981. 375 с.
105. Рао Драйпер П., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Статистика, 1973. 178 с.
106. Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами. М.: Энергия, 1989. 308 с.
107. Рубан А.И. Методы анализа данных: учебное пособие. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 319 с.
108. Рыжкин В.Я. Тепловые электрические станции. М.: Энергия, 1967. 400 с.
109. Север Д. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 234 с.
110. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
111. Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Идентификация объектов управления: учебн. пособие. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. 211 с. (обзор)
112. Сидоров Д.Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения // Сиб. журн. индустр. матем. 2000. Т. 3, № 1. С. 182–194.
113. Симахин В.А. Непараметрическая статистика: учебное пособие. Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2004. Ч. 1: Теория оценок. 216 с.
114. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 492 с.
115. Соколов В.С., Деев Л.В. Устройство и обслуживание энергетического блока. М.: Высш. шк., 1985. 279 с.
116. Срагович В.Г. Адаптивное управление. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 384 с.
117. Стрижов В.В., Крымова Е.А. Методы выбора регрессионных моделей. М.: ВЦ РАН, 2010. 60 с.

118. Таран А.Н., Таран В.Н. Использование сплайновых рядов Вольтерра-Винера при анализе нелинейных электрических цепей // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59, № 7. С. 702–710.
119. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1976. 292 с.
120. Туркенич Д.И. Управление плавкой стали в конверторе. М.: Металлургия, 1972. 360 с.
121. Теория автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1977. Ч. 2: Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. 288 с.
122. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления / ред. Солодовников В.В. М.: Машиностроение, 1969. Кн. 3, ч. 2: Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования.
123. Тимонин Д.В., Кацюба О.А., Карпов А.А. Идентификация параметров нелинейных динамических систем класса Гаммерштейна при наличии помех, наблюдаемых в выходных сигналах в условиях априорной неопределенности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2011. № 2 (18).
124. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 176 с.
125. Тюкин В.Н. Теория управления: конспект лекций. Вологда: ВоГТУ, 2000. Ч. 1: Обыкновенные линейные системы управления. 200 с.
126. Управление сталеплавильными агрегатами на основе современных физико-химических представлений / А.Г. Пономаренко, П.И. Окоукони, С.А. Храпко, Е.Н. Иноземцева // Труды 4-го конгресса сталеплавильщиков. 1997. С. 35–40.
127. Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 45–64.
128. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.

129. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 448 с.
130. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1992. 292 с.
131. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. М.: Мир, 1993. 349 с.
132. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400 с.
133. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. 252 с.
134. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. М.: Наука. Физматлит, 1995. 336 с.
135. Чайка С.Н. К идентификации динамических систем при частично параметризованной структуре модели // Динамика систем: управление и оптимизация. Горький: Изд-во Горьковского гос. ун-та, 1989.
136. Чайка С.Н. Непараметрические алгоритмы идентификации нелинейных динамических систем: дис. ... канд. техн. наук. Красноярск, 1988. 191 с.
137. Чернышев К.Р. Унифицированный подход к статистической линеаризации на основе состоятельных мер зависимости // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва. С. 3004–3017. (линеар)
138. Шуленин В.П. Математическая статистика: учебник. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1: Параметрическая статистика. 540 с.
139. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
140. Юдович Е.И. Управление неустойчивыми объектами на примере привода вертикальных рулей самолета // Молодежный научно-технический вестник. 2012.
141. Eddy W.F. Optimumkernelestimatorsofthemode // Ann. Math. Statist, 1980. V. 8. P. 870–882.
142. Efroimovich S.Yu. Nonparametric curve estimation. Methods, theory and application. Berlin, New-York: Springer-Verlag, 1999. 134 p.



143. Greblicki Wlodzimierz, Pawlak Mirosław. Nonparametric System Identification, | Cambridge University Press | 2011-06-03 | 400 pages | English
144. Greblicki W. Nonparametric approach to Wiener system identification. — IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, Vol.44, pp.538– 545. (1997)
145. Gasser T. Kernel estimation of regression function. T. Gasser, H.G. Muller // Lect. Notes Math. 1979. V.757. p. 23-68.
146. Fabrit S. Kadiramanathant V. Dual Adaptive Control of Non-linear Stochastic Systems using Neural Networks”, Automatica, 1998. Vol. 34, No. 2, p. 245-253
147. Filatov, N.M., Keuchel, U., Unbehauen, H. Dual control for an unstable mechanical plant. Control Systems, IEEE. 1996. Volume:16. Issue: 4. pp. 31 37.
148. Kalafatis, A., Arifin, N., Wang, L., Cluett, W.R. A new approach to the identification of pH processes based on the Wiener model. Chemical Engineering Science Volume 50, Issue 23, 1995, Pages 3693–3701.
149. Kalman, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering. 1998. 82 (1).p. 35—45
150. Keesman, Karel J. System identification. An introduction / Karel J. Keesman. London: Springer, 2011. 351 p.
151. Ku, Y.H., Wolf, A.A. Volterra-Wiener Functionals for the analysis of Nonlinear Systems. J. Franklin Inst. v. 281, n.1, 1966.
152. Lakshminarayanan, S; Shah, L Sirish; Nandakumar, K. Modeling and control of multivariable processes: Dynamic PLS approach American Institute of Chemical Engineers. AIChE Journal; Sep 1997; 43, 9; Research Library, pg. 2307.
153. Lia Duan, QianbFucai, FucPeilin. Optimal nominal dual control for discrete-time linear-quadratic Gaussian problems with unknown parameters. Automatica Volume 44, Issue 1, January 2008, p. 119–127
154. Medvedeva N.A. Nonparametrical Estimation of Statistical Characteristics in Problem of Modelling / N.A. Medvedeva // Proceedings of the International Conference «Computer Data Analysis and Modeling». Minsk: BSU, 1995. p.89 93.

