О. И. Дугинов, Б. М. Кускова, Д. С. Малышев, Н. А. Шур, Структурные и алгоритмические свойства максимальных диссоциирующих множеств в графах, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2022, том 28, номер 2, 114–142

DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-114-142

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 519.1

# СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ДИССОЦИИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ В ГРАФАХ[1]

**О. И. Дугинов, Б. М. Кускова, Д. С. Малышев, Н. А. Шур**

Подмножество вершин графа называется диссоциирующим, если степени вершин подграфа, порожденного этим подмножеством, не превосходят 1. Диссоциирующее множество максимально, если оно не содержится ни в каком другом диссоциирующем множестве с бо́льшим числом вершин. В данной работе предлагаются оценки наибольшего (наименьшего) числа вершин в максимальном диссоциирующем множестве графа. Доказано, что задача нахождения максимального диссоциирующего множества наибольшей мощности NP-трудна для квазихордальных двудольных графов. Кроме этого доказано, что задача нахождения максимального диссоциирующего множества наименьшей мощности NP-трудна для хордальных двудольных графов, двудольных графов с максимальной степенью вершин, равной 3, планарных графов с большим обхватом, а также для классов графов, характеризуемых конечными списками запрещенных порожденных двусвязных подграфов. Предлагается линейный алгоритм решения последней задачи в классе деревьев.

Ключевые слова: максимальное диссоциирующее множество графа, задача поиска наибольшего порожденного подграфа с максимальной степенью вершин не больше 1, максимальное диссоциирующее множество, квазихордальные двудольные графы, NP-полнота, наследственные классы графов, деревья.

**O. I. Duginov, B. M. Kuskova, D. S. Malyshev, N. A. Shur. Structural and algorithmic properties of maximal dissociating sets in graphs.**

A subset of the vertex set of a graph is called dissociating if the degrees of the vertices of the subgraph generated by this subset do not exceed 1. A dissociating set is maximal if it is not contained in any dissociating set with a greater number of vertices. Estimates for the greatest (smallest) number of vertices in a maximal dissociating set of a graph are proposed. It is proved that the problem of finding a maximal dissociating set of smallest cardinality is NP-hard for quasichordal bipartite graphs. In addition, it is proved that the problem of finding a maximal dissociating set of smallest cardinality is NP-hard for chordal bipartite graphs, bipartite graphs with the greatest degree of a vertex equal to 3, planar graphs with large girth, and for classes of graphs characterized by finite lists of forbidden generated biconnected subgraphs. A linear algorithm for solving the latter problem in the class of trees is proposed.

Keywords: maximal dissociating set of a graph, problem of finding a maximal generated subgraph with maximum degree of a vertex at most 1, maximal dissociation set, perfect elimination bipartite graph, NP-completeness, hereditary graph classes, trees.

**MSC:** 05C70

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-114-142

## Введение

Рассматриваются только неориентированные графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$ без кратных ребер и петель. Все стандартные теоретико-графовые понятия и обозначения, не определяемые в работе, могут быть найдены в [1]. Множество вершин графа, смежных с вершиной $v$, называется *окружением вершины* $v$ и обозначается через $N(v)$. Множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ называется *замкнутым окружением вершины* $v$. Подграф графа $G$, порожденный множеством вершин $S \subseteq V(G)$, обозначается через $G(S)$.

Подмножество $D \subseteq V(G)$ множества вершин графа $G$ называется *диссоциирующим*, если степени вершин подграфа графа $G$, порожденного этим подмножеством, не превосходят 1.

[1]Работа выполнена Д.С. Малышевым при поддержке РФФИ (проект № 20-51-04001), О.И. Дугиновым и Н.А. Шур — при поддержке БРФФИ (проект № Ф21РМ-001).

Будем говорить, что *диссоциирующее множество* $D$ графа $G$ *максимально*, если не существует диссоциирующего множества $D'$ графа $G$ такого, что $D \subseteq D'$ и $D \neq D'$. Наибольшая мощность максимального диссоциирующего множества графа $G$ обозначается через $diss^+(G)$. Наименьшая мощность максимального диссоциирующего множества графа $G$ обозначается через $diss^-(G)$. Диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| = diss^+(G)$ называется *наибольшим*. Максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| = diss^-(G)$ называется *наименьшим*.

Диссоциирующие множества можно рассматривать как аппроксимацию независимых множеств. В подграфе, порожденном независимым множеством, все вершины не смежны друг с другом. В подграфе, порожденном диссоциирующим множеством, разрешены “плохие” пары вершин, т. е. пары смежных вершин. При этом мы требуем, чтобы таких “плохих” пар было немного в следующем смысле: каждая вершина множества смежна не более чем с одной другой вершиной этого множества. Диссоциирующие множества находят самые разнообразные применения.

Передатчик отправляет слово языка $L$ над алфавитом $\Sigma$. Вследствие радиопомех происходит искажение сигналов, в результате чего приемник может некоторые символы слова перепутать. Рассмотрим граф $G$, вершинами которого являются символы алфавита $\Sigma$, и два символа смежны тогда и только тогда, когда они могут быть перепутаны друг с другом. Слова, для их безошибочной передачи, должны состоять из тех символов алфавита $\Sigma$, которые не могут быть перепутаны друг с другом. Наибольшее множество таких символов представляет собой наибольшее независимое множество $I$ графа $G$. Символов из множества $I$ может быть недостаточно. С целью расширения семейства используемых символов вместо наибольшего независимого множества можно рассмотреть наибольшее диссоциирующее множество $D$ графа $G$. Принимающая сторона получит слово, состоящее из символов множества $D$, вообще говоря, в искаженном виде. Однако исходное слово можно однозначно восстановить, если из него нельзя получить другое слово языка $L$ следующим образом: каждый символ слова либо не изменяется, либо заменяется на единственный символ множества $D$, с которым он может быть перепутан.

Пусть на ограниченной территории размещены два вида агентов, а именно датчики и обработчики. Стоимость обработчиков существенно больше, чем стоимость датчиков, и первых значительно меньше, чем вторых. Агенты могут обмениваться друг с другом данными по каналу беспроводной связи, если они находятся в области действия друг друга. Область действия агента $\alpha$ — множество агентов, которые располагаются в пределах действия сигнала агента $\alpha$. Все агенты разбиты на группы, называемые кластерами. Датчик отслеживает, регистрирует события, происходящие в окружающей его среде, и собирает данные, которые отправляет обработчику его кластера. Обработчик на основе полученных данных выполняет определенные операции.

Пусть на территории выделены позиции, на каждую из которых необходимо поместить один датчик или один обработчик. Все размещенные на позициях агенты разбиваются на кластеры. Требуется, чтобы внутри каждого кластера, во-первых, был хотя бы один обработчик и, во-вторых, каждый датчик имел возможность обмениваться данными с обработчиком. Рассмотрим граф $G$, в котором роль вершин играют позиции для агентов и две позиции смежны тогда и только тогда, когда помещенные в них агенты могут обмениваться друг с другом данными. Если нас интересуют наименьшее множество позиций для обработчиков и разбиение множества агентов на кластеры с одним обработчиком при условии, что нет двух обработчиков, которые находятся в области действия друг друга, то это наименьшее множество позиций для обработчиков есть в точности наименьшее максимальное независимое множество $I$ графа $G$ [2]. На позициях, принадлежащих множеству $I$, размещаются обработчики, а остальные позиции заполняются датчиками. Каждый кластер содержит один обработчик и датчики, которые могут обмениваться данными с ним. Другой сценарий распределения агентов по позициям основан на поиске наименьшего множества позиций для обработчиков при условии, что после разбиения множества агентов на кластеры не более чем с двумя обработчиками выполняются следующие условия: (*а*) два обработчика из одного и того же кластера могут обмениваться данными, а два обработчика из разных кластеров нет и (*б*) каждый датчик может обмениваться данными как минимум с двумя обработчиками (необязательно напрямую, а возможно, с использованием промежуточного обработчика) на случай, если один из обработчиков не сможет выполнять операции. Такое наименьшее множество позиций для обработчиков есть в точности наименьшее максимальное диссоциирующее множество графа $G$.

В данной работе мы продолжаем исследование сложностных и структурных аспектов максимальных диссоциирующих множеств графа. Рассматриваются следующие две задачи.

З а д а ч а 1: “Наибольшее диссоциирующее множество”.

*Условие*: заданы граф $G = (V, E)$ и натуральное число $k$.

*Вопрос*: существует ли максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| \geq k$?

З а д а ч а 2: “Наименьшее максимальное диссоциирующее множество”.

*Условие*: заданы граф $G = (V, E)$ и натуральное число $k$.

*Вопрос*: существует ли максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| \leq k$?

Задача “Наибольшее диссоциирующее множество” своими корнями уходит к классической работе Яннакакиса [3], в которой установлена ее NP-полнота в классе двудольных графов. Известно, что задача остается NP-полной в классе $(H_1, H_2, \ldots, H_t, C_4, C_6, \ldots, C_{2\ell})$-свободных двудольных графов с максимальной степенью вершин, равной 3, где $t \geq 1$ и $\ell \geq 2$ — константы, и $H_i$ — граф, который получается из двух копий цепи $P_3$ соединением их центральных вершин простой цепью длины $i$ (см. [4; 5]) в классе планарных реберных графов от планарных двудольных графов с максимальной степенью вершин, равной 4 (см. [6]). С другой стороны, задача становится полиномиально разрешимой в классах хордальных и хордальных двудольных графов, AT-свободных графов и некоторых других наследственных классах графов [4–8]. В данной работе с целью уточнения границы между NP-полными и полиномиально разрешимыми случаями задачи мы установим, что задача остается NP-полной в классе квазихордальных двудольных графов, который содержит в себе класс хордальных двудольных графов. В работах [9–11] разработаны точные экспоненциальные алгоритмы решения задачи “Наибольшее диссоциирующее множество”. Отметим также, что эта задача является частным случаем задачи поиска порожденного подграфа, в котором число вершин не меньше, чем $k$ и степени вершин не превосходят заданную константу. Последняя задача (англ. “Bounded-degree vertex deletion problem”) изучается с точки зрения параметрической сложности [12; 13].

По сравнению с задачей “Наибольшее диссоциирующее множество” задача “Наименьшее максимальное диссоциирующее множество” изучена в меньшей степени. Известно, что она NP-полна для двудольных графов, слабо хордальных графов [6] и полиномиально разрешима для графов пересечения дуг окружности и AT-свободных графов [14]. В работе [6] поставлен вопрос о сложностном статусе задачи в классе хордальных двудольных графов. В настоящей работе, отвечая на этот вопрос, мы установим, что задача остается NP-полной для хордальных двудольных графов. Кроме этого, мы покажем, что задача NP-полна для двудольных графов с максимальной степенью вершин, равной 3, планарных графов с большим обхватом, $\mathscr{F}$-свободных графов, где $\mathscr{F}$ — произвольное конечное семейство двусвязных графов, а также предложим линейный алгоритм решения задачи в классе деревьев.

В работе [15] изучаются экстремальные задачи на графах, связанные с максимальными диссоциирующими множествами. В работе [16] изучаются графы, в каждом из которых все максимальные диссоциирующие множества равномощны друг другу. В нашей работе предлагаются различные оценки параметров $diss^+(G)$ и $diss^-(G)$.

## 1. Оценки параметров

В этом разделе даются оценки параметров $diss^+(G)$ и $diss^-(G)$.

Будем рассматривать следующие графовые инварианты: число доминирования $\gamma(G)$, число независимого доминирования $i(G)$, число независимости $\alpha(G)$. Для любого графа $G$ имеют место неравенства $\gamma(G) \le diss^-(G) \le diss^+(G)$. Первое неравенство вытекает из следующего простого факта: любое максимальное диссоциирующеее множество графа $G$ является доминирующим. Второе неравенство в цепочке тривиальное. Отметим также очевидные неравенства $i(G) \le \alpha(G) \le diss^+(G)$, которые справедливы для любого графа $G$.

Параметры $diss^-(G)$ и $\alpha(G)$ в общем случае не сравнимы. Например, $2 = diss^-(K_{1,n}) < \alpha(K_{1,n}) = n$ для любого $n \ge 3$, $2 = diss^-(K_n) > \alpha(K_n) = 1$ для любого $n \ge 2$ и $diss^-(C_{2\ell}) = \alpha(C_{2\ell}) = \ell$ для любого $\ell \ge 2$. На рис. 1 приведем другие примеры графов $G$, для которых $diss^-(G) > \alpha(G)$.

Нетрудно видеть, что $\ell + 1 = diss^-(C_{2\ell+1}) > \alpha(C_{2\ell+1}) = \ell$ для любого $\ell \ge 2$. Рассмотрим три вершинно-непересекающихся графа, а именно, полные графы $K_n$ и $K_m$ $(n, m \ge 3)$, а также простую цепь $P_3$ порядка 3. Одну концевую вершину цепи отождествим с некоторой вершиной полного графа $K_n$, а другую — с некоторой вершиной другого полного графа $K_m$. Полученный в результате граф обозначим через $F$ (см. рис. 1). Заметим, что $4 = diss^-(F) > \alpha(F) = 3$. Рассмотрим три вершинно-непересекающиеся копии $Q_1, Q_2$ и $Q_3$ простой цепи порядка 4. Пусть $V(Q_i) = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ и $E(Q_i) = \{\{a_i, b_i\}, \{b_i, c_i\}, \{c_i, d_i\}\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Добавим два ребра $\{b_1, b_2\}$ и $\{b_2, b_3\}$. Полученный в результате граф обозначим через $H$ (см. рис. 1). Пусть $D$ — наименьшее максимальное диссоциирующее множество графа $H$. Хотя бы одна из трех вершин $b_1, b_2$ или $b_3$ не принадлежит множеству $D$. Стало быть, множество $D$ содержит хотя бы три вершины из одного подграфа $Q_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, и хотя бы две вершины из двух других. Таким образом, $|D| \ge 7$ и $diss^-(H) \ge 7 > 6 = \alpha(H)$.

**Теорема 1.** *Для любого двудольного графа $G$ с минимальной степенью вершин, не меньшей, чем 2, имеет место соотношение $diss^-(G) \le \alpha(G)$.*

Доказательство. Пусть $G$ — двудольный граф порядка $n$ такой, что степень каждой его вершины не меньше, чем 2. Тогда $\alpha(G) \ge n/2$. Рассмотрим долю графа $G$ с минимальным числом вершин. Пусть $D$ — множество вершин этой доли. Тогда $|D| \le n/2$. Утверждается, что $D$ — максимальное диссоциирующее множество графа $G$. Ясно, что $D$ — диссоциирующее множество графа $G$. Любая вершина $v \notin D$ смежна по крайней мере с двумя вершинами множества $D$. Следовательно, диссоциирующее множество $D$ максимально и $diss^-(G) \le |D| \le n/2 \le \alpha(G)$.

Теорема 1 доказана.

