

Газ свободных электронов и равновесие электрон-позитронных пар в магнитном поле

Г.С. Бисноватый-Коган, И.А. Кондратьев

Термодинамические свойства электронного газа в экстремальных условиях высоких температуры, плотности материи и/или сильных магнитных полей во многом определяют поведение вещества во внешних слоях нейтронных звёзд, а также в аккреционных колонках замагниченных нейтронных звёзд в двойных системах. В перечисленных объектах при наличии сильного магнитного поля важной чертой является существенно квантовый характер движения электронов поперёк него, а также возможные вырождение и релятивизм электронного газа. При исследовании аккреции на магнитар в двойной системе необходимо также учитывать рождение большого количества электрон-позитронных пар в квантующем магнитном поле. Детально рассмотрены термодинамические свойства газа невзаимодействующих электронов в сильных магнитных полях с учётом их релятивизма и вырождения, а также равновесное рождение электрон-позитронных пар в высокотемпературной плазме при наличии квантующего магнитного поля.

Ключевые слова: ферми-газ, магнитное поле, уровни Ландау, электрон-позитронные пары, нейтронная звезда

PACS numbers: 05.30.Fk, 71.70.Di, 97.60.Jd

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.08.038827>

Содержание

1. Введение (543).
 2. Квантование Ландау: дискретные уровни электронов в магнитном поле (545).
 3. Ферми-газ нерелятивистских электронов и e^+e^- -пары в докритическом магнитном поле $B \ll B_{cr}$ (546).
 - 3.1. Распределение Ферми–Дирака для нерелятивистских электронов в магнитном поле.
 - 3.2. Невырожденный нерелятивистский электронный газ в магнитном поле.
 - 3.3. Вырожденный газ и магнитные осцилляции.
 - 3.4. Рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле: нерелятивистский случай.
 4. Ферми-газ релятивистских электронов и e^+e^- -пары в сверхкритическом магнитном поле (551).
 - 4.1. Распределение Ферми–Дирака для релятивистских электронов в магнитном поле произвольной напряжённости.
 - 4.2. Сильно вырожденные электроны.
 - 4.3. Рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле: релятивистский случай.
 5. Заключение (555).
- Список литературы (556).

Г.С. Бисноватый-Коган^{(1,2,3,*), И.А. Кондратьев^(1,4,†)}

⁽¹⁾ Институт космических исследований РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация

⁽²⁾ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация

⁽⁴⁾ Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", факультет физики, ул. Старая Басманная 21/4, кор. 5, 105066 Москва, Российская Федерация

E-mail: (*gkogan@iki.rssi.ru, †mrkondratyev95@gmail.com)

Статья поступила 1 мая 2020 г., после доработки 12 августа 2020 г.

1. Введение

Проведём краткий обзор работ, посвящённых термодинамическим свойствам невзаимодействующих электронов в магнитном поле в основном в связи с астрофизическими приложениями.

Развитие квантовых идей и открытие спина Д. Уленбеком и С. Гаудсмитом [1], а также интерпретация спина как отдельного квантового числа, соответствующего собственному моменту импульса частицы и собственному магнитному моменту, привели к появлению в 1920-х годах квантовой статистики. Начало изучению статистических свойств фермионов с учётом принципа запрета Паули [2] было заложено в работах Э. Ферми и П. Дирака [3, 4] в применении к электронам (см. также [5]), а статистических свойств бозонов — в работе С. Бозе [6] для фотонного газа и обобщении А. Эйнштейна для идеального одноатомного газа [7]. Позднее В. Паули доказал фундаментальную теорему о связи спина со статистикой [8], в которой утверждается, что частицы с полуцелым спином удовлетворяют статистике Ферми–Дирака, а с целым — статистике Бозе–Эйнштейна. Идея о квантовостатистических моделях материи оказалась очень плодотворной — в физике и астрофизике были объяснены многие эффекты, связанные с поведением электронов как в конденсированных средах в лабораториях, так и в недрах звёзд.

Применение статистики Ферми–Дирака для исследования компактных объектов в астрофизике берёт своё начало в конце 1920-х годов с работ Р. Фаулера и Я. Френкеля [9, 10]. В этих работах на основе квантовой статистики получено уравнение состояния в вырожденном электронном газе для случая нерелятивистских электронов. Уравнение состояния вырожденного газа для произвольной степени релятивизма получено и применено впервые для построения моделей белых карликов с

однородной плотностью Е. Стонером [11] (см. также [12]). Точное решение уравнения равновесия белых карликов впервые было получено в работах С. Чандрасекхара [13, 14] и Л. Ландау [15], в которых был корректно найден верхний предел массы этих объектов, грубо оценённый ранее Е. Стонером (см. заметку об истории этих открытий в работе [16]).

Одновременно происходило развитие квантовой теории электронного газа во внешних полях. Классическая теория в применении к газу в магнитном поле приводит к тому, что термодинамические функции газа остаются такими же, как и в отсутствие поля, — так называемая теорема Бора–ван Лёвен (см. работу Н. Бора [17], написанную в 1911 г., а также [18]). Это обусловлено тем, что форма гамильтониана частиц не изменяется при замене обычного импульса обобщённым и статистическая сумма остаётся такой же, как и в отсутствие поля.

Уравнение Шрёдингера для частицы со спином $1/2$ в магнитном поле решил В. Паули [19]. Тогда же на основе этого Паули объяснил парамагнитные свойства электронного газа в металлах [20] взаимодействием электронного спина с магнитным полем, благодаря которому электроны приобретают дополнительную энергию. Позднее Л.Д. Ландау [21] показал, что движение свободного электрона поперёк магнитного поля и без учёта спина также имеет квантовый характер. Поперечное (вращательное) движение электрона происходит по квантовым орбитам (квантование Ландау) с энергией поперечного движения $E = (n_B + 1/2)\hbar eB/(m_e c)$, где n_B — номер уровня Ландау, \hbar — редуцированная постоянная Планка, e — заряд электрона, B — индукция магнитного поля, m_e — масса электрона, c — скорость света.

Если энергия поперечного движения в магнитном поле сравнима с характерной кинетической энергией частиц газа, то такое магнитное поле, называемое квантующим, может влиять на макроскопические свойства материи. Квантование орбитального движения электронов в магнитном поле объясняет диамагнитные свойства электронного газа в металлах. В целом, однако, электронный газ в металлах парамагнитен, поскольку спиновая парамагнитная часть магнитной восприимчивости в три раза больше орбитальной диамагнитной (см. также [22, 23]). При вырождении электронов в квантующем магнитном поле с изменением величины поля возникают осцилляции термодинамических величин, обусловленные переходами электронов между уровнями Ландау и перераспределением их заселённости.

Квантовые осцилляции, возникающие при сильном вырождении электронов в квантующем магнитном поле, являются причиной эффекта де Гааза–ван Альфена [24], связанного с колебаниями намагнитченности (магнитного момента) в металлах [23], а также эффекта Шубникова–де Гааза [25] (см. также [26]), который заключается в осцилляциях магнетосопротивления и наблюдается в металлах и полупроводниках. Отметим, что осцилляции подобного типа в квантующем поле испытывают все термодинамические функции электронного газа [27], причём производные от термодинамических величин испытывают более сильные осцилляции [22]. Кинетические коэффициенты электронов также осциллируют с изменением поля [28].

Магнитные поля в белых карликах, которые могут достигать $\sim 10^6 - 10^8$ Гс на поверхности, слишком слабы для того, чтобы существенно повлиять на термодинами-

ческие функции вырожденного вещества, и проявляют себя в основном благодаря эффекту Зеемана вблизи поверхности звезды [29] (см., однако, работу [30], в которой предполагалось, что магнитные поля в белых карликах могут быть намного сильнее). Наличие достаточно сильного магнитного поля может существенно повлиять на предел устойчивости белого карлика, увеличивая его [31, 32]. Наличие у белого карлика массы выше предела Чандрасекхара $M_{Ch} = 1,4M_\odot$ (M_\odot — масса Солнца) может быть возможной причиной существования сверхъярких сверхновых (superluminous supernova) первого типа [33].

Более интенсивное исследование свойств материи в сильных магнитных полях началось после наблюдательного открытия нейтронных звёзд с сильными магнитными полями — радиопульсаров [34] в 1967 г. и рентгеновских пульсаров в двойных системах [35] в 1971 г. Нейтронные звёзды, представляющие собой объекты с радиусом $R \sim 10$ км и характерной массой $M \sim 1,4M_\odot$, являются одной из финальных стадий эволюции массивных звёзд, прошедших стадию гравитационного коллапса. Нейтронные звёзды состоят из жидкого ядра с плотностью, превышающей плотность вещества атомных ядер, внутренней коры, состоящей из ядер, переобогащённых нейтронами, электронов и свободных нейтронов, а также внешней коры, представляющей собой плазму вырожденных электронов и невырожденных нерелятивистских ядер (см., например, [36, гл. 1; 37, гл. 8]). При этом сильная степень вырождения электронов делает электронный газ во внешней коре почти идеальным и определяющим термодинамические свойства вещества в ней.

Магнитные поля в нейтронных звёздах достигают очень больших значений, недоступных в современных лабораториях. Согласно оценкам, следующим из наблюдений темпа потери вращательной энергии в модели магнито-дипольного излучения [38], а также оценке магнитного поля звезды после коллапса при сохранении магнитного потока [39], величина поля в радиопульсарах составляет $\sim 10^{12} - 10^{13}$ Гс и может достигать $10^{14} - 10^{15}$ Гс в небольшой группе нейтронных звёзд, называемых магнитарами [40–43] (см. также обзор [44] и приведённые в нём ссылки). В таких условиях во внешней коре нейтронной звезды магнитное поле становится квантующим для электронов и влияет на их термодинамические свойства.

Первые исследования термодинамики электронного газа в квантующем магнитном поле были проведены в конце 1960-х годов в серии работ [45–49], в которых были получены выражения для термодинамических функций ферми-газа невзаимодействующих электронов в магнитном поле, а также рассмотрены предельные переходы к классическому (неквантующему) случаю. Магнитная восприимчивость коры нейтронной звезды рассчитана в работе [50]. В статьях [51–53] распределение Ферми–Дирака с учётом магнитного поля в пределе сильного вырождения применено к выводу уравнения состояния вещества во внешних слоях нейтронной звезды, а также рассмотрено влияние сильного поля на бета-процессы в её коре. Аналогичные исследования выполнены в работах Г.А. Шульмана с соавторами [27, 54, 55]. Ряд исследований был посвящён получению термодинамических функций более тяжёлых, чем электрон, фермионов [56, 57] при наличии у частиц аномального магнитного

момента [58], при наличии и отсутствии у них заряда. Это может быть важно для магнитаров, в которых эффекты воздействия сильного магнитного поля могут проявляться и для барионов. Стоит, однако, отметить, что аномальный магнитный момент электрона мал даже в очень сильном поле [59], и вряд ли он может значительно влиять на свойства вещества в нейтронных звёздах, где магнитное поле не может существенно превышать $\sim 10^{18}$ Гс согласно работе Чандасекхара и Ферми [60].