155. Mzyk, Grzegorz. Combined Parametric-Nonparametric Identification of Block-Oriented Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer International Publishing Springer International Publishing, Switzerland , Number of Pages XVI, 238, 2014
156. Nemirovski A. Topics in non-parametric statistics / A. Nemirovski // Lectures on probability theory and statistics, in Ecole de Saint-Flour 1988. Lecture Notes in Math. 2000. P.85-277.
157. Parent, R.B. Nonlinear differential equations and analytic system theory. SAIM, J.Appl.Math. vol. 18, January 1970.
158. Parzen, E. On Estimation of a Probability Density, Function and Mode // IEEE Transactions on Information Theory, vol. Pami-4, №6, 1982.- p. 663-666.
159. Pintelon, Rik, Schoukens, Johan System Identification: A Frequency Domain Approach Publisher: Wiley-IEEE Press; 2 edition (March 19, 2012) Language: English Pages: 788
160. Pracasa Rao B.L.S. Nonparametric function estimation / B.L.S. Pracasa Rao. Orlando: Academic Press, 1983. 523 p.
161. Rosenblatt, M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Ann. Math. Statist. 1956. V.27, № 3. Pp. 832-835.
162. Schoukens,J., Vandersteen,G., Barbe,K., Pintelon,R. Nonparametric preprocessing in system identification: European Journal of Control, 15, 260–274. 2009.
163. Schetzen M. The Volterra and Wiener theory of nonlinear systems. – New York: John Wiley, 1980. – 527 p. (рядВольтерравинера)
164. Su, S., Huang, S. , Wang, L. , Celler, B. , Savkin, A., Guo, Y., and Cheng, T., Nonparametric Hammerstein Model Based Model Predictive Control for Heart Rate Regulation, in IEEE EMBS, Lyon, France, 2007.
165. Sung, S.W., Lee, J. Modeling and control of Wiener-type processes/ Chemical Engineering Science 59 (2004) 1515 1521
166. Soderstrom T. On model structure testing in system identification.— Int. J. Control, 1977, v. 26, № 1, p. 1-18.
167. Tse, E. Bar-Shalom, Y. An actively adaptive control for linear systems with random parameters via the dual control approach. Automatic Control Volume:18 Issue:2. P. 8-18

168. Unbehauen H., Gohring B. Tests for determining model order in parameter estimation. *Automatica*, 1974, v. 10, p. 233-244.
169. Van den Boom A . J. W., van der Endenden A . W. M. The determination of the orders of process and noise dynamics. *Automatica*, 1974, v. 10, p. 245-256.
170. Volterra, V. *Theory of Functionals and Integral and Integro-Differential Equations*. Dover Publications. New York, 1959.
171. Wenk, C.J. Bar-Shalom, Y. A multiple model adaptive dual control algorithm for stochastic systems with unknown parameters. *Automatic Control*. Volume:25 Issue:4. P 56-64
172. Wittenmark, B. (1995): "Adaptive dual control methods: An overview." In 5th IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Budapest, Hungary. [Survey article]p. 67–72.
173. Woodside C. H. Estimation of the order of linear systems. *Automatica*. 1971. №7, p. 727-733
174. Xu, Jian-Xin; Tan, Ying. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN: 3-540-40173-3, 2003.

*Научное издание*

Коллектив авторов

ТЕОРИЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ  
ПРОМЫШЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Монография

Редактор *Ж.В. Козуница*  
Корректор *А.П. Малахова*  
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.  
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,  
т. 217-17-52, 217-17-82

Подписано в печать 01.10.20. Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 17,0. Бумага офсетная.  
Тираж 150 экз. Заказ № 10-РИО-003

Отпечатано в типографии ИП Азарова Н.Н.,  
т. 295-03-40