Параметры $i(G)$ и $diss^-(G)$ также не сравнимы в общем случае. В самом деле, $1 = i(K_{1,\ell}) < diss^-(K_{1,\ell}) = 2$ для любого $\ell \ge 1$, $i(O_n) = diss^-(O_n) = n$ для любого $n \ge 1$, $n = i(K_{n,n}) >$

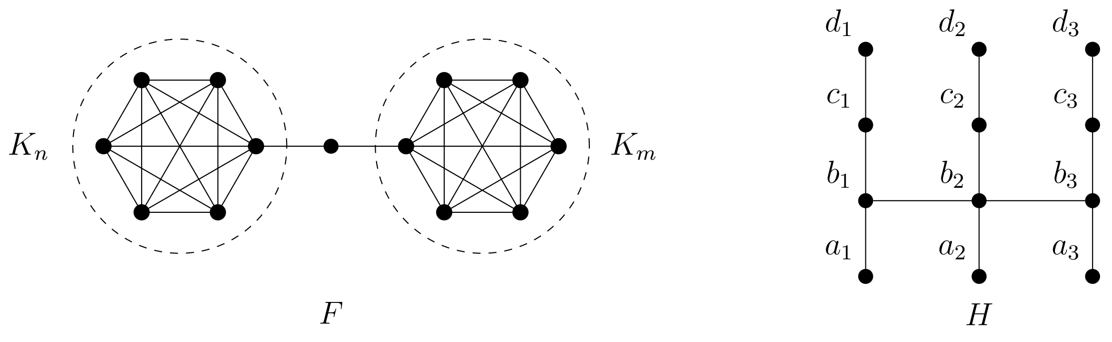


Рис. 1. Примеры графов $G$, для которых $diss^-(G) > \alpha(G)$.

$diss^-(K_{n,n}) = 2$ для любого $n \geq 3$. Заметим, что равенство $i(G) = \gamma(G)$ влечет неравенство $i(G) \leq diss^-(G)$. Равенство $i(G) = \gamma(G)$ (и, как следствие, неравенство $i(G) \leq diss^-(G)$) справедливо для $K_{1,3}$-свободных графов [17], доминантно-совершенных графов [18] и некоторых других классов графов [19, p. 842].

**Теорема 2.** *Для любого графа $G$ порядка $n \geq 4$ имеют место соотношения*

$$(4/n)i(G) \leq diss^-(G) \leq 2i(G). \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I$ — максимальное независимое множество графа $G$ такое, что $|I| = i(G)$. Нетрудно видеть, что множество $I$ можно дополнить до максимального диссоциирующего множества графа $G$, добавив в него не более $|I|$ вершин. Следовательно, $diss^-(G) \leq 2|I| = 2i(G)$.

Докажем неравенство $i(G) \leq (n/4)diss^-(G)$. Так как $n \geq 4$, то $diss^-(G) \geq 2$. Если $diss^-(G) \geq 4$, то доказываемое неравенство тривиально.

Пусть $diss^-(G) = 2$. Рассмотрим максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| = 2$. Если $D$ — независимое множество графа $G$, то оно максимальное, и как следствие $i(G) \leq |D| = 2 \leq (n/4)diss^-(G)$. Пусть множество $D = \{u, v\}$ не является независимым. Тогда любая вершина $w \notin D$ смежна с вершиной $u$ или $v$. Пусть $A = N(u) \setminus N[v]$ и $B = N(v) \setminus N[u]$. Не теряя общности, предположим $|A| \leq |B|$. Тогда $|A| \leq (n-2)/2$. Пусть $D = \{v\} \cup I$, где $I$ — максимальное независимое множество подграфа $G(A)$. Тогда $D$ — максимальное независимое множество графа $G$ и $i(G) \leq |D| = |I| + 1 \leq |A| + 1 \leq (n-2)/2 + 1 \leq n/2 = (n/4)diss^-(G)$.

Пусть $diss^-(G) = 3$. Рассмотрим максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| = 3$. Если $D$ — независимое множество, то оно максимально и $i(G) \leq |D| = 3 \leq (n/4)diss^-(G)$. Пусть теперь множество $D = \{x, y, z\}$ не является независимым множеством. Тогда в множестве $D$ есть ровно две смежные вершины. Предположим $\{x, y\} \in E(G)$. Пусть $A = N(x) \setminus (N[y] \cup N[z])$ и $B = N(y) \setminus (N[x] \cup N[z])$. Не теряя общности, предположим $|A| \leq |B|$. Тогда $|A| \leq (n-3)/2$. Пусть $D = \{y, z\} \cup I$, где $I$ — максимальное независимое множество подграфа $G(A)$. Нетрудно видеть, что $D$ — максимальное независимое множество графа $G$ и $i(G) \leq |D| = |I| + 2 \leq |A| + 2 \leq 2 + (n-3)/2 = (n+1)/2 < ((n+2)/6)diss^-(G) \leq (n/4)diss^-(G)$.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Обе оценки (1.1) для $diss^-(G)$ достижимы. Оценка сверху достигается на 1-регулярном графе, а оценка снизу — на графе, представляющем собой две копии звезды $K_{1,n-2}$, центральные вершины которых смежны.

Переходим к рассмотрению оценок для параметра $diss^+(G)$. Напомним, что граф называется *субкубическим*, если степени его вершин не превосходят 3. В работе [20, c. 3] установлено, что для любого субкубического дерева $G$ порядка $n$ имеет место оценка $diss^+(G) \leq (4n+2)/5$. Мы получим оценку сверху для $diss^+(G)$ в предположении, что $G$ — субкубический лес.

**Теорема 3.** *Для любого субкубического леса $G$ порядка $n \geq 3$, каждая компонента связности которого содержит по крайней мере три вершины, справедливо неравенство*

$$diss^+(G) \leq \frac{6n}{7}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *В любом субкубическом лесу найдется хотя бы один из следующих четырех наборов вершин*:

(*а*) *изолированная вершина $v$*;

(*б*) *смежные вершины $\ell$ и $v$ степени один*;

(*в*) *вершины $\ell_1, \ell_2$ степени один, смежные с одной и той же вершиной $v$*;

(*г*) *вершина $\ell$ степени один, смежная с вершиной $v$ степени два.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G$ — субкубический лес. Если в графе $G$ нет изолированных вершин, то найдется хотя бы одна вершина степени один. Найдем в графе $G$ наидлиннейшую простую цепь $P$. Рассмотрим одну из концевых вершин этой цепи, которую обозначим через $\ell$. В графе $G$ степень вершины $\ell$ равна 1. Единственную вершину, смежную с вершиной $\ell$, обозначим через $v$. Если $deg(v) = 1$, то вершины $\ell$ и $v$ — смежные вершины степени один, т. е. вершины $\ell$ и $v$ составляют набор вершин из п. (*б*). Если $deg(v) = 2$, то вершины $\ell$ и $v$ составляют набор вершин из п. (*г*). Пусть теперь $deg(v) = 3$. Тогда вершина $v$ смежна хотя бы с двумя вершинами $\ell_1$ и $\ell_2$ степени один, иначе простая цепь $P$ не наидлиннейшая в графе $G$. Вершины $\ell_1, \ell_2$ и $v$ составляют набор вершин из п. (*в*).

Лемма 1 доказана.

Приведем а л г о р и т м построения диссоциирующего множества субкубического леса $G$ порядка $n \geq 3$, в котором порядок каждой компоненты связности не меньше, чем 3.

Изначально полагаем $D = \varnothing$. На каждой итерации находим один из четырех наборов вершин, перечисленных в условии леммы 1. Если в графе $G$ есть изолированная вершина $v$, то вершину $v$ добавим в множество $D$ и удалим ее из графа $G$. Если в графе $G$ есть две смежные вершины $u$ и $v$ степени один, то добавим эти вершины в множество $D$ и удалим их из графа $G$. Если в графе $G$ есть две вершины $\ell_1$ и $\ell_2$ степени один, смежные с одной и той же вершиной $v$, то добавим в множество $D$ вершины $\ell_1, \ell_2$, а также удалим из графа $G$ вершины $\ell_1, \ell_2$ и $v$. Если в графе $G$ есть вершина $\ell$ степени один, которая смежна с вершиной $v$ степени два, то вершины $v$ и $\ell$ добавим в множество $D$, а также удалим из графа $G$ вершину $v$ и обе смежные с ней вершины. Алгоритм завершает свою работу в тот момент, когда из графа $G$ удаляются последние его вершины. Нетрудно видеть, что результирующее множество $D$ является диссоциирующим множеством исходного графа $G$. □

Докажем, что множество $D$ является наибольшим диссоциирующим множеством исходного графа $G$ по индукции по числу итераций. Обозначим через $D_k$ и $G_k$ множество вершин $D$ и лес $G$ после $k$-й итерации. Пусть $F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_k$. Изначально $D_0 = \varnothing$ и $G_0 = G$. Пусть $p$ — номер последней итерации. Положим $D_p = D$ и $F_p = \varnothing$.

Утверждается, что для любого $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ множество $D_k \cup F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$.

Для $k = 0$ это утверждение верно. Пусть $k \geq 1$. Рассмотрим четыре случая.

С л у ч а й (а). Пусть граф $G_k$ получается из графа $G_{k-1}$ удалением изолированной вершины $v$. Тогда $D_k = D_{k-1} \cup \{v\}$. По индуктивному предположению $D_{k-1} \cup F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество исходного графа $G$. Тогда $v \in F_{k-1}$ (в противном случае $F_{k-1}$ — не наибольшее диссоциирующее множество графа $G_{k-1}$). Заметим, что $F_k = F_{k-1} \setminus \{v\}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_k$ и

$$D_{k-1} \cup F_{k-1} = (D_{k-1} \cup \{v\}) \cup (F_{k-1} \setminus \{v\}) = D_k \cup F_k.$$

Следовательно, $D_k \cup F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$.

С л у ч а й (б). Пусть граф $G_k$ получается из графа $G_{k-1}$ удалением пары смежных вершин $u$ и $v$ степени один. Тогда $D_k = D_{k-1} \cup \{u, v\}$. По индуктивному предположению $D_{k-1} \cup F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$. Так как $F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_{k-1}$, то $u \in F_{k-1}$ и $v \in F_{k-1}$. Тогда $F_k = F_{k-1} \setminus \{u, v\}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_k$ и

$$D_{k-1} \cup F_{k-1} = (D_{k-1} \cup \{u, v\}) \cup (F_{k-1} \setminus \{u, v\}) = D_k \cup F_k.$$

Следовательно, $D_k \cup F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$.

С л у ч а й (в). Пусть граф $G_k$ получается из графа $G_{k-1}$ удалением трех вершин $\ell_1, \ell_2$ и $v$ таких, что вершины $\ell_1, \ell_2$ степени один смежны с вершиной $v$. Тогда $D_k = D_{k-1} \cup \{\ell_1, \ell_2\}$.

По индуктивному предположению $D_{k-1} \cup F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$, где $F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_{k-1}$. Преобразуем множество $F_{k-1}$ таким образом, чтобы оно содержало вершины $\ell_1, \ell_2$. Три вершины $\ell_1, \ell_2$ и $v$ не могут одновременно принадлежать множеству $F_{k-1}$. Из множества $F_{k-1}$ удалим те из вершин $\ell_1, \ell_2$ и $v$, которые принадлежат ему, и добавим в это же множество вершины $\ell_1, \ell_2$. Множество $F_{k-1}$ останется диссоциирующим множеством графа $G_{k-1}$, и мощность его не уменьшится. Следовательно, после преобразования множество $F_{k-1}$ является наибольшим диссоциирующим множеством графа $G_{k-1}$, при этом $\ell_1 \in F_{k-1}$ и $\ell_2 \in F_{k-1}$. Заметим, что $F_k = F_{k-1} \setminus \{\ell_1, \ell_2\}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_k$ и

$$D_{k-1} \cup F_{k-1} = (D_{k-1} \cup \{\ell_1, \ell_2\}) \cup (F_{k-1} \setminus \{\ell_1, \ell_2\}) = D_k \cup F_k.$$

Следовательно, $D_k \cup F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$.

Случай (г). Пусть граф $G_k$ получается из графа $G_{k-1}$ удалением трех вершин $\ell, v$ и $u$ таких, что степень вершины $\ell$ равна 1, степень вершины $v$ равна 2 и вершина $v$ смежна с вершинами $\ell$ и $u$. Тогда $D_k = D_{k-1} \cup \{\ell, v\}$. По индуктивному предположению $D_{k-1} \cup F_{k-1}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$. Преобразуем множество $F_{k-1}$ таким образом, чтобы вершины $\ell$ и $v$ принадлежали ему. Заметим, что хотя бы одна из вершин $\ell, v$ или $u$ не принадлежит множеству $F_{k-1}$. Из множества $F_{k-1}$ удалим те вершины $\ell, v$ и $u$, которые есть в нем, и добавим в него вершины $\ell, v$. Как и в предыдущем случае, после преобразования множество $F_{k-1}$ является наибольшим диссоциирующим множеством графа $G_{k-1}$, причем $\ell \in F_{k-1}$ и $v \in F_{k-1}$. Тогда $F_k = F_{k-1} \setminus \{\ell, v\}$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G_k$ и

$$D_{k-1} \cup F_{k-1} = (D_{k-1} \cup \{\ell, v\}) \cup (F_{k-1} \setminus \{\ell, v\}) = D_k \cup F_k.$$

Следовательно, $D_k \cup F_k$ — наибольшее диссоциирующее множество графа $G$.

Напомним, что $p$-я итерация алгоритма последняя. Тогда $D_p = D$ и $F_p = \varnothing$ и $D_p \cup F_p = D$ — наибольшее диссоцирующее множество графа $G$. Наша цель — оценить число вершин в множестве $D$. Пусть $k_{\text{а}}$ — число итераций, в которых реализовался случай (а), $k_{\text{б}}$ — число итераций, в которых реализовался случай (б), $k_{\text{в}}$ — число итераций, в которых реализовался случай (в) и $k_{\text{г}}$ — число итераций, в которых реализовался случай (г). Тогда

$$|D| = k_{\text{а}} + 2k_{\text{б}} + 2k_{\text{в}} + 2k_{\text{г}}, \quad n = k_{\text{а}} + 2k_{\text{б}} + 3k_{\text{в}} + 3k_{\text{г}}.$$

Вычтем из второго равенства первое

$$n - |D| = k_{\text{в}} + k_{\text{г}}. \tag{1.3}$$

Утверждается, что

$$k_{\text{в}} + k_{\text{г}} \geq \frac{n}{7}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует оценка (1.2)

$$diss^{+}(G) = |D| = n - (k_{\text{в}} + k_{\text{г}}) \leq \frac{6n}{7}.$$

Докажем неравенство (1.4). Изначально в графе $G$ все компоненты связности содержат минимум три вершины, и как следствие этого в нем нет набора вершин, указанного в п. (а) или (б). Поэтому на первой итерации реализуется случай (в) или (г). Если на $k$-й итерации реализовался случай (а) или (б), то на предыдущих итерациях алгоритма возник случай (в) или (г). При этом на одну итерацию, в которой реализовался случай (в) или (г), приходится не более двух итераций, в которых реализовались случаи (а) или (б). Стало быть, $k_{\text{а}} + k_{\text{б}} \leq 2(k_{\text{в}} + k_{\text{г}})$ и

$$n = k_{\text{а}} + 2k_{\text{б}} + 3k_{\text{в}} + 3k_{\text{г}} \leq 2k_{\text{а}} + 2k_{\text{б}} + 3k_{\text{в}} + 3k_{\text{г}} \leq 4k_{\text{в}} + 4k_{\text{г}} + 3k_{\text{в}} + 3k_{\text{г}} \leq 7k_{\text{в}} + 7k_{\text{г}}.$$

Доказательство теоремы 3 завершено.

