В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2022, том 86, выпуск 5, 43–72

DOI: https://doi.org/10.4213/im9197

УДК 517.9+513.8

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич

О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях

Решается проблема топологической классификации градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, заданных на четырехмерном проективно-подобном многообразии. Показывается, что полным топологическим инвариантом в этом классе является двуцветный граф потока, описывающий взаимное расположение замыканий трехмерных инвариантных многообразий седловых состояний равновесия потока. Решена проблема построения канонического представителя в каждом классе топологической эквивалентности.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: градиентно-подобные потоки, топологическая классификация, проективно-подобные многообразия, функция Морса с тремя критическими точками, комплексная проективная плоскость.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9197

§ 1. Введение

Поток f^t, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности $n \geqslant 1$, называется потоком *Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*. Согласно [1], [2] для любого градиентно-подобного потока существует энергетическая функция – функция Морса, строго убывающая вдоль неособых траекторий потока. Множество критических точек энергетической функции совпадает с множеством состояний равновесия соответствующего градиентно-подобного потока, при этом локальным минимумам (максимумам) соответствуют стоковые (источниковые) состояния равновесия, седловым критическим точкам – седловые состояния равновесия, размерность

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01041), кроме доказательства теоремы 2, которое выполнено при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ и гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

неустойчивого многообразия которых совпадает с индексом критической точки[1]. Напомним, что число $\mathrm{ind}(p)$, равное размерности неустойчивого многообразия гиперболического состояния равновесия p, называется его *индексом Морса*.

Так как функция Морса на компактном многообразии имеет, по крайней мере, один локальный максимум и один локальный минимум, то для любого градиентно-подобного потока f^t множество Ω_{f^t} содержит, по крайней мере, два состояния равновесия: источник и сток. Если множество Ω_{f^t} исчерпывается этими двумя точками, то нетрудно доказать, что несущее многообразие M^n является сферой, и все такие потоки топологически эквивалентны (см., например, [3, теорема 2.2.1], где проведено доказательство аналогичного факта для градиентно-подобных каскадов, которое легко адаптируется на случай потоков).

Примеры функций Морса, имеющих ровно три критические точки (источник, сток и седло) построены в [4, § 19.3] и в [5, § 2]. Из результатов, описываемых ниже, следует, что вещественная и комплексная проективные плоскости являются единственными (с точностью до гомеоморфизма) многообразиями размерности 2 и 4 соответственно, допускающими функцию Морса с тремя критическими точками. Как следствие, эти многообразия являются единственными многообразиями размерности 2 и 4, допускающими градиентно-подобные потоки с тремя состояниями равновесия. Все такие потоки оказываются топологически эквивалентными, что неверно для аналогичных потоков на многообразиях большей размерности. Эти результаты являются мотивацией для получения топологической классификации градиентно-подобных потоков с произвольным неблуждающим множеством на комплексной проективной плоскости.

Общий подход к топологической классификации градиентно-подобных потоков базируется на теоремах Пуанкаре–Бендиксона и Смейла, устанавливающих возможность выделения конечного числа инвариантных многообразий, разбивающих фазовое пространство на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий. Представляется естественным, что взаимное расположение таких инвариантных многообразий подлежит описанию на комбинаторном языке, и изоморфизм комбинаторных инвариантов является необходимым условием топологической эквивалентности двух потоков. Как показывают работы Е. А. Леонтович, А. Г. Майера, М. М. Пейшото, А. А. Ошемкова, В. В. Шарко, Г. Флейтас, С. Ю. Пилюгина, Я. Л. Уманского, для содержательных классов градиентно-подобных потоков на многообразиях изоморфизм комбинаторных инвариантов является не только необходимым, но и достаточным условием топологической эквивалентности.

Следует подчеркнуть, что все известные содержательные классификационные результаты для потоков выполнены в предположении, что размерность устойчивого или неустойчивого многообразия любого седлового состояния равновесия имеет размерность 1. В этом случае наличие энергетической функции гарантирует ручную вложенность замыканий инвариантных многообразий, не участвующих в гетероклинических пересечениях (см. предложение 4).

[1] Согласно лемме Морса функция Морса φ в окрестности своей критической точки p записывается в некоторых локальных координатах в виде $\varphi = \varphi(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$. Число k называется *индексом* критической точки p.

Однако, когда размерность n несущего многообразия равна четырем или выше, а множество седловых состояний равновесия содержит точки, инвариантные многообразия которых имеют коразмерность 2, замыкания этих инвариантных многообразий могут быть дико вложенными, что приводит к принципиальной невозможности описать классы топологической эквивалентности таких систем на комбинаторном языке. Подобный эффект был ранее обнаружен для каскадов Морса–Смейла на трехмерных многообразиях в работах [6], [7], что привело к введению новых топологических инвариантов и, далее, к получению полной топологической классификации таких каскадов на ориентируемых 3-многообразиях в работах [7], [8].

Мы показываем в лемме 1, что неблуждающее множество любого градиентно-подобного потока без гетероклинических пересечений на комплексной проективной плоскости содержит седло с индексом Морса, равным двум, более того, замыкания его инвариантных многообразий являются локально плоскими сферами. Благодаря этому в настоящей работе удается получить топологическую классификацию таких потоков с помощью комбинаторных инвариантов.

Топология многообразий, допускающих функцию Морса ровно с тремя критическими точками, изучалась Дж. Илсом и Н. Квипером в [5]. В частности, в этой работе доказаны следующие свойства таких многообразий и функций Морса.

Утверждение 1. *Пусть M^n – связное замкнутое многообразие размерности n, допускающее функцию Морса $\varphi\colon M^n\to\mathbb{R}$ ровно с тремя критическими точками. Тогда*

1) $n\subset\{2,4,8,16\}$;

2) *критические точки функции φ имеют индексы* 0, $n/2$, n;

3) *M^n является объединением непересекающихся открытого n-мерного шара и сферы размерности* $n/2$;

4) *M^2 диффеоморфно проективной плоскости*;

5) *в случае $n\geqslant 4$ многообразие M^n односвязно и ориентируемо, при этом M^4 имеет гомотопический тип комплексной проективной плоскости. При $n=8$ (16) существует шесть (шестьдесят) гомотопических типов таких многообразий.*

Многообразия, допускающие функцию Морса ровно с тремя критическими точками, получили название многообразий *Илса–Квипера.*

В работах Е. В. Жужомы и В. С. Медведева [9], [10] показано, что при $n=4$ все градиентно-подобные потоки, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех точек, топологически эквивалентны. Отсюда следует, что при $n=4$ все многообразия Илса–Квипера гомеоморфны комплексной проективной плоскости. Более того, из работ [9], [10] следует, что топология многообразий Уилса–Квипера может быть уточнена следующим образом.

Определение 1. Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если выполняются следующие условия:

1) $n\subset\{2,4,8,16\}$;

2) M^n является объединением непересекающихся открытого n-мерного шара и локально плоско вложенной сферы[2] размерности $n/2$.

В [10, теорема 1] доказано, что многообразие M^n допускает градиентно-подобный поток f^t, неблуждающее множество которого состоит ровно из трех точек, тогда и только тогда, когда M^n является проективно-подобным. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Многообразие M^n является многообразием Уилса–Квипера тогда и только тогда, когда оно является проективно-подобным.*

Действительно, если M^n – проективно-подобное, то на нем существует градиентно-подобный поток f^t, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия. Из [1], [2] следует, что для потока f^t существует энергетическая функция – функция Морса, множество критических точек которой совпадает с множеством состояний равновесия потока f^t. Таким образом, многообразие M^n является многообразием Илса–Квипера. С другой стороны, если многообразие M^n является многообразием Илса–Квипера, то оно допускает функцию Морса ровно с тремя критическими точками. Градиентный поток этой функции Морса является градиентно-подобным, следовательно, в силу [10, теорема 1] многообразие M^n является проективно-подобным.

Обозначим через $G(M^4)$ класс градиентно-подобных потоков на комплексной проективной плоскости M^4, не имеющих гетероклинических пересечений инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков из $G(M^4)$ и описывается алгоритм реализации всех классов топологической эквивалентности.

Обозначим через $\Omega^i_{f^t}$ множество состояний равновесия потока $f^t \in G(M^4)$ индекса $i \in \{0,1,2,3,4\}$.

Следующее утверждение, доказанное ниже в § 4, позволяет свести проблему топологической классификации рассматриваемых потоков к комбинаторной задаче.

Лемма 1. *Пусть $f^t \in G(M^4)$. Тогда*

1) *если $p \in \Omega^1_{f^t}$ $(p \in \Omega^3_{f^t})$, то замыкание $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ $(\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_p)$ устойчивого (неустойчивого) многообразия W^{s}_p (W^{u}_p) точки p является локально плоской сферой размерности 3, которая делит многообразие M^4 на две компоненты связности;*

2) *множество $\Omega^2_{f^t}$ состоит в точности из одного состояния равновесия, замыкания инвариантных многообразий которого являются локально плоскими двумерными сферами.*

[2]Топологическое многообразие $N \subset M^n$ размерности $k < n$ называется *локально плоским в точке* $x \in N$, если существует окрестность $U_x \subset M^n$ и гомеоморфизм $\psi_x\colon U_x \to \mathbb{R}^n$ такие, что множество $\psi_x(N \cap U_x)$ является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности k. Многообразие N, локально плоское в каждой своей точке, называется *локально плоским или локально плоско вложенным.* Если существует точка $x \subset N$, в которой многообразие N не является локально плоским, то точка x называется *точкой дикости.*

Классы топологической эквивалентности потоков из $G(M^4)$ будем различать с помощью *двуцветного графа*, который вводится ниже по аналогии с работой [11].

Обозначим через $\mathcal{L}_{f^t}$ множество всех сфер $\{\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{s}}_p,\, p\in\Omega^1_{f^t}\}$ и $\{\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{u}}_q,\, q\in\Omega^3_{f^t}\}$, а через k_{f^t} – число этих сфер. Так как в силу леммы 1 каждая трехмерная сфера из множества $\mathcal{L}_{f^t}$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности, то множество $M^4\setminus\bigl(\bigcup_{p\in\Omega^1_{f^t}}\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{s}}_p\cup\bigcup_{q\in\Omega^{n-1}_{f^t}}\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{u}}_q\bigr)$ состоит из $m_{f^t}=k_{f^t}+1$ компонент связности $D_1,\dots,D_{m_{f^t}}$. Обозначим через $\mathcal{D}_{f^t}$ множество всех этих компонент.

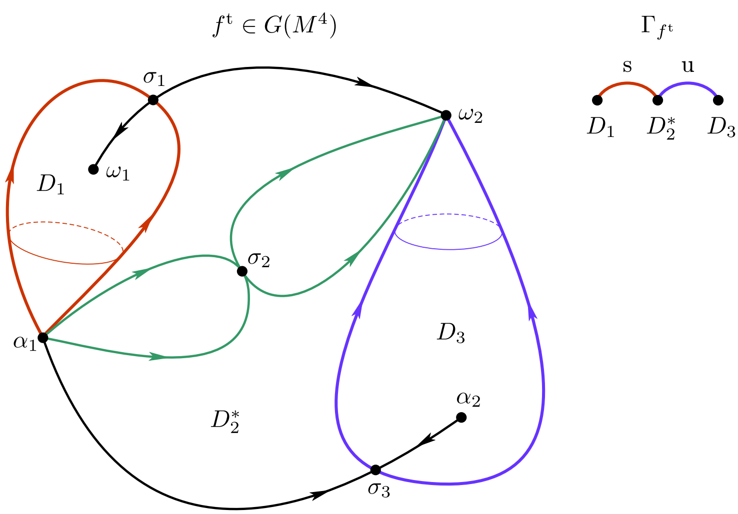

Рис. 1. Фазовый портрет потока $f^t\in G(M^4)$ и его двуцветный граф Γ_{f^t}

Определение 2. *Двуцветным графом* потока $f^t\in G(M^4)$ назовем граф Γ_{f^t} со следующими свойствами (рис. 1):

1) множество $V(\Gamma_{f^t})$ вершин графа Γ_{f^t} находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{D}_{f^t}$, множество $E(\Gamma_{f^t})$ ребер графа Γ_{f^t} находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{L}_{f^t}$;

2) вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую границу;

3) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u), если оно соответствует многообразию $\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{s}}_p\in\mathcal{L}_{f^t}$ $(\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{u}}_q\in\mathcal{L}_{f^t})$;

4) граф Γ_{f^t} имеет одну отмеченную вершину v_*, соответствующую области $D_*\subset\mathcal{D}_{f^t}$, содержащей седловое состояние равновесия, индекс Морса которого равен 2.

Определение 3. Графы $\Gamma_{f^t},\Gamma_{g^t}$ потоков $f^t,g^t\in G(M^4)$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\xi\colon\Gamma_{f^t}\to\Gamma_{g^t}$, сохраняющий цвета ребер и отмеченную вершину.

