УДК: 517.9

MSC2010: 37D15

О СВЯЗИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТИ С МНОГООБРАЗИЯМИ ЗЕЙФЕРТА И ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МОРСА-СМЕЙЛА

© Е. С. Косолапов, О. В. Починка

СПбПУ Петра Великого

Образовательная программа: “Механика и математическое моделирование”

ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, 194021, Российская федерация.

e-mail: *egor-kosolapov@bk.ru*

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики

Факультет Информатики, Математики и Компьютерных Наук

ул. Большая Печерская, д. 25/12, Нижний Новгород, 603155, Российская Федерация.

e-mail: *olga-pochinka@yandex.ru*

On the connection of periodic homeomorphisms of a surface with Seifert manifolds and the Morse-Smale diffeomorphism.

Kosolapov E. S., Pochinka O. V.

Abstract.

In this paper we consider periodic homeomorphism φ which acts on genus p surface. Homeomorphism is called *periodic* if exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n \equiv \mathrm{id}$. We study connections of such homeomorphisms with 3-dimensional topology. More accurately, we have established the condition that given 3-dimensional Seifert manifold is realised as mapping torus of some periodic homeomorphism φ. Moreover, this periodic homeomorphism is almost fully determined by topology of its mapping torus. This connection allowed us to proof, for instance, that there are no homotopy identical periodic homeomorphisms without points of smaller period on surfaces of positive genus. Using the connection between Morse-Smale diffeomorphisms and periodic homeomorphisms, we succeeded in classification of corresponding periodic homeomorphism of arbitrary Morse-Smale diffeomorphism with one source, one sink and one saddle orbit with negative type of orientation, what can be used in solution of problem of realisation of arbitrary Morse-Smale diffeomorphism on 2-dimensional manifold

Keywords: *Periodic homeomorphism, Seifert manifolds, Morse-Smale diffeomorphism*

Введение

Периодическим гомеоморфизмом называется такое отображение, применение которого некоторое конечное количество раз оказывается тождественным отображением. Мы будем рассматривать данные периодические преобразования с точностью до отношения эквивалентности, которое сохраняет структуру орбит. Более формально, два периодических гомеоморфизма φ, φ' топологического пространства X *топологически сопряжены*, если существует гомеоморфизм $h : X \to X$ такой, что $h \circ \varphi = \varphi' \circ h$.

Я. Нильсен [6] показал, что для топологической классификации всех сохраняющих ориентацию периодических преобразований замкнутых ориентируемых поверхностей, с точностью до вышеуказанной эквивалентности, достаточно знать некоторое число параметров, которые формируют так называемую *полную характеристику периодического отображения* φ. Неформально говоря, полная характеристика определяется точками, в которых период оказывается меньшим, чем период исходного отображения, а также некоторыми характеристиками, отвечающим за локальное поведение функции в окрестности данных точек меньшего периода. Более того, оказывается, что существование периодического отображения с заданной полной характеристикой определяется некоторой системой уравнений на числа, входящие в полную характеристику. Одним из основных результатов этой работы является получение эквивалентной системы, которая намного удобней по некоторым причинам, которые будут объяснены в соответствующем разделе.

Одним из основных способов расширения списка многообразий является так называемая конструкция *надстройки*. Более точно, пусть у нас есть топологическое пространство X и действующий на ней гомеоморфизм φ. Рассмотрим многообразие $\Sigma = (X \times [0,1]) / \sim$, где $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$. Если φ — периодический гомеоморфизм поверхности, то оказывается, что Σ является так называемым *многообразием Зейферта*, широко используемым в теории трехмерных многообразий. В данной работе найдены необходимые и достаточные условия того, что заданное многообразие Зейферта является надстройкой над периодическим гомеоморфизмом.
Также в работе рассмотрены *диффеоморфизмы Морса-Смейла.* Динамика, порождаемая такими диффеоморфизмами не меняет структуру разбиения на орбиты при малых изменениях диффеоморфизма, такие диффеоморфизмы называются *структурно устойчивыми.* При этом диффеоморфизмы Морса-Смейла являются простейшими среди структурно устойчивых, поскольку имеют лишь конечное число периодических точек. Однако их класс достаточно широк, поскольку они существуют на любых многообразиях. Среди диффеоморфизмов Морса-Смейла специальное место занимают *градиентно-подобные диффеоморфизмы*, динамика которых схожа с динамикой типичных градиентных потоков функций Морса. В силу результатов А. Безденежных и В. Гринеса (см., например, [4]), любой диффеоморфизм Морса-Смейла f на поверхности представляется в виде $f = \xi^1\varphi$, где ξ^1 — сдвиг вдоль градиентно-подобного потока ξ^t на единицу времени, а φ — периодическое отображение. Связь