Оценка (1.2) достижима. Пусть $S_{2,2,2}$ — это дерево, которое получается из трех вершинно-непересекающихся простых цепей порядка 3 отождествлением трех концевых вершин, взятых по одной из каждой цепи. Если $G$ — лес с $t$ компонентами связности и каждая компонента изоморфна дереву $S_{2,2,2}$, то $diss^+(G) = 6t = \dfrac{6|V(G)|}{7}$.

**Следствие 1.** *Для любого субкубического леса $G$ порядка $n$ справедливо неравенство*

$$diss^+(G) \leq \frac{6n + c_1 + 2c_2}{7},$$

*где $c_1$, $c_2$ — количество компонент связности леса $G$, изоморфных $K_1$ и $K_2$ соответственно.*

## 2. Трудноразрешимые случаи задач

В этом разделе представлены результаты, касающиеся сложности решения задач, связанных с диссоциирующими множествами, в специальных классах графов.

**Теорема 4.** *Пусть $H$ — произвольный граф, в котором найдется компонента связности, не изоморфная никакой простой цепи $P_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда задача "Наибольшее диссоциирующее множество" в классе $H$-свободных графов является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача принадлежит классу задач NP. Рассмотрим два случая в зависимости от того, максимальная степень $\Delta(H)$ вершин графа $H$ не больше, чем 2 или не меньше, чем 3.

С л у ч а й 1. Пусть $\Delta(H) \leq 2$. Тогда в графе $H$ есть компонента связности, изоморфная простому циклу $C_k$ для некоторого $k \geq 3$. Следовательно, $C_k$-свободные графы содержатся в классе $H$-свободных графов. Из NP-полноты задачи "Наибольшее диссоциирующее множество" для $C_k$-свободных графов [4; 5] следует NP-полнота этой задачи для $H$-свободных графов.

С л у ч а й 2. Пусть $\Delta(H) \geq 3$. Тогда существует порожденный подграф графа $H$, изоморфный $K_3$ или $K_{1,3}$. Следовательно, $K_3$-свободные или $K_{1,3}$-свободные графы содержатся в классе $H$-свободных графов. Так как задача "Наибольшее диссоциирующее множество" для $K_3$-свободных [4; 5] и $K_{1,3}$-свободных [6] графов NP-полна, то эта задача остается NP-полной и для $H$-свободных графов.

Доказательство теоремы 4 завершено.

Чтобы получить полную классификацию вычислительной сложности задачи "Наибольшее диссоциирующее множество" для всех классов графов, определяемых одним запрещенным порожденным подграфом, остается установить сложностной статус задачи в классе $H$–свободных графов для графов $H$, каждая компонента связности которых является простой цепью. Хорошо известно [6–8] следующее полиномиальное сведéние задачи "Наибольшее диссоциирующее множество" к задаче "Наибольшее взвешенное независимое множество", которое состоит в том, чтобы определить, существует ли в графе $G^*$ с весами на вершинах независимое множество, суммарный вес вершин которого не меньше заданного числа. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Построим граф $G^*$ с множеством вершин $V(G^*) = V(G) \cup E(G)$ такой, что $\{u, v\} \in E(G^*)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

(*а*) $u \in V(G)$, $v \in V(G)$, $\{u, v\} \in E(G)$;
(*б*) $u \in V(G)$, $v = \{a, b\} \in E(G)$ и $N_G(u) \cap v \neq \varnothing$;
(*в*) $u = \{a, b\} \in E(G)$, $v = \{c, d\} \in E(G)$ и $(N_G(a) \cup N_G(b)) \cap v \neq \varnothing$.

Каждой вершине $v$ графа $G^*$ придадим вес по следующему правилу: если $v \in V(G)$, то положим вес вершины $v$, равным 1; иначе положим вес вершины $v$, равным 2. Наибольшие диссоциирующие множества графа $G$ и независимые множества наибольшего веса графа $G^*$ находятся во взаимно-однозначном соответствии. Лозин и Раутенбах в работе [8] доказали, что если граф $G$ — это $P_k$-свободный граф, то граф $G^*$ также $P_k$-свободный. Нетрудно обобщить это утверждение. Если $H$ — граф, каждая компонента связности которого является простой цепью, и $G$ — это $H$-свободный граф, то $G^*$ — это $H$-свободный граф. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству в случае, когда граф $H$ изоморфен простой цепи $P_k$ [8, лемма 1, с. 169]. Если задача "Наибольшее взвешенное независимое множество" для $H$-свободных графов, где граф $H$ представляет собой дизъюнктное обьединение простых цепей, является полиномиально разрешимой, то задача "Наибольшее диссоциирующее множество" для $H$-свободных графов также полиномиально разрешима. Известно, что задача "Наибольшее взвешенное независимое множество" решается за полиномиальное время для $P_5$-свободных графов [21], $P_6$-свободных графов [22]. Стало быть, задача "Наибольшее диссоциирующее множество" полиномиально разрешима для этих двух классов графов.

Пусть $G = (X \cup Y, E)$ — двудольный граф с долями $X$ и $Y$. Ребро $e = \{x, y\} \in E$ называется *симплициальным*, если множество вершин $N(x) \cup N(y)$ порождает полный двудольный подграф графа $G$. Двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ называется *квазихордальным* (англ. perfect elimination bipartite graph), если существует последовательность его попарно не смежных ребер $(e_1 = \{x_1, y_1\}, e_2 = \{x_2, y_2\}, \ldots, e_k = \{x_k, y_k\})$ такая, что

(*а*) ребро $e_1 = \{x_1, y_1\}$ является симплициальным в графе $G$;

(*б*) для каждого $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ ребро $e_i = \{x_i, y_i\}$ является симплициальным в графе $G - \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}\}$, который получается из графа $G$ удалением концевых вершин ребер $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$;

(*в*) граф $G - \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ пустой.

Класс квазихордальных двудольных графов содержит хордальные двудольные графы [23]. Двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ называется *хордальным*, если в каждом его простом цикле порядка не меньше 6 есть хорда, т. е. ребро, соединяющее две несоседние вершины цикла.

Известно, что задача "Наибольшее диссоциирующее множество" NP-полна для двудольных графов [3] и полиномиально разрешима для хордальных двудольных графов [7]. Естественным образом возникает вопрос о сложности задачи для квазихордальных двудольных графов.

**Теорема 5.** *Задача "Наибольшее диссоциирующее множество", ограниченная квазихордальными двудольными графами, является NP-полной.*

Доказательство. Рассматриваемая задача принадлежит классу NP. Построим полиномиальное сведéние от задачи "Наибольшее диссоциирующее множество", ограниченной двудольными графами.

Пусть $G = (X \cup Y, E)$ — произвольный двудольный граф, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Для каждой вершины $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, добавим в граф простую цепь порядка четыре с множеством вершин $\{x'_i, p_i, q_i, r_i\}$, множеством ребер $\{\{x'_i, p_i\}, \{p_i, q_i\}, \{q_i, r_i\}\}$ и отождествим вершины $x_i$, $x'_i$. Полученный в результате граф обозначим через $H$. Граф $H$ двудольный с множеством вершин $V(H) = V(G) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \{p_i, q_i, r_i\}\right)$ и множеством ребер $E(H) = E(G) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \{\{x_i, p_i\}, \{p_i, q_i\}, \{q_i, r_i\}\}\right)$. Двудольный граф $H$ квазихордальный. Соответствующая последовательность ребер имеет вид $(\{q_1, r_1\}, \{q_2, r_2\}, \ldots, \{q_n, r_n\}, \{x_1, p_1\}, \{x_2, p_2\}, \ldots, \{x_n, p_n\})$.

Утверждается, что $diss^+(H) = diss^+(G) + 2n$. Это равенство немедленно следует из леммы 1 работы [5].

Доказательство теоремы 5 завершено.

В работе [6] поставлен вопрос о сложностном статусе задачи "Наименьшее максимальное диссоциирующее множество" в классе хордальных двудольных графов. Мы даем ответ на этот вопрос.

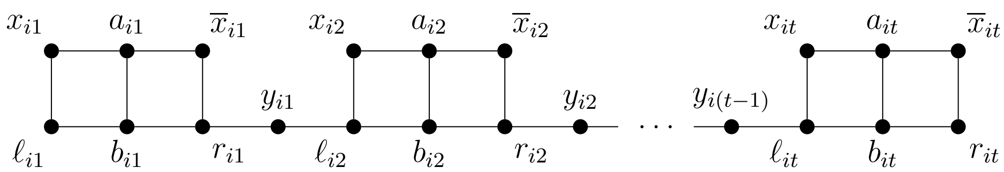


Рис. 2. Компонента $H_i$.

**Теорема 6.** *Задача “Наименьшее максимальное диссоциирующее множество” в классе хордальных двудольных графов является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача “Наименьшее максимальное диссоциирующее множество” (НМДМ), ограниченная классом хордальных двудольных графов, принадлежит классу NP, так как она является частным случаем задачи НМДМ без ограничений на входной граф. Построим полиномиальное сведе́ние от NP-полной задачи “3-Выполнимость” (3-Вып), в которой требуется выяснить, существует ли набор значений булевых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором заданная булева формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ с элементарными дизъюнкциями $C_j$ ($j \in \{1, 2, \ldots, m\}$), состоящими из не более чем трех переменных (с отрицаниями или без), принимает значение 1. Будем предполагать, что $m > 8$. Задача остается вычислительно сложной при этом предположении. По заданной КНФ построим граф $G$. Построение графа $G$ разобьем на два этапа, а именно, построим цепочку графов $G_1 \to G_2 \to G$.

Любой граф, изоморфный графу с множеством вершин $\{x, a, \overline{x}, \ell, b, r\}$ и множеством ребер $\{\{x, a\}, \{a, \overline{x}\}, \{\overline{x}, r\}, \{r, b\}, \{b, \ell\}, \{\ell, x\}, \{a, b\}\}$, называется *домино*. Для каждой переменной $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, построим графовую компоненту $H_i$, представляющую собой $t = m(n + 1)$ вершинно-непересекающихся домино $\mathscr{D}_{i1}$, $\mathscr{D}_{i2}$, $\ldots$, $\mathscr{D}_{i(t-1)}$ и $\mathscr{D}_{it}$, соединенных в цепочку с помощью вершин $y_{i1}$, $y_{i2}$, $\ldots$, $y_{i(t-1)}$, как показано на рис 2.

Для каждой элементарной дизъюнкции $C_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, создадим группу из $(n+1)$ изолированных вершин $c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{j(n+1)}$. Для каждой пары $x_i$ и $C_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такой, что элементарная дизъюнкция $C_j$ содержит переменную $x_i$ (с отрицанием или без), добавим ребра по следующему правилу:

($a$) если переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ без отрицания, то включим в граф следующие ребра: $\{c_{j1}, x_{ij}\}$, $\{c_{j2}, x_{i(j+m)}\}$, $\ldots$ , $\{c_{jk}, x_{i(j+(k-1)m)}\}$, $\ldots$ , $\{c_{j(n+1)}, x_{i(j+nm)}\}$;

(*б*) если переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ с отрицанием, то включим в граф следующие ребра: $\{c_{j1}, \overline{x}_{ij}\}$, $\{c_{j2}, \overline{x}_{i(j+m)}\}$, $\ldots$ , $\{c_{jk}, \overline{x}_{i(j+(k-1)m)}\}$, $\ldots$ , $\{c_{j(n+1)}, \overline{x}_{i(j+nm)}\}$.

Введем обозначения

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{it}\}, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{it}\},$$

$$C = \bigcup_{i=1}^{m} \{c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{j(n+1)}\}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{n} \{y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{it}\}.$$

Добавим в граф все возможные ребра между вершинами множества $A \cup C$ и вершинами множества $B \cup Y$. Полученный в результате граф обозначим через $G_1$. В работе [24, p. 236] установлено, что граф $G_1$ является хордальным двудольным.

Для каждой пары индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ добавим в граф четыре изолированные вершины $x'_{ik}, \overline{x}'_{ik}, \ell'_{ik}, r'_{ik}$ и четыре ребра $\{x_{ik}, x'_{ik}\}$, $\{\overline{x}_{ik}, \overline{x}'_{ik}\}$, $\{\ell_{ik}, \ell'_{ik}\}$ и $\{r_{ik}, r'_{ik}\}$. Полученный в результате граф обозначим через $G_2$. Заметим, что граф $G_1$ является подграфом графа $G_2$ и получается из него удалением вершин степени один. Нетрудно видеть, что если граф $G_1$ является хордальным двудольным, то таковым является и граф $G_2$.

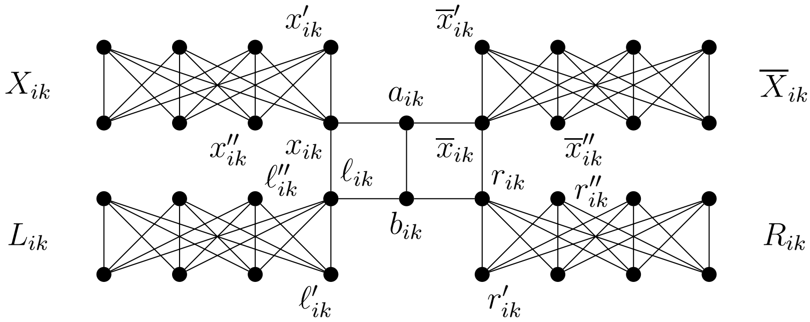


Рис. 3. Фрагмент графа $G$. Графы $X_{ik}$, $\overline{X}_{ik}$, $L_{ik}$, $R_{ik}$ изоморфны полному двудольному графу $K_{t^2,t^2}$.

Для преобразования графа $G_2$ в итоговый граф $G$ нам понадобится операция присоединения графа по ребру. Пусть $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — это пара непустых вершинно-непересекающихся графов. Пусть $\{u_1, v_1\} \in E(\Gamma_1)$ — фиксированное ребро графа $\Gamma_1$. Выделим в графе $\Gamma_2$ произвольное ребро $\{u_2, v_2\} \in E(\Gamma_2)$. Пусть $H$ — граф, полученный из дизъюнктного объединения графов $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ путем последовательного отождествления вершин $u_1$ и $u_2$, а затем вершин $v_1$ и $v_2$. Будем говорить, что граф $H$ получен путем присоединения графа $\Gamma_2$ к графу $\Gamma_1$ по ребру $\{u_1, v_1\}$.