Напомним, что *деревом* называется связный граф, для любой пары вершин которого существует единственный путь из ребер и вершин, соединяющий эти вершины.

В § 6 доказывается, что для любого потока $f^t \in G(M^4)$ его двуцветный граф является деревом.

Основные результаты этой работы заключаются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Потоки $f^t, g^t \in G(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их двуцветные графы Γ_{f^t}, Γ_{g^t} изоморфны.*

Теорема 2. *Для любого дерева Γ с отмеченной вершиной $v_* \in V(\Gamma)$, ребра которого произвольным образом раскрашены в два цвета, существует поток $f^t \in G(M^4)$, граф Γ_{f^t} которого изоморфен графу Γ.*

§ 2. Вспомогательные факты топологии

В этом параграфе собраны вспомогательные топологические факты, использующиеся в статье.

2.1. Гомотопические группы несущего многообразия. Уточним свойства комплексной проективной плоскости следующим образом.

Предложение 1. *Пусть M^4 – комплексная проективная плоскость. Тогда гомотопические группы $\pi_1(M^4)$, $\pi_3(M^4)$, $\pi_4(M^4)$ тривиальны, группы $\pi_2(\mathbb{M}^4)$, $\pi_5(\mathbb{M}^4)$ изоморфны $\mathbb{Z}$.*

Предварительно приведем все необходимые для доказательства определения и факты.

Пусть X, Y – топологические пространства. Непрерывные отображения $h, g\colon X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $H|_{X\times\{0\}} = h, H|_{X\times\{1\}} = g$. Гомотопию $H\colon X \times [0,1] \to Y$ часто представляют как семейство отображений $h_t\colon X \to Y$ таких, что $H(x,t) = h_t(x)$, $x \in X$, $t \in [0,1]$.

Пусть $I^i \subset \mathbb{R}^i$, $i \geqslant 1$, – единичный куб, ∂I^i – его граница, и $f\colon I^i \to X$ – такое непрерывное отображение, что $f(\partial I^i) = x_0$, где $x_0 \in X$ – некоторая точка в пространстве X. Обозначим через $[f]$ класс отображений, гомотопных f таких, что каждое отображение и гомотопия отображает ∂I^i в точку x_0. Множество классов $[f]$, $[g]$ с операцией умножения:

$$[f] * [g] = [f * g] = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_i), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_i), & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

называется *i-мерной гомотопической группой* и обозначается $\pi_i(X, x_0)$. Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой*.

Следующее утверждение можно найти, например, в [12, гл. 5, § 1, разд. 2, п. 7].

Расслоением называется тройка (E,p,B), где E – топологическое пространство, называемое пространством расслоения (а также тотальным или расслоенным пространством), B – другое пространство, называемое базой расслоения, $p\colon E\to B$ – непрерывное сюръективное отображение (проекция расслоения). Часто расслоением называют само отображение p. Для каждого элемента $b\in B$ определяется слой над этим элементом как подмножество $F_b\subset E$ всех прообразов элемента b.

Расслоение (E,p,B) называется *локально тривиальным*, если для любой точки $b\in B$ существует окрестность $U_b\subset B$ и гомеоморфизм $\varphi\colon p^{-1}(U_b)\to U_b\times F_b$ такие, что $p|_{p^{-1}(U_b)}=\mathrm{proj}_1\,\varphi|_{p^{-1}(U_b)}$, где $\mathrm{proj}_1\colon U_b\times F_b\to U_b$ – проекция, определяемая формулой $\mathrm{proj}_1(x,y)=x$, $x\in U_b$, $y\in F_b$.

Пусть (E,p,B) – локально тривиальное расслоение со слоем F и связной базой. Выберем отмеченную точку $b_0\in B$. Отображение $p\colon X\to B$ индуцирует гомоморфизм $p_*\colon\pi_i(E,e_0)\to\pi_i(B,b_o)$, где $e_0\in F_{b_0}$. Включение $i\colon F_b\to E$ индуцирует гомоморфизм $i_*\colon\pi_i(F_b,e_0)\to\pi_i(E,e_0)$. Для $i\geqslant1$ определим отображение $\partial_*\colon\pi_i(B,b_0)\to\pi_{i-1}(F_b,e_0)$, являющееся гомоморфизмом при $i\geqslant2$, следующим образом (см. [4, гл. 4, п. 14.3]). Отображение $f\colon(I^i,\partial I^i)\to(B,b_0)$ можно представить как гомотопию, соединяющую постоянные отображения $\varphi_0,\varphi_1\colon\partial I^i\to b_0$. Согласно теореме о накрывающей гомотопии существует гомотопия $\widetilde{\varphi}_t\colon\partial I^i\to E$ такая, что $\widetilde{\varphi}_0(\partial I^i)=e_0$ и $p\widetilde{\varphi}_t=\varphi_t$. Так как $\varphi_1(\partial I^i)=b_0$, то $\widehat{\varphi}_1(\partial I^i)\subset F_{b_0}$. Отметим, что множество ∂I^i гомеоморфно кубу I^{i-1} со стянутой в точку границей ∂I^{i-1}. Тогда в качестве образа ∂_*f отображения f возьмем гомотопический класс отображения $\widehat{\varphi}_1\colon(I^{i-1},\partial I^{i-1})\to(F,e_0)$.

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\cdots G_i\xrightarrow{\varphi_i}G_{i-1}\xrightarrow{\varphi_{i-1}}G_{i-2}\cdots$$

называется *точной*, если для любого i образ $\mathrm{Im}_{\varphi_i}=\{\varphi_i(g),\,g\in G_i\}$ гомоморфизма φ_i совпадает с ядром $\mathrm{Ker}_{\varphi_{i-1}}=\{g\in G_{i-1}\colon\varphi_{i-1}(g)=0\}$ гомоморфизма φ_{i-1}.

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [4, теорема 14.3].

Утверждение 3. *Пусть (E,p,B) – локально тривиальное расслоение со слоем F. Тогда следующая последовательность является точной*:

$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}\pi_n(F)\xrightarrow{i*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\xrightarrow{\partial_*}\pi_{n-1}(F)\to\cdots\to\pi_1(F)\xrightarrow{i_*}\pi_1(E)$$
$$\xrightarrow{p_*}\pi_1(B)\xrightarrow{\partial_*}\pi_0(F).$$

Напомним, что сферой S^k размерности $k\geqslant0$ называется многообразие, гомеоморфное стандартной сфере

$$\mathbb{S}^k=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\subset\mathbb{R}^{k+1}\mid x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1\}.$$

Шаром (открытым шаром) B^n размерности $n\geqslant1$ называется многообразие, гомеоморфное стандартному шару (внутренности стандартного шара)

$$\mathbb{B}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\subset\mathbb{R}^n\mid x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant1\}.$$

Множество $\mathbb{C}P^2$ всех классов эквивалентности $[a,b,c]$ упорядоченных троек комплексных чисел $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\setminus(0,0,0)$ относительно отношения эквивалентности $(a,b,c)\sim(a',b',c')$, если $(a,b,c)=(\lambda a',\lambda b',\lambda c')$ для некоторого ненулевого комплексного числа λ, называется *канонической комплексной плоскостью.*

Представим единичную пятимерную сферу как подмножество $S^5=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3 \mid |a|^2+|b|^2+|c|^2=1\}$ пространства $\mathbb{C}^3$ и отождествим точки сферы по отношению эквивалентности $(a,b,c)\sim(\lambda a',\lambda b',\lambda c')$, $|\lambda|=1$. Факторпространство $S^5/_\sim$ по этому отношению эквивалентности гомеоморфно комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$. Согласно [4, гл. 4, п. 14.3] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Естественная проекция* $p\colon S^5\to\mathbb{C}P^2$ *является локально тривиальным расслоением со слоем, гомеоморфным окружности.*

Воспользуемся точной последовательностью расслоения $p\colon S^5\to\mathbb{C}P^2$ для доказательства для доказательства предложения 1.

Доказательство предложения 1. Рассмотрим следующую подпоследовательность точной последовательности расслоения $p\colon S^5\to\mathbb{C}P^2$:

$$\pi_1(S^5)\xrightarrow{p_*}\pi_1(\mathbb{C}P^2)\xrightarrow{\partial_*}\pi_0(S^1).$$

Так как группа $\pi_0(S^1)$ совпадает с числом компонент связности S^1 и, следовательно, тривиальна, то $\mathrm{Ker}_{\partial_*}=\pi_1(\mathbb{C}P^2)$. Так как последовательность точна, то $\mathrm{Ker}_{\partial_*}=\mathrm{Im}_{p_*}$, следовательно, $\pi_1(\mathbb{C}P^2)=\mathrm{Im}_{p_*}$, и p_* – изоморфизм. Так как $\pi_1(S^5)$ тривиальна, то и $\pi_1(\mathbb{C}P^2)$ тривиальна.

Для доказательства тривиальности групп $\pi_3(\mathbb{C}P^2),\pi_4(\mathbb{C}P^2)$ рассмотрим точные последовательности

$$\pi_3(S^5)\xrightarrow{p_*}\pi_3(\mathbb{C}P^2)\xrightarrow{\partial_*}\pi_2(S^1),$$
$$\pi_4(S^5)\xrightarrow{p_*}\pi_4(\mathbb{C}P^2)\xrightarrow{\partial_*}\pi_3(S^1),$$

и применим аналогичные рассуждения, учитывая, что группы $\pi_i(S^1)$ для $i\geqslant 2$ и $\pi_j(S^5)$ для $0\leqslant j<5$ тривиальны.

Рассмотрим точную последовательность

$$\pi_2(\mathbb{C}P^2)\xrightarrow{\partial_*}\pi_1(S^1)\xrightarrow{p_*}\pi_1(\mathbb{C}P^2).$$

Так как $\pi_1(\mathbb{C}P^2)$ тривиальна, то отображение $\partial_*\colon\pi_2(\mathbb{C}P^2)\to\pi_1(S^1)$ является изоморфизмом. Поскольку $\pi_1(S^1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, то и $\pi_2(\mathbb{C}P^2)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

Аналогично, из точности последовательности

$$\pi_5(S^5)\xrightarrow{p_*}\pi_5(\mathbb{C}P^2)\xrightarrow{\partial_*}\pi_4(S^1)$$

и того факта, что $\pi_5(S^5)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, следует нужный факт для $\pi_5(\mathbb{C}P^2)$. Предложение доказано.

2.2. Хирургия Дэна. *Полноторием* называется многообразие Π, гомеоморфное прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ окружности и двумерного диска. Пусть $x \in \mathbb{S}^1$, $y \in \partial\mathbb{B}^2$ – произвольные точки, $\varphi\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \Pi$ – гомеоморфизм. Кривые

$$m = \varphi(\{x\} \times \partial\mathbb{B}^2), \qquad l = \varphi(\mathbb{S}^1 \times \{y\})$$

будем называть *стандартными меридианом и параллелью* полнотория Π соответственно.

Меридианом и параллелью полнотория Π будем называть кривые μ, λ, принадлежащие граничному тору

$$T = \partial\Pi,$$

и гомотопные кривым m, l соответственно. Так как фундаментальная группа $\pi_1(T)$ тора изоморфна группе $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, то гомотопический класс $[\gamma]$ любой ориентированной замкнутой кривой $\gamma \in T$ определяется парой взаимно простых целых чисел (p,q). Будем полагать, что $[l] = (1,0)$, $[m] = (0,1)$.

В силу [13, гл. 2, E] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть* $\psi\colon \partial\Pi \to \partial\Pi$ *– гомеоморфизм. Гомеоморфизм* $\Psi\colon \Pi \to \Pi$ *такой, что* $\Psi|_{\partial\Pi} = \psi|_{\partial\Pi}$ *существует тогда и только тогда, когда* ψ *сохраняет гомотопический класс меридиана.*

В силу [13, гл. 2, B, C] гомеоморфизм тора $\psi\colon T \to T$ индуцирует гомоморфизм $\psi_*\colon \pi_1(T) \to \pi_1(T)$, однозначно определяемый унимодулярной целочисленной матрицей A_ψ, такой, что если $[\gamma] = (p,q)$, то $[\psi(\gamma)] = (p,q)A_\psi$.

Согласно [13, гл. 2, C, теорема 4] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6. *Гомеоморфизмы* $\psi, \psi'\colon T \to T$ *изотопны тогда и только тогда, когда* $A_\psi = A_{\psi'}$.