периодических характеристики φ с диффеоморфизмом f заключается в том, что все точки меньшего периода отображения φ являются периодическими точками отображения f. Используя эту связь и свойства периодических преобразований, в данной работе получены содержательные результаты о периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Благодарности. Исследование поддержано грантом РНФ, договор 21-11-00010.

1. Основные определения и результаты

Здесь мы дадим основные формальные определения и сформулируем основные полученные результаты и следствия из них

Определение 1. Сохраняющий ориентацию и отличный от тождественного гомеоморфизм φ ориентируемого многообразия X называется периодическим, если существует такое натуральное число $n > 1$, что для любого $x \in X$ выполнено равенство $\varphi^n(x) = x$. Наименьшее из таких n называется периодом периодического отображения.

Везде в данной работе X — сфера с p ручками.

Определение 2. Гомеоморфизмы $\varphi, \psi : X \to X$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : X \to X$ такой, что для любого $x \in X$ выполнено равенство выполнено равенство $h\varphi(x) = \psi h(x)$.

Определение 3. Орбитой $\mathscr{O}_x$ точки x в силу гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ называется множество $\{y \in X \,|\, \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi^k(x) = y\}$.

Определение 4. Точкой меньшего периода периодического гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ называют такую точку $x_0 \in X$, что существует $n_0 < n$ (n — период гомеоморфизма) такое, что $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Я. Нильсена [6] (см. также [1]) для любого периодического гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ множество точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на X является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\dfrac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \dfrac{n}{n_0}$. Коль множество всех точек меньшего периода конечно, то занумеруем их орбиты и будем их впредь обозначать как x_i, $i = 1, \dots, k$, а периоды точек этих точек будем обозначать n_i, полагать $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$ и обозначать через $\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения. Определим число d_i удовлетворяющее условию $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$.

Определение 5. Пара (d_i, n_i) называется валентностью точки меньшего периода x_i.

Я. Нильсен показал, что верна следующее

Утверждение 1 ([6]). *Два периодических отображения сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей меньшего периода.*

Из этого утверждения естественным образом вытекает следующее определение

Определение 6. Набор параметров $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ периодического гомеоморфизма φ называется его полной характеристикой.

Утверждение 2 ([6]). *Полная характеристика $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ реализуется каким-то периодическим гомеоморфизмом φ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2)$
- $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod n$
- *если* $g = 0$, *то* $\gcd(d_1 n_1, \dots, d_k n_k, n) = 1$.

Используя приведенные условия в работе получены следующие оценки параметров полной характеристики.

Теорема 1. *Пусть дан периодический гомеоморфизм φ с полной характеристикой $(n, p, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ тогда выполнены следующие неравенства:*

1. $g \leqslant p$;
2. $k \leqslant 2(p + 1)$;
3. $n \leqslant 4p + 2$.

Заметим, что из этих неравенств сразу следует, что поиск всех периодических гомеоморфизмов на поверхности с фиксированным числом ручек является чисто алгоритмической задачей. Следующая теорема дает алгоритмический критерий реализуемости характеристики периодическим гомеоморфизмом.

Теорема 2. *Набор чисел $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ является полной характеристикой периодического отображения φ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (ниже $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$, $\lambda = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$):*

В случае $g = 0$

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \dots, k - 1\}$;

2. $n = \lambda$ *и* $p = \dfrac{\lambda - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda}{\lambda_i}}{2} + 1$*;*
3. $\gcd(\lambda, d_1, \ldots, d_k) = 1$.

В случае $g \neq 0$*:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \ldots, k-1\}$
2. $n = \tau\lambda$, $\tau \in \mathbb{N}$ *и* $p = \dfrac{\lambda(2g + k - 2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda}{\lambda_i}}{2}\tau + 1$

Ниже приведены некоторые следствия алгоритмического критерия.