Для каждой пары индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ построим четыре копии $X_{ik}, \overline{X}_{ik}, L_{ik}, R_{ik}$ полного двудольного графа $K_{t^2,t^2}$, каждую из которых присоединим к графу $G_2$ по ребру $\{x_{ik}, x'_{ik}\}$, $\{\overline{x}_{ik}, \overline{x}'_{ik}\}$, $\{\ell_{ik}, \ell'_{ik}\}$ и $\{r_{ik}, r'_{ik}\}$ соответственно. Полученный в результате граф обозначим через $G$. Обозначения для графов $X_{ik}$, $\overline{X}_{ik}$, $L_{ik}$ и $R_{ik}$ сохраним после их присоединения к графу. В каждом графе $X_{ik}$ ($\overline{X}_{ik}$, $L_{ik}$ и $R_{ik}$) выделим вершину $x'_{ik}$ (соответственно, $\overline{x}'_{ik}$, $\ell'_{ik}$ и $r'_{ik}$), смежную с вершиной $x_{ik}$ (соответственно, $\overline{x}_{ik}$, $\ell_{ik}$ и $r_{ik}$), и вершину $x''_{ik}$ (соответственно, $\overline{x}''_{ik}$, $\ell''_{ik}$ и $r''_{ik}$), не смежную с вершиной $x_{ik}$ (соответственно, $\overline{x}_{ik}$, $\ell_{ik}$ и $r_{ik}$). На рис. 3 изображен фрагмент графа $G$.

Заметим, что класс хордальных двудольных графов замкнут относительно операции присоединения графа по ребру. Поэтому граф $G$ является хордальным двудольным. Нетрудно видеть, что граф $G$ можно построить за полиномиальное время.

**Лемма 2.** *Существует набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ принимает значение* 1 *тогда и только тогда, когда $diss^-(G) \leq 8nt$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор значений переменных $x_1$, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ обращается в 1. Построим максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ следующим образом. Изначально положим $D = \varnothing$. Для каждой пары индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ добавим в множество $D$ восемь вершин $x_{ik}, x'_{ik}, r_{ik}, r'_{ik}, \overline{x}'_{ik}, \overline{x}''_{ik}$ и $\ell'_{ik}, \ell''_{ik}$, если $x_i = 1$; $\overline{x}_{ik}, \overline{x}'_{ik}, \ell_{ik}, \ell'_{ik}, x'_{ik}, x''_{ik}$ и $r'_{ik}, r''_{ik}$, если $x_i = 0$. Нетрудно видеть, что результирующее множество $D$ является максимальным диссоциирующим множеством графа $G$ и $|D| = 8nt$.

Для того чтобы доказать лемму в обратную сторону, рассмотрим максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| \leq 8nt$.

**Утверждение 1** (о структуре множества $D$). *Каковы бы ни были индексы $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, множество $D$ содержит пару смежных вершин из каждого полного двудольного подграфа $X_{ik}, \overline{X}_{ik}, L_{ik}$ и $R_{ik}$ графа $G$.*

Доказательство. Докажем, что в множестве $D$ присутствуют две смежные вершины графа $X_{ik}$. Для остальных трех графов $\overline{X}_{ik}$, $L_{ik}$ и $R_{ik}$ доказательство аналогично.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что в множестве $D$ нет пары смежных вершин графа $X_{ik}$. Поскольку диссоциирующее множество $D$ максимально, то оно содержит хотя бы одну вершину графа $X_{ik}$, которую обозначим через $v$. Граф $X_{ik}$ полный двудольный, и в каждой его доле по $t^2$ вершин. Вершина $v$ принадлежит одной его доле. Все вершины противоположной доли не входят в $D$, поскольку они смежны с вершиной $v \in D$ и в множестве $D$ нет смежных вершин графа $X_{ik}$. Все $t^2$ вершин доли, в которой находится вершина $v$, за исключением, быть может, вершины $x_{ik}$, принадлежат множеству $D$, поскольку в противном случае добавление их в множество $D$ приведет к бо́льшему диссоциирующему множеству, что противоречит предположению о максимальности диссоциирующего множества $D$ в графе $G$. В этом случае $|D| \geq t^2 - 1 = m^2(n+1)^2 - 1 > 8nt$ для любого $m > 8$. Полученное противоречие с изначальным предположением о мощности множества $D$ доказывает тот факт, что в множестве $D$ есть пара смежных вершин, принадлежащих графу $X_{ik}$. □

Преобразуем множество $D$ следующим образом. Для каждой пары индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$

(*а*) если среди двух вершин графа $X_{ik}$, принадлежащих множеству $D$, есть вершина $x_{ik}$, то заменим в множестве $D$ вторую вершину на вершину $x'_{ik}$; в противном случае заменим в множестве $D$ обе вершины графа $X_{ik}$ на пару вершин $x'_{ik}$ и $x''_{ik}$;

(*б*) если в паре вершин графа $\overline{X}_{ik}$, принадлежащих множеству $D$, есть вершина $\overline{x}_{ik}$, то заменим в множестве $D$ вторую вершину на вершину $\overline{x}'_{ik}$; в противном случае заменим в множестве $D$ обе вершины графа $\overline{X}_{ik}$ на пару вершин $\overline{x}'_{ik}$ и $\overline{x}''_{ik}$;

(*в*) если одной из двух вершин графа $L_{ik}$, принадлежащих множеству $D$, является вершина $\ell_{ik}$, то заменим в множестве $D$ вторую вершину на $\ell'_{ik}$; в противном случае заменим в множестве $D$ обе вершины графа $L_{ik}$ на вершины $\ell'_{ik}$ и $\ell''_{ik}$;

(*г*) если одна из двух вершин графа $R_{ik}$, принадлежащих множеству $D$, — вершина $r_{ik}$, то заменим в множестве $D$ вторую вершину на вершину $r'_{ik}$; в противном случае заменим в множестве $D$ обе вершины графа $R_{ik}$ на вершины $r'_{ik}$ и $r''_{ik}$.

Нетрудно видеть, что после преобразования множество $D$ останется максимальным диссоциирующим множеством графа $G$ и число вершин в нем не изменится. Более того, в множестве $D$ окажется пара вершин $x'_{ik}$, $x_{ik}$ или $x'_{ik}, x''_{ik}$ графа $X_{ik}$, пара вершин $\overline{x}'_{ik}$, $\overline{x}_{ik}$ или $\overline{x}'_{ik}, \overline{x}''_{ik}$ графа $\overline{X}_{ik}$, пара вершин $\ell_{ik}$, $\ell'_{ik}$ или $\ell'_{ik}$, $\ell''_{ik}$ графа $L_{ik}$, пара вершин $r_{ik}, r'_{ik}$ или $r'_{ik}, r''_{ik}$ графа $R_{ik}$ для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и каждого индекса $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Заметим, что общее число таких пар вершин в множестве $D$ равно $4nt$, а самих вершин $8nt$. Стало быть, эти вершины исчерпывают все множество $D$, и множество $D$ состоит исключительно из них.

**Утверждение 2** (об альтернативе локальной структуры множества $D$ в окрестности домино). *Для каждой пары индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ имеет место одна из следующих двух возможностей*:

(*а*) $x_{ik} \in D, x'_{ik} \in D$ *и* $r_{ik} \in D, r'_{ik} \in D$, $\ell'_{ik} \in D, \ell''_{ik} \in D$ *и* $\overline{x}'_{ik} \in D, \overline{x}''_{ik} \in D$;

(*б*) $\overline{x}_{ik} \in D, \overline{x}'_{ik} \in D$ *и* $\ell_{ik} \in D, \ell'_{ik} \in D$, $r'_{ik} \in D, r''_{ik} \in D$ *и* $x'_{ik} \in D, x''_{ik} \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Диссоциирующее множество $D$ графа $G$ максимально. Так как $a_{ik} \notin D$, то $x_{ik} \in D$ или $\overline{x}_{ik} \in D$. Так как $b_{ik} \notin D$, то $\ell_{ik} \in D$ или $r_{ik} \in D$. Хотя бы одна из вершин $x_{ik}$ или $\ell_{ik}$ не принадлежит множеству $D$; аналогично, хотя бы одна из вершин $\overline{x}_{ik}$ или $r_{ik}$ не принадлежит множеству $D$ (иначе в подграфе $G(D)$ степень вершины $x_{ik}$ в первом случае и степень вершины $\overline{x}_{ik}$ во втором случае не меньше, чем 2). Стало быть, имеет место только одна из двух возможностей, указанных в условии утверждения. □

Рассмотрим произвольное домино $\mathscr{D}_{ik}$ графа $G$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Будем говорить, что домино $\mathscr{D}_{ik}$ ориентировано налево относительно множества $D$, если имеет местовозможность (*а*) из утверждения 2, и домино $\mathscr{D}_{ik}$ ориентировано направо относительно множества $D$, если имеет место возможность (*б*) из утверждения 2

**Утверждение 3** (об альтернативе ориентации последовательности домино). *Для каждой компоненты $H_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, имеет место одна из следующих двух возможностей*:

(*а*) *все домино* $\mathscr{D}_{ik}$, $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, *компоненты* $H_i$ *ориентированы одинаково относительно множества* $D$;

(*б*) *найдется индекс* $k_i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ *такой, что все домино* $\mathscr{D}_{ik}$ *для* $k \leq k_i$ *ориентированы налево относительно множества* $D$, *а все домино* $\mathscr{D}_{ik}$ *для* $k > k_i$ *имеют правую ориентацию относительно множества* $D$.

Доказательство. Если в компоненте $H_i$ соседние домино $\mathscr{D}_{ik}$ и $\mathscr{D}_{i(k+1)}$ имеют разные ориентации относительно множества $D$, то домино $\mathscr{D}_{ik}$ ориентировано налево, а домино $\mathscr{D}_{i(k+1)}$ ориентировано направо. Ситуация, в которой эти домино ориентированы наоборот, невозможна, поскольку в противном случае множество $D \cup \{y_{ik}\}$ является диссоциирующим множеством графа $G$, что противоречит предположению о максимальности диссоциирующего множества $D$ графа $G$.

Если не выполняется первая возможность, то существует индекс $k_i$ такой, что домино $\mathscr{D}_{ik_i}$ ориентировано налево, а следующее за ним домино $\mathscr{D}_{i(k_i+1)}$ ориентировано направо относительно множества $D$. Нетрудно видеть, что все домино $\mathscr{D}_{ik}$ для $k \leq k_i$ ориентированы налево (если это не так, то найдется пара соседних домино, в которой первое домино ориентировано направо, а второе налево относительно множества $D$), а все домино $\mathscr{D}_{ik}$ для $k > k_i$ ориентированы направо (аналогично, если это не так, то найдется пара соседних домино с “неправильными” ориентациями). □

В каждой компоненте $H_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, все $t$ домино разобъем естественным образом на $(n+1)$ групп по $m$ домино в каждой группе: первые $m$ домино компоненты $H_i$ отнесем к первой группе, следующие $m$ домино — ко второй группе и т. д. Утверждается, что найдется номер $p$ группы такой, что в каждой компоненте $H_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, все домино внутри группы с этим номером $p$ ориентированы одинаково относительно множества $D$. Более точно, утверждается, что найдется $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ такое, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ все домино $\mathscr{D}_{i(1+(p-1)m)}, \mathscr{D}_{i(2+(p-1)m)}, \ldots, \mathscr{D}_{i(m+(p-1)m)}$ ориентированы одинаково относительно множества $D$.

Рассмотрим произвольную компоненту $H_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, графа $G$. По утверждению 3 имеет место одна из двух возможностей. Если имеет место первая из них, то внутри любой из $(n+1)$ групп домино компоненты $H_i$ все домино ориентированы одинаково относительно множества $D$. В противном случае в соответствии со второй возможностью существует домино $\mathscr{D}_{ik_i}$ на границе между домино с левой ориентацией и домино с правой ориентацией. Пусть $p_i$ — это номер группы, в которой находится домино $\mathscr{D}_{ik_i}$. Тогда внутри любой из $(n+1)$ групп, за исключением, быть может, одной группы с номером $p_i$, все домино ориентированы одинаково.

Набор $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_q}$ состоит из $q \leq n$ целых чисел от 1 до $(n+1)$. По принципу Дирихле найдется номер группы $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, которого нет среди номеров $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_q}$. Стало быть, в каждой компоненте $H_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, внутри группы с номером $p$ все домино имеют одинаковые ориентации относительно множества $D$. Другими словами, для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ домино $\mathscr{D}_{i(1+(p-1)m)}, \mathscr{D}_{i(2+(p-1)m)}, \ldots, \mathscr{D}_{i(m+(p-1)m)}$ одинаково ориентированы относительно множества $D$.

Теперь все готово для того, чтобы построить набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ принимает значение 1. Для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ положим значение переменной $x_i$, равным 0, если в компоненте $H_i$ все домино $\mathscr{D}_{i(1+(p-1)m)}, \mathscr{D}_{i(2+(p-1)m)}, \ldots, \mathscr{D}_{i(m+(p-1)m)}$ из группы с номером $p$ ориентированы направо, и равным 1, если они ориентированы налево относительно множества $D$. Почему на этом наборе значений переменных КНФ обращается в 1? Рассмотрим любую элементарную дизъюнкцию $C_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, КНФ. Достаточно показать, что в этой элементарной дизъюнкции хотя бы одна переменная (с отрицанием или без) обращается в 1 на указанном наборе значений переменных. Рассмотрим вершину $c_{jp}$ графа $G$. Так как $c_{jp} \notin D$ и $D \cup \{c_{jp}\}$ — не диссоциирующее множество графа $G$ (в силу максимальности диссоциирующего множества $D$), то найдется вершина множества $D$, смежная с вершиной $c_{jp}$. По построению графа $G$ этой вершиной является вершина $x_{i(j+(p-1)m)}$ или $\overline{x}_{i(j+(p-1)m)}$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $x_{i(j+(p-1)m)} \in D$. Так как эта вершина смежна с вершиной $c_{jp}$ в графе $G$, то переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ без отрицания. Более того, в компоненте $H_i$ внутри группы с номером $p$ все домино ориентированы налево относительно множества $D$, и как следствие этого $x_i = 1$.

С л у ч а й 2. Пусть $\overline{x}_{i(j+(p-1)m)} \in D$. Так как эта вершина смежна с вершиной $c_{jp}$, то переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ с отрицанием. Более того, в компоненте $H_i$ внутри группы с номером $p$ все домино ориентированы направо относительно множества $D$, и как следствие этого $x_i = 0$ и $\overline{x}_i = 1$.

В обоих случаях в элементарной дизъюнкции $C_j$ есть переменная (с отрицанием или без), которая обращается в 1 при подстановке значений переменных. Поскольку рассматриваемая элементарная дизъюнкция $C_j$ произвольная, то тем самым установлено, что при подстановке в КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ вместо переменных указанных выше значений, КНФ принимает значение 1.