Исследование параметров рождения электрон-позитронных пар особенно важно для астрофизических приложений, когда приходится иметь дело с горячей плазмой ($k_B T \sim m_e c^2$, где k_B — постоянная Больцмана) не очень высокой плотности (см., например, [61, 62]). Изучение свойств плазмы, в которой количество пар существенно превышает концентрацию барионов, важно для исследования горячих струйных выбросов (джетов) из активных галактических ядер и блазаров (см. [63, гл. 7]). Некоторые термодинамические свойства равновесной плазмы без магнитного поля с учётом возможного рождения электрон-позитронных пар при высоких температурах были установлены в работах [64–66] применительно к устойчивости массивных звёзд на поздней стадии их эволюции. Уравнение состояния электрон-позитронного газа при высоких температуре и плотности в широком диапазоне термодинамических параметров получено в [67, 68] (см. также статью [69], в которой собраны аналитические аппроксимации интегралов Ферми – Дирака при произвольных степенях вырождения и релятивизма частиц).

Статистические свойства электронов и позитронов в сильных электромагнитных полях впервые были рассмотрены в 1930-х годах Гейзенбергом и Эйлером [70] при исследовании рождения пар из вакуума. Равновесные концентрации электронов и позитронов в горячей плазме в квантующем магнитном поле впервые были рассчитаны в работах [71–73] (см. также [74]). В приложении к внешним слоям и атмосфере нейтронных звёзд важными объектами применения этой теории являются синхротронное излучение электрон-позитронных пар в магнитном поле [75] и излучение фотонов при спонтанных переходах между уровнями Ландау [76] (см. также [77, гл. 10]), что важно при исследовании пульсаров и космических гамма-всплесков. Один из каналов излучения нейтрино нейтронными звёздами также обусловлен аннигиляцией пары электрона и позитрона в пару нейтрино и антинейтрино в магнитном поле. Термодинамические функции равновесного электрон-позитронного газа и нейтринные светимости рассчитаны в работах [78, 79]. Свойства электронов в сильных магнитных полях важны также при исследовании атмосфер нейтронных звёзд (см., например, статью [80] и обзор [81]).

В работе [82] рассмотрено рождение электрон-позитронных пар в аккреционной колонке сильно замагниченной нейтронной звезды в ультраярких рентгеновских источниках (УЯР) (ultraluminous X-ray sources). В настоящее время природа УЯР в других галактиках не ясна до конца. Предполагалось, что источники могут быть связаны с чёрными дырами, имеющими средние массы, $\sim 10^2 - 10^4 M_\odot$ [83], или со сверхэддингтоновским излучением аккрецирующей чёрной дыры со звёздной массой. Аккреционные диски в этом случае являются радиационно-доминированными и их светимости могут достигать 10^{40} эрг s^{-1} [84–86]. Довольно неожиданно

рентгеновские пульсары со сверхэддингтоновской светимостью были обнаружены в нескольких УЯР [87, 88], что позволяет идентифицировать их как сильно замагниченные нейтронные звёзды.

Аккреция на нейтронную звезду с сильным магнитным полем происходит вдоль силовых линий магнитного поля [89], создающих аккреционную колонку [90], в которой плазма может достигать температур $\sim 10^9$ К. При таких температурах становится важным рождение электрон-позитронных пар [91], что должно быть учтено при исследованиях структуры и наблюдательных проявлений аккреционной колонки. Сильное магнитное поле изменяет как темп рождения пар, так и излучательные свойства плазмы [59, 82].

В настоящей статье мы подробно рассматриваем термодинамические свойства электронного газа в магнитных полях с учётом вырождения и релятивизма электронов, а также наличия квантующих и сверхкритических магнитных полей. Исследовано изменение термодинамических свойств при переходе от неквантующих магнитных полей к квантующим в нерелятивистской плазме, а также для релятивистских электронов, для которых квантующее магнитное поле должно быть сверхкритическим.

Рассмотрены свойства электронной плазмы в квантующем магнитном поле для вырожденных и невырожденных случаев. Показано, что в невырожденной плазме термодинамические свойства плавно и монотонно изменяются с возрастанием магнитного поля. При увеличении степени вырождения в этой зависимости возникают максимумы и минимумы, соответствующие магнитным осцилляциям термодинамических функций. В приближении полностью вырожденных электронов появляются острые пики, переходящие в плавные зависимости после того, как магнитное поле превысит значение, при котором все электроны оказываются на самом нижнем уровне Ландау [52, 53]. Рассмотрено рождение пар в высокотемпературной плазме в термодинамическом равновесии при наличии квантующего магнитного поля, напряжённость которого может превосходить критическое значение $B_{cr} = m_e^2 c^3 / (e\hbar) = 4,414 \times 10^{13}$ Гс. Присутствие магнитного поля понижает значения температуры, при которых начинают эффективно рождаться электрон-позитронные пары. С другой стороны, концентрация электрон-позитронных пар в присутствии квантующего магнитного поля увеличивается с возрастанием магнитного поля при неизменных температуре и химическом потенциале электронов [71, 79, 82].

Отметим также книги по статистической механике, в которых подробно рассматривается часть из затрагиваемых в настоящей статье вопросов относительно свойств электронного газа в магнитном поле, в том числе в квантующем, а именно книги Р. Кубо [92, гл. 4] для случая нерелятивистских частиц и Р. Хакима [93, гл. 12], где рассмотрены также релятивистские фермионы.

2. Квантование Ландау: дискретные уровни электронов в магнитном поле

С точки зрения классической физики электрон движется по круговой орбите в направлении поперёк магнитного поля с частотой вращения $\omega_B = eB/(m_e c)$ и радиусом окружности $R_L = p_\perp c / (eB)$, где p_\perp — поперечный магнитному полю импульс электрона.

Энергия кванта E_B , соответствующая циклотронной частоте вращения ω_B электрона в магнитном поле, выражается как

$$E_B = \hbar\omega_B = \hbar \frac{eB}{m_e c}. \quad (2.1)$$

E_B достигает энергии покоя электрона $m_e c^2$ при значении магнитного поля $B = B_{cr}$,

$$B_{cr} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4,414 \times 10^{13} \text{ Гс}, \quad (2.2)$$

которое называется критическим или швингеровским [75]. При $B > B_{cr}$ электрон в магнитном поле становится релятивистским. В квантовой механике финитное движение поперёк магнитного поля является квантованным, уровни энергии нерелятивистского электрона в слабом, $B \ll B_{cr}$, однородном магнитном поле определяются формулой [94]

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m_e} + \frac{2n_B + 1 + \sigma_s}{2} \hbar\omega_B, \quad (2.3)$$

где $p_z = p_{\parallel}$ — импульс электрона, направленный вдоль поля по оси z , целое неотрицательное число n_B определяет номер уровня Ландау, $\sigma_s = \pm 1$ соответствует проекции спина. Пронумеровав уровни Ландау целыми числами n , получим

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m_e} + n\hbar\omega_B = \frac{p_z^2}{2m_e} + n \frac{eB\hbar}{m_e c}, \quad n = \frac{2n_B + 1 + \sigma_s}{2}. \quad (2.4)$$

При этом вырождение n -го уровня (статистический вес уровня) составляет $g_n = 2$ для $n > 0$ и $g_n = 1$ для $n = 0$. Квадрат поперечного импульса может быть выражен как [75]

$$p_{\perp, n}^2 = 2 \frac{eB\hbar}{c} \left(n - \frac{\sigma_s}{2} \right) = 2 \frac{eB\hbar}{c} \left(n_B + \frac{1}{2} \right), \quad (2.5)$$

т.е. в основном состоянии, при $n = n_B = 0$, $\sigma_s = -1$, с энергией вращения, равной нулю, электрон обладает ненулевым поперечным импульсом. Нулевая энергия основного уровня связана с отрицательным вкладом в энергию нулевого состояния из (2.4) спинового члена с $\sigma_s = -1$, в то время как член со спином не даёт вклада в орбитальный момент количества движения.

В релятивистском случае, когда энергия электрона сравнима с его энергией покоя либо больше неё, выражение (2.4) необходимо заменить его релятивистским расширением [77], следующим из решения уравнения Дирака [95] для частицы во внешнем электромагнитном поле:

$$E_n(p_z) = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_z^2 c^2 + 2n\hbar e B c} = m_e c^2 \sqrt{1 + p^2 + 2bn}. \quad (2.6)$$

Здесь $b = B/B_{cr}$ (см. (2.2)), p_z — импульс электрона вдоль поля, $p = p_z/(m_e c)$. Выражение (2.6) применимо при произвольных индукции магнитного поля и продольном импульсе электрона. Волновые функции электрона в магнитном поле не используются в явном виде в дальнейшем изложении; решения уравнений Дирака и Шрёдингера рассмотрены в [77, 94] соответственно.

3. Ферми-газ нерелятивистских электронов и e^+e^- -пары в докритическом магнитном поле $B \ll B_{cr}$

3.1. Распределение Ферми–Дирака

для нерелятивистских электронов в магнитном поле

Для получения термодинамических функций электронного газа в магнитном поле необходимо провести суммирование по всем квантовым состояниям с функцией распределения Ферми–Дирака. Фазовый "объём" (поверхность) в поперечной плоскости n -го уровня Ландау $\Delta V_{ph}^{(n)}$ в условиях цилиндрической симметрии определяется разностью квадратов поперечного импульса соседних уровней, т.е. с учётом (2.5) имеем

$$\Delta V_{ph}^{(n)} = \pi(p_{\perp, (n+1)}^2 - p_{\perp, n}^2) = 2\pi \frac{eB\hbar}{c}. \quad (3.1)$$

Плотность числа электронов n_{en} на n -м уровне Ландау можно получить, проинтегрировав по продольному импульсу p_z вдоль поля функцию распределения Ферми–Дирака с поперечной энергией уровня n из (2.4):

$$f_n = \frac{1}{1 + \exp[(E_n - \mu_e)/(k_B T)]} = \frac{1}{1 + \exp\left\{\left[\frac{p_z^2}{(2m_e)} + n\frac{eB\hbar}{m_e c} - \mu_e\right]/(k_B T)\right\}}. \quad (3.2)$$

Здесь μ_e — нерелятивистский химический потенциал электронов, T — температура электронного газа. В результате с учётом фазового объёма (3.1) и фазового объёма элементарной ячейки $(2\pi\hbar)^3$ имеем

$$n_{en} = \frac{\Delta V_{ph}^{(n)}}{(2\pi\hbar)^3} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n dp_z = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n dp_z. \quad (3.3)$$

Полная концентрация замагниченного ферми-газа электронов n_e находится суммированием (3.3) по всем уровням. В результате получаем [45, 53, 54, 71, 92]

$$n_e = \sum_{n=0}^{\infty} n_{en} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n dp_z. \quad (3.4)$$

При уменьшении магнитного поля электроны в равновесии занимают всё больше уровней Ландау. При этом расстояние между уровнями уменьшается, что позволяет перейти к квазиклассическому описанию. В пределе большого n становится возможным считать его непрерывно изменяющейся величиной и перейти в (3.4) от суммирования к интегрированию по n . Тогда получим

$$n_e = \frac{1}{2\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \int_0^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} f_n dp_z. \quad (3.5)$$

Здесь для всех уровней принято $g_n = 2$, так как при уменьшении магнитного поля вклад нулевого уровня также уменьшается и ошибка, вносимая удвоением коэффициента $g_0 = 1$ у нулевого члена, становится пренебрежимо малой. Сделаем в (3.2) замену переменных

$$n \frac{eB\hbar}{m_e c} = \frac{p_{\perp}^2}{2m_e}. \quad (3.6)$$

Тогда (3.5) примет вид

$$n_{ed} = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp_\perp^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + \exp \left\{ \left[p_z^2 / (2m_e) + p_\perp^2 / (2m_e) - \mu_e \right] / (k_B T) \right\}} dp_z. \quad (3.7)$$

В (3.7) удобно перейти от цилиндрической системы координат (p_\perp, ϕ, p_z) к сферической системе координат в фазовом пространстве (p, θ, ϕ) ввиду изотропии фазового пространства в отсутствие магнитного поля. В сферических фазовых координатах (3.7) приобретает следующий вид:

$$n_{ed} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + \exp \left[p^2 / (2m_e k_B T) - \mu_e / (k_B T) \right]} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{m_e k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{1 + \exp \left[u - \mu_e / (k_B T) \right]} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{m_e k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left(\frac{\mu_e}{k_B T} \right), \quad (3.8)$$

что в точности совпадает с выражением для концентрации электронов в отсутствие магнитного поля [23, 36]. В выражении (3.8) использовалась замена $u = p^2 / (2m_e k_B T)$. Здесь также использовано стандартное обозначение интегралов Ферми [36]:

$$F_\nu(\xi) = \int_0^\infty \frac{u^\nu du}{1 + \exp(u - \xi)}. \quad (3.9)$$

С возрастанием магнитного поля точность интегрального представления (3.7) уменьшается и для получения достаточной точности необходимо вычислять члены рядов из (3.2), (3.4).