Следствие 1. *Не существует периодических гомеоморфизмов ровно с одной точкой меньшего периода.*

Следствие 2. *Любой периодический гомеоморфизм с 2 точками меньшего периода при* $g \neq 0$ *имеет полную характеристику следующего вида:*

$$(n = \tau\lambda,\ p = \tau(2g - 1) + 1,\ n_1 = n_2 = \lambda,\ d_1 + d_2 = \lambda).$$

А в случае $g = 0$ *любой периодический гомеоморфизм это поворот сферы вокруг оси полюсов на некоторый рациональный угол.*

Конструкция надстройки над периодическим гомеоморфизмов приводит в класс многообразий Зейферта. Дадим точные определения.

Определение 7. Рассмотрим полноторие $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ и рассмотрим разбиение на окружности $\{x\} \times \mathbb{S}^1$. Такое полноторие с таким расслоением на окружности называется тривиально расслоенным полноторием.

Естественно определить нетривиально расслоенное полноторие.

Определение 8. Рассмотрим пространство $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]/\sim$, где $(x, 0) \sim (f(x), 1)$, где f — поворот окружности на рациональный угол $2\pi\dfrac{\nu}{\alpha}$, где $0 < \nu < \alpha$. Взаимно простые числа ν, α называются орбитальными инвариантами, а получившееся пространство называется нетривиально расслоенным пространством с особым слоем $\{0\} \times \mathbb{S}^1$.

Определение 9. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие, разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые(слои), называется многообразием Зейферта, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию.

Обозначим через $(\alpha_i, \nu_i), 1 \leqslant i \leqslant k$ параметры нетривиально расслоенных полноториев многообразия Зейферта. Определим числа β_i следующим образом: $\beta_i \nu_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$.

Определение 10. Базой многообразия Зейферта M называется фактор-многообразие $B = M/\sim$, получающееся отождествлением точек из слоя.

Определение 11. Числом Эйлера многообразия Зейферта называется число $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$.

Будем обозначать многообразия Зейферта следующим образом

$$M(B; (\alpha_i, \beta_i), 1 \leqslant i \leqslant k).$$

Теорема 3. *Для того, чтобы многообразие Зейферта $M(B; (\alpha_i, \beta_i), 1 \leqslant i \leqslant k)$ было надстройкой над периодическим гомеоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (ниже $\alpha = \mathrm{lcm}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$):*
В случае, когда B сфера

1. *число Эйлера принадлежит множеству $\{1, \ldots, k-1\}$;*
2. *число $p = \dfrac{\alpha - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha}{\alpha_i}}{2} + 1$ является целым и неотрицательным;*
3. $\gcd(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 1$.

При этом период гомеоморфизма будет равен α, а род поверхности на котором он действует будет равен p.
В случае, когда база B — сфера с g ручками, где $g > 0$

1. *Число Эйлера принадлежит множеству $\{1, \ldots, k-1\}$*
2. *число $p = \dfrac{\alpha(2g + k - 2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha}{\alpha_i}}{2}\tau + 1$ должно быть целым неотрицательным числом для некоторого $\tau \in \mathbb{N}$.*

При этом период гомеоморфизма будет равен $\alpha\tau$, а род поверхности на котором он действует будет равен p.

Эта теорема позволяет связать периодические гомеоморфизмы с топологией многообразий Зейферта. Например, будут доказаны следующие следствия.

Следствие 3. *Если периодический гомеоморфизм действует на сфере с $p > 0$ ручками и у него есть хотя бы одна точка меньшего периода, то такой гомеоморфизм не гомотопен тождественному отображению.*

Следствие 4. *Если у многообразия Зейферта M ровно два особых слоя, база B гомеоморфна сфере, число Эйлера равно 1, то тогда M гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Ещё одним приложением периодических гомеоморфизмов можно считать изучение диффеоморфизмов Морса-Смейла. Хорошее изложение всех следующих ниже определений и теорем есть в [4]

Определение 12. Пусть $f : X \to X$ диффеоморфизм. Подмножество $A \subset \mathrm{int}X$ называется f-инвариантным, если $f(A) = A$

Определение 13. Пусть $f : X \to X$ диффеоморфизм. f-инвариантное подмножество $A \subset \mathrm{int}X$ называется гиперболическим, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного расслоения T_AX в прямую сумму: $E^s_A \oplus E^u_A$ такие, что

$$\begin{cases} ||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||, v \in E^s_A, k > 0 \\ ||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||, v \in E^u_A, k > 0 \end{cases}$$

для какого-то фиксированного $c > 0$ и $0 < \lambda < 1$.