Следствие 1. *Гомеоморфизм* $\psi\colon T \to T$ *изотопен тождественному отображению* $\mathrm{id}\colon T \to T$ *тогда и только тогда, когда он сохраняет гомотопические классы параллели и меридиана.*

Доказательство. Пусть

$$A_\psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда $[\psi(1,0)] = (1,0)A_\psi = (a,b)$, $[\psi(0,1)] = (0,1)A_\psi = (c,d)$. Поэтому гомеоморфизм ψ сохраняет гомотопические классы параллели и меридиана в том и только том случае, когда матрица A_ψ является единичной. В силу утверждения 6 это означает, что гомеоморфизм ψ изотопен тождественному отображению. Следствие доказано.

Напомним, что простая замкнутая кривая $\mathcal{C} \subset S^3$ называется *узлом*. Узел $\mathcal{C} \subset S^3$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon S^3 \to \mathbb{S}^3$ такой, что

$$\varphi(\mathcal{C}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0\}.$$

Пусть $\mathcal{C} \subset S^3$ – узел и $\Pi_{\mathcal{C}} \subset S^3$ – его трубчатая окрестность. Хирургией Дэна вдоль узла $\mathcal{C} \subset S^3$ называется операция получения нового многообразия путем склеивания многообразий с краем $S^3 \setminus \operatorname{int}\Pi_{\mathcal{C}}$ и $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ по некоторому гомеоморфизму $\varphi\colon \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2) \to \partial\Pi_{\mathcal{C}}$.

Пусть $m \subset \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)$ – стандартный меридиан и $[\phi(m)] = (p, q)$. Отношение p/q называется *коэффициентом хирургии*. Хирургия, коэффициент которой равен нулю, называется тривиальной. Из утверждения 5 следует, что тривиальная хирургия не меняет топологию многообразия.

В силу [14, теорема 2] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. *Многообразие, полученное нетривиальной хирургией вдоль нетривиального узла, не гомеоморфно сфере.*

2.3. Продолжение локальных гомеоморфизмов. Из [15, гл. 8, теоремы 3.1, 3.2] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8. *Пусть $e_i, e'_i\colon \mathbb{B}^n \to \operatorname{int}\mathbb{B}^n$, $i \in \{1,\dots,k\}$, – такие гладкие вложения, что $e_i(\mathbb{B}^n) \cap e_j(\mathbb{B}^n) = \varnothing$, $e'_i(\mathbb{B}^n) \cap e'_j(\mathbb{B}^n) = \varnothing$ для любых $i, j \in \{1,\dots,k\}$, $i \neq j$.*

Тогда существует гомеоморфизм $h\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ такой, что

1) $h|_{\partial\mathbb{B}^n} = \mathrm{id}$;

2) $he_i = e'_i$, $i \in \{1,\dots,k\}$.

Предложение 2. *Пусть $C \subset \mathbb{S}^3$ – тривиальный узел, $\Pi_0 \subset \mathbb{S}^3$ – его трубчатая окрестность и $e, e'\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \operatorname{int}\Pi_0$ – топологические вложения такие, что $e(\mathbb{S}^1 \times \{x\}) = e'(\mathbb{S}^1 \times \{x\})$, $x \in \partial\mathbb{B}^2$.*

Тогда существует гомеоморфизм $\theta\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ такой, что

1) $\theta|_{\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int}\Pi_0} = \mathrm{id}$;

2) $\theta e = e'$.

Доказательство. Так как e, e' – вложения полноториев, то в силу утверждения 5 гомеоморфизм ${e'}^{-1}e\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ переводит меридиан полнотория $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ в гомотопную ему кривую. Из условия предложения следует, что гомеоморфизм ${e'}^{-1}e$ переводит параллель полнотория $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ в себя. Тогда в силу следствия 1 существует изотопия

$$h_t\colon \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2) \to \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)$$

такая, что

$$h_0 = \mathrm{id}, \qquad h_1 = {e'}^{-1}e.$$

Положим

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)\bigcup_{\varphi}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]),$$

где $\varphi\colon \partial\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ – тождественный гомеоморфизм.

Определим гомеоморфизм $H\colon \mathbf{\Pi} \to \mathbf{\Pi}$, действующий тождественно на множестве $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, а для точек (x,t) из множества $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ равный

$$H(x,t) = (h_t(x), t), \qquad x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad t \in [0,1].$$

Положим $\Pi = e(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $\Pi' = e'(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$. Из [16, теорема 3.3] следует, что многообразия $\Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi$, $\Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi'$ гомеоморфны прямому произведению тора на отрезок. Поэтому на многообразии $\Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi$ определены два слоения $\{T_q\}$, $\{I_p\}$ со слоями, гомеоморфными тору $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ и отрезку $[0,1]$ соответственно, такие, что компоненты связности края многообразия $\Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi$ принадлежат слоению $\{T_q\}$ и каждая пара слоев T_q, I_p пересекается в единственной точке. Будем считать, что слои слоения $\{T_q\}$ параметризованы точками $q \in [0,1]$, а слои слоения $\{I_p\}$ – точками $p \in \partial\Pi = T_0$. Таким образом, каждая точка из множества $\Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi$ определяется двумя координатами (p,q), $p \in \partial\Pi$, $q \in [0,1]$.

Определим вложение $\widetilde{e}\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \Pi_0 \setminus \operatorname{int}\Pi$ формулой

$$\widetilde{e}(x,t) = (e(x)|_{\partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)}, t), \qquad x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Продолжим вложение $e\colon \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \Pi$ до вложения $E\colon \mathbf{\Pi} \to \Pi_0$, положив

$$E(z) = \begin{cases} e(z), & z \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1, \\ \widetilde{e}(z), & z \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]. \end{cases}$$

Аналогично продолжим вложение $e'\colon \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \Pi'$ до вложения $E'\colon \mathbf{\Pi} \to \Pi_0$.

Наконец, определим искомый гомеоморфизм $\theta\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ следующим образом:

$$\theta(z) = \begin{cases} E'HE^{-1}(x), & z \in \Pi_0, \\ x, & z \in \mathbb{S}^3 \setminus \Pi_0. \end{cases}$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $S^2 \subset \mathbb{S}^3$ – гладко вложенная двумерная сфера, $A_0 \subset \mathbb{S}^3$ – ее трубчатая окрестность, $e, e'\colon \mathbb{S}^2 \times [0,1] \to \operatorname{int} A_0$ – топологические вложения.*

Тогда существует гомеоморфизм $\theta\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ такой, что

1) $\theta|_{\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} A_0}$,
2) $\theta e = e'$.

Доказательство. Положим $A = e(\mathbb{S}^2 \times [0,1])$, $A' = e'(\mathbb{S}^2 \times [0,1])$. Гомеоморфизм $e'^{-1}e|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом сферы, поэтому изотопен тождественному. Из теоремы о кольце следует, что каждое из множеств $A_0 \setminus \operatorname{int} A$, $A_0 \setminus \operatorname{int} A'$ имеет две компонентны связности, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$. Дальнейшие построения аналогичны построениям из доказательства предложения 2. Предложение доказано.

§ 3. Вспомогательные факты, характеризующие динамику градиентно-подобных потоков

В этом параграфе мы приводим ряд важных вспомогательных фактов, позволяющих описать динамику потоков из рассматриваемого класса каноническим образом.

Из [1, теорема B], [2, теорема 1] вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 9. *Для любого градиентно-подобного потока f^t на замкнутом многообразии M^n существует функция Морса $\varphi\colon M^n \to [0,n]$ такая, что*

1) *множество критических точек функции φ совпадает с множеством Ω_{f^t};*

2) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ *для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t>0$, причем траектории потока, отличные от состояний равновесия, пересекают поверхности уровня функции φ трансверсально;*

3) $\varphi(p) = \operatorname{ind}(p)$ *для любого $p \in \Omega_{f^t}$;*

4) *в окрестности любой точки $p \in \Omega^i_{f^t}$ существуют локальные координаты*[3] $y_1,\dots,y_n$, *в которых функция φ представляется в виде $\varphi = \varphi(p) - y_1 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2$.*

Следующее утверждение вытекает из [18, теорема 2.3].

Утверждение 10. *Пусть f^t – градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n, $n \geqslant 1$. Тогда*

1) $M^n = \bigcup_{p\in\Omega_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_p = \bigcup_{p\in\Omega_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_p$;

2) *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ многообразие W^{u}_p является гладким подмногообразием многообразия M^n;*

3) *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ и любой компоненты связности l^{u}_p множества $W^{\mathrm{u}}_p \setminus p$ верно равенство $\operatorname{cl} l^{\mathrm{u}}_p \setminus (l^{\mathrm{u}}_p \cup p) = \bigcup_{q\in\Omega_f\colon W^{\mathrm{s}}_q\cap l^{\mathrm{u}}_q \neq\varnothing} W^{\mathrm{u}}_q$.*

Из п. 1) утверждения 10 легко получается следующий факт.

Следствие 2. *Неблуждающее множество Ω_{f^t} любого градиентно-подобного потока f^t содержит по крайней мере один источник и один сток.*

Доказательство. Предположим противное. Для определенности будем считать, что множество источниковых состояний равновесия пусто. В силу п. 1) утверждения 10 многообразие представляется в виде объединения неустойчивых многообразий состояний равновесия. Из гиперболичности состояний равновесия потока f^t следует, что неустойчивое многообразие состояния равновесия p является шаром размерности $k = \{0,\dots,n\}$. Таким образом, при отсутствии источников многообразие M^n размерности n представляется в виде конечного объединения гладко вложенных шаров размерности меньшей n, что невозможно. Следствие доказано.

Предложение 4. *Пусть f^t – градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n, $n \geqslant 3$, и σ – седловое состояние равновесия потока f^t такое, что*

1) *индекс Морса седла σ равен $(n-1)$;*

2) $W^{\mathrm{u}}_\sigma \cap W^{\mathrm{s}}_{\sigma'} = \varnothing$ *для любого седлового состояния равновесия $\sigma' \neq \sigma$.*

Тогда $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$ является локально плоской сферой размерности $(n-1)$.

Доказательство. Так как по условию $W^{\mathrm{u}}_\sigma \cap W^{\mathrm{s}}_{\sigma'} = \varnothing$ для любого седлового состояния равновесия $\sigma' \neq \sigma$, то из п. 3) утверждения 10 следует, что существует стоковое состояние равновесия ω такое, что $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma = W^{\mathrm{u}}_\sigma \cup \omega$. Следовательно, $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$ является сферой размерности $(n-1)$, топологически вложенной в M^n.

[3] Наличие таких локальных координат является следствием из леммы Морса (см., например, [17, лемма 2.2]).

В силу п. 2) утверждения 10 сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$ является гладкой и, следовательно, локально плоской во всех точках, принадлежащих W^{u}_σ.

Докажем, что сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$ является локально плоской в точке ω. Пусть $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ – энергетическая функция потока f^t, определенная в утверждении 9, $\varepsilon \in (0,1)$, и Σ_ω – компонента связности множества $\varphi^{-1}(\varepsilon)$, принадлежащая множеству W^{s}_ω. Из п. 4) утверждения 9 следует, что Σ_ω является гладкой сферой размерности $(n-1)$.

Так как $W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma \subset W^{\mathrm{s}}_\omega$, то существует гладко вложенный $(n-1)$-шар $B^{\mathrm{u}} \subset W^{\mathrm{u}}_\sigma$ такой, что $\sigma \in \operatorname{int} B^{\mathrm{u}}$ и $\Sigma_\omega \cap (W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus B^{\mathrm{u}}) = \varnothing$. Тогда $W^{\mathrm{u}}_\sigma \cap \Sigma_\omega = B^{\mathrm{u}} \cap \Sigma_\omega$. Так как функция φ строго убывает вдоль траекторий потока f^t, то пересечение $B^{\mathrm{u}} \cap \Sigma_\omega$ трансверсально, поэтому пересечение

$$X^{\mathrm{u}}_\sigma = W^{\mathrm{u}}_\sigma \cap \Sigma_\omega$$

является гладким замкнутым многообразием размерности $n-1+n-1-n=n-2$. Так как Σ_ω является секущей для траекторий потока f^t, то подмногообразие X^{u}_σ является секущей для всех траекторий ограничения потока f^t на множество $W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma$. Определим ретракцию

$$r\colon W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma \to X^{\mathrm{u}}_\sigma,$$

поставив каждой точке $x \in W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma$ в соответствие точку $y = f^{t_x}(x) \in X^{\mathrm{u}}_\sigma$, являющуюся точкой пересечения траектории потока f^t, проходящей через точку x, с множеством X^{u}_σ. Ретракция r соединяется с тождественным отображением $\mathrm{id}\colon W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma \to W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma$ гомотопией

$$h_\tau(x) = f^{\tau t_x}(x), \qquad \tau \in [0,1],$$

следовательно, X^{u}_σ имеет тот же гомотопический тип, что и $W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma$. Так как $W^{\mathrm{u}}_\sigma \setminus \sigma$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1} \setminus O$, то оно имеет гомотопический тип сферы размерности $(n-2)$. Тогда в силу гипотезы Пуанкаре, доказанной для всех размерностей, многообразие X^{u}_σ диффеоморфно $(n-2)$-сфере.