3.2. Невырожденный нерелятивистский электронный газ в магнитном поле

Для невырожденного газа можно вместо функции Ферми (3.2) использовать распределение Максвелла – Больцмана

$$f_n^{MB} = \exp \left(- \frac{E_n - \mu_e}{k_B T} \right) = \\ = \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) + neB\hbar / (m_e c) - \mu_e}{k_B T} \right], \quad (3.10)$$

что позволяет получить аналитическое выражение для суммы ряда, который, в отличие от (3.4) с f_n из (3.2), запишется в виде

$$n_e = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^\infty g_n \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) + neB\hbar / (m_e c) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^\infty g_n \exp \left(- n \frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z. \quad (3.11)$$

Здесь ряд в первом множителе вычисляется точно аналитически как ряд геометрической прогрессии.

Имеем

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^\infty g_n \exp \left(- n \frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) = \\ = \frac{1}{2\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \left\{ \left[1 - \exp \left(- \frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\}, \quad (3.12)$$

где учтены значения $g_0 = 1$, $g_n = 2$ при $n \geq 1$. Учитывая (3.12) в (3.11), получаем

$$n_e = \frac{1}{2\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \left\{ \left[1 - \exp \left(- \frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z \quad (3.13)$$

(см. также [71, 79]). Формула (3.13) является точным выражением для концентрации электронов в нерелятивистском невырожденном газе при произвольных значениях магнитного поля — от слабого в квазиклассическом пределе до сильного квантующего поля, меньшего критического, $B < B_{cr}$ из (2.2). В предельном случае слабого неквантующего поля можно разложить экспоненту в первом множителе и пренебречь там $1/2$ ввиду относительной малости. Получаем тогда

$$n_{e0} = \frac{m_e k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z. \quad (3.14)$$

В данном выражении остаётся только интегрирование по p_z , так как интегрирование по p_\perp^2 уже выполнено в процессе суммирования ряда. Действительно, из выражения (3.7) для невырожденного газа интегрированием по поперечному импульсу получаем формулу, совпадающую с (3.14):

$$n_{e0} = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp_\perp^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) + p_\perp^2 / (2m_e) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z = \\ = \frac{m_e k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^\infty \exp \left[- \frac{p_z^2 / (2m_e) - \mu_e}{k_B T} \right] dp_z = \\ = 2 \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_e}{k_B T} \right). \quad (3.15)$$

Здесь использованы значения интегралов:

$$\int_{-\infty}^\infty \exp \left(- \frac{p_z^2}{2m_e k_B T} \right) dp_z = (2\pi m_e k_B T)^{1/2}, \quad (3.16) \\ \int_0^\infty \exp \left(- \frac{p_\perp^2}{2m_e k_B T} \right) dp_\perp^2 = 2m_e k_B T.$$

В случае невырожденного нерелятивистского электронного газа концентрация электронов для произвольных квантующих и неквантующих магнитных полей определяется единой формулой, следующей из (3.13), (3.16):

$$n_e = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{1/2}}{2\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \exp \left(- \frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\} \exp \left(\frac{\mu_e}{k_B T} \right). \quad (3.17)$$

В предельных случаях имеем:

для некваंटующего поля при $\hbar\omega_B/(k_B T) \ll 1$

$$n_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi^{3/2}} \left(\frac{m_e k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2}} \exp\left(\frac{\mu_e}{k_B T}\right), \quad (3.18a)$$

для кваंटующего поля при $\hbar\omega_B/(k_B T) \gg 1$

$$n_e = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{1/2}}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \exp\left(\frac{\mu_e}{k_B T}\right). \quad (3.18б)$$

3.3. Вырожденный газ и магнитные осцилляции

С учётом (2.2) запишем показатель экспоненты в (3.17) в виде

$$\frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} = \frac{\hbar\omega_B}{k_B T} = \frac{B}{B_{cr}} \frac{m_e c^2}{k_B T} = \frac{B}{\gamma_T B_{cr}}, \quad \gamma_T = \frac{k_B T}{m_e c^2}. \quad (3.19)$$

В нерелятивистской плазме $\gamma_T < 1$, $B < B_{cr}$ и магнитное поле становится кваंटующим при $B_{cr} > B > \gamma_T B_{cr}$, когда показатель степени в экспонентах в (3.2) и (3.17) становится большим и члены ряда в (3.4) быстро убывают. В пределе $B_{cr} > B \gg \gamma_T B_{cr}$ основной вклад в концентрацию даёт первый член в (3.4), что соответствует скоплению почти всех электронов на нулевом уровне Ландау. При этом $\hbar\omega_B \gg k_B T$ и в выражении (3.4) можно учесть только первый член:

$$n_e = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{1 + \exp\left\{\left[p_z^2/(2m_e) - \mu_e\right]/(k_B T)\right\}}. \quad (3.20)$$

В этих условиях электронный газ ведёт себя как одномерный газ свободных частиц с одномерной функцией распределения Ферми, но концентрация частиц отличается от таковой для простого одномерного газа наличием множителя, пропорционального полю. Отличие от случая простого одномерного газа объясняется тем, что в магнитном поле электроны имеют ненулевой поперечный импульс $p_{\perp,0}^2 = eB\hbar/c$ (2.5) даже при отсутствии энергии вращения, что соответственно увеличивает поперечный фазовый объём и связанный с ним коэффициент в формуле (3.20).

С учётом (3.15), (3.16), (3.19) из (3.17) получаем

$$\frac{n_e}{n_{e0}} = \frac{\hbar\omega_B}{k_B T} \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_B}{k_B T}\right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\}, \quad \frac{\hbar\omega_B}{m_e c^2} < 1. \quad (3.21)$$

Таким образом, для одинаковых значений химического потенциала μ_e зависимость от магнитного поля относительного равновесного значения концентрации невырожденных нерелятивистских электронов n_e/n_{e0} сводится к зависимости только от одного параметра $\hbar\omega_B/(k_B T)$, представленной на рис. 1.

Для нерелятивистских электронов с произвольной степенью вырождения относительное значение концентрации электронов зависит уже от двух параметров. К зависимости от параметра $\hbar\omega_B/(k_B T)$ добавляется явная зависимость от общего химического потенциала, выраженного в виде параметра $\mu_e/(k_B T)$, связанного со степенью вырождения электронов. Из (3.2), (3.4), (3.8) получаем с учётом (3.19) отношение концентраций в виде

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{\hbar\omega_B}{4k_B T} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \times$$

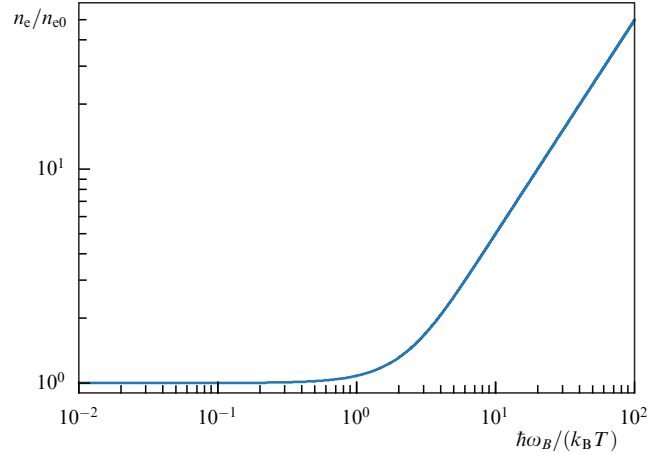


Рис. 1. Отношение концентраций электронов при одинаковых m_e в случае кваंटующего и некваंटующего магнитных полей n_e/n_{e0} как функция параметра $\hbar\omega_B/(k_B T)$ в невырожденном нерелятивистском газе.

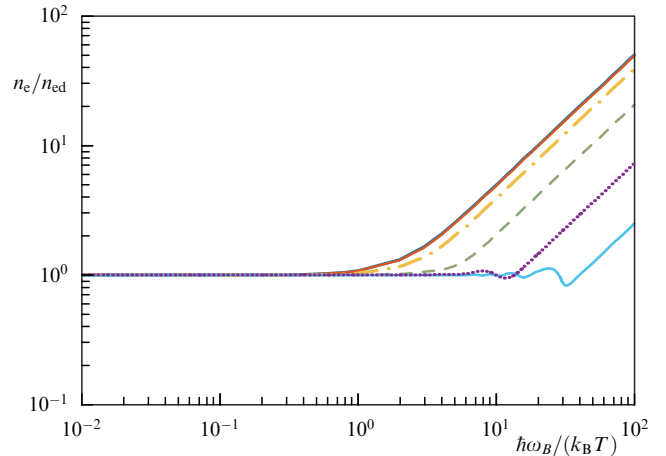


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Отношение концентраций электронов в случае кваंटующего и некваंटующего магнитных полей n_e/n_{ed} как функция параметра $\hbar\omega_B/(k_B T)$ для разных значений химического потенциала: $\mu_e/(k_B T) = -10, -3, 0, 3, 10, 30$ соответственно для синей, красной (почти совпадают), жёлтой штрихпунктирной, зелёной штриховой, фиолетовой пунктирной и голубой жирной кривых. Две верхние кривые практически совпадают с кривой на рис. 1 для невырожденного газа. Осцилляции относительной концентрации электронов при сильном вырождении связаны с дискретными переходами электронов между уровнями Ландау с возрастанием кваंटующего магнитного поля.

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + \exp\left[y^2 + n\hbar\omega/(k_B T) - \mu_e/(k_B T)\right]} \times \left[F_{1/2}\left(\frac{\mu_e}{k_B T}\right) \right]^{-1}. \quad (3.22)$$

Здесь сделана замена переменных $y^2 = p_z^2/(2m_e k_B T)$. Зависимость относительной концентрации n_e/n_{e0} от параметра $\hbar\omega_B/(k_B T)$ для различных значений $\mu_e/(k_B T)$ представлена на рис. 2.