Существует гладкая иммерсия J касательного пространства к точке в окрестность этой точки на многообразии.

Определение 14. Устойчивым (неустойчивым) многообразием W^s_x (W^u_x) называется подмногообразие $J(E^s_x)$ ($J(E^u_x)$).

Определение 15. Точка x называется блуждающей, если существует такая открытая окрестность U_x точки x, что для любого отличного от нуля целого числа n выполнено $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$. В ином случае, точку x называют неблуждающей.

Определение 16. Диффеоморфизмом Морса-Смейла называется такой диффеоморфизм $f : X \to X$, что множество его неблуждающих точек конечно, состоит только из гиперболических точек, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются друг с другом трансверсально.

Определение 17. Гиперболическая точка $x \in X$, где $\mathrm{dim}X = n$, называется стоком (источником), если $\mathrm{dim}(W^s_x) = n$ ($\mathrm{dim}(W^u_x) = n$). Если точка гиперболическая, но при этом не выполняются условия на размерность выше, то тогда такую точку называют седлом. Говорят, что периодическая точка x периода $per(x)$ имеет положительный (отрицательный) тип ориентации, если отображение $f^{per()}|_{W^u_x}$ сохраняет (меняет) ориентацию.

Утверждение 3 ([4])**.** *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла f представляются в виде композиции $f = \varphi \circ \xi^1$, где ξ^1 есть сдвиг вдоль* *потока ξ^t на единицу времени, а φ — периодический гомеоморфизм. Причём точки меньшего периода гомеоморфизма φ являются также периодическими точками диффеоморфизма f, причём их периоды совпадают.*

Основным результатом данной работы применительно к диффеоморфизмам Морса-Смейла является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть у сохраняющего ориентацию диффеоморфизма f Морса-Смейла на сфере с p ручками есть единственная седловая орбита отрицательного типа ориентации. Тогда относительно периодического отображения φ ($f = \varphi \circ \xi^1$) можно сказать следующее:*

1. *отображение φ имеет либо две, либо три орбиты меньшего периода;*
2. *если отображение φ имеет две орбиты меньшего периода, то φ имеет следующую полную характеристику ($n = 2, g = 0, p = 0, n_1 = n_2 = 1, d_1 = d_2 = 1$) и является поворотом сферы относительно некоторой оси на 180 градусов, причём одна из неподвижных точек φ — седловая точка диффеоморфизма f;*
3. *если отображение φ имеет ровно три точки меньшего периода, то оно имеет одну из следующих полных характеристик:*
   1) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p - d_2)$, $0 < d_2 < 2p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
   2) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p - d_2)$, $2p < d_2 < 4p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
   3) $(n = 4p+2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p+1-2d_2)$, $0 < d_2 \leqslant p$, $\gcd(d_2, 2p+1) = 1$;
   4) $(n = 4p+2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p+3-2d_2)$, $p < d_2 \leqslant 2p$, $\gcd(d_2, 2p+1) = 1$.

На рисунках 1, 2 приведены результаты численного подсчета числа периодических гомеоморфизмов.

2. Оценки параметров полной характеристики

В данном разделе будут доказаны теоремы 1 и 2 и следствия из них.

Доказательство. (Теоремы 1)

- $$2p + \sum_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2) \Rightarrow 2p - 2 = n(2g - 2) + nk - \sum_{i=1}^{k} n_i \geqslant n(2g - 2) \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 2p - 2 \geqslant n(2g - 2) \Rightarrow 2g - 2 \leqslant \frac{2p - 2}{n} \leqslant 2p - 2 \Rightarrow g \leqslant p.$$