Из обобщенной теоремы Шенфлиса (см. [19], [20]) следует, что существует гомеоморфизм $\psi_{\mathrm{u}}\colon \Sigma_\omega \to \mathbb{S}^{n-1}$ такой, что $\psi_{\mathrm{u}}(X^{\mathrm{u}}_\sigma) = \mathbb{S}^{n-2} = \mathbb{S}^{n-1} \cap Ox_1 \dots x_{n-1}$. Обозначим через V_ω n-шар, принадлежащий W^{s}_ω и ограниченный Σ_ω. Построим гомеоморфизм $\Psi_{\mathrm{u}}\colon V_\omega \to \mathbb{B}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{V_\omega}$ с линейным потоком $a^t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a(x_1,\dots,x_n) = ((1/2)^t x_1,\dots,(1/2)^t x_n)$. Для этого каждой точке $x \in V_\omega \setminus \omega$ поставим в соответствие время $t_x \leqslant 0$ такое, что $f^{t_x}(x) \subset \Sigma_\omega$ и положим

$$\Psi_{\mathrm{u}}(x) = \begin{cases} a^{-t_x}(\psi_{\mathrm{u}}(f^{t_x}(x))), & x \in V_\omega \setminus \omega, \\ O, & x = \omega. \end{cases}$$

По построению $\Psi_{\mathrm{u}}(\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma \cap V_\omega) \subset Ox_1 \dots x_{n-1}$. Следовательно, сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$ является локально плоской в точке ω. Предложение доказано.

Переходом к потоку f^{-t} из предложения 4 непосредственно получается следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть f^t – градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n, $n \geqslant 3$, и σ – седловое состояние равновесия потока f^t такое, что*

1) *индекс Морса седла σ равен* 1;

2) $W^{\mathrm{s}}_{\sigma} \cap W^{\mathrm{u}}_{\sigma'} = \varnothing$ *для любого седлового состояния равновесия* $\sigma' \neq \sigma$.

Тогда $\mathrm{cl}\, W^{\mathrm{s}}_{\sigma}$ *является локально плоской сферой размерности* $(n-1)$.

Следующее утверждение определяет *каноническую окрестность* V_p седловой гиперболической точки p, оснащенную координатной системой, в которой поток f^t представляется как произведение. Доказательство этого предложения можно найти в [21, гл. 2, § 7, леммы 7.2, 7.3].

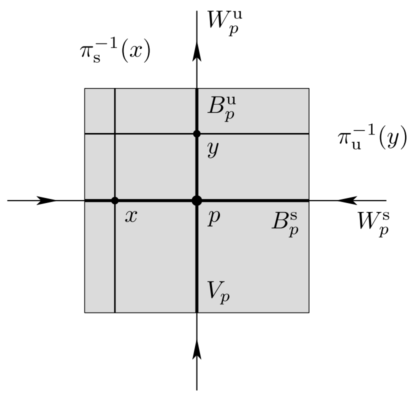

Рис. 2. Каноническая окрестность седловой гиперболической точки

Утверждение 11. *Пусть p – гиперболическое состояние равновесия потока $f^t\colon M^n \to M^n$ индекса $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда существует компактная окрестность $V_p \subset M^n$ точки p, оснащенная двумя непрерывными отображениями $\pi_{\mathrm{s}}\colon V_p \to B^{\mathrm{s}}_p, \pi_{\mathrm{u}}\colon V_p \to B^{\mathrm{u}}_p$, где $B^{\mathrm{s}}_p = V_p \cap W^{\mathrm{s}}_p, B^{\mathrm{u}}_p = V_p \cap W^{\mathrm{u}}_p$ – диски размерности $(n-i), i$ соответственно, содержащие точку p, со следующими свойствами* (*рис.* 2):

1) $\pi_{\mathrm{s}}^{-1}(p) = B^{\mathrm{u}}_p$, $\pi_{\mathrm{u}}^{-1}(p) = B^{\mathrm{s}}_p$;

2) *для каждой точки $x \in B^{\mathrm{s}}_p$ $(y \in B^{\mathrm{u}}_p)$ ее прообраз $\pi_{\mathrm{s}}^{-1}(x)(\pi_{\mathrm{u}}^{-1}(y))$ является гладко вложенным в M^n диском размерности $i(n-i)$*;

3) *для любых точек $x \in B^{\mathrm{s}}_p$, $y \in B^{\mathrm{u}}_p$ диски $\pi_{\mathrm{s}}^{-1}(x)$, $\pi_{\mathrm{u}}^{-1}(u)$ пересекаются трансверсально в единственной точке*;

4) $f^t(\pi_{\mathrm{s}}^{-1}(x)) \supset \pi_{\mathrm{s}}^{-1}(f^t(x))$, $f^{-t}(\pi_{\mathrm{u}}^{-1}(y) \supset \pi_{\mathrm{u}}^{-1}(f^{-t}(y))$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Замечание 1. Если f^t – градиентно-подобный поток, то окрестности V_p его седловых состояний равновесия можно выбрать так, чтобы $V_p \cap V_q = \varnothing$ для любых двух $p \neq q$. Далее будем полагать, что канонические окрестности обладают таким свойством.

В качестве следствия утверждения 11 получим классическое утверждение о том, что любой поток в окрестности гиперболического состояния равновесия топологически сопряжен стандартному линейному потоку.

Отметим, что это утверждение является переформулировкой классической теоремы Гробмана–Хартмана (см. [22], [23], а также [21, гл. 2, § 7, предложение 2.15]). Мы приводим один из вариантов его доказательства, фокусируя внимание на том техническом моменте, что сопрягающий гомеоморфизм можно определить на компактной канонической окрестности V_p.

Пусть b_i^t – линейный поток в пространстве $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-i} \times \mathbb{R}^i$, задаваемый формулами

$$b_i^t(x,y) = (e^{-t}x, e^t y), \qquad x \in \mathbb{R}^{n-i}, \quad y \in \mathbb{R}^i.$$

Поток b_i^t имеет единственное состояние равновесия в начале координат O, это состояние равновесия гиперболическое и его индекс Морса равен i.

Положим $\mathbb{B}^{n-i} = \{x \in \mathbb{R}^{n-i} \colon |x| \leqslant 1\}$, $\mathbb{B}^i = \{y \in \mathbb{R}^i \colon |y| \leqslant 1\}$.

Предложение 5. *Пусть p – состояние равновесия потока $f^t \colon M^n \to M^n$ индекса $i \in \{1,\dots,n\}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_p \colon V_p \to \mathbb{B}^{n-i} \times \mathbb{B}^i$ такой, что $h_p f^t = b_i^t h_p$ для всех $t \in \mathbb{R}$, для которых правая и левая части определены.*

Доказательство. Пусть $B_p^{\mathrm{s}} \subset W_p^{\mathrm{s}}$, $B_p^{\mathrm{u}} \subset W_p^{\mathrm{u}}$ – диски, удовлетворяющие заключению утверждения 11. Из их определения следует, что границы $\partial B_p^{\mathrm{s}}$, $\partial B_p^{\mathrm{u}}$ являются сферами без контакта для ограничения потока f^t на множество $W_p^{\mathrm{s}} \setminus p$, $W_p^{\mathrm{u}} \setminus p$ соответственно. Пусть $g_{\mathrm{s}} \colon \partial B_p^{\mathrm{s}} \to \partial\mathbb{B}^{n-i}$, $g_{\mathrm{u}} \colon \partial B_p^{\mathrm{u}} \to \partial\mathbb{B}^i$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы. Определим гомеоморфизмы $h_{\mathrm{s}} \colon B_p^{\mathrm{s}} \to \mathbb{B}^{n-i}$, $h_{\mathrm{u}} \colon B_p^{\mathrm{u}} \to \mathbb{B}^i$, переводящие траектории ограничения потока f^t на диски B_p^{s}, B_p^{u}, в траектории ограничения потока b^t на диски $\mathbb{B}^{n-i}$, $\mathbb{B}^i$ следующим образом.

Каждой точке $x \in B_p^{\mathrm{s}} \setminus p$ поставим в соответствие время $t_x \leqslant 0$ такое, что $f^{t_x}(x) \subset \partial B_p^{\mathrm{s}}$, и положим

$$h_{\mathrm{s}}(x) = \begin{cases} b^{-t_x}(g_{\mathrm{s}}(f^{t_x}(x))), & x \in B_p^{\mathrm{s}} \setminus p, \\ O, & x = p. \end{cases}$$

Аналогично определим гомеоморфизм $h_{\mathrm{u}} \colon B_p^{\mathrm{u}} \to \mathbb{B}^i$. А именно, каждой точке $x \in B_p^{\mathrm{u}} \setminus p$ поставим в соответствие время $t_x \geqslant 0$ такое, что $f^{t_x}(x) \subset \partial B_p^{\mathrm{u}}$, и положим

$$h_{\mathrm{u}}(x) = \begin{cases} b^{-t_x}(g_{\mathrm{s}}(f^{t_x}(x))), & x \in B_p^{\mathrm{u}} \setminus p, \\ O, & x = p. \end{cases}$$

Каждую точку множества $\mathbb{B}^{n-i} \times \mathbb{B}^i$ будем задавать парой координат $\xi \in \mathbb{B}^{n-i}$, $\eta \in \mathbb{B}^i$.

Искомый гомеоморфизм $h_p \colon V_p \to \mathbb{B}^{n-i} \times \mathbb{B}^i$ определим, поставив в соответствие каждой точке $q \in V_p$ точку с координатами $(h_{\mathrm{s}}(\pi_{\mathrm{s}}(q)), h_{\mathrm{u}}(\pi_{\mathrm{u}}(q)))$. Предложение доказано.

§ 4. Структура неблуждающего множества и вложение инвариантных многообразий потоков из класса $G(M^4)$

Следующее предложение доказывает первый пункт леммы 1.

Предложение 6. *Пусть $f^t \in G(M^4)$ и множество $\Omega_{f^t}^1$ непусто. Тогда для произвольной точки $p \in \Omega_{f^t}^1$ замыкание $\operatorname{cl} W_p^{\mathrm{s}}$ ее устойчивого многообразия* *является локально плоской трехмерной сферой, которая делит многообразие M^4 на две компоненты связности.*

Доказательство. Так как по условию инвариантные многообразия различных седел не пересекаются, то из следствия 3 получаем, что для любой точки $p \in \Omega^1_{f^t}$ замыкание $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ ее устойчивого многообразия W^{s}_p является локально плоской трехмерной сферой.

Покажем, что сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности. В силу утверждения 1 многообразие M^4 ориентируемо. В силу [20, теорема 3] локально плоская сфера S^{n-1} в ориентируемом многообразии M^n ($n \geqslant 3$) является цилиндрически вложенной, значит, существует замкнутая окрестность $V \subset M^n$ сферы S^{n-1} и гомеоморфизм $h\colon \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \to V$ такой, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$. По определению окрестность V сферы $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ делится это сферой на две части. Выберем точки x, y, принадлежащие разным компонентам связности $V \setminus \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$, и соединим их гладкой дугой $l \subset V$, пересекающей сферу $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ в единственной точке. Если $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ не делит M^4, то существует дуга $b \subset M^4 \setminus V_p$, соединяющая точки x, y. По построению индекс пересечения дуги $\lambda = l \cup b$ и сферы $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ равен 1 или -1 (в зависимости от выбора ориентации дуги λ). С другой стороны, поскольку в силу предложения 1 группа $\pi_3(M^4)$ тривиальна, нетрудно выбрать сферу $S^3 \subset M^4 \setminus \lambda$, гомотопную сфере $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$. Так как индекс пересечения является гомотопическим инвариантом (см. [24, гл. 2, § 4]), то индекс пересечения сферы S^3 и дуги λ должен быть равен ± 1, но поскольку $S^3 \cap \lambda = \varnothing$, он равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности. Предложение доказано.

Замечание 2. Утверждение п. 1) леммы 1 для точки $p \in \Omega^3_{f^t}$ получается из предложения 6 переходом к потоку f^{-t}.

Прежде чем перейти к доказательству п. 2) леммы 1, докажем серию вспомогательных утверждений, имеющих также самостоятельное значение для дальнейших построений.

Напомним, что множество A называется *аттрактором* потока f^t, если существует замкнутая окрестность (захватывающая окрестность) $V \subset M^n$ такая, что все траектории потока f^t пересекают ее границу ∂V трансверсально, и $A = \bigcap_{t>0} f^t(V)$. Множество R называется *репеллером* потока f^t, если оно является аттрактором для потока f^{-t}.