Лемма 2 доказана, а вместе с ней и теорема 6.

Рассмотрим граф $G$ из доказательства теоремы 6. Заметим, что подграф графа $G$, порожденный максимальным диссоциирующим множеством $D$ мощности не более $8nt$, является 1-регулярным. Ребра этого подграфа образуют так называемое порожденное паросочетание. Подмножество $M \subseteq E(G)$ множества ребер произвольного графа $G$ называется *порожденным паросочетанием*, если подграф графа $G$, порожденный множеством $M$, 1-регулярный. Будем говорить, что порожденное паросочетание $M$ графа $G$ является максимальным, если нет другого порожденного паросочетания $M'$ графа $G$ такого, что $M \subseteq M'$ и $M \neq M'$. Задача "Наименьшее максимальное порожденное паросочетание" состоит в том, чтобы в заданном графе найти максимальное порожденное паросочетание наименьшей мощности. Вычислительная сложность и сложность аппроксимации этой задачи, а также ее взвешенной версии изучались в работах [25–27]. В доказательстве теоремы 6 построено полиномиальное седе́ние задачи 3-Вып к задаче НМДМ, ограниченной классом хордальных двудольных графов. На его основе легко построить сведе́ние от задачи 3-Вып к задаче "Наименьшее максимальное порожденное паросочетание" в предположении, что заданный граф является хордальным двудольным".

**Теорема 7.** *Задача "Наименьшее максимальное порожденное паросочетание" в классе хордальных двудольных графов является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы не будем приводить подробное доказательство этого утверждения, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 6. Остановимся только на ключевых моментах. По заданной КНФ построим граф $G$, как в доказательстве теоремы 6. Преобразуем граф $G$ следующим образом. Для каждой вершины $v$ графа $G$ добавим в граф новую вершину $\widetilde{v}$ и ребро $\{v, \widetilde{v}\}$. Полученный в результате граф обозначим через $H$. Граф $G$ получается из графа $H$ удалением вершин степени один. Граф $G$ хордальный двудольный. Стало быть, граф $H$ также хордальный двудольный.

Утверждается, что существует набор значений переменных, на котором КНФ принимает значение 1, тогда и только тогда, когда существует максимальное по включению подмножество $D$ множества вершин графа $H$, порождающее 1-регулярный подграф графа $H$, и $|D| \leq 8nt$.

По набору значений переменных, на котором КНФ обращается в 1, максимальное по включению подмножество $D$ множества вершин графа $H$, порождающее 1-регулярный подграф графа $H$, восстанавливается точно так же, как и в случае максимального диссоциирующего множества. Чтобы доказать утверждение в обратную сторону, рассматриваем максимальное по включению множество $D \subseteq V(H)$, порождающее 1-регулярный подграф графа $H$. Предполагаем, что $|D| \leq 8nt$. Заметим, что утверждение 1 о структуре множества $D$ верно для графа $G = H$ без необходимости внесения изменений. В самом деле, если множество $D$ не содержит две смежные вершины, например, графа $X_{ik}$, то в силу своей максимальности оно содержит две смежные вершины вида $v, \widetilde{v}$ для всех вершин $v$, принадлежащих одной доле полного двудольного графа $X_{ik}$, за исключением, быть может, пары вершин $v$ и $\widetilde{v}$, в которой $v = x_{ik}$, что противоречит предположению о мощности множества $D$. Как и в случае максимального диссоциирующего множества, множество $D$ состоит исключительно из пар смежных вершин, взятых из каждого графа $X_{ik}$, $\overline{X}_{ik}$, $L_{ik}$ и $R_{ik}$, где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \dots, t\}$. Утверждение 2 об альтернативе локальной структуры множества $D$ в окрестности домино корректно для графа $G = H$ без изменений. Действительно, поскольку ни одна из вершин множества $N[v] \cup N[\widetilde{v}]$, где $v = a_{ik}$ ($v = b_{ik}$), не принадлежит множеству $D$, то $x_{ik} \in D$ или $\overline{x}_{ik} \in D$ (соответственно, $\ell_{ik} \in D$ или $r_{ik} \in D$). Две вершины $x_{ik}$ и $\ell_{ik}$, равно как и две вершины $\overline{x}_{ik}$ и $r_{ik}$, не могут одновременно принадлежать множеству $D$ (иначе подграф графа $H$, порожденный множеством $D$, не 1-регулярный). Отсюда следует, что возможны только два случая, указанные в утверждении 2. Утверждение 3 об альтернативе ориентации последовательности домино корректно в предположении, что $G = H$. Если не все домино компоненты $H_i$ ориентированы одинаково, то сначала идут левоориентированные домино, а затем правоориентированные домино (иначе найдутся два соседние домино $\mathscr{D}_{ik}$ и $\mathscr{D}_{i(k+1)}$ такие, что первое домино с правой ориентацией, а второе домино с левой ориентацией; при этом множество $D$ в силу своей максимальности содержит пару смежных вершин $v$ и $\widetilde{v}$, в которой $v = y_{ik}$, что не так). Конструкция набора значений переменных, на котором КНФ обращается в 1, как и обоснование ее корректности такие же, как и в сведении к задаче НМДМ. □

Переходим к установлению NP-полноты задачи НМДМ в классах графов, характеризуемых конечными списками запрещенных порожденных двусвязных подграфов, а также в классе планарных графов с большим обхватом. В качестве эталонной задачи выберем задачу “Наибольшее независимое множество”, в которой требуется выяснить верно ли, что число независимости $\alpha(G)$ заданного графа $G$ не меньше заданного числа $k$.

Построим полиномиальное сведéние от задачи “Наибольшее независимое множество”. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Для каждой вершины $v_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, построим дерево $T_i$, изображенное на рис. 4($a$), с множеством вершин $V(T_i) = \{a_i, v'_i, b_i, c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i(3n)}\}$ и множеством ребер $E(T_i) = \{\{a_i, v'_i\}, \{b_i, v'_i\}, \{b_i, c_{i1}\}, \{b_i, c_{i2}\}, \dots, \{b_i, c_{i(3n)}\}\}$, после чего отождествим вершину $v_i$ графа $G$ и вершину $v'_i$ дерева $T_i$. В результате получим граф $H$ с множеством вершин

$$V(H) = V \cup \Big( \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i, b_i, c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i(3n)}\} \Big)$$

и множеством ребер

$$E(H) = E \cup \Big( \bigcup_{i=1}^{n} \{\{a_i, v_i\}, \{v_i, b_i\}, \{b_i, c_{i1}\}, \{b_i, c_{i2}\}, \dots, \{b_i, c_{i(3n)}\}\} \Big).$$

На рис. 4($б$) изображен граф $H$, который получается из простой цепи $G$ порядка $n = 3$ с множеством вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$ посредством указанного преобразования. Преобразование произвольного графа $G$ в граф $H$ можно осуществить за полиномиальное время.

**Утверждение 4.** *Имеет место соотношение* $\alpha(G) + diss^-(H) = 3n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$diss^-(H) \le 3n - \alpha(G). \tag{2.5}$$

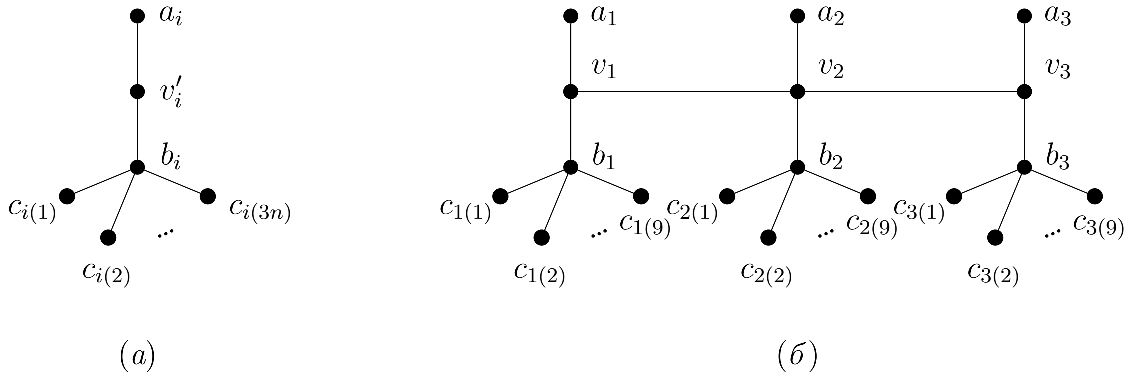


Рис. 4. $(а)$ дерево $T_i$, $(б)$ граф $H$, который получается из простой цепи с множеством вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$ и множеством ребер $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$.

Для этого рассмотрим наибольшее независимое множество $I \subseteq V$ графа $G$. Рассмотрим подмножество $D$ множества вершин графа $H$

$$D = I \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \cup \Big( \bigcup_{v_i \in V \setminus I} \{a_i, c_{i1}\} \Big).$$

Нетрудно проверить и убедиться в том, что $D$ является максимальным диссоциирующим множеством графа $H$ и $|D| = 3n - |I|$. Следовательно, $diss^-(H) \le |D| = 3n - |I| = 3n - \alpha(G)$.

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее по мощности максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $H$. Сделаем ряд наблюдений. Во-первых, заметим, что $\alpha(G) > 0$. Из (2.5) следует, что

$$|D| = diss^-(H) < 3n. \tag{2.6}$$

Во-вторых, $b_i \in D$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В самом деле, если $b_i \notin D$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то в силу максимальности диссоциирующего множества $D$ множество $D$ содержит вершины $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{i(3n)}$, и как следствие этого $|D| \ge 3n$, что противоречит (2.6). Для множеств $A = V \cap D$ и $B = V \setminus D$ выполняется тривиальное соотношение

$$|A| + |B| = |V| = n. \tag{2.7}$$

В силу максимальности диссоциирующего множества $D$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$D \cap \{a_i, b_i, v_i, c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{i(3n)}\} = \begin{cases} \{b_i, v_i\}, & \text{если } v_i \in A, \\ \{b_i, a_i, c_{ij}\}, & \text{если } v_i \in B, \end{cases}$$

где $j \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$. Тогда

$$|D| = \sum_{i=1}^{n} \big| D \cap \{a_i, b_i, v_i, c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{i(3n)}\} \big| = 2|A| + 3|B|$$

и

$$|B| = \frac{|D| - 2|A|}{3} = \frac{diss^-(H) - 2|A|}{3}. \tag{2.8}$$

Наконец, заметим, что множество $A$ — независимое множество графа $G$. Действительно, если в множестве $A$ найдутся две смежные вершины $v_i$ и $v_j$, $i \ne j$, то степени этих вершин в подграфе графа $H$, порожденном множеством $D$, будут не меньше, чем 2, что противоречит тому факту, что $D$ — диссоциирующее множество графа $H$. Учитывая (2.7) и (2.8), получаем

$$|A| = n - |B| = n - \frac{diss^-(H) - 2|A|}{3}$$

и $3|A| \geq 3n - diss^{-}(H) + 2|A|$. Отсюда непосредственно следуют $\alpha(G) \geq |A| \geq 3n - diss^{-}(H)$ и $diss^{-}(H) \geq 3n - \alpha(G)$.

Утверждение 4 доказано.

Нам понадобятся следующие известные результаты. Напомним, что граф $S_{i,j,k}$, параметризованный положительными целыми величинами $i, j, k$, — граф, который получается следующим образом: возьмем вершинно-непересекающиеся простые цепи $P_i$, $P_j$ и $P_k$, выделим в каждой цепи одну концевую вершину и отождествим выделенные вершины. Известно, что задача "Наибольшее независимое множество" NP-полна в классе $\mathscr{F}$-свободных графов, где $\mathscr{F}$ — конечное семейство графов, каждый из которых содержит компоненту связности, не изоморфную какому-либо графу $S_{i,j,k}$ [28; 29], а также в классе планарных графов с обхватом, не меньшим $g$, где $g \geq 3$ — произвольная фиксированная константа (следствие леммы 1 из работы [30]). Из последнего следует NP-полнота задачи НМДМ в классе планарных графов, обхват которых ограничен снизу константой $g \geq 3$, поскольку приведенное выше преобразование графа $G$ в граф $H$ сохраняет свойство планарности и не влияет на обхват. Пусть $\mathscr{F}$ — произвольное конечное семейство двусвязных графов. Заметим, что каждый граф из семейства $\mathscr{F}$ связный и не изоморфен никакому графу $S_{i,j,k}$, поскольку ни один из графов $S_{i,j,k}$ не является двусвязным, в чем легко убедиться, удалив вершину максимальной степени. Стало быть, задача "Наибольшее независимое множество" в классе $\mathscr{F}$-свободных графов NP-полна. Нетрудно видеть, что если граф $G$ является $\mathscr{F}$-свободным, то таковым является и соответствующий ему граф $H$. Следовательно, задача НМДМ в классе $\mathscr{F}$-свободных графов относится к числу NP-полных. Таким образом, справедливы следующие два утверждения.

**Теорема 8.** *Для любого фиксированного числа $g \geq 3$ задача "Наименьшее максимальное диссоциирующее множество" в классе планарных графов с обхватом не меньше $g$ является NP-полной.* □

**Теорема 9.** *Для любого конечного семейства $\mathscr{F}$ двусвязных графов задача "Наименьшее максимальное диссоциирующее множество" в классе $\mathscr{F}$-свободных графов NP-полна.* □

В работе [6, следствие 7] установлено, что задача НМДМ в классе двудольных графов относится к числу NP-полных. Мы усилим этот результат.

**Теорема 10.** *Задача "Наименьшее максимальное диссоциирующее множество" в классе двудольных графов с максимальной степенью вершин, равной 3, является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача НМДМ, ограниченная двудольными графами с максимальной степенью вершин три, является элементом класса NP. Построим полиномиальное свéдение от специального варианта задачи 3-Вып. Задана булева формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ такая, что каждая элементарная дизъюнкция $C_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, содержит не более трех переменных (с отрицанием или без) и каждая переменная $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, входит в четыре элементарные дизъюнкции, причем в две из них без отрицания и в две с отрицанием. Требуется выяснить, существует ли набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ принимает значение 1. Известно [31], что этот вариант задачи 3-Вып относится к числу NP-полных задач.

Для каждой переменной $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, построим граф $H_i$, изоморфный звезде $K_{1,3}$, с множеством вершин $V(H_i) = \{y_i, z_i, v_i, \overline{v}_i\}$ и множеством ребер $E(H_i) = \{\{z_i, y_i\}, \{z_i, v_i\}, \{z_i, \overline{v}_i\}\}$. Для каждой элементарной дизъюнкции $C_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, создадим вершину $c_j$. Для каждой пары $x_i$ и $C_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такой, что элементарная дизъюнкция $C_j$ содержит переменную $x_i$ (с отрицанием или без), добавим в граф одно ребро по следующему правилу:

*a*) если переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ без отрицания, то добавим ребро $\{c_j, v_i\}$;

*б*) если переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ с отрицанием, то добавим ребро $\{c_j, \overline{v}_i\}$.