Из (3.22) в предельном случае невырожденных электронов получаем (3.21) после суммирования ряда по n . Для сильно вырожденных электронов интегрирование ведётся в пределах

$$\left(-\sqrt{\frac{\mu_e - n\hbar\omega_B}{k_B T}}, \sqrt{\frac{\mu_e - n\hbar\omega_B}{k_B T}} \right)$$

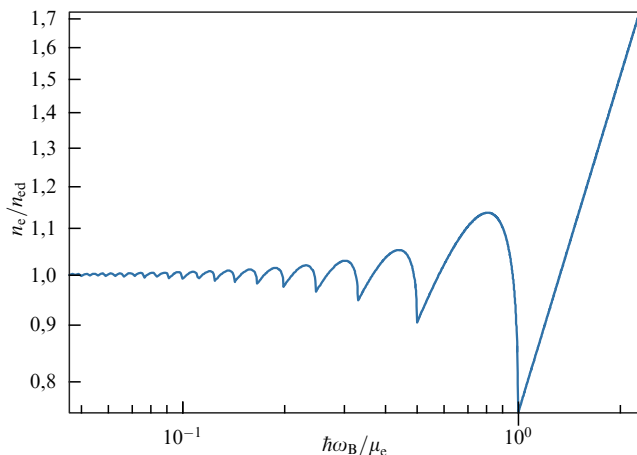


Рис. 3. Отношение концентраций электронов в случае квантующего и неквантующего магнитных полей n_e/n_{ed} как функция параметра $\hbar\omega_B/\mu_e$ в случае сильного вырождения, рассчитанная в соответствии с первой формулой из (3.23). Температурные эффекты "размывают" осцилляции, делая их более плавными. Последний пик осцилляций концентрации наблюдается при $\hbar\omega_B/\mu_e = 1$ согласно (3.25).

в интеграле (3.22) и в пределах $(0, \mu_e/(k_B T))$ в интеграле (3.9). В итоге для случая сильного вырождения получаем следующее соотношение:

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{3\hbar\omega_B}{4\mu_e} \sum_{n=0}^{\mu_e/(\hbar\omega_B)} g_n \sqrt{1 - n \frac{\hbar\omega_B}{\mu_e}},$$

$$\int_0^{\mu_e/(k_B T)} y^{1/2} dy = \frac{2}{3} \left(\frac{\mu_e}{k_B T} \right)^{3/2}, \quad (3.23)$$

$$n_{ed} = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{2m_e}{\hbar} \right)^{3/2} \mu_e^{3/2}.$$

При $\hbar\omega_B > \mu_e$ все электроны находятся на нулевом уровне Ландау. Тогда

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{3\hbar\omega_B}{4\mu_e}. \quad (3.24)$$

Появление осцилляций в зависимости от поля B функции n_e/n_{ed} легко увидеть в пределе полного вырождения (3.23), записав эту функцию для следующих аргументов, при занятии уровней с $n = 0, 1$:

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{3\hbar\omega_B}{4\mu_e} \left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{\hbar\omega_B}{\mu_e}} \right) \quad \text{при} \quad \frac{\mu_e}{2} \leq \hbar\omega_B \leq \mu_e, \quad (3.25)$$

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{3\hbar\omega_B}{4\mu_e} \quad \text{при} \quad \hbar\omega_B \geq \mu_e.$$

При $\hbar\omega_B/\mu_e = 1$, когда происходит переход всех электронов на нулевой уровень, $n_e/n_{ed} = 3/4$, что соответствует правому минимуму на рис. 3. Как следует из (3.25), в случае полного вырождения (см. рис. 3) в окрестности этого минимума функция имеет вид острого угла с вершиной в точке минимума. Несколько осцилляций меньшей амплитуды на рис. 2 и 3 связаны с возможностью переходов на более высокие уровни Ландау при уменьшении магнитного поля [22]. Зависимости химического потенциала μ_e и продольного давления P_{ez} вырожденных электронов от величины магнитного поля приведены на рис. 4–6. Осцилляции зависимостей различных физических величин от магнитного поля в квантующем магнитном поле

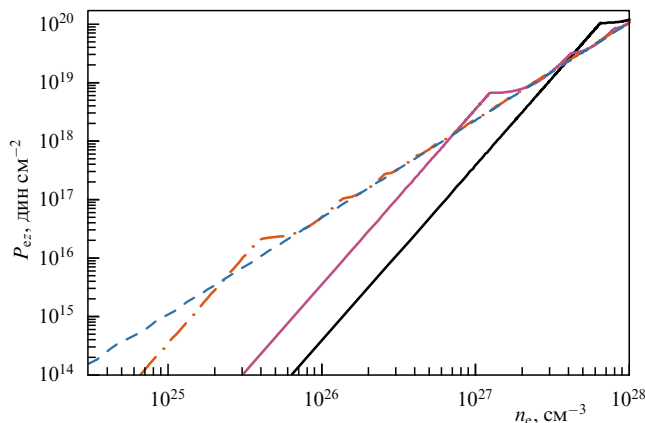


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Давление вырожденного электронного газа как функция плотности электронов в магнитном поле величиной $B = 8 \times 10^9, 4 \times 10^{10}, 4 \times 10^{11}, 1,2 \times 10^{12}$ Гс (синяя штриховая, красная штрихпунктирная, фиолетовая и чёрная жирная кривые соответственно). В полной мере зависимость давления от магнитного поля проявляется только в случае сильного вырождения. Так, синяя штриховая кривая описывает газ в относительно слабом магнитном поле, давление электронов в котором подчиняется адиабатическому закону с показателем $\gamma = 5/3$. По мере возрастания поля всё меньше уровней Ландау оказываются заполненными электронами. При достаточно сильном поле (чёрная кривая, $B = 1,2 \times 10^{12}$ Гс) в квантовом пределе при $n_e \lesssim 6 \times 10^{27} \text{ см}^{-3}$ заселён только основной уровень Ландау и давление имеет более резкую зависимость от температуры, $P_{ez} \propto n_e^3$. При увеличении концентрации начинается заселение первого уровня Ландау.

обусловлены дискретными переходами электронов между уровнями Ландау с возрастанием магнитного поля — эти осцилляции аналогичны квантовым осцилляциям в эффектах Шубникова – де Гааза [26] и де Гааза – ван Альфена [23, 53].

Зависимость давления вырожденного электронного газа вдоль магнитного поля P_{ez} от концентрации электронов при различных магнитных полях определяется формулой [53]

$$P_{ez} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n \frac{p_z^2}{m_e} dp_z, \quad (3.26)$$

где f_n определено в (3.2). В пределе полного вырождения имеем

$$P_{ez} = \frac{\sqrt{2m_e}}{3\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^{\mu_e/(\hbar\omega_B)} g_n (\mu_e - n\hbar\omega_B)^{3/2} \quad (3.27)$$

с учётом (3.23), (3.24) для исключения химического потенциала. Вычисление поперечного давления аналогично вычислению (3.26), (3.27) с заменой квадрата продольного импульса квадратом поперечного импульса (2.5). При вычислении плотности энергии надо использовать выражение (2.4).

При большом квантующем магнитном поле, когда все полностью вырожденные электроны собираются на нижнем уровне Ландау, продольное давление определяется с учётом (3.23), (3.24) выражением

$$P_{ez} = \frac{\sqrt{2m_e}}{3\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \mu_e^{3/2} = \frac{4\pi^4}{3} \frac{\hbar^6}{m_e^3} \frac{n_e^3}{(\hbar\omega_B)^2}. \quad (3.28)$$

Отсюда видно, что давление уменьшается с возрастанием поля $\sim B^{-2}$ при постоянной концентрации (см.

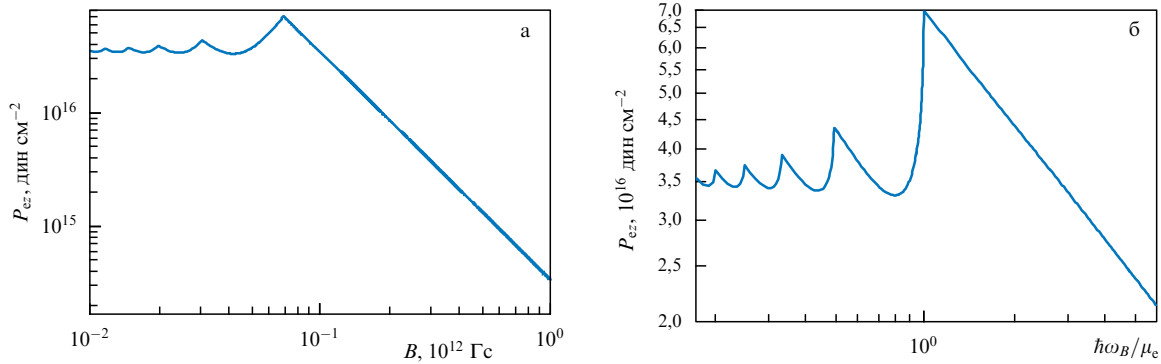


Рис. 5. (а) Давление вырожденного электронного газа как функция магнитного поля B при плотности электронов $n_e = 8 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$. (б) Та же кривая, построенная вблизи перехода от некантовующих полей к сильно кантовующим как функция отношения $\hbar\omega_B/\mu_e$. Осцилляции давления аналогичны осцилляциям плотности вырожденного электронного газа в кантовующем магнитном поле. С увеличением магнитного поля всё меньше уровней Ландау становятся занятыми электронами. После прохождения последнего максимума в давлении все электроны переходят на нулевой уровень Ландау и $P_{e\pm} \propto 1/B^2$ согласно (3.23), (3.27).

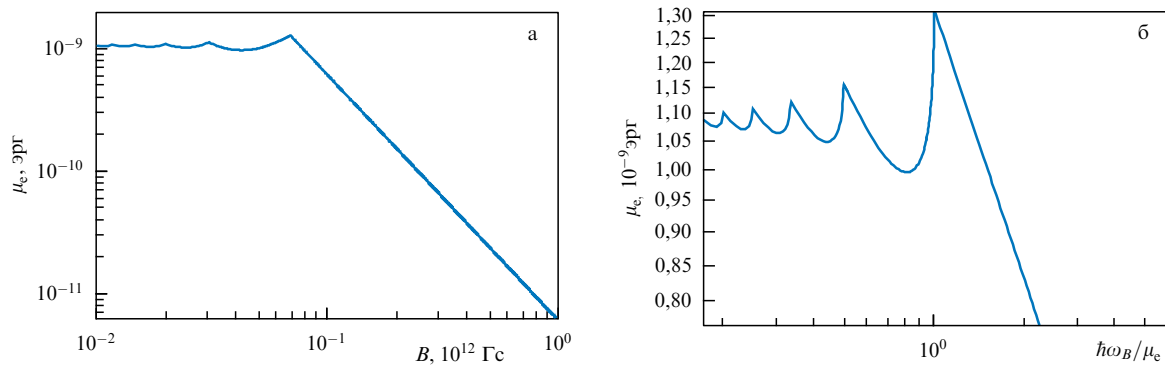


Рис. 6. (а) Химический потенциал электронного газа в магнитном поле, полученный с помощью (3.23) в случае сильного вырождения, как функция магнитного поля B при плотности электронов $n_e = 8 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$. (б) Та же кривая, построенная вблизи перехода от некантовующих полей к сильно кантовующим полям, как функция отношения $\hbar\omega_B/\mu_e$. Очевидно, что разрыв производной химического потенциала происходит здесь при достижении им максимума с возрастанием поля и уменьшением числа заполненных уровней Ландау, тогда как зависимость относительной концентрации от той же величины, представленная на рис. 3, имеет минимум в точке разрыва производной.