Пусть $f^t \in G(M^4)$. Положим

$$A_{f^t} = \bigcup_{p \in \Omega^0_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_p, \qquad R_{f^t} = \bigcup_{p \in \Omega^3_{f^t} \cup \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^4_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_p, \qquad M_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t}).$$

Предложение 7. *Пусть $f^t \in G(M^4)$. Тогда множество A_{f^t} является связным аттрактором потока f^t с захватывающей окрестностью V_a такой, что*

1) *V_a диффеоморфна шару;*

2) *любая траектория ограничения потока f^t на множество M_{f^t} трансверсально пересекает границу Σ шара V_a в единственной точке.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon M^4 \to [0,4]$ – энергетическая функция потока f^t, определенная утверждением 9. Положим

$$V_a = \varphi^{-1}\left(\left[0, \frac{3}{2}\right]\right), \qquad \Sigma = \partial V_a.$$

Так как $\varphi(x) \in [0,1]$ для любой точки $x \in A_{f^t}$, то $A_{f^t} \subset \operatorname{int} V_a$. В силу п. 2) утверждения 9 траектории потока f^t трансверсально пересекают границу множества V_a не более чем в одной точке, и $f^t(V_a) \subset \operatorname{int} V_a$ для любого $t > 0$.

Так как множество A_{f^t} инвариантно, то справедливо включение $A_{f^t} \subset \bigcap_{t>0} f^t(V_a)$. Покажем, что $A_{f^t} = \bigcap_{t>0} f^t(V_a)$, откуда будет следовать, что A_{f^t} является аттрактором, V_a – его захватывающая окрестность, а $M_{f^t} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(\Sigma)$, и любая траектория ограничения потока f^t на множество M_{f^t} имеет непустое пересечение с Σ.

Предположим противное: пусть $A_{f^t} \neq \bigcap_{t>0} f^t(V_a)$. Тогда существует точка $x \in \bigcap_{t>0} f^t(V_a) \setminus A_{f^t}$. Из утверждения 10 следует, что существует состояние равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ такое, что $x \in W^{\mathrm{u}}_p$. Поскольку $V_a \subset f^{-t}(\operatorname{int} V_a)$ для любого $t > 0$, то $\bigcap_{t>0} f^t(V_a) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} f^t(V_a)$. Поэтому множество $\bigcap_{t>0} f^t(V_a)$ является инвариантным для потока f^t. Тогда вся орбита точки x принадлежит множеству $\bigcap_{t>0} f^t(V_a)$. Поскольку множество $\bigcap_{t>0} f^t(V_a)$ замкнуто, то $p \in \bigcap_{t>0} f^t(V_a)$. Но все состояния равновесия, принадлежащие множеству $\bigcap_{t>0} f^t(V_a)$, исчерпываются стоками и седловыми состояниями равновесия индекса Морса 1, неустойчивые многообразия которых принадлежат множеству A_{f^t}. Следовательно, $p \in A_{f^t}$ и $x \in A_{f^t}$, что противоречит предположению. Таким образом, $A_{f^t} \neq \bigcap_{t>0} f^t(V_a)$.

Докажем связность V_a, из которой будет следовать и связность множества A_{f^t} как пересечения связных компактных вложенных множеств. Предположим, что V_a несвязно, т. е. представляется в виде объединения непересекающихся непустых инвариантных подмножеств E_1, E_2. Тогда объединение $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(E_1 \cup E_2)$ является несвязным. Однако в силу предыдущего абзаца $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(E_1 \cup E_2) = \bigcup_{p\in A_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_p$. В силу утверждения 10 многообразие M^4 представляется в виде $M^4 = \bigcup_{p\in A_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_p \cup R_{f^t}$. Тогда $M^4 \setminus R_{f^t} = \bigcup_{p\in A_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_p$, поэтому $M^4 \setminus R_{f^t}$ несвязно. С другой стороны, так как размерность множества R_{f^t} не превышает 2, то R_{f^t} не делит M^4, следовательно, множество $M^4 \setminus R_{f^t}$ связно. Полученное противоречие доказывает связность V_a.

Покажем, что A_{f^t} не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности. Предположим противное: пусть $c \subset A_{f^t}$ – простая замкнутая кривая. Из п. 3) утверждения 10 следует, что множество $A_{f^t} \setminus \Omega^1_{f^t}$ представляет собой конечный набор пучков дуг, лежащих в несвязном объединении устойчивых многообразий стоковых точек. Поэтому из существования кривой c следует, что существует состояние равновесия $p \in \Omega^1_{f^t}$, принадлежащее этой кривой. В силу п. 1) леммы 1 сфера $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ делит несущее многообразие M^4 на две компоненты связности. Так как одномерные неустойчивые сепаратрисы точки p разделяются многообразием W^{s}_p, то они оказываются в разных компонентах связности множества $M^4 \setminus \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$. Следовательно, кривая c, содержащая W^{u}_p, пересекается со сферой $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$ по крайней мере еще в одной точке $x \in c \cap \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p$, отличной от p. Точка x не может быть источником, так как A_{f^t} по построению не содержит источников. Точка x не может быть стоковой или седловой, так как множество $W^{\mathrm{s}}_p \setminus p$ состоит из блуждающих точек. Следовательно, x принадлежит одномерному неустойчивому многообразию некоторой точки $q \in \Omega^1_{f^t}$, что невозможно для потоков Морса–Смейла.

Таким образом, множество A_{f^t} можно представить как связный граф без циклов, вершинами которого являются стоковые точки, а ребрами – одномерные неустойчивые многообразия седловых точек. Отсюда непосредственно имеем $|\Omega^0_{f^t}| = |\Omega^1_{f^t}| + 1$. Из теории Морса (см., например, [25]) следует, что захватывающая окрестность V_a получена из объединения $|\Omega^0_{f^t}|$ попарно непересекающихся шаров приклеиванием $|\Omega^1_{f^t}|$ ручек индекса 1.

Докажем индукцией по числу $k = |\Omega^0_{f^t}|$, что связное компактное многообразие, полученное из k экземпляров замкнутых n-шаров приклеиванием $(k-1)$ ручек индекса 1, диффеоморфно n-шару. Отсюда будет следовать, что множество V_a диффеоморфно n-шару.

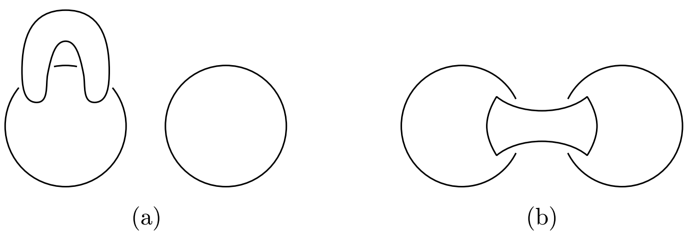

Рис. 3. Объединение двух шаров с приклеенной ручкой: (a) – многообразие несвязно, (b) – многообразие связно и диффеоморфно шару (к доказательству предложения 7)

При $k=1$ имеется один шар и 0 ручек, утверждение верно. Предположим, что при $i \geqslant 1$ утверждение доказано, и рассмотрим случай $k = i+1$. Тогда V является объединением двух шаров с приклеенной ручкой. Имеются две возможности приклеивания ручки, изображенные на рис. 3: (a) многообразие несвязно, что невозможно по условию; (b) многообразие связно и диффеоморфно шару. Предложение доказано.

Из предложения 7 и определения множества R_{f^t} непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Множество R_{f^t} является связным репеллером потока f^t с захватывающей окрестностью $M^4 \setminus V_a$.*

Применение предложения 7 к потоку f^{-t} доказывает следующий факт.

Следствие 5. *Множество*

$$\widetilde{R}_{f^t} = \Bigl(\bigcup_{\alpha \in \Omega^n_{f^t}} \alpha\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_{\sigma_{n-1}}\Bigr)$$

является связным аттрактором для потока f^{-t}, для которого существует захватывающая окрестность V_r, диффеоморфная шару и такая, что $V_r \cap V_a = \varnothing$.

Аттрактор A_{f^t}, репеллер $\widetilde{R}_{f^t}$ и их захватывающие окрестности изображены на рис. 4.

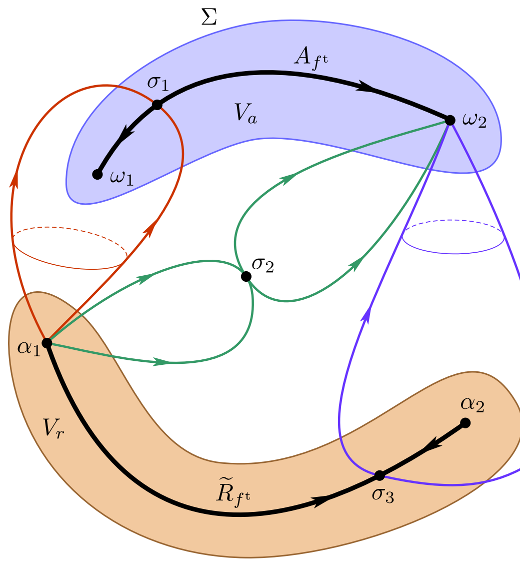

Рис. 4. Одномерные аттрактор A_{f^t} и репеллер $\widetilde{R}_{f^t}$ потока f^t и их захватывающие окрестности

Предложение 8. *Пусть Σ – граница захватывающей окрестности V_a аттрактора A_{f^t}. Тогда*

1) *трехмерные устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек с индексами Морса* 1 *и* 3 *соответственно пересекают сферу Σ по гладко вложенным двумерным сферам*;

2) *пересечение $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_2} \cap \Sigma$ неустойчивого многообразия седловой точки потока f^t, имеющей индекс Морса* 2, *со сферой Σ является узлом.*

Доказательство. Пусть $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$, $i \in \{2,3\}$. Из утверждения 10 следует, что замыкание множества $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ состоит из $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ и единственного стокового состояния равновесия. Так как все стоковые состояния равновесия потока f^t принадлежат аттрактору A_{f^t}, то пересечение

$$X^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} = W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \cap \Sigma$$

непусто. Аналогично рассуждениям, использованным в доказательстве предложения 4 при изучении топологии множества X^{u}_{σ}, доказывается, что множество $X^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ является гладким замкнутым многообразием размерности $i-1$, которое, кроме того, является деформационным ретрактом множества $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \setminus \sigma_i$.

Отсюда следует, что при $i = 2$ множество $X^{\mathrm{u}}_{\sigma_2}$ является узлом, а при $i = 3$ множество $X^{\mathrm{u}}_{\sigma_2}$ является двумерной сферой.

Пусть $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$. Из определения аттрактора A_{f^t} следует, что $\sigma_1 \subset A_{f^t}$, поэтому пересечение $W^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} \cap \Sigma$ непусто. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что множество $W^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} \cap \Sigma$ является двумерной сферой. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть $f^t \in G(M^4)$. Тогда множество $\Omega^2_{f^t}$ состоит из единственной точки.*

Доказательство. Возможны два случая: 1) множество $\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t}$ пусто; 2) хотя бы одно из множеств $\Omega^1_{f^t}, \Omega^3_{f^t}$ непусто.

Рассмотрим случай 1). Отметим, что из п. 3) утверждения 1 следует, что эйлерова характеристика проективно-подобного многообразия размерности 4 и выше равна 3. Тогда для потока f^t из формулы Пуанкаре–Хопфа следует справедливость следующего соотношения:

$$\bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} (-1)^{\mathrm{ind}_p} = 3. \tag{4.1}$$

В силу следствия 2 множество Ω_{f^t} содержит по крайней мере один источник и один сток. Так как источники, стоки и седла индекса 2 потока f^t вносят положительный вклад в левую часть формулы (4.1), то из условия $\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t} = \varnothing$ следует, что множество Ω_{f^t} состоит в точности из трех состояний равновесия: источника, стока и седла с индексом Морса 2.

Рассмотрим случай 2). В силу предложения 7 захватывающая окрестность V_a аттрактора

$$A_{f^t} = \Bigl(\bigcup_{\omega \in \Omega^0_{f^t}} \omega\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}} W^{\mathrm{u}}_{\sigma_1}\Bigr)$$

диффеоморфна n-шару. В силу следствия 5 множество

$$\widetilde{R}_{f^t} = \Bigl(\bigcup_{\alpha \in \Omega^n_{f^t}} \alpha\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\sigma_{n-1} \in \Omega^{n-1}_{f^t}} W^{\mathrm{s}}_{\sigma_{n-1}}\Bigr)$$

является аттрактором для потока f^{-t} и обладает захватывающей окрестностью V_r, диффеоморфной шару, и такой, что $V_r \cap V_a = \varnothing$.