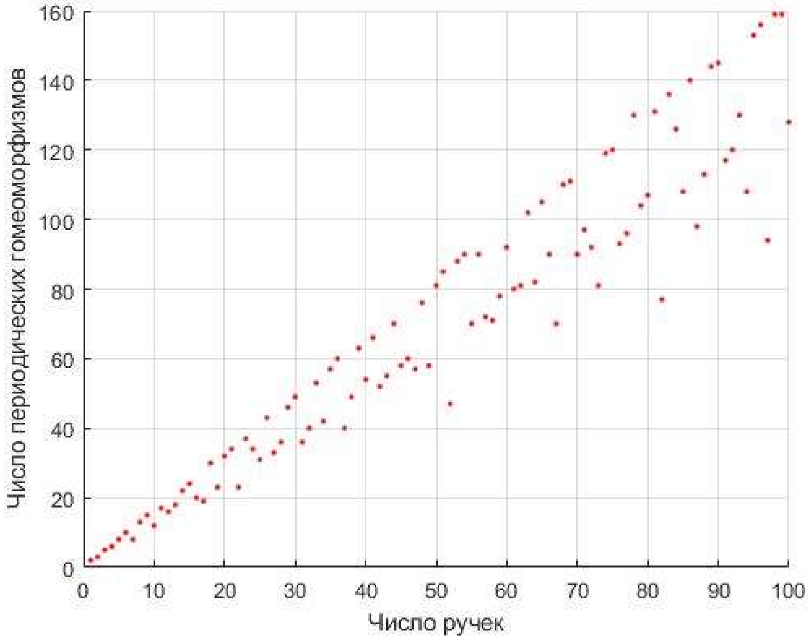

Рис. 1. Число гомеоморфизмов типов 1), 2)

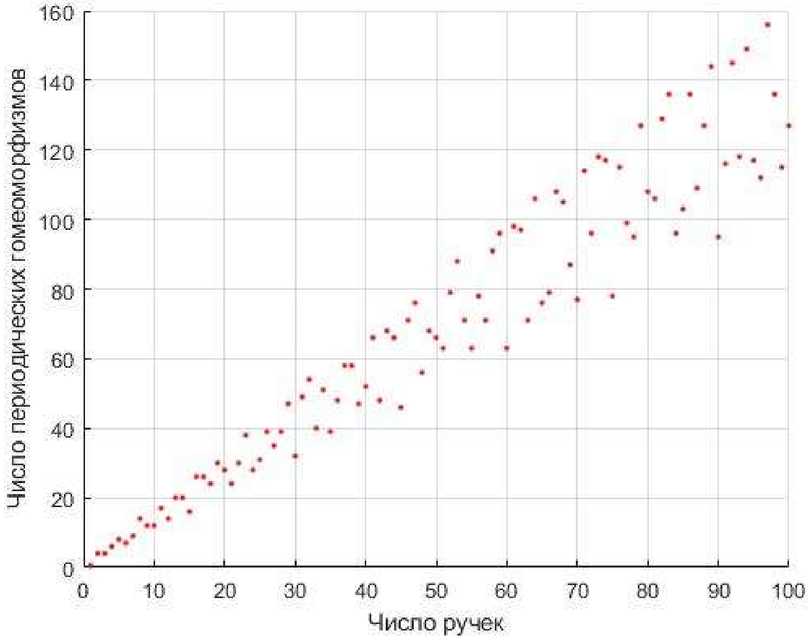

Рис. 2. Число гомеоморфизмов типов 3), 4)

- $2p+\sum\limits_{i=1}^{k} n_i-2 = n(2g+k-2) \Rightarrow nk = 2p-2+\sum\limits_{i=1}^{k} n_i-2ng+2n \leqslant 2p-2+\dfrac{nk}{2}-2ng+2n \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{k}{2} \leqslant \dfrac{2p-2}{n} - 2g + 2 \leqslant p - 1 + 2 = p + 1 \Rightarrow k \leqslant 2(p+1)$.
- Доказательство этого факта известно и есть, например, в статье [5].

$\square$

Доказательство. (Теоремы 2)

Сначала докажем теорему в предположении, что род модульной поверхности равен 0.

Первое условие вытекает из равенства $d_1 n_1 + \dots + d_k n_k = 0 \pmod n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{d_1 n}{\lambda_1} + \dots + \dfrac{d_k n}{\lambda_k} = 0 \pmod n$. Так как $0 < d_i < \lambda_i$, то $0 < \dfrac{d_i n}{\lambda_i} < n$. Отсюда следует, что $\dfrac{d_1 n}{\lambda_1} + \dots + \dfrac{d_k n}{\lambda_k} = \{n, 2n, \dots, (k-1)n\} \Rightarrow \dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dots + \dfrac{d_k}{\lambda_k} = \{1, 2, \dots, k-1\}$
Второе условие сразу следует из уравнения на эйлеровы характеристики (выражаем род p исходной поверхности и требуем, чтобы оно было натуральным), а также из того факта, что $n = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, который будет доказан ниже.