рис. 5). Интерпретация этого результата связана с увеличением поперечного фазового объёма нижнего уровня (3.1) с возрастанием поля $\sim B$ и соответствующим увеличением на этом уровне допустимого числа электронов. При той же концентрации число занятых ячеек фазового пространства в продольном направлении соответственно уменьшается, обуславливая уменьшение продольного давления и химического потенциала (см. рис. 6). Из (3.28) следует также, что в данном магнитном поле давление возрастает $\sim n_e^3$ при сильном кантовании.

3.4. Рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле: нерелятивистский случай

Рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле рассматривалось многими авторами [71, 78, 79, 82]. Равновесные концентрации электронов и позитронов в плазме при заданных значениях температуры T и плотности ρ определяются равенством нулю суммы их химических потенциалов и условием квазинейтральности [36, 37]:

$$\begin{aligned} \mu_{e^+}^r + \mu_{e^-}^r &= 0, & \mu_{e^+}^r &= \mu_{e^+} + m_e c^2, \\ \mu_{e^-}^r &= \mu_{e^-} + m_e c^2, & n_p &= n_{e^-} - n_{e^+}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь $n_p = \rho/m_p$ — концентрация протонов (рассматривается водород), знаки $+$ и $-$ в индексах отвечают

соответственно позитронам и электронам, а индекс r в химических потенциалах означает их релятивистские значения. Концентрации частиц $n_{e\pm}$ задаются формулами (3.2), (3.4). Из условия термодинамического равновесия e^+e^- -пар (3.29) следует соотношение

$$\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = -2m_e c^2. \quad (3.30)$$

В случае некантовующего магнитного поля концентрация e^+e^- -пар в нерелятивистском газе при $k_B T \ll m_e c^2$ определяется так же, как и в отсутствие магнитного поля в [23]. Из (3.15), учитывая (3.29), (3.30), для невырожденных электронов получаем

$$n_{e^+} n_{e^-} = 4 \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^3 \exp\left(-\frac{2m_e c^2}{k_B T}\right). \quad (3.31)$$

С учётом последнего соотношения (3.29) из (3.31) находим [23]

$$\begin{aligned} n_{e^+} &= n_{e^-} - n_p = \\ &= -\frac{n_p}{2} + \left[\frac{n_p^2}{4} + 4 \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^3 \exp\left(-\frac{2m_e c^2}{k_B T}\right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для невырожденных нерелятивистских электронов в произвольном магнитном поле из (3.17), учитывая

(3.29), (3.30), имеем

$$n_{e^+}n_{e^-} = \frac{m_e k_B T}{2\pi^3} \left(\frac{eB}{c\hbar^2} \right)^2 \times \left\{ \left[1 - \exp \left(-\frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\}^2 \exp \left(-\frac{2m_e c^2}{k_B T} \right). \quad (3.33)$$

С учётом последнего соотношения (3.29) из (3.33) получаем

$$n_{e^+} = n_{e^-} - n_p = -\frac{n_p}{2} + \left[\frac{n_p^2}{4} + \frac{m_e k_B T}{2\pi^3} \left(\frac{eB}{c\hbar^2} \right)^2 \times \left\{ \left[1 - \exp \left(-\frac{eB\hbar}{m_e c k_B T} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{2} \right\}^2 \exp \left(-\frac{2m_e c^2}{k_B T} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Для случая квантующего магнитного поля концентрация электрон-позитронных пар в невырожденном нерелятивистском газе рассматривалась в работах [71, 78]. В пределе $B = 0$ формула (3.34) переходит в выражение без магнитного поля (3.32), а в случае $\hbar\omega_B \gg k_B T$ концентрация пар $n_{e^\pm} \sim B\sqrt{T} \exp[-m_e c^2/(k_B T)]$.

Для получения концентрации вырожденных электронов и позитронов в магнитном поле надо в (3.33) использовать (3.2) и (3.4) вместо (3.17), а при выводе соотношения для концентраций типа (3.34) сделать то же замещение. Полученные формулы оказываются гораздо более громоздкими, чем (3.33) и (3.34).

В невырожденной плазме с заданной плотностью $\rho = n_p m_p$ рождение пар в магнитном поле, согласно (3.31)–(3.34), определяется двумя безразмерными параметрами:

$$\frac{k_B T}{m_e c^2}, \quad \frac{\hbar\omega_B}{m_e c^2}. \quad (3.35)$$

В более общем случае, при учёте вырождения согласно (3.2) и (3.4), появляется зависимость от параметра вырождения $\mu_e/(k_B T)$, как и в (3.22). Зависимость интенсивности рождения пар от магнитного поля при различных температуре, плотности и степени вырождения представлена на рис. 7–9.

4. Ферми-газ релятивистских электронов и e^+e^- -пары в сверхкритическом магнитном поле

4.1. Распределение Ферми–Дирака для релятивистских электронов в магнитном поле произвольной напряжённости

Чтобы получить выражение для концентрации релятивистских электронов, надо заменить в (3.2) формулу для энергии (2.4) её релятивистским расширением (2.6). Как следует из вывода в разделе 3.1, выражение для поперечного фазового объёма остаётся неизменным в релятивистском случае. Выражение для поперечного импульса (2.5) также остаётся справедливым при любых значениях магнитного поля. Формула для концентрации электронов с учётом обозначений в релятивистских единицах

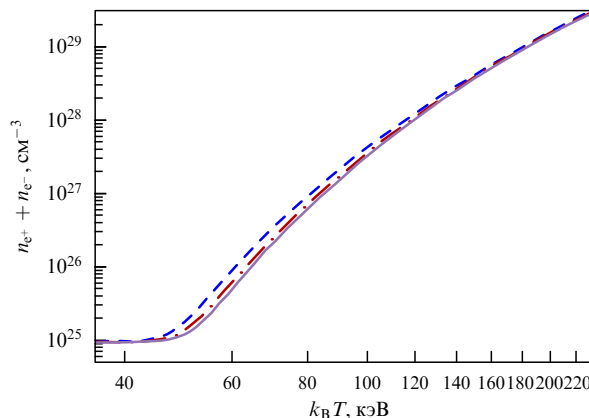


Рис. 7. (В цвете онлайн.) Зависимость концентрации пар $n_{e^-} + n_{e^+}$ в нерелятивистском газе от температуры в магнитных полях $B = 10^{12}$, 10^{13} , 2×10^{13} Гс (соответственно фиолетовая сплошная, красная штрихпунктирная и синяя штриховая кривые) при постоянной плотности протонов $n_p = 10^{25}$ см $^{-3}$. Видно, что нерелятивистское магнитное поле увеличивает скорость рождения пар, повышая их концентрацию не более чем на порядок по сравнению с таковой в отсутствие магнитного поля.

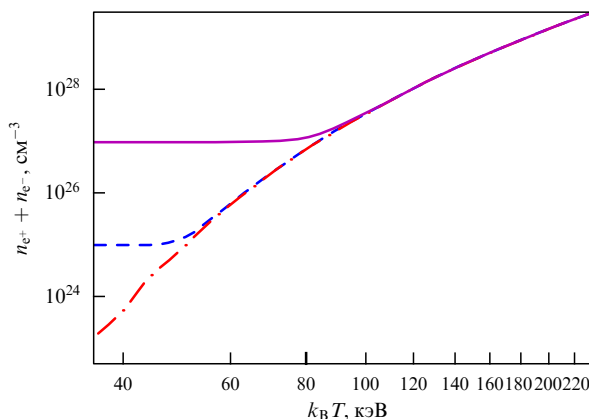


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Зависимость концентрации пар $n_{e^-} + n_{e^+}$ в нерелятивистском газе от температуры в магнитном поле $B = 10^{13}$ Гс при концентрациях протонов $n_p = 10^{23}$, 10^{25} , 10^{27} см $^{-3}$ (соответственно красная штрихпунктирная, синяя штриховая и фиолетовая кривые).

примет следующий вид [45, 53, 75]:

$$n_e = \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} dp' f_n(p', \mu_e^r, T), \quad (4.1)$$

где

$$f_n(p', \mu_e^r, T) = \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{1 + p'^2 + 2bn} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

$$p' = \frac{p_z}{m_e c}, \quad \mu_e^r = \mu_e + m_e c^2.$$

Все рассуждения выше относительно сильно квантующего и неквантующего пределов качественно остаются в силе, ввиду того что в релятивистском случае меняется зависимость энергии поперечного движения электрона от магнитного поля, при $b > 1$ поле оказывается сильно квантующим, если $\sqrt{m_e c^2 \hbar\omega_B} > k_B T$. В релятивистском случае в неквантующем магнитном поле суммирование

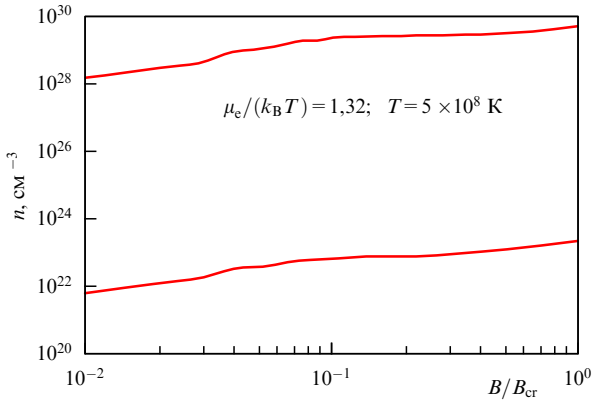


Рис. 9. Зависимость концентрации пар $n_{e-} + n_{e+}$ (верхняя кривая) в нерелятивистском вырожденном газе и концентрации позитронов n_{e+} (нижняя кривая) от магнитного поля при температуре $T = 5 \times 10^8$ К и параметре вырождения $\mu_e/(k_B T) = 1,32$ ($\mu_e/(m_e c^2) = 0,2$).

в (4.1), (4.2) можно заменить интегрированием, по аналогии с (3.5), что приводит, как и в нерелятивистском случае, к не зависящему от магнитного поля выражению, которое имеет вид

$$n_e = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\hbar^3} \int_0^\infty dp_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty dp_z \times \left[1 + \exp \left(\frac{\sqrt{m_e^2 c^4 + p_z^2 c^2 + p_\perp^2 c^2} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1}, \quad (4.3)$$

соответствующий концентрации релятивистского ферми-газа свободных электронов.