Удалим из многообразия M^4 внутренности шаров V_r, V_a и приклеим к получившемуся многообразию с краем два стандартных n-шара, на одном из которых задано векторное поле $\dot{x} = x$, а на втором – поле $\dot{x} = -x$, $x \in \mathbb{B}^n$, по некоторому обращающему естественную ориентацию края диффеоморфизму $\varphi\colon \partial(M^4 \setminus \mathrm{int}(V_r \cup V_a)) \to \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^0$. Диффеоморфизм φ можно выбрать таким образом[4], чтобы на получившемся многообразии $\widetilde{M}^4$ был корректно определен поток $\widetilde{f}^t \in G(M^4)$, неблуждающее множество которого состоит из источника, стока и $|\Omega^2_{f^t}|$ седел индекса 2. Операция приклеивания шаров эквивалентна

[4]См., например, [26, § 3, шаг 2].

взятию операции связной суммы с двумя сферами, поэтому многообразие $\widetilde{M}^4$ диффеоморфно исходному многообразию M^4. Тогда для потока $\widetilde{f}^t$ получаем ситуацию, рассмотренную в случае 1). Поэтому $|\Omega^2_{\widetilde{f}^t}| = 1$, следовательно, $|\Omega^2_{f^t}| = 1$. Предложение доказано.

Доказательство следующего утверждения использует аргументы, примененные в [9, предложение 3] для доказательства локальной плоскостности замыканий инвариантных многообразий седла индекса 2 для градиентно-подобного потока $f^t \in G(M^4)$ с тремя состояниями равновесия.

Предложение 10. *Пусть $f^t \in G(M^4)$ и V_a, V_r – захватывающие окрестности аттрактора и репеллера A_{f^t}, R_{f^t}. Тогда узлы*

$$C_{\mathrm{u}} = W^{\mathrm{u}}_p \cap \partial V_a, \qquad C_{\mathrm{s}} = W^{\mathrm{s}}_p \cap \partial V_r$$

тривиальны.

Доказательство. В силу утверждения 11 существует компактная окрестность $V_p \subset M^4$ точки p, оснащенная двумя непрерывными отображениями $\pi_{\mathrm{s}}\colon V_p \to B^{\mathrm{s}}_p$, $\pi_{\mathrm{u}}\colon V_p \to B^{\mathrm{u}}_p$, где $B^{\mathrm{s}}_p = V_p \cap W^{\mathrm{s}}_p$, $B^{\mathrm{u}}_p = V_p \cap W^{\mathrm{u}}_p$ – двумерные диски, содержащие точку p, наделяющими окрестность V_p структурой прямого произведения $B^{\mathrm{s}}_p \times B^{\mathrm{u}}_p$.

Граница ∂V_p окрестности V_p есть 3-сфера, в которой естественным образом выделяются два полнотория $\Pi_{\mathrm{s}} = \partial B^{\mathrm{s}}_p \times B^{\mathrm{u}}_p$, $\Pi_{\mathrm{u}} = \partial B^{\mathrm{u}}_p \times B^{\mathrm{s}}_p$, имеющие общую границу $T = \partial B^{\mathrm{s}}_p \times \partial B^{\mathrm{u}}_p$. Пусть $x \in \partial B^{\mathrm{s}}_p$. Тогда кривая $\mu = \{x\} \times \partial B^{\mathrm{u}}_p$ является меридианом полнотория Π_{s} и параллелью полнотория Π_{u}.

Из предложения 7 следует, что для любой точки $x \in \Pi_{\mathrm{u}}$ существует траектория l_x потока f^t, пересекающая ∂V_a в единственной точке z_x. Обозначим через l_{x,z_x} отрезок траектории l_x, заключенный между точками x, z_x, и положим $L_{\mathrm{u}} = \bigcup_{x \in \Pi_{\mathrm{u}}} l_{x,z_x}$. По построению множество L_{u} гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, а пересечение $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}} = L_{\mathrm{u}} \cap \partial V_a$ является трубчатой окрестностью узла C_{u} в ∂V_a. Более того, соответствие $x \to z_x$ определяет гомеоморфизм $\chi_{\mathrm{u}}\colon \Pi_{\mathrm{u}} \to \widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}}$, переводящий среднюю линию ∂B_{u} полнотория Π_{u} в узел C_{u}.

Обозначим через L_{s}, $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}} \subset \partial W$, $\chi_{\mathrm{s}}\colon \Pi_{\mathrm{s}} \to \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}$ аналогичные объекты для полнотория Π_{s} и сферы ∂V_r.

Из предложения 7 следует, что для любой точки $w \in \partial V_r \setminus \operatorname{int} \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}$ существует траектория l_w потока f^t, пересекающая $\partial V_a \setminus \operatorname{int} \widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}}$ в единственной точке v_w. Обозначим через $\theta\colon \partial V_r \setminus \operatorname{int} \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}} \to \partial V_a \setminus \operatorname{int} \widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}}$ гомеоморфизм такой, что $\theta(w) = v_w$. Из конструкции следует, что

$$\theta|_{\partial \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}} = \chi_{\mathrm{u}} \chi_{\mathrm{s}}^{-1}|_{\partial \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}},$$

поэтому $\theta|_{\partial \widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}}$ переводит меридиан $\chi_{\mathrm{s}}(\mu)$ полнотория $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}$ в параллель $\chi_{\mathrm{u}}(\mu)$ полнотория $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}}$.

Таким образом, сфера ∂V_a может быть получена из сферы ∂V_r выбрасыванием внутренности полнотория $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{s}}$ и вклеиванием полнотория $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{u}}$ с помощью гомеоморфизма θ, т. е. нетривиальной хирургией вдоль узла C_{u}. В силу утверждения 7 многообразие, полученное нетривиальной хирургией вдоль нетривиального узла, не гомеоморфно сфере. Поэтому узел C_{u} тривиален. Так как узлы C_{u}, C_{s} имеют гомеоморфные дополнения, то в силу [14, теорема 1] узел C_{s} также тривиален. Предложение доказано.

Применяя предложение 10 к потокам f^t, f^{-t} и рассуждения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве предложения 4, получаем следующее утверждение.

Следствие 6. *Пусть $f^t \in G(M^4)$, $p \in \Omega^2_{f^t}$. Тогда замыкания инвариантных многообразий седла p являются локально плоскими двумерными сферами.*

Теперь справедливость п. 2) леммы 1 непосредственно следует из утверждений 9 и следствия 6.

§ 5. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$

В этом параграфе доказывается теорема 1.

Из определения топологической эквивалентности непосредственно следует, что если потоки $f^t, g^t \in G(M^4)$ топологически эквивалентны, то их двуцветные графы Γ_{f^t}, Γ_{g^t} изоморфны. Предположим, что графы потоков $f^t, g^t \in G(M^4)$ изоморфны посредством изоморфизма $\eta\colon \Gamma_{f^t} \to \Gamma_{g^t}$, сохраняющего цвета ребер и переводящего отмеченную вершину графа Γ_{f^t} в отмеченную вершину графа Γ_{g^t}, и докажем топологическую сопряженность этих потоков.

Напомним, что через $\mathcal{L}_{f^t}$ обозначено множество всех трехмерных сфер $\{\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p,\ p \in \Omega^1_{f^t}\}$ и $\{\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q,\ q \in \Omega^3_{f^t}\}$ и через k_{f^t} число этих сфер. В силу леммы 1 каждая сфера из множества $\mathcal{L}_{f^t}$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности, поэтому множество $M^4 \setminus \bigl(\bigcup_{p\in\Omega^1_{f^t}} \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \cup \bigcup_{q\in\Omega^{n-1}_{f^t}} \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q\bigr)$ состоит из $m_{f^t} = k_{f^t} + 1$ компонент связности $D_1, \dots, D_{m_{f^t}}$. Через $\mathcal{D}_{f^t}$ обозначено множество всех этих компонент.

Напомним, что через $V(\Gamma_{f^t})$, $E(\Gamma_{f^t})$ мы обозначили множество вершин и ребер графа Γ_{f^t} соответственно. В силу определения графа Γ_{f^t} существуют взаимно однозначные отображения

$$\xi^0_{f^t}\colon \mathcal{D}_{f^t} \to V(\Gamma_{f^t}), \qquad \xi^1_{f^t}\colon \mathcal{L}_{f^t} \to E(\Gamma)_{f^t}$$

такие, что вершины $\xi^0_{f^t}(D_i)$, $\xi^0_{f^t}(D_j)$ инцидентны ребру $\xi^1_{f^t}(L)$ тогда и только тогда, когда области $D_i, D_j \in \mathcal{D}_{f^t}$ имеют общую границу $L \in \mathcal{L}_{f^t}$.

Из наличия изоморфизма $\eta\colon \Gamma_{f^t} \to \Gamma_{g^t}$ следует, что эти графы имеют одинаковое количество вершин и ребер, поэтому $m_{f^t} = m_{g^t}$. Более того, изоморфизм $\eta\colon \Gamma_{f^t} \to \Gamma_{g^t}$ индуцирует взаимно однозначное соответствие η_* между компонентами связности множеств $\mathcal{D}_{f^t} \cup \mathcal{L}_{f^t}$, $\mathcal{D}_{g^t} \cup \mathcal{L}_{g^t}$ следующим образом:

$$\eta_*(D) = {\xi^0}^{-1}_{g^t}\eta(\xi^0_{f^t}(D)), \qquad \eta_*(L) = {\xi^1}^{-1}_{g^t}\eta(\xi^1_{f^t}(L))$$

для любых $D \in \mathcal{D}_{f^t}$, $L \in \mathcal{L}_{f^t}$.

Взаимно однозначное соответствие η_* продолжается до взаимно однозначного соответствия между множествами Ω_{f^t} и Ω_{g^t} следующим образом.

1. Пусть $\sigma \in \Omega^1_{f^t}$. Тогда существует единственная точка $\alpha \subset \Omega^n_{f^t}$ такая, что $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_\sigma = W^{\mathrm{s}}_\sigma \cup \alpha$. Кроме того, существует единственная пара точек $\sigma' \in \Omega^1_{g^t}$, $\alpha' \in \Omega^n_{g^t}$ такая, что $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_{\sigma'} = W^{\mathrm{s}}_{\sigma'} \cup \alpha'$ и $\eta_*(\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_\sigma) = \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_{\sigma'}$. Положим $\eta(\sigma) = \sigma'$, $\eta(\alpha) = \alpha'$.

2. Пусть $\sigma \in \Omega^{n-1}_{f^t}$. Тогда существует единственная точка $\omega \subset \Omega^0_{f^t}$ такая, что $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma = W^{\mathrm{u}}_\sigma \cup \omega$, и единственная пара точек $\sigma' \in \Omega^{n-1}_{g^t}$, $\omega' \in \Omega^0_{g^t}$ такая, что $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_{\sigma'} = W^{\mathrm{u}}_{\sigma'} \cup \omega'$ и $\eta_*(\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma) = \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_{\sigma'}$. Положим $\eta(\sigma) = \sigma'$, $\eta(\omega) = \omega'$.

3. Пусть $\omega \in \Omega^0_{f^t}$ $(\alpha \in \Omega^n_{f^t})$ – такая точка, что W^{s}_ω (W^{u}_α) не пересекается ни с одной трехмерной сепаратрисой седловых состояний равновесия потока f^t. Тогда ω (α) принадлежит единственной области $D \in \mathcal{D}_{f^t}$, содержащей замыкания одномерных сепаратрис тех седловых состояний равновесия, чьи трехмерные инвариантные многообразия составляют границу области D. Более того, в области $\eta_*(D)$ найдется единственная стоковая (источниковая) точка ω' (α') потока g^t, которая также не пересекается ни с одной трехмерной сепаратрисой седловых состояний равновесия потока g^t. Положим $\omega' = \eta_*(\omega)$ $(\alpha' = \eta_*(\alpha))$.

Всюду ниже для произвольного состояния равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ будем обозначать через p' состояние равновесия из множества Ω_{g^t} такое, что $p' = \eta_*(p)$. Напомним, что в предложении 7 определена секущая Σ для ограничения потока f^t на множество $M_{f^t} = M^n \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$. Обозначим через Σ' аналогичную секущую для потока g^t.

Построение гомеоморфизма $H\colon M^4 \to M^4$, переводящего траектории потока f^t в траектории потока g^t, будем проводить по шагам, каждый из которых сформулируем как отдельное предложение.

Предложение 11 (шаг 1). *Пусть $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$, $\sigma'_i \in \Omega^i_{g^t}$, $i \in \{1,2,3\}$, – седловые состояния равновесия и V_{σ_i}, $V_{\sigma'_i}$ – их канонические окрестности, определенные утверждением 11. Тогда существует гомеоморфизм*

$$h_{\sigma_i,\sigma'_i}\colon V_{\sigma_i} \to V_{\sigma'_i}$$

такой, что

$$h_{\sigma_i,\sigma'_i} f^t|_{V_{\sigma_i}} = g^t h_{\sigma_i,\sigma'_i}|_{V_{\sigma'_i}}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, при которых правая и левая части равенства определены.

