**Топология распадающихся вещественных алгебраических кривых[[1]](#footnote-1)**

**Г. М. Полотовский**

*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"*

*Россия, Нижний Новгород*

*E-mail:* *polotovsky@gmail.com*

 **Аннотация.** Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых, распадающихся на несколько неприводимых сомножителей. Даётся обзор результатов о кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя, и о кривых степени 8, распадающихся на 2 сомножителя, полученных в последние три года.

 **Ключевые слова:** 16-я проблема Гильберта, распадающиеся плоские вещественные алгебраические кривые, топологическая классификация.

 **Topology of decomposable real algebraic curves[[2]](#footnote-2)**

**G. M. Polotovskiy**

*National Research University Higher School of Economics*

*Russian Federation, Nizhny Novgorod*

*E-mail:* *polotovsky@gmail.com*

 **Abstract.** We consider the problem of isotopic classification of plane real algebraic curves that decompose into several irreducible factors, which is related to the first part of Hilbert's 16th problem. A review of the results obtained in the last three years about curves of degree 7 that decompose into three factors, and about curves of degree 8, that decompose into two factors, is given.

 **Keywords:** Hilbert's 16th problem, decomposable plane real algebraic curves, topological classification.

 Плоской проективной вещественной алгебраической кривой (ниже – просто кривая)$ C\_{m}$ степени *m* называется однородный многочлен $C\_{m}(x\_{0}, x\_{1}, x\_{2})$ степени *m* c вещественными коэффициентами, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, где $(x\_{0}: x\_{1}: x\_{2}) $– координаты в вещественной проективной плоскости $RP^{2}$. Множество$ \left\{(x\_{0}: x\_{1}: x\_{2}\right) \in RP^{2}| C\_{m}(x\_{0}, x\_{1}, x\_{2})$ = 0} называется множеством вещественных точек кривой$ C\_{m}$ и обозначается $RC\_{m}.$

 Вопрос о топологии множества $RC\_{6} $в случае *неособой* кривой, включённый Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы, был решён Д.А. Гудковым [1] в 1969 г. В предисловии к книге [1] Гудков поставил задачу о топологии множества $RC\_{6} $для случая, когда кривая$ C\_{6}$ распадается в произведение двух *M*-кривых (кривая$ C\_{m}$ называется *M*-кривой, если $RC\_{m} $имеет максимально возможное для данной степени *m* число компонент связности, равное $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1 $согласно теореме Харнака). Эта задача была решена в [2], а затем и для случая, когда число сомножителей больше двух – в [3]. Начиная с середины 1980-х годов многие авторы внесли вклад в решение аналогичной задачи о кривых $C\_{7}$, распадающихся в произведение двух *M*-кривых; эта задача в наcтоящее время близка к завершению. Также была найдена классификация взаимных расположений *M*-кривой степени 5 и пары прямых (соответствующая библиография приведена в [4]).

 В докладе даётся обзор полученных в последнее время результатов (частично опубликованных в [4] – [7]) в аналогичных классификационных задачах: a) о кривых $C\_{7}$, распадающихся в произведение трёх *M*-кривых: пары коник и кубики; б) о кривых $C\_{8}$, распадающихся в произведение двух *M*-кривых: коники и секстики или двух квартик. Без наложения дополнительных условий все эти задачи труднообозримы, поэтому всюду предполагаются выполненными условия максимальности и общего положения: каждые две кривые-сомножители пересекаются трансверсально в максимально возможном по теореме Безу числе точек, и все эти точки расположены на одной компоненте связности каждой из кривых-сомножителей. Но и при этом задача остаётся слишком объёмной, поэтому рассматриваемые случаи делятся на серии, выделяемые условиями комбинаторного характера.

 Схема исследования во всех случаях следующая: сначала перечисляются *топологические модели* кривых данной серии, удовлетворяющие наложенным условиям, топологическим следствиям теоремы Безу и следствиям известных результатов о топологии неособых алгебраических кривых. Затем для каждой модели из полученного списка делается попытка либо доказать её нереализуемость алгебраической кривой рассматриваемого класса с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, либо попытка построить её алгебраическую реализацию с помощью различных вариантов метода малого параметра, включая метод *patchworking*, предложенный О.Я. Виро, и его обобщения.

 Ниже приводится краткая сводка полученных результатов.

 В [5] доказано, что имеются 57 допустимых топологических моделей взаимных расположений максимально пересекающихся пары кубик и коники в общем положении таких, что для каждой из этих коник все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из внешних (т. е. лежащей вне другой коники) дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не перемежаются (т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй). Из этих моделей кривыми степени 7 реализованы 4 модели, для двух моделей вопрос о такой реализуемости открыт, а остальные модели не могут быть реализованы кривыми степени 7. В подготовленной к публикации новой статье В.А. Горской рассмотрен случай, когда точки пересечения нечётной ветви кубики с кониками перемежаются; здесь из 63 допустимых моделей 14 реализованы кривыми степени 7 и вопрос о реализуемости 5 моделей остаётся открытым.

 В бакалаврской работе И.М. Соколовой (2022 г.) рассматривалась аналогичная задача в случае наличия точек нечётной ветви кубики на внутренних дугах коники. Здесь удалось реализовать одну модель и остаётся открытым вопрос о реализуемости 7 моделей.

 В работе Н.Д. Пучковой [7] рассмотрена большая серия взаимных расположений двух *М*-кривых степени 4, пересекающихся без касаний в 16 точках на одном овале одной кривой и на одном овале второй кривой, названных змеями. 10 таких моделей реализованы кривыми степени 8 и остаётся открытым вопрос о такой реализуемости для 9 моделей. Н.Д. Пучковой подготовлена к печати ещё одна статья о классификации змей другого класса.

 В работе [4] изучались взаимные расположения коники и *М*-кривой степени 6 при аналогичных условиях максимальности и общего положения.

Здесь из 323 допустимых моделей 6 реализованы кривыми степени 8, а из оставшихся 317 моделей использовавшиеся методы применимы к 245 моделям, для 231 из которых доказана их нереализуемость кривыми степени 8, а для оставшихся 14 вопрос о такой реализуемости остаётся открытым.

 В работе И.М. Борисова [6] построены 29 попарно топологически различных расположений *М*-кубики и *М*-квинтики в общем положении, нечётные ветви которых пересекаются в 15 точках.

**Список литературы**

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) //Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. Вып.87. С.1–214.

 2. Полотовский Г. М. Каталог *M*-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. T.236. №3. С. 548–551.

 3. Kuzmenko T. V., Polotovskii G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of *M*-curves in general position // Translations of the American Mathematical Society. Series 2. 1996. Vol.173. P. 165–178.

 4. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. 2020. T.176. C. 3–18.

 5. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. 2020. T.22. №1. C. 24–37.

 6. Борисов И. М. Построение некоторых взаимных расположений *M*-кубики и *M*-квинтики // Чебышевcкий сборник. 2021. T.22. Вып.1. C. 76–91.

 7. Пучкова Н. Д. О взаимных расположениях двух М-кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. 2022 (13 с., в печати).

1. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101 [↑](#footnote-ref-1)
2. The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, grant of the Ministry of science and higher education of the RF, ag. № 075-15-2022-1101 [↑](#footnote-ref-2)