4.2. Сильно вырожденные электроны

В оболочках нейтронных звёзд с сильным магнитным полем электроны могут быть релятивистскими и сильно вырожденными в присутствии квантующего магнитного поля [52], когда $m_e c^2 \hbar \omega_B \sim (\mu_e^r)^2 \gg m_e^2 c^4$. При условии полностью вырожденных электронов интегрирование в (4.1) ведётся в пределах

$$-\sqrt{\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1} - 2nb \leq p' \leq \sqrt{\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1} - 2nb. \quad (4.4)$$

При этом в сумме (4.1) остаются только члены с номерами $n \leq \{[\mu_e^r/(m_e c^2)]^2 - 1\}/(2b)$. В отсутствие магнитного поля концентрация электронов имеет вид [36]

$$n_{ed} = \frac{(m_e c)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left[\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1 \right]^{3/2}. \quad (4.5)$$

Относительная концентрация в релятивистском случае при полном вырождении определяется формулой

$$\frac{n_e}{n_{ed}} = \frac{3}{4} \frac{2b}{\mu_e^r - 1} \sum_{n=0}^{(\mu_e^r - 1)/(2b)} g_n \sqrt{1 - n \frac{2b}{\mu_e^r - 1}}, \quad \mu_e^r = \frac{\mu_e^r}{m_e c^2}, \quad (4.6)$$

следующей из (4.1), (4.5). Величина $2b/(\mu_e^r - 1)$ в нерелятивистском пределе $\mu_e^r = \mu_e + m_e c^2$, $\mu_e \ll m_e c^2$ совпадает

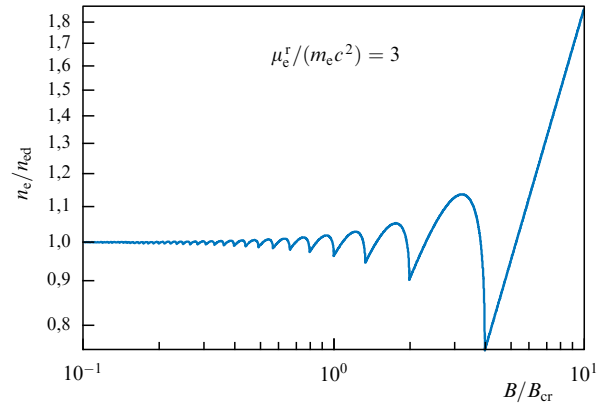


Рис. 10. Отношение концентраций электронов в случае квантующего и неквантующего магнитных полей n_e/n_{ed} как функция нормированного магнитного поля B/B_{cr} в случае релятивизма и сильного вырождения электронов в соответствии с (4.1), (4.4). Уровень собственного релятивизма электронов определяется химическим потенциалом μ_e^r , который соответствует энергии Ферми полностью вырожденных электронов в отсутствие магнитного поля. В данном случае $\mu_e^r/(m_e c^2) = \mu_e^r = 3$. Осцилляции здесь, как и в нерелятивистском случае на рис. 3, связаны с квантующим магнитным полем, определяющим дискретное заселение, в частности, нижних уровней Ландау. Переселение всех электронов на нулевой уровень происходит, согласно (4.7), при $b = b_0 = 4$, которому соответствует последний пик на рисунке. Это отвечает $b = (\mu_e^r - 1)/2$.

с параметром $\hbar \omega_B/\mu_e$ для нерелятивистского газа (3.23). Равенство её единице определяет переход всех электронов на основной уровень Ландау. Зависимость относительной концентрации от B/B_{cr} на рис. 10, в которой точно учтены релятивистские эффекты, качественно совпадает с зависимостью на рис. 3 для нерелятивистского предела. При больших b остаётся только член с $n = 0$, соответствующий нулевому уровню. При

$$b_1 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1 \right] \leq b \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1 \right] = b_0 \quad (4.7)$$

концентрация электронов в вырожденной плазме определяется нулевым и первым уровнями:

$$n_e = \frac{b}{2\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \left[\sqrt{\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1} + 2\sqrt{\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1 - 2b} \right] \quad \text{при } b_1 \leq b \leq b_0, \quad (4.8)$$

$$n_e = \frac{b}{2\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \sqrt{\left(\frac{\mu_e^r}{m_e c^2}\right)^2 - 1} \quad \text{при } b \geq b_0.$$

Так же как и в нерелятивистском случае (3.25), переход с возрастанием магнитного поля через граничное значение, приводящий к опустошению более высокого уровня, сопровождается скачком производной функции $n_e|_{\mu_e^r}(b)$ и изменением её знака (см. рис. 3, 10).

Найдём выражение для продольного давления релятивистских электронов P_{ez} в квантующем сверхкритическом магнитном поле. Это давление выражается в виде суммы по уровням Ландау, аналогично таковому в не-

релятивистском случае (3.26):

$$P_{ez}^r = \frac{1}{4\pi^2} \frac{eB}{c\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n p_z v_z dp_z, \quad (4.9)$$

где [96]

$$v_z = \frac{cp_z}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 c^2}}. \quad (4.10)$$

Здесь f_n определено в (4.2), $p_n^2 = p_z^2 + p_{\perp,n}^2 = p_z^2 + (eB\hbar/c)(2n+1)$ (см. (2.5)). Отметим, что в работах [22, 53] использовалось несколько другое выражение для давления замагниченных электронов, не учитывающее зависимости поперечного импульса от магнитного поля в виде (2.5). Из (4.9), (4.10), используя обозначение (4.2), получаем давление замагниченного электронного газа при наличии релятивистского движения в виде

$$P_{ez}^r = \frac{b}{4\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} dp' f_n(p', \mu_r, t) \times \frac{p'^2}{\sqrt{1+p'^2+2bn+b}}. \quad (4.11)$$

В пределе сильного вырождения $T=0$ формула (4.11) примет вид

$$P_{ez}^r = \frac{b}{2\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\sqrt{\mu_r^2 - 1 - 2bn}} dp' \times \frac{p'^2}{\sqrt{1+p'^2+2bn+b}}. \quad (4.12)$$

Интеграл в (4.12) вычисляется аналитически с использованием замены переменных и табличного интеграла [97],

$$z = \operatorname{arsinh} \frac{p'}{\sqrt{1+2bn+b}}, \quad dz = \frac{dp'}{\sqrt{1+p'^2+2bn+b}},$$

$$\sinh z = \frac{p'}{\sqrt{1+2bn+b}},$$

$$\int \frac{p'^2}{\sqrt{1+p'^2+2bn+b}} dp' = (1+2bn+b) \int (\sinh^2 z) dz,$$

$$\int (\sinh^2 z) dz = \frac{1}{4} [\sinh(2z) - 2z], \quad (4.13)$$

$$\sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z = 2 \sinh z \sqrt{1 + \sinh^2 z},$$

$$\operatorname{arsinh} x = \log(\sqrt{x^2+1} + x).$$

Используя (4.10), получаем из (4.12) следующее выражение для давления в вырожденном газе с произвольным магнитным полем и произвольной степенью релятивизма:

$$P_{ez}^r = \frac{b}{4\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (1+2bn+b) \times \left[x \sqrt{x^2+1} - \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right], \quad (4.14)$$

$$x = \sqrt{\frac{\mu_r^2 - 1 - 2bn}{1+2bn+b}}.$$

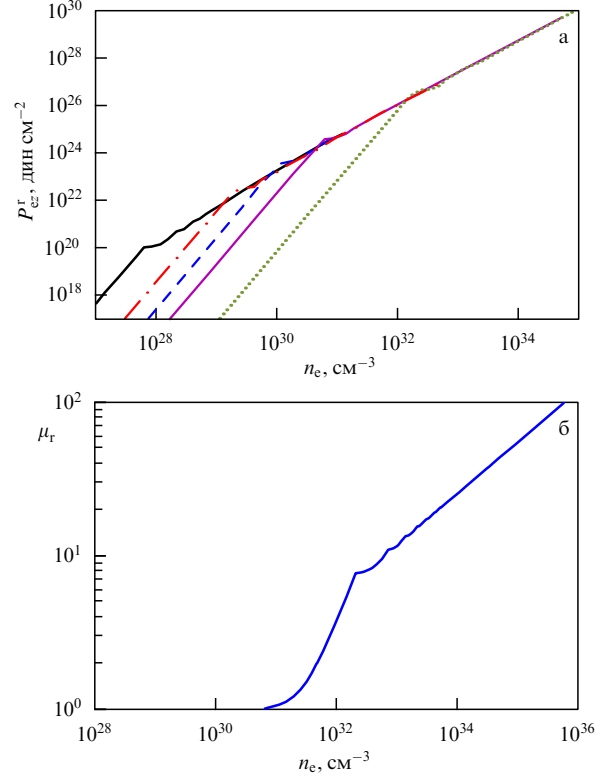


Рис. 11. (В цвете онлайн.) (а) Давление релятивистского вырожденного электронного газа в магнитном поле как функция плотности электронов в магнитных полях $B/B_{cr} = 0,03, 0,3, 1, 3, 30$ (чёрная жирная, красная штрихпунктирная, синяя штриховая, фиолетовая и зелёная пунктирная кривые соответственно). Чёрная кривая в нерелятивистской области совпадает с аналогичной кривой, приведённой на рис. 4. При возрастании плотности электронов при постоянном поле давление начинается стремиться к адиабатическому закону с ультрарелятивистским показателем $\gamma = 4/3$. (б) Химический потенциал электронного газа $\mu_r = \mu_e^r/(m_e c^2)$ в магнитном поле как функция плотности n_e в сильном поле, $B/B_{cr} = 30$. Химический потенциал становится больше единицы ($\mu_r > 1$) вблизи точки начала перехода электронов на более высокие уровни Ландау, где в (4.16) параметр $y \sim 1$. В области перехода происходит изменение зависимости давления от плотности начиная с соотношения $P_{ez} \sim n_e^3$, соответствующего нахождению всех электронов на нулевом уровне, к соотношению $P_{ez} \sim n_e^{4/3}$, соответствующему ультрарелятивистскому электронному газу в неквантующем магнитном поле.

На рисунках 11, 12 представлены зависимости давления вырожденного электронного газа от плотности и от магнитного поля. В приближении $\mu_r^2 - 1 \ll 1$ и $b \ll 1$ выражение (4.14) переходит к нерелятивистскому пределу¹ (3.27).

Рассмотрим теперь сильно квантующее магнитное поле $b > (\mu_r^2 - 1)/2$. В этом случае в формуле (4.14) снимается суммирование по уровням Ландау, остаётся только слагаемое с $n = 0$:

$$P_{ez}^r = \frac{b}{4\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} (1+b) \left[\frac{\sqrt{(\mu_r^2 + b)(\mu_r^2 - 1)}}{1+b} - \log \left(\sqrt{\frac{\mu_r^2 - 1}{1+b}} + \sqrt{\frac{\mu_r^2 + b}{1+b}} \right) \right]. \quad (4.15)$$

¹ При переходе к нерелятивистскому пределу $z \ll 1$ используется разложение $(1/4)[\sinh(2z) - 2z] \approx z^3/3$.

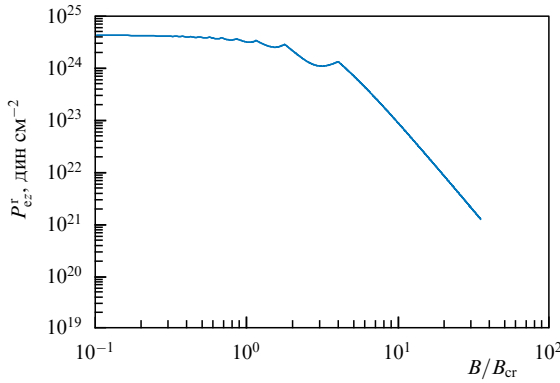


Рис. 12. Давление вырожденного электронного газа как функция B/B_{cr} при плотности электронов $n_e = 10^{31} \text{ см}^{-3}$. Осцилляции давления в релятивистском газе аналогичны осцилляциям в нерелятивистском случае. С увеличением магнитного поля всё меньше уровней Ландау оказываются занятыми электронами. После прохождения последнего максимума в давлении все электроны переходят на нулевой уровень Ландау и $P_{ez}^r \propto 1/(B^2\sqrt{B})$.