Доказательство. В силу предложения 5 существует гомеоморфизм $h_{\sigma_i}\colon V_{\sigma_i} \to \mathbb{B}^{n-i} \times \mathbb{B}^i$, сопрягающий поток $f^t|_{V_{\sigma_i}}$ с линейным потоком $b^t_i(x,y) = (e^{-t}x, e^t y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-i}, y \in \mathbb{R}^i$.

Определим искомый гомеоморфизм формулой $h_{\sigma_i,\sigma'_i} = h^{-1}_{\sigma'_i} h_{\sigma_i}$. Предложение доказано.

Напомним, что согласно утверждению 11 и предложению 5 каноническая окрестность V_{σ_i} любой точки $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$ может быть представлена как прямое произведение двух дисков $B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \subset W^{\mathrm{s}}_{\sigma_i}$, $B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \subset W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ размерностей $(n-i)$, i соответственно. Граница окрестности V_{σ_i} представляется в виде объединения двух множеств с общей границей следующим образом:

$$\partial V_{\sigma_i} = \partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \cup B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}.$$

В случае $i = 1$ $(i = 3)$ множество $\partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ $(B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i})$ гомеоморфно кольцу $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$, множество $B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ $(\partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i})$ является объединением двух трехмерных дисков. В случае $i = 2$ оба множества $\partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$, $B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ являются полноториями.

Предложение 12 (шаг 2). *Сферы Σ, Σ' можно модифицировать таким образом, что полученные в результате локально плоские сферы (которые будем обозначать теми же символами) обладают следующими свойствами:*

1) *сферы Σ, Σ' являются глобальными секущими (в топологическом смысле) для потоков $f^t|_{M_{f^t}}$, $g^t|_{M_{g^t}}$, т. е. любая траектория $l_x \in M_{f^t}$ $(l_{x'} \in M_{g^t})$ пересекается с Σ (Σ') в единственной точке;*

2) *для любых седловых точек $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$, $\sigma'_i \in \Omega^i_{g^t}$ пересечения $V_{\sigma_i} \cap \Sigma$, $V_{\sigma'_i} \cap \Sigma'$ непусты и состоят из множеств*

a) $V_{\sigma_i} \cap \Sigma = \partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$, $V_{\sigma'_i} \cap \Sigma' = \partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma'_i} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma'_i}$, *если* $i = 1$;

b) $V_{\sigma_i} \cap \Sigma = \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \times B^{\mathrm{s}}_{\sigma_i}$, $V_{\sigma'_i} \cap \Sigma' = \partial B^{\mathrm{u}}_{\sigma'_i} \times B^{\mathrm{s}}_{\sigma'_i}$, *если* $i \in \{2,3\}$.

Доказательство. Пусть $i = 1$. Положим $\Pi = \partial B^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} \times B^{\mathrm{u}}_{\sigma_1}$. Предположим, что $V_{\sigma_1} \cap \Sigma \neq \Pi$. Соединим множество Π со сферой Σ отрезками траекторий потока f^t и обозначим через $\widetilde{\Pi}$ геометрическое место концов этих траекторий, так что $\widetilde{\Pi} \subset \Sigma$. По определению $\widetilde{\Pi}$ является подмногообразием сферы Σ, поэтому существует вложение $e\colon \partial\widetilde{\Pi} \times [0,1] \to \Sigma$ такое, что $e(\partial\widetilde{\Pi} \times [0,1]) \cap \widetilde{\Pi} = e(\partial\widetilde{\Pi} \times \{0\})$ и $e(\partial\widetilde{\Pi} \times [0,1]) \cap V_\sigma = \varnothing$ для любого седлового состояния равновесия, отличного от σ_1. На множестве $\widetilde{\Pi}$ определена непрерывная функция $T\colon \widetilde{\Pi} \to \mathbb{R}$, ставящая каждой точке $x \in \widetilde{\Pi}$ время t_x такое, что $f^{t_x}(x) \subset \Pi$. Продолжим эту функцию непрерывно на множество $K = e(\partial\widetilde{\Pi} \times [0,1])$ так, чтобы $T(x) = 0$ для всех точек $x \in e(\partial\widetilde{\Pi} \times \{1\})$. В качестве новой секущей возьмем следующую сферу:

$$\widetilde{\Sigma}_{f^t} = \bigl(\Sigma \setminus (\widetilde{\Pi} \cup K)\bigr) \cup \biggl(\bigcup_{x \in \widetilde{\Pi} \cup K} f^{T(x)}(x)\biggr).$$

Аналогичную процедуру проделаем для всех оставшихся седловых точек, в результате получим секущую с требуемыми свойствами, которую снова обозначим через Σ. Таким же образом модифицируем сферу Σ'. Предложение доказано.

Для состояния равновесия $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$ положим $S^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} = W^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} \cap \Sigma$, для состояния равновесия $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$, $i \in \{2,3\}$, положим $S^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} = W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i} \cap \Sigma$. Сделаем аналогичные обозначения для седловых состояний равновесия σ'_i, $i \in \{1,2,3\}$, потока g^t.

Предложение 13 (шаг 3). *Существует гомеоморфизм $\Phi\colon \Sigma \to \Sigma'$ такой, что*

1) $\Phi(S^{\mathrm{s}}_{\sigma_1}) = S^{\mathrm{s}}_{\sigma'_1}$ *для любой пары седловых точек* $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$, $\sigma' = \eta_*(\sigma) \in \Omega^1_{g^t}$;

2) $\Phi(S^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}) = S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_i}$ *для любой пары седловых точек* $\sigma_i \in \Omega^i_{f^t}$, $\sigma'_i = \eta_*(\sigma_i) \in \Omega^i_{g^t}$, $i \in \{2,3\}$.

Доказательство. Пусть $\sigma_2 \in \Omega^2_{f^t}$, $\sigma'_2 \in \Omega^2_{g^t}$. Тогда $\sigma'_2 = \eta_*(\sigma_2)$. В силу предложений 8, 10 множества $S^{\mathrm{u}}_{\sigma_2}$, $S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2}$ являются тривиальными узлами. Из определения тривиального узла следует, что существует гомеоморфизм

$$\Psi\colon \Sigma \to \Sigma'$$

такой, что
$$\Psi(S^{\mathrm{u}}_{\sigma_2}) = S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2}.$$
Далее будем обозначать образы множеств $S^{\mathrm{s}}_{\sigma_1}$, $S^{\mathrm{u}}_{\sigma_3}$ (для всех $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$, $\sigma_3 \in \Omega^3_{f^t}$) относительно гомеоморфизма Ψ теми же символами, что и оригиналы.

Пусть $D' \subset \Sigma'$ – 3-шар, не пересекающийся с множеством $\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_{f^t}\cup\Omega^3_{f^t}} V_\sigma$ и такой, что $S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2} \subset \operatorname{int} D'$. Положим $D = \Sigma' \setminus \operatorname{int} D'$.

Из предложения 8 следует, что для любой точки $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$ ($\sigma_3 \in \Omega^3_{f^t}$) множество $S^{\mathrm{s}}_{\sigma_1}$ ($S^{\mathrm{u}}_{\sigma_3}$) является гладко вложенной 2-сферой. Из обобщенной теоремы Шенфлиса следует, что сфера $S^{\mathrm{s}}_{\sigma_1}$ ($S^{\mathrm{u}}_{\sigma_3}$) делит 3-сферу Σ' на две компоненты связности, замыкание каждой из которых является 3-шаром. Обозначим через D_{σ_i}, $i \in \{1,3\}$, тот из шаров, который принадлежит внутренности шара D. Занумеруем седловые точки таким образом, чтобы для некоторого $n_0 \leqslant m_{f^t}$ выполнялось равенство
$$\bigcup_{i=1}^{n_0} D_{\sigma_i} = \bigcup_{i=1}^{m_{f^t}} D_{\sigma_i}.$$
Сделаем аналогичные обозначения для седловых точек потока g^t. Так как двуцветные графы потоков f^t, g^t изоморфны, то нумерация на множестве седловых точек потока g^t может быть выбрана аналогичным образом, причем $\sigma'_i = \eta_*(\sigma_i)$ для любого $i \in \{1,\dots,m_{f^t}\}$.

Из утверждения 8 следует, что существует гомеоморфизм
$$\Phi_0\colon \Sigma' \to \Sigma'$$
такой, что

1) $\Phi_0|_{D'} = \mathrm{id}$;

2) $\Phi_0(D_{\sigma_i}) = D_{\sigma'_i}$, $i \in \{1,\dots,n_0\}$.

Если $n_0 = m_{f^t}$, то положим $\Phi = \Phi_0\Psi$ и перейдем к следующему шагу. Пусть $n_0 < m_{f^t}$. Будем обозначать образы шаров D_{σ_i}, $D_{\sigma'_i}$, $i \in \{1,\dots,m_{f^t}\}$, и их границ относительно гомеоморфизма Φ_0 теми же символами, что и оригиналы. Для каждого шара D_{σ_j}, $j \in \{1,\dots,n_0\}$, имеющего непустое пересечение с множеством $\bigcup_{i=n_0+1}^{m_f} D_{\sigma_i}$, обозначим через $D_{\sigma_{j,1}},\dots,D_{\sigma_{j,n_j}}$ попарно непересекающиеся диски, являющиеся элементами множества $D_{\sigma_j} \cap \bigcup_{i=n_0+1}^{m_f} D_{\sigma_i}$ и такие, что $\bigcup_{k=1}^{n_j} D_{\sigma_{j,k}} = D_{\sigma_j} \cap \bigcup_{i=n_1+1}^{m_f} D_{\sigma_i}$, положим $D_{\sigma'_{j,k}} = \eta_*(D_{\sigma'_{j,k}})$, $k \in \{1,\dots,n_j\}$, и построим гомеоморфизм $\Phi_j\colon \Sigma' \to \Sigma'$, тождественный вне диска D_{σ_j} и такой, что $\Phi_j(D_{\sigma_{j,k}}) = D_{\sigma'_{j,k}}$. Если для каждого $j \in \{1,\dots,n_0\}$ справедливо равенство $D_{\sigma_j} \cap \bigcup_{i=n_0+1}^{m_f} D_{\sigma_i} = \bigcup_{l=1}^{k_j} D_{\sigma_{j,l}}$, то искомый гомеоморфизм Φ является суперпозицией гомеоморфизмов Ψ, Φ_0 и построенных гомеоморфизмов $\Phi_1,\dots,\Phi_{n_0}$. В противном случае продолжим процесс и за конечное число шагов получим Φ как суперпозицию всех построенных гомеоморфизмов. Предложение доказано.

Предложение 14 (шаг 4). *Существует гомеоморфизм $H_{\Sigma,\Sigma'}\colon \Sigma \to \Sigma'$ такой, что $H_{\Sigma,\Sigma'}|_{V_\sigma} = h_{\sigma,\sigma'}|_{V_\sigma}$ для любых седловых точек $\sigma \in \Omega_{f^t}, \sigma' \in \Omega_{g^t}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon \Sigma \to \Sigma'$ – гомеоморфизм, построенный на шаге 3. Положим $\Pi_\sigma = \Phi(V_\sigma \cap \Sigma)$ для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_{f^t}$, $\Pi_{\sigma'} = V_{\sigma'} \cap \Sigma'$

для точки $\sigma' \in \Omega_{g^t}$, и определим гомеоморфизм

$$h'_{\sigma,\sigma'} \colon \Pi_\sigma \to \Pi_{\sigma'}$$

соотношением

$$h'_{\sigma,\sigma'}|_{\Pi_\sigma} = h_{\sigma,\sigma'}\Phi^{-1}|_{\Pi_\sigma}.$$

Пусть $\sigma_1 \in \Omega^1_{f^t}$, $\sigma'_1 = \eta_*(\sigma_1) \in \Omega^1_{g^t}$. Множества Π_{σ_1}, $\Pi_{\sigma'_1}$ гомеоморфны каждой паре шаров $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^0$. Пусть $\Pi^0_{\sigma'_1} \subset \Sigma'$ – такая пара 3-шаров, что

1) $\Pi_{\sigma_1}, \Pi_{\sigma'_1} \subset \operatorname{int} \Pi^0_{\sigma'_1}$;

2) $\Pi^0_{\sigma'_1} \cap \Pi_\sigma = \varnothing$, $\Pi^0_{\sigma'_1} \cap \Pi_{\sigma'} = \varnothing$ для любых седловых точек σ, σ' потоков f^t, g^t соответственно, отличных от точек σ_1, σ'_1.

В силу утверждения 8 существует гомеоморфизм

$$\Psi_1 \colon \Sigma' \to \Sigma'$$

со следующими свойствами:

$$\Psi_1|_{\Sigma' \setminus \operatorname{int} \Pi^0_{\sigma_1}} = \mathrm{id}, \qquad \Psi_1|_{\Pi_{\sigma_1}} = h'_{\sigma_1,\sigma'_1}|_{\Pi'}.$$

Построим аналогичный гомеоморфизм для каждой седловой точки индекса 1 и обозначим через $\boldsymbol{\Psi}_1$ суперпозицию построенных гомеоморфизмов.