Так как d_i взаимно прост с λ_i, то для того, чтобы число $\dfrac{d_i}{\lambda_i} n$ было целым необходимо и достаточно, чтобы λ_i делило n. Отсюда, n должно иметь вид $k\lambda$, где k какое-то положительное целое число. Докажем, что $k = 1$. Действительно, пусть это не так. Тогда $\gcd\left(\dfrac{d_1 n}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{d_k n}{\lambda_k}, n\right) = \gcd\left(k\dfrac{\lambda}{\lambda_1} d_1, \dots, k\dfrac{\lambda}{\lambda_k} d_k, k\lambda\right) \geqslant k > 1$. Противоречие. Следовательно, $k = 1$ и $n = \lambda$. В итоге получили уравнение $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1} d_1, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k} d_k, \lambda\right) = 1$. По определению НОКа: $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k}\right) = 1$. Действительно, если бы это не было так и НОД равнялся бы b, то тогда число $\dfrac{\lambda}{b}$ было бы кратным и причём меньшим чем λ, что противоречит минимальности λ. Из этого факта следует, что $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1} d_1, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k} d_k\right) = \gcd(d_1, \dots, d_k)$. Действительно, НОД левой части уж никак не меньше НОДа правой части, но строго больше он не может быть. Действительно, он мог бы стать больше только из-за общих делителей чисел вида $\dfrac{\lambda}{\lambda_i}$, но у них нет общих делителей. Остаётся только равенство.

Обозначим $b = \gcd(d_1, \dots, d_k)$. Если $b = 1$, то нужное уравнение для периодического гомеоморфизма выполняется. Если $b \neq 1$, то тогда для выполнения нужного уравнения необходимо и достаточно, чтобы $\gcd(b, \lambda) = 1$. Доказательство в случае модульной поверхности в виде сферы закончено.

Доказательство при произвольном g аналогично. Значительная разница будет заключаться в том, что третье равенство в теореме 2 можно отбросить. Отсюда, получаем, что $n = \tau\lambda$, где τ — произвольное натуральное число. □

Доказательство. (Следствия 1 и 2)

Следствие 1 автоматически следует из пункта 1 Теоремы 2. Докажем Следствие 2.

Из Теоремы 2 следует, что $\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} = 1 \to \frac{d_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 - d_1}{\lambda_1}$. Следовательно λ_2 делит λ_1. Аналогично можно доказать, что λ_1 делит λ_2. Отсюда, $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Отсюда сразу следует, что $d_2 = \lambda - d_1$. В дальнейшем в доказательстве будем предполагать, что $g \neq 0$. Согласно Теореме 2, $n = \tau\lambda$, где τ — произвольное натуральное число. Отсюда, из первого уравнения теоремы, получим, что $p = 2\tau g + 1 - \tau$.

Если же $g = 0$, то тогда $p = 1 - \tau \geqslant 0 \Rightarrow \tau \leqslant 1 \Rightarrow \tau = 1, p = 0, n_1 = n_2 = 1$. Для любых d_1, d_2 можно легко подобрать вращение сферы вокруг оси так, чтобы получившееся периодическое отображение имело заданную полную характеристику. Таким образом, доказательство завершено. □

3. Связь периодических гомеоморфизмов с многообразиями Зейферта

В этом разделе доказывается Теорема 3 и следствия из нее.

Доказательство. (Теоремы 3)

Достаточность условий теоремы следует из очевидной переформулировки Теоремы 2 на языке многообразий Зейферта. Необходимость условий следует из существования глобальной секущей к слоям у расслоения Зейферта с целым числом Эйлера (см., например, [2]). □

Доказательство. (Следствия 3)

Существование гомеоморфизма многообразия Зейферта с базой в виде сферы с $p > 0$ ручками влечёт существование послойного гомеоморфизма (см., например, [3]), при котором число Эйлера сохранятся (см., например, [2]). Если бы периодический гомеоморфизм φ был гомотопен тождественному, то тогда полученное при помощи надстройки многообразие Зейферта было бы гомеоморфно $\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}_p$ — сфера p ручками, но у этого многообразия Зейферта число Эйлера равно 0, так как нет особых слоев. С другой стороны, если у φ есть хотя бы одна особая точка, то тогда число Эйлера равно $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\lambda_i} > 0$. Таким образом, полученное многообразие Зейферта не может быть гомеоморфно $\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}^1$. Противоречие. Значит φ не гомотопен тождественному отображению. □