Полученный в результате граф обозначим через $G$. Граф $G$ является двудольным графом с долями

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} \{y_i, v_i, \overline{v}_i\}, \quad V_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \cup \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}.$$

Степень любой вершины графа $G$ не превосходит 3 вследствие ограничений на КНФ.

**Утверждение 5.** *Существует набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $x_n$, на котором КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $diss^-(G) \leq 2n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный набор значений переменных, обращающий КНФ в 1. Построим максимальное диссоциирующее множество $D$ следующим образом. Изначально положим $D = \varnothing$. Для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ включим в множество $D$ две вершины $v_i$ и $z_i$, если $x_i = 1$; $\overline{v}_i$ и $z_i$, если $x_i = 0$. Нетрудно проверить, что множество $D$ — максимальное диссоциирующее множество графа $G$ и $|D| = 2n$. Стало быть, $diss^-(G) \leq |D| = 2n$.

Для того чтобы доказать утверждение в обратную сторону, рассмотрим максимальное диссоциирующее множество $D$ графа $G$ такое, что $|D| \leq 2n$. Диссоциирующее множество $D$ максимально. Поэтому для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется соотношение $|D \cap \{y_i, z_i, v_i, \overline{v}_i\}| \geq 2$. Более того, во-первых, для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$|D \cap \{y_i, z_i, v_i, \overline{v}_i\}| = 2, \tag{2.9}$$

и, во-вторых, ни одна из вершин $c_1, c_2, \ldots, c_m$ не принадлежит множеству $D$. Если хотя бы одно из этих двух утверждений неверно, то $|D| > 2n$. Если $z_i \notin D$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то вершины $y_i, v_i$ и $\overline{v}_i$ принадлежат множеству $D$, что приводит к противоречию с оценкой (2.9). Все вершины $z_1, z_2, \ldots, z_n$ принадлежат множеству $D$. Учитывая это и оценку (2.9), получаем, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в точности одна из вершин $y_i, v_i$ или $\overline{v}_i$ принадлежит множеству $D$. Преобразуем множество $D$ следующим образом. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такого, что $y_i \in D$, заменим в множестве $D$ вершину $y_i$ на любую из двух вершин $v_i$ или $\overline{v}_i$. После преобразования множество $D$ останется максимальным диссоциирующим множеством графа $G$, и мощность этого множества не изменится. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ или $v_i \in D$, или $\overline{v}_i \in D$. В зависимости от того, какая из двух вершин $v_i$ или $\overline{v}_i$ принадлежит множеству $D$, определим значение булевой переменной $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ положим $x_i = 0$, если $\overline{v}_i \in D$, и $x_i = 1$, если $v_i \in D$. Утверждается, что на этом наборе значений переменных КНФ $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ принимает значение 1. Рассмотрим любую элементарную дизъюнкцию $C_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, из числа элементарных дизъюнкций КНФ. Ей соответствует вершина $c_j$ графа $G$. Поскольку $c_j \notin D$ и $D$ — максимальное диссоциирующее множество графа $G$, то найдется вершина $v \in D$, смежная с вершиной $c_j$. В соответствии со структурой графа $G$ $v = v_i$ или $v = \overline{v}_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Если $v = v_i$, то переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ без отрицания и $x_i = 1$. Если $v = \overline{v}_i$, то переменная $x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию $C_j$ с отрицанием и $x_i = 0$. В обоих случаях элементарная дизъюнкция $C_j$ обращается в 1 на рассматриваемом наборе значений переменных. □

Построено полиномиальное сведéние от NP-полной версии задачи 3-Вып.

Теорема 10 доказана.

## 3. Линейный алгоритм решения задачи о наименьшем максимальном диссоциирующем множестве в классе деревьев

Рассмотрим задачу вычисления значения параметра $diss^-(T)$ в предположении, что граф $T$ — дерево. Наша цель — разработать а л г о р и т м динамического программирования

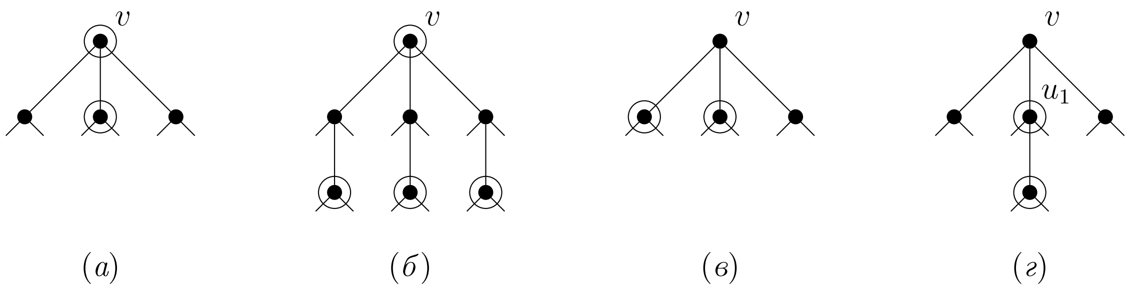


Рис. 5. Расположения вершин максимального диссоциирующего множества в окрестности вершины $v$. Вершины, принадлежащие максимальному диссоциирующему множеству, выделены.

для решения этой задачи. Нам понадобится характеризация максимальных диссоциирующих множеств в произвольном графе $G$.

**Лемма 3.** *Подмножество $D \subseteq V(G)$ множества вершин графа $G$ является максимальным диссоциирующим множеством графа $G$ тогда и только тогда, когда любая вершина $v \in V(G)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

*а) $v \in D$ и $|N(v) \cap D| = 1$ (см. рис. 5(а));*

*б) $v \in D$, $N(v) \cap D = \varnothing$, и для любой вершины $u \in N(v)$ имеет место соотношение $|N(v) \cap D| \geq 2$ (см. рис. 5(б));*

*в) $v \notin D$ и $|N(v) \cap D| \geq 2$ (см. рис. 5(в));*

*г) $v \notin D$, и найдется вершина $u_1 \in N(v) \cap D$ такая, что $|N(u_1) \cap D| = 1$ (см. рис. 5(г)).*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из определения максимального диссоциирующего множества графа. □

Пусть $T$ — дерево. Выберем одну из вершин $r$ в качестве корня. Введем обозначения. Пусть $v \in V(T)$ и $D \subseteq V(T)$. Тогда $T(v)$ — поддерево с корнем в вершине $v$, $N_v$ — множество сыновей вершины $v$, $D_v$ — множество тех вершин множества $D$, которые принадлежат поддереву $T(v)$;

$f_{00}(v)$ — наименьшая мощность диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$ при условии, что $v \notin D$, $N_v \cap D \neq \varnothing$ и для любой вершины $w \in N_v$ множество $D_w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(w)$;

$f_{01}(v)$ — наименьшая мощность диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$ при условии, что $v \notin D$ и для любой вершины $w \in N_v$ множество $D_w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(w)$;

$f_{10}(v)$ — наименьшая мощность диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$ при условии, что $v \in D$, $N_v \cap D = \varnothing$, для любой нелистовой вершины $w \in N_v$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$;

$f_{11}(v)$ — наименьшая мощность максимального диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$ при условии $v \in D$;

$f_{21}(v)$ — наименьшая мощность максимального диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$;

$f_{12}(v)$ — наименьшая мощность максимального диссоциирующего множества $D$ поддерева $T(v)$ при условии, что $v \in D$ и $N_v \cap D \neq \varnothing$.

В определении величин $f_{ij}(v)$ фигурируют диссоциирующие множества, обладающие специальными свойствами. Вообще говоря, существование таких диссоциирующих множеств не гарантируется. В случае их несуществования полагаем $f_{ij}(v) = \infty$.

Если $v$ — лист дерева $G$, то

$$\begin{gathered} f_{00}(v) = \infty, \quad f_{01}(v) = 0, \quad f_{10}(v) = 1, \\ f_{11}(v) = 1, \quad f_{21}(v) = 1, \quad f_{12}(v) = \infty. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Пусть теперь $v$ — нелистовая вершина дерева $T$. Значение величины $f_{00}(v)$ вычисляется по формуле

$$f_{00}(v) = f_{11}(u) + \sum_{w \in A_v^u} f_{21}(w), \tag{3.11}$$

где $u = \arg\min_{y \in N_v} (f_{11}(y) - f_{21}(y))$, $A_v^u = N_v \setminus \{u\}$. Значение величины $f_{01}(v)$ находим, используя следующее выражение:

$$f_{01}(v) = \sum_{u \in N_v} f_{21}(v). \tag{3.12}$$

Значение величины $f_{10}$ определяется по формуле

$$f_{10}(v) = 1 + \sum_{w \in N_v} f_{01}(w). \tag{3.13}$$

Значение величины $f_{11}(v)$ вычисляется так:

$$f_{11}(v) = \begin{cases} 1 + \min\limits_{u \in N_v} \Big( f_{10}(u) + \sum\limits_{w \in A_v^u} f_{01}(w) \Big), \text{ если в } N_v \text{ есть лист;} \\ 1 + \min \Big( \sum\limits_{u \in N_v} f_{00}(u), \min\limits_{u \in N_v} \Big( f_{10}(u) + \sum\limits_{w \in A_v^u} f_{01}(w) \Big) \Big) \text{ иначе,} \end{cases} \tag{3.14}$$

где $A_v^u = N_v \setminus \{u\}$. Значение величины $f_{21}(v)$ находится по следующей формуле:

$$f_{21}(v) = \begin{cases} \min \Big( f_{11}(v), \min\limits_{u \in N_v} \Big( f_{12}(u) + \sum\limits_{w \in A_v^u} f_{21}(w) \Big) \Big), \text{ если } |N_v| = 1; \\ \min \Big( f_{11}(v), \sum\limits_{i=1}^{2} f_{11}(u_i) + \sum\limits_{w \in A_v^{u_1 u_2}} f_{21}(w), \min\limits_{u \in N_v} \Big( f_{12}(u) + \sum\limits_{w \in A_v^u} f_{21}(w) \Big) \Big) \text{ иначе,} \end{cases} \tag{3.15}$$

где $A_v^u = N_v \setminus \{u\}$,

$$A_v^{u_1 u_2} = N_v \setminus \{u_1, u_2\}, \quad u_1 = \arg\min_{u \in N_v} (f_{11}(u) - f_{21}(u)) \text{ и } u_2 = \arg\min_{u \in N_v \setminus \{u_1\}} (f_{11}(u) - f_{21}(u)).$$

Значение величины $f_{12}(v)$ вычисляется в соответствии с выражением

$$f_{12}(v) = 1 + \min_{u \in N_v} \Big( f_{10}(u) + \sum_{w \in A_v^u} f_{01}(w) \Big), \tag{3.16}$$

где $A_v^u = N_v \setminus \{u\}$.

### 3.1. Доказательство рекуррентных соотношений

**1.** Докажем равенство (3.11). Пусть $u = \arg\min_{y \in N_v} (f_{11}(y) - f_{21}(y))$. Рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D^u$ поддерева $T(u)$ такое, что $u \in D^u$, а также наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$ для каждой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$. Заметим, что $|D^u| = f_{11}(u)$ и $|D^w| = f_{21}(w)$ для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$. Нетрудно видеть, что множество

$$D = D^u \cup \Big( \bigcup_{w \in N_v \setminus \{u\}} D^w \Big)$$

— диссоциирующее множество поддерева $T(v)$, причем $v \notin D$, $N_v \cap D \neq \varnothing$ (так как $u \in N_v \cap D$), и для любой вершины $w \in N_v$ множество $D_w = D^w$ является максимальным диссоциирующим множеством поддерева $T(w)$. Учитывая это, имеем

$$f_{00}(v) \leq |D| = |D^u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D^w| = f_{11}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{21}(w).$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D$ поддерева $T(v)$ такое, что $v \notin D$, $N_v \cap D \neq \varnothing$ и для любой вершины $w \in N_v$ множество $D_w$ является максимальным диссоциирующим множеством поддерева $T(w)$. Рассмотрим также произвольную вершину $\overline{u} \in N_v \cap D$. Тогда $D_{\overline{u}}$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(\overline{u})$ такое, что $\overline{u} \in D_{\overline{u}}$ и для любой вершины $w \in N_v \setminus \{\overline{u}\}$ множество $D_w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(w)$. Следовательно, $|D_{\overline{u}}| \geq f_{11}(\overline{u})$ и $|D_w| \geq f_{21}(w)$ для любой вершины $w \in N_v \setminus \{\overline{u}\}$. Получаем

$$f_{00}(v) = |D| = |D_{\overline{u}}| + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}\}} |D_w| \geq f_{11}(\overline{u}) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}\}} f_{21}(w). \tag{3.17}$$

Пусть $u = \arg\min_{y \in N_v}(f_{11}(y) - f_{21}(y))$. Тогда $f_{11}(\overline{u}) - f_{21}(\overline{u}) \geq f_{11}(u) - f_{21}(u)$ и

$$f_{11}(\overline{u}) + f_{21}(u) \geq f_{11}(u) + f_{21}(\overline{u}). \tag{3.18}$$

Учитывая (3.17) и (3.18), имеем

$$\begin{aligned} f_{00}(v) &\geq f_{11}(\overline{u}) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}\}} f_{21}(w) = f_{11}(\overline{u}) + f_{21}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u, \overline{u}\}} f_{21}(w) \\ &\geq f_{11}(u) + f_{21}(\overline{u}) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}, u\}} f_{21}(w) = f_{11}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{21}(w). \end{aligned}$$

Равенство (3.11) доказано.

**2.** Доказательство соотношения (3.12) аналогично, и мы опускаем его.

**3.** Докажем соотношение (3.13). Для любой нелистовой вершины $w \in N_v$ рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$ с условием, что $w \notin D^w$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D^w_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Заметим, что $|D^w| = f_{01}(w)$ для любого $w \in N_v$. Нетрудно проверить, что множество

$$D = \{v\} \cup \big(\textstyle\bigcup_{w \in N_v} D^w\big)$$

является диссоциирующим множеством поддерева $T(v)$ таким, что $v \in D$, $N_v \cap D = \varnothing$ и для любой нелистовой вершины $w \in N_v$ и любой вершины $z \in N_w$ множество $D^w_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Следовательно,

$$f_{10}(v) \leq |D| = 1 + \sum_{w \in N_v} |D^w| = 1 + \sum_{w \in N_v} f_{01}(w).$$

Чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D$ поддерева $T(v)$ при условии, что $v \in D$, $N_v \cap D = \varnothing$, для любой нелистовой вершины $w \in N_v$ и любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Заметим, что $|D_w| \geq f_{01}(w)$ для любой нелистовой вершины $w \in N_v$. Следовательно,

$$f_{10}(v) = |D| = 1 + \sum_{w \in N_v} |D_w| \geq 1 + \sum_{w \in N_v} f_{01}(w).$$

Соотношение (3.13) доказано.