С учётом выражений для концентрации (4.4), (4.6) это соотношение принимает вид

$$P_{ez}^r = \frac{b}{4\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} (1+b) \left[y\sqrt{y^2+1} - \log(y + \sqrt{y^2+1}) \right],$$

$$y = \frac{2\pi^2 \hbar^3}{m_e^3 c^3} \frac{n_e}{b\sqrt{1+b}}. \quad (4.16)$$

С возрастанием магнитного поля параметр $y \equiv x$ из (4.14) и величина (4.16) становится много меньше единицы, так же как в нерелятивистском пределе. Используя то же самое разложение, получаем выражение для продольного давления в виде

$$P_{ez}^r = \frac{4\pi^4}{3} \frac{\hbar^6}{m_e^5 c^4} \frac{n_e^3}{b^2\sqrt{1+b}}. \quad (4.17)$$

Таким образом, в пределе сверхсильного поля, когда все электроны находятся на нулевом уровне Ландау, величина $P_{ez}^r \propto n_e^3/(B^2\sqrt{B})$. Отметим, что концентрация электронов на нулевом уровне имеет место, согласно (4.12), только при $\mu_r \leq \sqrt{1+2b}$, т.е. при $y \leq \sqrt{2b/(1+b)}$. В противном случае происходит заполнение более высоких уровней, а при $\mu_r \gg b$ осуществляется переход к квазиклассическому пределу с некантующим магнитным полем. В сильно квантуемом магнитном поле зависимость продольного давления от концентрации электронов является одинаковой для любой степени релятивизма (кроме узкой области с $y \sim 1$ вблизи перехода к некантующему случаю) и носит универсальный характер, $P_{ez}^r \sim n_e^3$, в отличие от таковой в случае некантующего поля, когда степень зависимости давления от концентрации электронов изменяется от 5/3 до 4/3 при переходе от нерелятивистских электронов к релятивистским.

4.3. Рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле: релятивистский случай

В случае релятивистских электронов в произвольном магнитном поле равновесная концентрация электрон-позитронных пар, как и в нерелятивистском случае, определяется формулой (3.29). Для получения концентрации вырожденных релятивистских электронов и позитронов в магнитном поле надо в (3.33) использовать (4.1) и (4.2) вместо (3.17), а при выводе соотношения для концентраций типа (3.34) необходимо сделать такое же замещение.

Простые соотношения для концентрации пар можно получить в ультрарелятивистском пределе в присутствии некантующего поля $k_B T \gg m_e c^2$, $k_B T \gg \sqrt{m_e c^2 \hbar \omega_B}$. В этом случае магнитное поле не влияет на процесс рождения пар. Из (4.3) в ультрарелятивистском пределе находим

$$n_e = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\hbar^3} \int_0^\infty dp_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty dp_z \times$$

$$\times \left[1 + \exp\left(\frac{\sqrt{p_z^2 c^2 + p_\perp^2 c^2} - \mu_e^r}{k_B T}\right) \right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \left[1 + \exp\left(\frac{pc - \mu_e^r}{k_B T}\right) \right]^{-1} p^2 dp,$$

$$p^2 c^2 = p_z^2 c^2 + p_\perp^2 c^2. \quad (4.18)$$

Введя обозначения $x = pc/(k_B T)$, $\xi = \mu_e^r/(k_B T)$, получаем для концентрации электронов

$$n_{e-} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp(x - \xi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3 F_2(\xi). \quad (4.19)$$

Функция Ферми $F_2(\xi)$ определена в (3.9). Концентрация позитронов с учётом (3.29) определяется соотношением

$$n_{e+} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp(x + \xi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3 F_2(-\xi). \quad (4.20)$$

Когда концентрация пар значительно превышает концентрацию исходных электронов, $\mu_e = \xi \simeq 0$ и сумма концентраций электронов и позитронов выражается как [36, 37, 67]

$$n_{e+} + n_{e-} \simeq \frac{1,803}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{c\hbar}\right)^3, \quad F_2(0) = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1,803, \quad (4.21)$$

где $\zeta(x)$ — ζ -функция Римана.

Особый интерес представляет случай сочетания нерелятивистской скорости движения электронов вдоль поля, которая имеет место при $k_B T \ll m_e c^2$, и сверхкритического магнитного поля $B > B_{cr}$ (см. (2.2)). Такая ситуация может реализоваться в аккреционных колонках нейтронных звёзд с сильным магнитным полем [90, 98, 99], где вблизи поверхности нейтронной звезды напряжённость магнитного поля могла бы достигать $B \sim 10^{15}$ Гс при концентрации протонов $n_p \sim 10^{25} - 10^{27} \text{ см}^{-3}$ и температуре $T \sim 10^9$ К. Как показано в работах [71, 82], наличие магнитного поля способствует возрастанию концентрации электрон-позитронных пар при тех же n_p, T . В указанном выше случае концентрацию e^+e^- -пар можно рассчитать аналитически.

Запишем выражение для концентрации электронов (4.1), (4.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
n_e &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} dp' \times \\
&\times \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{1+p'^2+2bn} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1} = \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \times \\
&\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp' \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{1+p'^2} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1} + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{1+p'^2+2bn} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Рассмотрим предельный случай $b \gg 1$. Тогда выражение (4.22) сведётся к следующему:

$$\begin{aligned}
n_e &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp' \times \right. \\
&\times \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{1+p'^2} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1} + \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \left[1 + \exp \left(\frac{m_e c^2 \sqrt{p'^2+2bn} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Для рассмотренных выше параметров плазмы в аккреционной колонке вырождение несущественно, член с экспонентой много больше единицы, поэтому можно использовать функцию распределения Максвелла – Больцмана, при которой

$$\begin{aligned}
n_e &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{1+p'^2} - \mu_e^r}{k_B T} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{p'^2+2bn} - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right\}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Для нерелятивистских продольных скоростей и сверхкритических магнитных полей используем разложения $\sqrt{1+p'^2} \approx 1+p'^2/2$, $\sqrt{p'^2+2bn} \approx \sqrt{2bn} [1+p'^2/(2nb)]$. Учитывая эти разложения, запишем (4.24) в виде

$$\begin{aligned}
n_e &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp \left(-\frac{m_e c^2 (1+p'^2/2) - \mu_e^r}{k_B T} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2bn} [1+p'^2/(2nb)] - \mu_e^r}{k_B T} \right) \right\}. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Интегрируя по продольным импульсам p' , получаем из (4.25) с учётом (3.29) выражения для концентраций электронов и позитронов:

$$\begin{aligned}
n_{e^-} &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m_e c^2}} \exp \left(\frac{\mu_e^r}{k_B T} \right) \left[\exp \left(-\frac{m_e c^2}{k_B T} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2bn)^{1/4} \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2bn}}{k_B T} \right) \right], \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{e^+} &= \frac{b}{4\pi^2} \frac{(m_e c)^3}{\hbar^3} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m_e c^2}} \exp \left(-\frac{\mu_e^r}{k_B T} \right) \left[\exp \left(-\frac{m_e c^2}{k_B T} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2bn)^{1/4} \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2bn}}{k_B T} \right) \right].
\end{aligned}$$

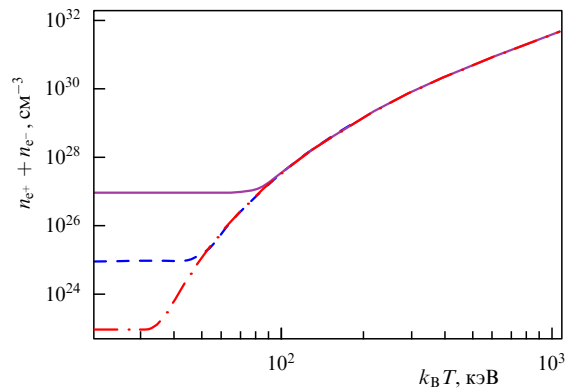


Рис. 13. (В цвете онлайн.) Зависимость концентрации пар $n_{e^-} + n_{e^+}$ от температуры в магнитном поле $B = 10^{13}$ Гс при концентрациях протонов $n_p = 10^{23}, 10^{25}, 10^{27}$ см^{-3} (соответственно красная штрих-пунктирная, синяя штриховая и фиолетовая кривые).

Из (4.26) аналогично выводу (3.31), (3.33) получаем

$$\begin{aligned}
n_{e^-} n_{e^+} &= \frac{b^2}{8\pi^3} \frac{m_e^5 c^4 k_B T}{\hbar^6} \left[\exp \left(-\frac{m_e c^2}{k_B T} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2bn)^{1/4} \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2bn}}{k_B T} \right) \right]^2. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Из (3.29), (4.27) в результате решения квадратного уравнения находим

$$\begin{aligned}
n_{e^+} &= -\frac{n_p}{2} + \left\{ \frac{n_p^2}{4} + \frac{b^2 m_e^5 c^4 k_B T}{8\pi^3 \hbar^6} \left[\exp \left(-\frac{m_e c^2}{k_B T} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2bn)^{1/4} \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2bn}}{k_B T} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

При $B \gg B_{cr}$ основная часть электронов собирается на нулевом уровне, так что первый член в квадратных скобках в (4.28) много больше всей суммы, члены которой также быстро убывают. Оставляя один член из суммы в (4.28), получаем

$$\begin{aligned}
n_{e^+} &= -\frac{n_p}{2} + \left\{ \frac{n_p^2}{4} + \frac{b^2 m_e^5 c^4 k_B T}{8\pi^3 \hbar^6} \left[\exp \left(-\frac{m_e c^2}{k_B T} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. + 2(2b)^{1/4} \exp \left(-\frac{m_e c^2 \sqrt{2b}}{k_B T} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

На рисунках 13, 14 представлены зависимости концентрации пар от температуры при различных значениях магнитных полей и плотностей протонов. На рисунке 15 приведена зависимость концентрации электрон-позитронных пар от магнитного поля B при фиксированной плотности протонов. При $m_e c^2 \sqrt{b}/(k_B T) \gg 1$, что соответствует заполнению только нулевого уровня Ландау, зависимость с возрастанием поля стремится к линейной в соответствии с (4.29). Аналогичная зависимость имеет место и в нерелятивистском пределе (см. (3.34)).

5. Заключение

Рассмотрены термодинамические свойства электронного газа в магнитном поле произвольной величины при любой степени релятивизма электронов. Получены

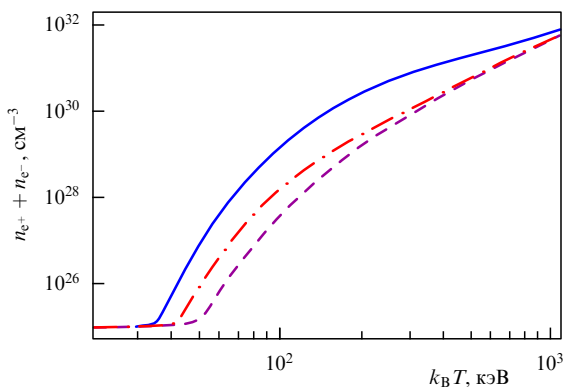


Рис. 14. (В цвете онлайн.) Зависимость концентрации пар $n_{e^-} + n_{e^+}$ от температуры в магнитных полях $B = 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}$ Гс (соответственно фиолетовая штриховая, красная штрихпунктирная и синяя кривые) при постоянной плотности протонов $n_p = 10^{25} \text{ см}^{-3}$. Видно, что с возрастанием магнитного поля происходит более интенсивное рождение пар, существенно повышающее их концентрацию. Для других плотностей протонов зависимости качественно имеют аналогичный вид.