Пусть $\sigma_2 \in \Omega^2_{f^t}$, $\sigma'_2 = \eta_*(\sigma_2)$, $S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2} = W^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2} \cap \Sigma'$. В этом случае множества Π_{σ_2}, $\Pi_{\sigma'_2}$ являются полноториями. Пусть $\Pi^0_{\sigma'_2} \subset \Sigma'$ – трубчатая окрестность узла $S^{\mathrm{u}}_{\sigma'_2}$ такая, что $\Pi_{\sigma_2}, \Pi'_{\sigma'_2} \subset \operatorname{int} \Pi^0_{\sigma'_2}$, $\Pi^0_{\sigma'_2} \cap \Pi_\sigma = \varnothing$, $\Pi^0_{\sigma'_2} \cap \Pi_{\sigma'} = \varnothing$ для любых седловых точек σ, σ', отличных от точек σ_2, σ'_2. По определению гомеоморфизм $h'|_{\sigma,\sigma'}$ переводит параллель и меридиан полнотория Π_{σ_2} в параллель и меридиан полнотория $\Pi'_{\sigma'_2}$ соответственно, следовательно, в силу предложения 2 существует гомеоморфизм

$$\Psi_2 \colon \Sigma' \to \Sigma'$$

со следующими свойствами:

$$\Psi_2|_{\Sigma' \setminus \operatorname{int} \Pi^0_{\sigma'_2}} = \mathrm{id}, \qquad \Psi_2|_{\Pi_{\sigma_2}} = h'_{\sigma_2,\sigma'_2}|_{\Pi_{\sigma_2}}.$$

Пусть $\sigma_3 \in \Omega^3_{f^t}$, $\sigma'_3 = \eta_*(\sigma) \in \Omega^3_{g^t}$. Множества Π_{σ_3}, $\Pi_{\sigma'_3}$ гомеоморфны прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$. Пусть $\Pi^0_{\sigma'_3}$ – трубчатая окрестность множества $S^{\mathrm{s}}_{\sigma'_3} = W^{\mathrm{u}}_{\sigma'_3} \cap \Sigma'$ со свойствами, аналогичными свойствам множеств $\Pi^0_{\sigma'_1}$, $\Pi^0_{\sigma'_2}$. В силу предложения 3 существует гомеоморфизм

$$\Psi_3 \colon \Sigma' \to \Sigma'$$

со следующими свойствами:

$$\Psi_3|_{\Sigma' \setminus \operatorname{int} \Pi^0_{\sigma'_3}} = \mathrm{id}, \qquad \Psi_3|_{\Pi_{\sigma_3}} = h'_{\sigma_3,\sigma'_3}|_{\Pi_{\sigma_3}}.$$

Построим аналогичный гомеоморфизм для каждой седловой точки индекса 3 и обозначим через $\boldsymbol{\Psi}_3$ суперпозицию построенных гомеоморфизмов.

Теперь искомый гомеоморфизм $H_{\Sigma,\Sigma'}$ определяется как суперпозиция $\boldsymbol{\Psi}_3\Psi_2\boldsymbol{\Psi}_1\Phi$. Предложение доказано.

Предложение 15 (шаг 5). *Гомеоморфизм* $H_{\Sigma,\Sigma'}\colon \Sigma \to \Sigma'$ *продолжается до гомеоморфизма* $H\colon M^4 \to M^4$ *такого, что* $Hf^t = g^tH$.

Доказательство. Для каждой седловой точки $\sigma(\sigma')$ потока $f^t(g^t)$ положим

$$\mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(V_\sigma), \qquad \mathbb{V}_{\sigma'} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} g^t(V_\sigma)$$

и определим гомеоморфизм

$$H_{\sigma,\sigma'}\colon \mathbb{V}_\sigma \to \mathbb{V}_{\sigma'}$$

соотношением

$$H_{\sigma,\sigma'}(x) = g^{-t_x}\bigl(h_{\sigma,\sigma'}(f^{t_x}(x))\bigr),$$

где $t_x \in \mathbb{R}$ – такое время, что $f^{t_x}(x) \in V_\sigma$.

Для каждой точки $x \in M_{f^t}$ положим

$$H_{M_{f^t},M_{g^t}}(x) = g^{-t_x}\bigl(H_{\Sigma,\Sigma'}(f^{t_x}(x))\bigr),$$

где $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_x}(x) \in \Sigma$.

По построению гомеоморфизм $H_{M_{f^t},M_{g^t}}$ совпадает с гомеоморфизмом $H_{\sigma,\sigma'}$ на пересечении $M_{f^t} \cap \mathbb{V}_\sigma$, поэтому следующая формула корректно определяет гомеоморфизм

$$H\colon M^4 \setminus (\Omega^0_{f^t} \cup \Omega^4_{f^t}) \to M^4 \setminus (\Omega^0_{g^t} \cup \Omega^4_{g^t}),$$

который однозначно продолжается на множество $\Omega^0_{f^t} \cup \Omega^4_{f^t}$:

$$H(x) = \begin{cases} H_{\sigma,\sigma'}(x), & x \in \mathbb{V}_\sigma,\ \sigma \in \Omega^1_{f^t} \cup \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t}, \\ H_{M_{f^t},M_{g^t}}(x), & x \in M_{f^t}. \end{cases}$$

Предложение доказано.

§ 6. Реализация классов топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$

Предложение 16. *Пусть* $f^t \in G(M^4)$. *Тогда его двуцветный граф является деревом.*

Доказательство. Каждое ребро e графа Γ_{f^t} соответствует $(n-1)$-мерной сфере, которая в силу леммы 1 делит несущее многообразие M^4 на две компоненты связности. Поэтому ребро e делит граф Γ_{f^t} на две компоненты связности, следовательно, граф Γ_{f^t} не содержит циклов.

Покажем, что граф Γ_{f^t} связен. По определению граф Γ_{f^t} имеет k_{f^t} ребер и $k_{f^t}+1$ вершину. Известно, что связный граф с $k+1$ вершинами является деревом тогда и только тогда, когда он имеет в точности k ребер. Предположим, что граф Γ_f не связен. Тогда он состоит из связных подграфов $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$, $m \geqslant 2$, и добавление $m-1$ ребер превращает совокупность подграфов Γ_i в связный граф без циклов (т. е. дерево) с k_f+1 вершинами и k_f+m ребрами, что противоречит упомянутому свойству деревьев. Поэтому граф Γ_{f^t} является связным и не содержит циклов, т. е. является деревом. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть Γ – произвольное дерево с одной отмеченной вершиной, ребра которого раскрашены в два цвета s и u. Не уменьшая общности, предположим, что отмеченная вершина инцидентна хотя бы одному ребру цвета s. Если это не так, то обратим цвета ребер (заменим s на u и наоборот) и реализуем поток f^t по полученному графу. Искомым потоком будет поток f^{-t}.

Обозначим через $g_1^t \in G(M^4)$ поток, множество седловых точек которого состоит в точности из одного седла (тогда его индекс Морса равен 2). Алгоритм построения такого потока описан в работах [9], [10]. Пусть $\omega \in \Omega^0_{g_1^t}$, $\sigma_* \in \Omega^2_{g_1^t}$.

Обозначим через g_2^t градиентно-подобный поток на сфере S^4, двуцветный граф которого $\Gamma_{g_2^t}$ изоморфен графу Γ. Алгоритм построения таких потоков описан в работе [27]. Пусть $D \in S^4$ – область, соответствующая отмеченной вершине графа Γ. По предположению в границу области входит, по крайней мере, одно устойчивое многообразие размерности $n-1$ седловой точки $\sigma \in \Omega^1_{g_2^t}$. Следовательно, в границу области D входит и источниковое состояние равновесия α, принадлежащее замыканию многообразия W^{s}_σ.

Обозначим через $S^{n-1}_\omega \subset W^{\mathrm{s}}_\omega$, $S^{n-1}_\alpha \subset W^{\mathrm{u}}_\alpha$ сферы без контакта для ограничения потоков g_1^t, g_2^t на множества $W^{\mathrm{s}}_\omega \setminus \omega$, $W^{\mathrm{u}}_\alpha \setminus \alpha$ соответственно (такие сферы можно выбрать как гиперповерхности равного уровня энергетических функций Морса для потоков g_1^t, g_2^t) и через B^n_ω, B^n_α шары, ограниченные сферами S^{n-1}_ω, S^{n-1}_α, такие, что $\omega \in B^n_\omega$, $\alpha \in B^n_\alpha$. Ориентируем сферы S^{n-1}_ω, S^{n-1}_α как границы шаров B^n_ω, B^n_α.

Обозначим через $\varphi\colon S^{n-1}_\omega \to S^{n-1}_\alpha$ обращающий выбранную ориентацию диффеоморфизм такой, что $\varphi(S^{n-1}_\omega \cap W^{\mathrm{s}}_{\sigma_*}) \subset D \cap S^{n-1}_\alpha$, склеим многообразия $M^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\omega$, $S^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\alpha$ по диффеоморфизму φ, обозначим через $\widetilde{M}^4$ полученное многообразие и через $p\colon (M^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\omega) \cup S^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\alpha$ естественную проекцию. Многообразие $\widetilde{M}^4$ является связной суммой комплексной проективной плоскости M^4 и сферы S^4, поэтому гомеоморфно M^4. Небольшая модификация потоков g_1^t, g_2^t в окрестности сфер S^{n-1}_ω, S^{n-1}_α (детали см. в [26]) позволяет определить на многообразии $\widetilde{M}^4$ поток $f^t \in G(\widetilde{M}^4)$ такой, что f^t совпадает с потоком g_1^t на множестве $p(M^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\omega)$ и с потоком g_2^t на множестве $S^4 \setminus \operatorname{int} B^n_\alpha$. По построению граф Γ_{f^t} изоморфен графу Γ. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 199–206.
2. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
3. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
4. В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, МЦНМО, М., 2004, 352 с.; англ. пер.: V. V. Prasolov, *Elements of combinatorial and differential topology*, Grad. Stud. Math., **74**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, xii+331 pp.
5. J. Eells, Jr., N. H. Kuiper, “Manifolds which are like projective planes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **14** (1962), 5–6.

6. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
7. C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
8. C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.
9. V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, “Morse–Smale systems with few non-wandering points”, *Topology Appl.*, **160**:3 (2013), 498–507.
10. Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия”, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions”, *Sb. Math.*, **207**:5 (2016), 702–723.
11. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, “Комбинаторный инвариант для каскадов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geqslant 4$”, *Матем. заметки*, **105**:1 (2019), 136–141; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, “A combinatorial invariant of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections on the sphere S^n, $n \geqslant 4$”, *Math. Notes*, **105**:1 (2019), 132–136.
12. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977, 487 с.; англ. пер.: D. B. Fuks, V. A. Rokhlin, *Beginner’s course in topology. Geometric chapters*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xi+519 pp.
13. D. Rolfsen, *Knots and links*, Reprint with corr. of the 1976 original, AMS Chelsea Publishing, **346**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, ix+439 pp.
14. C. McA. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:2 (1989), 371–415.
15. М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Grad. Texts in Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976, x+221 pp.
16. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.
17. Дж. Милнор, *Теория Морса*, М., Мир, 1965, 184 с.; пер. с англ.: J. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1963, vi+153 pp.
18. С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
19. M. Brown, “A proof of the generalized Schoenflies theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:2 (1960), 74–76.
20. M. Brown, “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math.* (2), **75**:2 (1962), 331–341.
21. Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Transl. from the Portuguese, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.
22. Д. М. Гробман, “Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **128**:5 (1959), 880–881.
23. P. Hartman, “A lemma in the theory of structural stability of differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**:4 (1960), 610–620.
24. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974, xvi+222 с.

25. Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Transl. from the Japan., Transl. Math. Monogr., **208**, Iwanami Series in Modern Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, xiv+219 pp.
26. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством", *Матем. тр.*, **21**:2 (2018), 163–180; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, "On topology of manifolds admitting a gradient-like flow with a prescribed non-wandering set", *Siberian Adv. Math.*, **29**:2 (2019), 116–127.
27. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, "О реализации классов топологической сопряженности каскадов Морса–Смейла на сфере S^n", *Труды МИАН*, **310**, Избранные вопросы математики и механики (2020), 119–134; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, "On realization of topological conjugacy classes of Morse–Smale cascades on the sphere S^n", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **310** (2020), 108–123.

Вячеслав Зигмундович Гринес
(Vyacheslav Z. Grines)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило в редакцию
13.05.2021
14.08.2021

Елена Яковлевна Гуревич
(Elena Ya. Gurevich)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: egurevich@hse.ru