**4.** Докажем соотношение (3.14). Предположим, что среди вершин множества $N_v$ нет листьев. Для каждой вершины $w \in N_v$ рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$ такое, что $w \notin D^w$, $N_w \cap D^w \neq \varnothing$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D^w_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Заметим, что $|D^w| = f_{00}(w)$ для любого $w \in N_v$. Множество

$$D = \{v\} \cup \Big( \bigcup_{w \in N_v} D^w \Big)$$

— максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(v)$, причем $v \in D$. Следовательно,

$$f_{11}(v) \leq |D| = 1 + \sum_{w \in N_v} |D^w| = 1 + \sum_{w \in N_v} f_{00}(w). \tag{3.19}$$

Рассмотрим другой способ формирования множества $D$. Пусть $u \in N_v$, $D^u$ — наименьшее диссоциирующее множество поддерева $T(u)$ при условии, что $u \in D^u$, $N_u \cap D^u = \varnothing$ и для любой нелистовой вершины $z \in N_u$ и любой вершины $y \in N_z$ множество $D^u_y$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(y)$. Для каждой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$ рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$ при условии, что $w \notin D^w$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D^w_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Заметим, что $|D^u| = f_{10}(u)$ и $|D^w| = f_{01}(w)$ для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$. Множество

$$D = \{v\} \cup D^u \cup \Big( \bigcup_{w \in N_v \setminus \{u\}} D^w \Big)$$

— максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(v)$, причем $v \in D$. Значит,

$$f_{11}(v) \leq |D| = 1 + |D^u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D^w| = 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w).$$

Поскольку $u$ — произвольная вершина множества $N_v$, то

$$f_{11}(v) \leq \min_{u \in N_v} \Big( 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w) \Big). \tag{3.20}$$

Итак, имеем оценки сверху (3.19) и (3.20) для величины $f_{11}(v)$. При этом первая из них имеет место при условии, что в множестве $N_v$ нет листьев дерева. Из (3.19) и (3.20) следует оценка сверху для величины $f_{11}(v)$, которая получается из равенства (3.14) заменой знака “$=$” на знак “$\leq$”.

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D$ поддерева $T(v)$ такое, что $v \in D$. Согласно лемме 3 возможны два случая, которые мы рассмотрим по отдельности.

С л у ч а й 1. Пусть $N_v \cap D = \varnothing$. Тогда в силу максимальности диссоциирующего множества $D$ среди вершин множества $N_v$ нет листьев, и для любой вершины $w \in N_v$ выполняются следующие условия: $N_w \cap D \neq \varnothing$, и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Заметим, что $|D_w| \geq f_{00}(w)$ для любой вершины $w \in N_v$. Следовательно,

$$f_{11}(v) = |D| = 1 + \sum_{w \in N_v} |D_w| \geq 1 + \sum_{w \in N_v} f_{00}(w). \tag{3.21}$$

С л у ч а й 2. Пусть $N_v \cap D \neq \varnothing$. Так как $D$ — диссоциирующее множество поддерева $T(v)$ и $v \in D$, то $N_v \cap D = \{u\}$ для некоторой вершины $u \in N_v$. Тогда $D_u$ — диссоциирующее множество поддерева $T(u)$ такое, что $u \in D_u$, $N_u \cap D = \varnothing$ и для любой нелистовой вершины $w \in N_u$ и любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Отметим также, что для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$ множество $D_w$ — диссоциирующее множество поддерева $T(w)$ такое, что $w \notin D_w$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Тогда $|D_u| \geq f_{10}(u)$ и $|D_w| \geq f_{01}(w)$ для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$. Значит,

$$f_{11}(v) = |D| = 1 + |D_u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D_w| \geq 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w)$$

$$\geq \min_{u \in N_v} \Big(1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w)\Big). \tag{3.22}$$

Имеем две оценки снизу (3.21) и (3.22) для величины $f_{11}(v)$, причем первая из них имеет место, если в множестве $N_v$ нет листьев. Если в множестве $N_v$ есть лист, то справедлива только вторая оценка. Если в множестве $N_v$ нет листьев, то верны обе оценки, и в этом случае возьмем лучшую из них, т. е. минимальную нижнюю границу. Тем самым установлена оценка снизу для величины $f_{11}(v)$, которая получается из (3.14) заменой знака "=" на знак "$\geq$".

**5.** Переходим к доказательству соотношения (3.15). Из определения величин $f_{11}(v)$ и $f_{21}(v)$ непосредственно следует

$$f_{21}(v) \leq f_{11}(v). \tag{3.23}$$

Предположим, что $|N_v| \geq 2$. Рассмотрим произвольные вершины $u_1, u_2$ множества $N_v$. Пусть $D^{u_1}$ — наименьшее максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(u_1)$ такое, что $u_1 \in D^{u_1}$, $D^{u_2}$ — наименьшее максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(u_2)$ такое, что $u_2 \in D^{u_2}$. Для каждой вершины $u \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}$ рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D^u$ поддерева $T(u)$. Заметим, что $|D^{u_1}| = f_{11}(u_1)$, $|D^{u_2}| = f_{11}(u_2)$ и $|D^u| = f_{21}(u)$ для любой вершины $u \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}$. Множество

$$D = D^{u_1} \cup D^{u_2} \cup \Big(\bigcup_{u \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}} D^u\Big)$$

— максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(v)$. Следовательно,

$$f_{21}(v) \leq |D| = |D^{u_1}| + |D^{u_2}| + \sum_{u \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}} |D^u| = f_{11}(u_1) + f_{11}(u_2) + \sum_{u \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}} f_{21}(u). \tag{3.24}$$

Диссоциирующее множество $D$ можно построить и по-другому. Пусть $u \in N_v$ и $D^u$ — наименьшее максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(u)$ такое, что $u \in D$ и $N_u \cap D \neq \varnothing$. Для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$ рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$. Заметим, что $|D^u| = f_{12}(u)$ и $|D^w| = f_{21}(w)$ для каждой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$. Множество

$$D = D^u \cup \Big(\bigcup_{w \in N_v \setminus \{u\}} D^w\Big)$$

— максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(v)$. Значит,

$$f_{21}(v) \leq |D| = |D^u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D^w| = f_{12}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{21}(w).$$

Поскольку эти соотношения справедливы для любой вершины $u \in N_v$, то

$$f_{21}(v) \leq \min_{u \in N_v} \Big(f_{12}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{21}(w)\Big). \tag{3.25}$$

Из неравенств (3.23)–(3.25) следует верхняя оценка для величины $f_{21}(v)$, которая получается из равенства (3.15) заменой знака “$=$” на “$\leq$”.

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D$ поддерева $T(v)$. Возможны два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $v \in D$. Тогда

$$f_{21}(v) = |D| \geq f_{11}(v). \tag{3.26}$$

С л у ч а й 2. Пусть $v \notin D$. По лемме 3 возможны только следующие два подслучая.

П о д с л у ч а й 2.1. Предположим, что существуют две различные вершины $\overline{u}_1 \in D \cap N_v$ и $\overline{u}_2 \in D \cap N_v$. Тогда $D_{\overline{u}_1}$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(\overline{u}_1)$ такое, что $\overline{u}_1 \in D_{\overline{u}_1}$ и $D_{\overline{u}_2}$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(\overline{u}_2)$ такое, что $\overline{u}_2 \in D_{\overline{u}_2}$. Для любой вершины $w \in N_v \setminus \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ множество $D_w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(w)$. Следовательно,

$$f_{21}(v) = |D| = |D_{\overline{u}_1}| + |D_{\overline{u}_2}| + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}} |D_w| \geq f_{11}(\overline{u}_1) + f_{11}(\overline{u}_2) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}} f_{21}(w). \tag{3.27}$$

Пусть $u_1 = \arg\min_{u \in N_v} (f_{11}(u) - f_{21}(u))$, $u_2 = \arg\min_{u \in N_v \setminus \{u_1\}} (f_{11}(u) - f_{21}(u))$. Тогда

$$(f_{11}(\overline{u}_1) - f_{21}(\overline{u}_1)) + (f_{11}(\overline{u}_2) - f_{21}(\overline{u}_2)) \geq (f_{11}(u_1) - f_{21}(u_1)) + (f_{11}(u_2) - f_{21}(u_2))$$

и

$$f_{11}(\overline{u}_1) + f_{11}(\overline{u}_2) \geq (f_{11}(u_1) - f_{21}(u_1)) + (f_{11}(u_2) - f_{21}(u_2)) + f_{21}(\overline{u}_1) + f_{21}(\overline{u}_2). \tag{3.28}$$

Учитывая (3.27) и (3.28), получаем

$$\begin{aligned} f_{21}(v) &\geq (f_{11}(\overline{u}_1) + f_{11}(\overline{u}_2)) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}} f_{21}(w) \\ &\geq (f_{11}(u_1) + f_{21}(\overline{u}_1) + f_{11}(u_2) + f_{21}(\overline{u}_2) - f_{21}(u_1) - f_{21}(u_2)) + \sum_{w \in N_v \setminus \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}} f_{21}(w) \\ &= f_{11}(u_1) + f_{11}(u_2) - f_{21}(u_1) - f_{21}(u_2) \ + \sum_{w \in N_v} f_{21}(w) \\ &= f_{11}(u_1) + f_{11}(u_2) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u_1, u_2\}} f_{21}(w). \end{aligned} \tag{3.29}$$

П о д с л у ч а й 2.2. Пусть существует вершина $u_1 \in N_v \cap D$ такая, что $N_{u_1} \cap D \neq \varnothing$. Заметим, что $D_{u_1}$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(u_1)$ такое, что $u_1 \in D_{u_1}$ и $N_{u_1} \cap D_{u_1} \neq \varnothing$. Следовательно, $|D_{u_1}| \geq f_{12}(u_1)$. Для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u_1\}$ множество $D_w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(w)$ и $|D_w| \geq f_{21}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{21}(v) = |D| = |D_{u_1}| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u_1\}} |D_w| &\geq f_{12}(u_1) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u_1\}} f_{21}(w) \\ &\geq \min_{u \in N_v} \Big( f_{12}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{21}(w) \Big). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Мы получили нижние оценки (3.26), (3.29) и (3.30) для величины $f_{21}(v)$. При этом оценка (3.29) справедлива при $|N_v| \geq 2$. Если $|N_v| = 1$, то справедливы нижние оценки (3.26) и (3.30), и в этом случае выберем минимальную нижнюю границу. Если $|N_v| \geq 2$, то справедливы все три оценки, и среди них выберем наилучшую. Тем самым установлена нижняя оценка для величины $f_{21}(v)$, которая получается из (3.15) заменой знака “$=$” на знак “$\geq$”.

**6.** Переходим к доказательству соотношения (3.16). Пусть $u \in N_v$. Рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D^u$ поддерева $T(u)$ такое, что $u \in D^u$, $N_u \cap D^u = \varnothing$ и для любой нелистовой вершины $w \in N_u$ и любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z^u$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$ рассмотрим наименьшее диссоциирующее множество $D^w$ поддерева $T(w)$ такое, что $w \notin D^w$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z^w$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Тогда множество

$$D = \{v\} \cup D^u \cup \Big( \bigcup_{w \in N_v \setminus \{u\}} D^w \Big)$$

— максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(v)$. Следовательно,

$$f_{12}(v) \le |D| = 1 + |D^u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D^w| = 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w).$$

Так как $u$ — произвольная вершина множества $N_v$, то

$$f_{12}(v) \le \min_{u \in N_v} \Big( 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w) \Big).$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим наименьшее максимальное диссоциирующее множество $D$ поддерева $T(v)$ такое, что $v \in D$ и $N_v \cap D \neq \varnothing$. Заметим, что $N_v \cap D = \{u\}$ для некоторой вершины $u \in N_v$. Тогда $D_u$ — диссоциирующее множество поддерева $T(u)$ такое, что $u \in D_u$, $N_u \cap D_u = \varnothing$ и для любой вершины $w \in N_u$ и любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Для любой вершины $w \in N_v \setminus \{u\}$ множество $D_w$ — диссоциирующее множество поддерева $T(w)$ такое, что $w \notin D_w$ и для любой вершины $z \in N_w$ множество $D_z$ — максимальное диссоциирующее множество поддерева $T(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{12}(v) = |D| = 1 + |D_u| + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} |D_w| &\ge 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w) \\ &\ge \min_{u \in N_v} \Big( 1 + f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w) \Big). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Корректность рекуррентных соотношений доказана.

### 3.2. Алгоритм

Алгоритм вычисления значения $diss^-(T)$ для дерева $T$ состоит в том, чтобы в дереве $T$ выбрать корень $r$, а затем обойти все вершины дерева $T$ в порядке обратного обхода [32, с. 81]. Для каждой вершины $v$ дерева находим значения величин $f_{00}(v)$, $f_{01}(v)$, $f_{10}(v)$, $f_{11}(v)$, $f_{21}(v)$, $f_{12}(v)$, используя правило (3.10), если $v$ — лист дерева, или рекуррентные соотношения (3.11)–(3.16), если вершина $v$ не является листом дерева. Тогда $diss^-(T) = f_{21}(r)$. Нетрудно показать методом математической индукции, что алгоритм верно вычисляет значения всех величин $f_{ij}(v)$. Вершины дерева $T$ рассматриваются в порядке обратного обхода, и при вычислении значения величины $f_{ij}(v)$ используются только значения величин $f_{ij}(u)$, $u \in N_v$, которые были вычислены на предыдущих шагах алгоритма.

Оценим временную сложность алгоритма. Значения величин $f_{00}(v)$, $f_{01}(v)$ и $f_{10}(v)$, используя рекуррентные соотношения (3.11), (3.12) и (3.13), можно найти за время $O(|N_v|)$. В рекуррентных соотношениях (3.14) и (3.16) выражение

$$\min_{u \in N_v} \Big( f_{10}(u) + \sum_{w \in N_v \setminus \{u\}} f_{01}(w) \Big)$$

можно записать в виде

$$\min_{u\in N_v}\Big(f_{10}(u)-f_{01}(u)\Big)+\sum_{w\in N_v} f_{01}(w).$$

Аналогично, в рекуррентном соотношении (3.15) выражение

$$\min_{u\in N_v}\Big(f_{12}(u)+\sum_{w\in N_v\setminus\{u\}} f_{21}(w)\Big)$$

можно записать в виде

$$\min_{u\in N_v}\left(f_{12}(u)-f_{21}(u)\right)+\sum_{w\in N_v} f_{21}(w).$$

Учитывая эти модификации рекуррентных соотношений (3.14)–(3.16), значения величин $f_{11}(v)$, $f_{21}(v)$ и $f_{12}(v)$ также можно вычислить за время $O(|N_v|)$ и, следовательно, общее время работы алгоритма $O(|V(T)|)$.