Доказательство. (Следствия 4)

Если у многообразия Зейферта M с базой B, гомеоморфной сфере, ровно два особых слоя, то оно является надстройкой над периодическом гомеоморфизмом φ над сферой с 2 особыми точками. Как было показано в Следствии 1, φ есть поворот сферы на рациональный угол, то есть φ изотопен тождественному, а значит получающееся при надстройке многообразие Зейферта гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, что и требовалось $\square$

4. Связь периодических гомеоморфизмов с диффеоморфизмами Морса-Смейла

Доказательство. (Теоремы 4)

Для доказательства нам нужны следующие два факта, доказанные, например, в [4].

Пусть f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на ориентируемой поверхности рода p, и $y_1, \ldots, y_m$ – его периодические точки. Пусть m_i — это период периодической точки y_i. Тогда выполнено равенство Морса $\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{\delta_i}m_i = 2-2p$, где $\delta_i = 0$, если точка y_i является стоком или источником и $\delta_i = 1$, если точка y_i является седлом. Причём, если y_i – седловая точка отрицательного типа ориентации, то $m_i = \frac{n}{2}$, где n — период гомеоморфизма φ. Если диффеоморфизм f имеет единственную периодическую седловую орбиту и она отрицательного типа ориентации, то кроме нее в неблуждающем множестве находится ровно две периодические орбиты, одна из которых источниковая, другая стоковая. Теперь приступим к доказательству теоремы

1. Если бы у периодического отображения φ было строго больше трех точек меньшего периода, то тогда у отображения f было бы строго больше трех периодических точек, что противоречит условию. Так как период седловой точки равен $\frac{n}{2} < n$, то у отображения φ должна быть хотя бы одна точка меньшего периода. Ровно одной точки меньшего периода быть не может, так как ни у какого периодического гомеоморфизма не может быть ровно одной периодической точки (см. Следствие 1).
2. Согласно равенству Морса, в случае двух точек меньшего периода у гомеоморфизма φ, имеем $-\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + n = 2 - 2p$. Подставим данное равенство в первое равенство Теоремы 2: $\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{\lambda_2} - n = n \cdot 2g$. Отсюда, $n - n = n \cdot 2g$. Следовательно, $g = 0$. Тогда из следствия 2 следует, что периодический гомеоморфизм φ есть поворот сферы на некоторый рациональный угол. Ясно, что в

нашем случае этот угол будет равен 180 градусам. Действительно, период седловой точки равен 1, но с другой стороны её период равен $\frac{n}{2}$, а значит период отображения φ равен 2. Отсюда и следует искомое утверждение.

3. Теперь предположим, что у соответствующего диффеоморфизму f периодического гомеоморфизма φ следующая полная характеристика: $(n, p, g, n_i, d_i, 1 \leqslant i \leqslant 3)$. В силу второго пункта Теоремы 1, $p > 0$. Согласно условию и факту выше, $n_1 = \frac{n}{2}$. Из равенства Морса $-\frac{n}{2} + n_2 + n_3 = -\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = 2 - 2p$. Тогда из первого равенства Теоремы 2 получаем: $n = n \cdot (2g + 1) \Rightarrow g = 0$. Получаем, что $n_1 = \frac{n}{2}$. Обозначим $n_2 = \frac{n}{\lambda_2}, n_3 = \frac{n}{\lambda_3}$. Так как $g = 0$, то, согласно Теореме 2, получим, что $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_2, \lambda_3)$. Согласно второму условию Теоремы 2 $\frac{1}{2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} = z$, где z — целое число, равное 1 или 2. Перенесем всё, кроме последнего слагаемого в правую часть. Получим какую-то дробь со знаменателем λ_3. Так как дроби слева и справа равны и d_i взаимно просто с λ_i, то равенство возможно тогда и только тогда, когда λ_3 делит $2\lambda_2$. Аналогично можно показать, что λ_2 делит $2\lambda_3$. Следовательно, $2\lambda_2 = t_1\lambda_3, 2\lambda_3 = t_2\lambda_2 \Rightarrow 4\lambda_2 = t_1t_2\lambda_2 \Rightarrow t_1t_2 = 4$. Отсюда, с точностью до перенумерации, получаем всего два случая: a) $\lambda_2 = \lambda_3$ или b) $\lambda_2 = 2\lambda_3$.

В случае b) $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_3, 2\lambda_3) = 2\lambda_3 \Rightarrow n_2 = 2, n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство Теоремы 2, получим полную характкристику $(n = 4k+2, g = 0, p = k, n_1 = 2k+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}, \mathrm{gcd}(d_2, 2k+1) = \mathrm{gcd}(d_3, 4k+2) = 1, 2d_2+d_3 = 2k+1$ или $2d_2+d_3 = 3(2k+1)$. Ясно, что в первом случае $2d_2 = 2k + 1 - d_3 \leqslant 2k$, откуда $d_2 \leqslant k$, а во втором случае $2d_2 = 6k + 3 - d_3 > 6k + 3 - (4k + 2)$, откуда $d_2 > k$. Из равенства $\mathrm{gcd}(d_2, 2k + 1) = 1$ следует, что $\mathrm{gcd}(2d_2, 2k + 1) = 1$. Действительно, если числа d_2 и $2k + 1$ взаимно просты, то тогда $\mathrm{gcd}(2d_2, 4k + 2) = 2$, а значит $\mathrm{gcd}(2d_2, 2k + 1) = 1$, что и требовалось. Поскольку $d_3 = 2k + 1 - 2d_2$ или $d_3 = 3(2k + 1) - 2d_2$, то $\mathrm{gcd}(d_3, 2k + 1) = \mathrm{gcd}(2d_2, 2k + 1) = 1$. Учитывая, что d_3 нечетное, получаем $\mathrm{gcd}(d_3, 4k + 2) = 1$.

В случае a) нужно рассмотреть два подслучая: a1) λ_3 — чётное; a2) λ_3 — нечётное.

В случае a1) $n = \text{lcm}(2, \lambda_3) = \lambda_3$. Отсюда, $n_2 = n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство Теоремы 2, получим полную характеристику $(n = 4k, g = 0, p = k, n_1 = 2k, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gcd(d_2, 4k) = \gcd(d_3, 4k) = 1$, $d_2 + d_3 = 2k$ или $d_2 + d_3 = 6k$. Ясно, что в первом случае $d_2 < 2k$, а во втором случае $2k < d_2 < 4k$. Также ясно, что $\gcd(d_2, 4k) = 1$ эквивалентно $\gcd(d_2, 2k) = 1$. Действительно, если d_2 и $4k$ взаимно просты, то тем более d_2 и $2k$ взаимно просты. Если же d_2 и $2k$ взаимно просты, то отсюда следует, что d_2 обязательно нечётно, а значит d_2 взаимно просто с $2 \cdot 2k = 4k$. Так как $d_3 = \{2, 6\}k - d_2$, то d_3 имеет такой же остаток деление на $2k$, как и d_2. Отсюда, условие $\gcd(d_2, 2k) = \gcd(d_3, 2k) = 1$ можно упростить до одного соотношения $\gcd(d_2, 2k) = 1$.

В случае a2) $n = \text{lcm}(2, \lambda_3) = 2\lambda_3$. Отсюда, $n_2 = n_3 = 2$. Тогда из равенства Морса, получим $\dfrac{-2\lambda}{2} + \dfrac{2\lambda}{\lambda} + \dfrac{2\lambda}{\lambda} = 2 - 2p$. Отсюда, $\lambda = 2p + 2$ — противоречие (λ предполагалось нечётным).

$\square$

Список литературы

1. БАРАНОВ, Д. А., ПОЧИНКА, О. В. (2021) Классификация периодических преобразованиий ориентируемой поверхности рода два. *Журнал СВМО.* Том 23 (Номер 2). p. 147–158.

2. ФОМЕНКО, А. Т., МАТВЕЕВ, С. В (1998) *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* 2-изд, перераб. и доп., М.: Наука. 304.

3. HATCHER, A. E. (2007) *Notes on Basic 3-Manifold Topology.* 73. .

4. GRINES, V. Z., MEDVEDEV, T. V., POCHINKA,O. V. (2016) *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.* Springer,Developments in Mathematics. Volume 46. 314

5. WANG, S. (1991) *Maximum orders of periodic maps on closed surfaces.* Topology and its Applications 41. 255–262.

6. NIELSEN, J. (1937) *Die struktur periodischer transformationen von flachen.* Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. M.-f. Meddelelser. 1–77.