**Утверждение 6.** *Задача “Наименьшее максимальное диссоциирующее множество” может быть решена за линейное время в классе деревьев.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Лекции по теории графов: учебное пособие / В.А. Емеличев [и др.]. М.: КД “Либроком”, 2009. 392 с.
2. **McLaughlan B., Akkaya K.** Coverage-based Clustering of Wireless Sensor and Actor Networks // IEEE Internat. Conf. on Pervasive Services. 2007. P. 45–54. doi: 10.1109/PERSER.2007.4283888.
3. **Yannakakis M.** Node-Deletion Problems on Bipartite Graphs // SIAM J. Comp. 1981. Vol. 10, no. 2. P. 310–327. doi: 10.1137/0210022.
4. **Boliac R., Cameron K., Lozin V.** On computing the dissociation number and the induced matching number of bipartite graphs // Ars Combinatoria. 2004. Vol. 72. P. 241–253.
5. **Boliac R., Lozin V.** On computing the dissociation number of bipartite graphs // Rutcor research report. 2001. Art. no. 31-2001. 10 p.
6. The complexity of dissociation set problems in graphs / Yu. Orlovich et. al // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, no. 13. P. 1352–1366. doi: 10.1016/j.dam.2011.04.023.
7. **Cameron K., Hell P.** Independent packings in structured graphs // Math. Programming, series B. 2006. Vol. 105, no. 2. P. 201–213. doi: 10.1007/s10107-005-0649-5.
8. **Lozin V., Rautenbach D.** Some results on graphs without long induced paths // Inf. Process. Lett. 2003. Vol. 88. P. 167–171. doi: 10.1016/j.ipl.2003.07.004.
9. **Kardoš F., Katrenič J., Schiermeyer I.** On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs // Theoretical Comp. Sci. 2011. Vol. 412, no. 50. P. 7009–7017. doi: 10.1016/j.tcs.2011.09.009.
10. **Xiao M., Kou S.** Exact algorithms for the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover problems // Theoretical Comp. Sci. 2017. Vol. 657, Part A. P. 86–97. doi: 10.1016/j.tcs.2016.04.043.
11. Moderately exponential time algorithms for the maximum bounded-degree-1 set problem / M.-S. Chang et al. // Discret. Appl. Math. 2018. Vol. 251. P. 114–125. doi: 10.1016/j.dam.2018.05.032.
12. On bounded-degree vertex deletion parameterized by treewidth / N. Betzler et al. // Discret. Appl. Math. 2012. Vol. 160, no. 1-2. P. 53–60. doi: 10.1016/j.dam.2011.08.013.
13. **Ganian R., Klute F., Ordyniak S.** On structural parameterizations of the bounded-degree vertex deletion problem // Algorithmica. 2021. Vol. 83, no. 1. P. 297–336. doi: 10.1007/s00453-020-00758-8.
14. Сложность задач о диссоциирующих множествах в некоторых наследственных классах графов / Ю. Л. Орлович и др. // Докл. Национал. Наук Беларуси. 2009. Т. 53. № 3. С. 16–20.
15. **Tu J., Zhang Z., Shi Y.** The maximum number of maximum dissociation sets in trees // J. Graph Theory. 2020. Vol. 96, no. 4. P. 472–489. doi: 10.1002/jgt.22627.
16. **Brešar B., Hartnell B., Rall D.** Uniformly dissociated graphs // Ars mathematica contemporanea. 2017. Vol. 13, no. 2. P. 293–306. doi: 10.26493/1855-3974.1013.46a.
17. **Allan R., Laskar R.** On domination and independent domination numbers of a graph // Discret. Math. 1978. Vol. 23. P. 73–76. doi: 10.1016/0012-365X(78)90105-X.

18. **Зверович В.Э.** Характеризация доминантно-совершенных графов // Мат. заметки. 1990. Т. 48. С. 66–69.
19. **Goddard W., Henning M.** Independent domination in graphs: A survey and recent results // Discret. Math. 2013. Vol. 313, no. 7. P. 839–854. doi: 10.1016/j.disc.2012.11.031 .
20. **Zhang L., Tu J., Xin Ch.** Maximum dissociation sets in subcubic trees [e-resource]. 2020. 15 p. arXiv:2005.03335. URL: https://arxiv.org/pdf/2005.03335.pdf .
21. **Lokshantov D., Vatshelle M., Villanger Y.**. Independent set in $P_5$-free graphs in polynomial time // Proc. of the Twenty-Fifth Annual ACM SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA 2014, USA). USA: SIAM, 2014. P. 570–581. doi: 10.1137/1.9781611973402.43 .
22. Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on $P_6$-free graphs / Grzesik A. et al. // Proc. of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA 2019, USA). USA: SIAM, 2019. P. 1257–1271. doi: 10.1145/contrib-81508705261 .
23. **Golumbic M., Goss C.** Perfect elimination and chordal bipartite graphs // J. Graph Theory. 1978. Vol. 2. P. 155–163. doi: 10.1002/JGT.3190020209 .
24. **Damaschke P., Müller H., Kratsch D.** Domination in convex and chordal bipartite graphs // Information Processing Letters. 1990. Vol. 36, no. 5. P. 231–236. doi: 10.1016/0020-0190(90)90147-P .
25. **Orlovich Yu., Finke G., Gordon V., Zverovich I.** Approximability results for the maximum and minimum maximal induced matching problems // Discrete Optim. 2008. Vol. 5. P. 584–593. doi: 10.1016/j.disopt.2007.11.010 .
26. **Kartynnik Yu., Ryzhikov A.** On minimum maximal distance-$k$ matchings // Discrete Math. and Theoretical Comp. Sci. 2018. Vol. 20, no. 1. doi: 10.23638/DMTCS-20-1-3 .
27. **Lepin V.** A linear algorithm for computing of a minimum weight maximal induced matching in an edge-weighted tree // Electronic Notes in Discrete Math. 2006. Vol. 24. P. 111–116. doi: 10.1016/j.endm.2006.06.019 .
28. **Алексеев В.Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике: сб. ст. Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1983. С. 3–13.
29. **Gartland P., Lokshtanov D.** Independent set on $p_k$-free graphs in quasi-polynomial time // 61st Annual Symposium on Foundations of Comp. Sci. (FOCS): Proc. 2020 IEEE 61st Annual Symposium on FOCS. Piscataway: IEEE. P. 613–624. doi: 10.1109/FOCS46700.2020.00063 .
30. The maximum independent set problem in planar graphs / V.E. Alekseev et al. // Internat. Symp. on Math. Foundations of Comp. Sci. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. P. 96–107. (Lecture Notes in Comp. Sci.; vol 5162). doi: 10.1007/978-3-540-85238-4_7 .
31. **Ahadi A., Dehghan A.** (2/2/3)-SAT problem and its applications in dominating set problems // Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. 2019. Vol. 21, no. 4. Art. no. 9. 10 p. doi: 10.23638/DMTCS-21-4-9 .
32. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Структуры данных и алгоритмы. М.: ИД “Вильямс”, 2016. 400 с.

Поступила 22.02.2022
После доработки 4.05.2022
Принята к публикации 11.05.2022

Дугинов Олег Иванович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: oduginov@gmail.com

Кускова Барбара Михайловна
магистрант
Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: basia.kuskova@gmail.com

Малышев Дмитрий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
ведущий науч. сотрудник
Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур

НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Шур Наталья Александровна
младший науч. сотрудник
Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: linatka427@gmail.com

**REFERENCES**

1. Emelichev V.A., Mel'nikov O.I., Sarvanov V.I., and Tyshkevich R.I. *Lectures on graph theory.* Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1994, 371 p. ISBN: 3411171219 . Original Russian text published in Emelichev V.A. et al. *Lektsii po teorii grafov: uchebnoe posobie.* Moscow: Librokom Publ., 2009, 392 p.
2. McLaughlan B., Akkaya K. Coverage-based clustering of wireless sensor and actor networks. *IEEE Internat. Conf. on Pervasive Services*, 2007, pp. 45–54. doi: 10.1109/PERSER.2007.4283888 .
3. Yannakakis M. Node-deletion problems on bipartite graphs. *SIAM J. Comput.*, 2006, vol. 10, no. 2, pp. 310–327. doi: 10.1137/0210022 .
4. Boliac R., Cameron K., Lozin V. On computing the dissociation number and the induced matching number of bipartite graphs. *Ars Combinatoria*, 2004, vol. 72, pp. 241–253.
5. Boliac R., Lozin V. On computing the dissociation number of bipartite graphs. *Rutcor research report*, 2001, art. no. 31-2001, 10 p.
6. Orlovich Y., Dolgui A., Finke G., Gordon V., Werner F. The complexity of dissociation set problems in graphs. *Discret. Appl. Math.*, 2011, vol. 159, no. 13, pp. 1352–1366. doi: 10.1016/j.dam.2011.04.023 .
7. Cameron K., Hell P. Independent packings in structured graphs. *Math. Programming*, 2006, vol. 105, no. 2, pp. 201–213. doi: 10.1007/s10107-005-0649-5 .
8. Lozin V., Rautenbach D. Some results on graphs without long induced paths. *Inf. Process. Lett.*, 2003, vol. 88, pp. 167–171. doi: 10.1016/j.ipl.2003.07.004 .
9. Kardoš F., Katrenič J., Schiermeyer I. On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs. *Theoretical Comp. Sci.*, 2011, vol. 412, no. 50, pp. 7009–7017. doi: 10.1016/j.tcs.2011.09.009 .
10. Xiao M., Kou S. Exact algorithms for the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover problems. *Theoretical Comp. Sci.*, 2017, vol. 657, pp. 86–97. doi: 10.1016/j.tcs.2016.04.043 .
11. Chang M.-S. et al. Moderately exponential time algorithms for the maximum bounded-degree-1 set problem. *Discret. Appl. Math.*, 2018, vol. 251, pp. 114–125. doi: 10.1016/j.dam.2018.05.032 .
12. Betzler N. et al. On bounded-degree vertex deletion parameterized by treewidth. *Discret. Appl. Math.*, 2012, vol. 160, no. 1-2, pp. 53–60. doi: 10.1016/j.dam.2011.08.013 .
13. Ganian R., Klute F., Ordyniak S. On structural parameterizations of the bounded-degree vertex deletion problem. *Algorithmica*, 2021, vol. 83, no. 1, pp. 297–336. doi: 10.1007/s00453-020-00758-8 .
14. Orlovich Y.L. et al. Complexity of dissociate set problems in some hereditary classes of graphs. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 3, pp. 16–20. (in Russian)
15. Tu J., Zhang Z., Shi Y. The maximum number of maximum dissociation sets in trees. *J. Graph Theory*, 2020, vol. 96, no. 4, pp. 472–489. doi: 10.1002/jgt.22627 .
16. Brešar B., Hartnell B., Rall D. Uniformly dissociated graphs. *Ars mathematica contemporanea*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 293–306. doi: 10.26493/1855-3974.1013.46a .
17. Allan R.B., Laskar R. On domination and independent domination numbers of a graph. *Discret. Math.*, 1978, vol. 23, pp. 73–76. doi: 10.1016/0012-365X(78)90105-X .
18. Zverovich V.E. Domination-complete graphs. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1990, vol. 48, no. 3, pp. 920–922. doi: 10.1007/BF01157434 .
19. Goddard W., Henning M.A. Independent domination in graphs: A survey and recent results. *Discret. Math.*, 2013, vol. 313, no. 7, pp. 839–854. doi: 10.1016/j.disc.2012.11.031 .
20. Zhang L., Tu J., Xin Ch. Maximum dissociation sets in subcubic trees. *arXiv*:2005.03335, 2020, 15 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/2005.03335.pdf .
21. Lokshantov D., Vatshelle M., Villanger Y.. Independent set in $P_5$-free graphs in polynomial time. *Proc. of the Twenty-Fifth Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 2014, USA), USA: SIAM, 2014, pp. 570–581. doi: 10.1137/1.9781611973402.43 .

22. Grzesik A. et al. Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on $P_6$-free graphs. *Proc. of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 2019, USA), USA: SIAM, 2019, pp. 1257–1271. doi: 10.1145/contrib-81508705261 .
23. Golumbic M., Goss C.F. Perfect elimination and chordal bipartite graphs. *J. Graph Theory*, 1978, vol. 2, pp. 155–163. doi: 10.1002/JGT.3190020209 .
24. Damaschke P., Müller H., Kratsch D. Domination in convex and chordal bipartite graphs. *Information Processing Letters*, 1990, vol. 36, no. 5, pp. 231–236. doi: 10.1016/0020-0190(90)90147-P .
25. Orlovich Yu., Finke G., Gordon V., Zverovich I. Approximability results for the maximum and minimum maximal induced matching problems. *Discret. Optim.*, 2008, vol. 5, pp. 584–593. doi: 10.1016/j.disopt.2007.11.010 .
26. Kartynnik Yu., Ryzhikov A. On minimum maximal distance-$k$ matchings. *Discrete Math. and Theoretical Comp. Sci.*, 2018, vol. 20, no. 1, doi: 10.23638/DMTCS-20-1-3 .
27. Lepin V. A linear algorithm for computing of a minimum weight maximal induced matching in an edge-weighted tree. *Electronic Notes in Discrete Math.*, 2006, vol. 24, pp. 111–116. doi: 10.1016/j.endm.2006.06.019 .
28. Alekseev V.E. On the local restrictions effect on the complexity of finding the graph independence number. In: *Kombinatorno-Algebraicheskie Metody v Prikladnoi Matematike*. Gorkii: Gorkii Univ. Press, 1983, pp. 3–13 (in Russian).
29. Gartland P., Lokshtanov D. Independent set on $P_k$-free graphs in quasi-polynomial time. In: *Proceedings of 2020 IEEE 61st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. Piscataway: IEEE, 2020, pp. 613–624. doi: 10.1109/FOCS46700.2020.00063 .
30. Alekseev V.E. et al. The maximum independent set problem in planar graphs. In: *Internat. Symp. on Math. Foundations of Comp. Sci*, Ser. Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 5162. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008, pp. 96–107. doi: 10.1007/978-3-540-85238-4_7 .
31. Ahadi A., Dehghan A. (2/2/3)-SAT problem and its applications in dominating set problems. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 2019, vol. 21, no. 4, art. no. 9, 10 p. doi: 10.23638/DMTCS-21-4-9 .
32. Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D. *Data structures and algorithms*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983, 427 p. ISBN: 0201000237 . Translated to Russian under the title *Struktury dannykh i algoritmy*. Moscow: Vil'yams Publ., 2016, 400 p.

Received February 22, 2022
Revised May 4, 2022
Accepted May 11, 2022

**Funding Agency:** The research of the third author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-51-04001). The research of the first and the fourth authors was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F21RM-001).

*Oleg Ivanovich Duginov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: oduginov@gmail.com .

*Barbara Mihajlovna Kuskova*, graduate student, Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: basia.kuskova@gmail.com .

*Dmitrii Sergeevich Malyshev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Laboratory of Algorithms and Technologies for Networks Analysis, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, 603093 Russia, e-mail: dsmalyshev@rambler.ru .

*Natalia Aleksandrovna Shur*, Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus,
e-mail: linatka427@gmail.com .

Cite this article as: O. I. Duginov, B. M. Kuskova, D. S. Malyshev, N. A. Shur. Structural and algorithmic properties of maximal dissociating sets in graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 114–142.