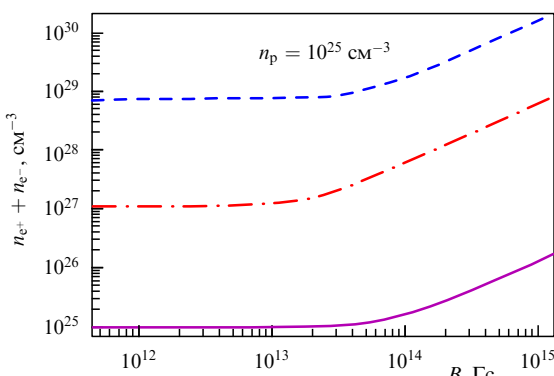


Рис. 15. (В цвете онлайн.) Зависимость концентрации пар $n_{e^-} + n_{e^+}$ от магнитного поля B при температурах $T = 5 \times 10^8, 1 \times 10^9, 2 \times 10^9$ К (соответственно фиолетовая сплошная, красная штрихпунктирная и синяя штриховая кривые) при постоянной плотности протонов $n_p = 10^{25} \text{ см}^{-3}$. Виден переход от слабой зависимости от поля, когда заполнено много уровней Ландау, к линейной функции для случая сильного квантования. Для других плотностей протонов зависимости выглядят аналогично.

аналитические формулы для предельных случаев слабого и сильного квантующего магнитных полей. Показано в соответствии с результатами работ [71, 82] увеличение эффективности рождения пар в сильном магнитном поле, что обусловлено линейным возрастанием с увеличением поля B части фазового объема, поперечной магнитному полю. Исследованы свойства электронов в квантующем магнитном поле и осцилляции термодинамических функций при больших магнитных полях, связанные с дискретными переходами между уровнями Ландау. Получено, что для сильно вырожденного газа в сильно квантующем поле, когда все электроны располагаются на основном уровне Ландау, давление электронов вдоль магнитного поля возрастает как $P_{ez} \sim n_e^3$. В то же время после перехода всех электронов на нулевой уровень Ландау продольное давление электронов убывает, $P_{ez} \sim B^{-2}$, что также является следствием отмеченного выше увеличения поперечной части фазового объема. В релятивистском газе в сильно квантующем пределе при

$B/B_{cr} \gg 1$ давление $P_{ez}^r \sim n_e^3 / (B^2 \sqrt{B})$. Отметим, что зависимость $P_{ez}^r \sim n_e^3$ имеет место как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях.

Работа выполнена при частичной поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 20-02-00455, № 18-29-21021).

Список литературы

1. Uhlenbeck G E, Goudsmit S *Nature* **117** 264 (1926)
2. Pauli W Z. *Phys.* **31** 765 (1925)
3. Fermi E *Rendiconti Lincei* **3** 145 (1926); Пер. на англ. яз.: Fermi E "On the quantization of the monoatomic ideal gas", cond-mat/9912229 (Translated by Zannoni A)
4. Dirac P A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **112** 661 (1926)
5. Sommerfeld A *Naturwissenschaften* **15** 825 (1927)
6. Bose Z. *Phys.* **26** 178 (1924)
7. Einstein A *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 261–267 (1924)
8. Pauli W *Phys. Rev.* **58** 716 (1940)
9. Fowler R H *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **87** 114 (1926)
10. Frenkel J Z. *Phys.* **50** 234 (1928)
11. Stoner E C *Philos. Mag.* **9** 944 (1930)
12. Thomas E G *Philos. Mag.* **91** 3416 (2011)
13. Chandrasekhar S *Philos. Mag.* **11** 592 (1931)
14. Chandrasekhar S *Astrophys. J.* **74** 81 (1931)
15. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **1** 285 (1932); Пер. на русск. яз.: Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 86
16. Яковлев Д Г *УФН* **164** 653 (1994); Yakovlev D G *Phys. Usp.* **37** 609 (1994)
17. Bohr N *Collected Works* Vol. 1 (Ed. J R Nielsen) (Amsterdam: North-Holland, 1972) pp. 163, 165–393
18. van Leeuwen H-J J. *Phys. Radium.* **2** (12) 361 (1921)
19. Pauli W (Jr.) *Z. Phys.* **43** 601 (1927)
20. Pauli W (Jr.) *Z. Phys.* **41** 81 (1927)
21. Landau L D *Z. Phys.* **64** 629 (1930); Пер. на русск. яз.: Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 47
22. Румер Ю Б *ЖЭТФ* **18** 1082 (1948)
23. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Т. 1 (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)
24. de Haas W J, van Alphen P M *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* (208d) (1930); *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* (212a) (1930)
25. Schubnikow L, de Haas W J *Proc. R. Netherlands Acad. Arts Sci.* **33** 130 (1930)
26. Брандт Н Б, Чудинов С М *УФН* **137** 479 (1982); Brandt N B, Chudinov S M *Sov. Phys. Usp.* **25** 518 (1982)
27. Шульман Г А *Изв. вузов. Физика* (10) 24 (1974); Shul'man G A *Sov. Phys. J.* **17** 1355 (1974)
28. Potekhin A Y *Astron. Astrophys.* **306** 999 (1996)
29. Koester D, Chanmugam G *Rep. Prog. Phys.* **53** 837 (1990)
30. Ostriker J P, Hartwick F D A *Astrophys. J.* **153** 797 (1968)
31. Bera P, Bhattacharya D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **445** 3951 (2014)
32. Ferrario L, de Martino D, Gänsicke B T *Space Sci. Rev.* **191** 111 (2015)
33. Howell D A et al. *Nature* **443** 308 (2006)
34. Hewish A et al. *Nature* **217** 709 (1968)
35. Giacconi R et al. *Astrophys. J.* **167** L67 (1971)
36. Бисноватый-Коган Г С *Физические вопросы теории звездной эволюции* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Bisnovatyi-Kogan G S *Stellar Physics* Vol. 1 *Fundamental Concepts and Stellar Equilibrium* (Berlin: Springer, 2001)
37. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Zeldovich Ya B, Novikov I D *Relativistic Astrophysics* Vol. 1 *Stars and Relativity* (Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 1971)
38. Ostriker J P, Gunn J E *Astrophys. J.* **157** 1395 (1969)
39. Гинзбург В Л *УФН* **103** 393 (1971); Ginzburg V L *Sov. Phys. Usp.* **14** 83 (1971)
40. Duncan R C, Thompson C *Astrophys. J. Lett.* **392** L9 (1992)
41. Mazets E P et al. *Nature* **282** 587 (1979)
42. Мазец Е П, Голенецкий С В, Гурьянов Я А *Письма в Астрон. журн.* **5** 641 (1979); Mazets E P, Golenetskii S V, Gur'yan Ya A *Sov. Astron. Lett.* **5** 343 (1979)
43. Kouveliotou C et al. *Astrophys. J.* **510** L115 (1999)

44. Bisnovatyi-Kogan G S *Young Neutron Stars with Soft Gamma Ray Emission, and Anomalous X-Ray Pulsars* (Handbook of Supernovae, Eds A Alsabti, P Murdin) (Berlin: Springer, 2017) p. 1401
45. Canuto V, Chiu H-Y *Phys. Rev.* **173** 1210 (1968)
46. Canuto V, Chiu H-Y *Phys. Rev.* **173** 1220 (1968)
47. Canuto V, Chiu H-Y *Phys. Rev.* **173** 1229 (1968)
48. Canuto V, Chiu H Y, Fassio-Canuto L *Astrophys. Space Sci.* **3** 258 (1969).
49. Canuto V, Ventura J *Fundamentals Cosmic Phys.* **2** 203 (1977)
50. Blandford R D, Hernquist L J. *Phys. C* **15** 6233 (1982)
51. Abrahams A M, Shapiro S L *Astrophys. J.* **374** 652 (1991)
52. Lai D, Shapiro S L *Astrophys. J.* **383** 745 (1991)
53. Lai D *Rev. Mod. Phys.* **73** 629 (2001)
54. Шульман Г А *Изв. вузов. Физика* (9) 3 (1993); Shul'man G A *Russ. Phys. J.* **36** 809 (1993)
55. Шульман Г А *Изв. вузов. Физика* (1) 102 (1994); Shul'man G A *Russ. Phys. J.* **37** 91 (1994)
56. Broderick A, Prakash M, Lattimer J M *Astrophys. J.* **537** 351 (2000)
57. Ferrer E J et al. *Phys. Rev. C* **82** 065802 (2010)
58. Strickland M, Dexheimer V, Menezes D P *Phys. Rev. D* **86** 125032 (2012)
59. Duncan R C *AIP Conf. Proc.* **526** 830 (2000)
60. Chandrasekhar S, Fermi E *Astrophys. J.* **118** 116 (1953)
61. Бисноватый-Коган Г С, Зельдович Я Б, Сюняев Р А *Астрон. журн.* **48** (1) 24 (1971); Bisnovatyi-Kogan G S, Zel'dovich, Ya B, Syunyaev R A *Sov. Astron.* **15** 17 (1971)
62. Svensson R *Astrophys. J.* **258** 335 (1982)
63. Ruffini R, Vereshchagin G, Xue S-S *Phys. Rep.* **487** 1 (2010)
64. Пинаева Г В *Астрон. журн.* **41** 25 (1964); Pinaeva G V *Sov. Astron.* **8** 17 (1964)
65. Имшенник В С, Надежин Д К *Астрон. журн.* **42** 1154 (1965); Imshennik V S, Nadezhin D K *Sov. Astron.* **9** 896 (1966)
66. Бисноватый-Коган Г С, Каждан Я М *Астрон. журн.* **43** 761 (1966); Bisnovatyi-Kogan G S, Kazhdan Ya M *Sov. Astron.* **10** 604 (1967)
67. Надежин Д К *Научные информации* (32) 3 (1974)
68. Надежин Д К *Научные информации* (33) 117 (1974)
69. Blinnikov S I, Dunina-Barkovskaya N V, Nadyozhin D K *Astrophys. J. Suppl.* **106** 171 (1996)
70. Heisenberg W, Euler H Z. *Phys.* **98** 714 (1936)
71. Иванов М А, Шульман Г А *Изв. вузов. Физика* (9) 122 (1977); Ivanov M A, Shul'man G A *Sov. Phys. J.* **20** 1220 (1977)
72. Иванов М А, Шульман Г А *Изв. вузов. Физика* (3) 60 (1978); Ivanov M A, Shul'man G A *Sov. Phys. J.* **21** 317 (1978)
73. Шульман Г А, Секержитский В С *Астрофизика* **13** 165 (1977); Shul'man G A, Sekerzhitskii V S *Astrophysics* **13** 84 (1977)
74. Вшивцев А С и др. *Астрон. журн.* **66** 489 (1989); Vshivtsev A S et al. *Sov. Astron.* **33** 249 (1989)
75. Багров В Г, в сб. *Теория излучения релятивистских частиц* (Под ред. В А Бордовичина) (М.: Физматлит, 2002) с. 156
76. Митрофанов И Г, Позаненко А С *ЖЭТФ* **93** 1951 (1987); Mitrofanov I G, Pozanenko A S *Sov. Phys. JETP* **66** 1112 (1987)
77. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1982)
78. Kaminker A D et al. *Phys. Rev. D* **46** 3256 (1992)
79. Каминкер А Д, Яковлев Д Г *ЖЭТФ* **103** 438 (1993); Kaminker A D, Yakovlev D G *J. Exp. Theor. Phys.* **76** 229 (1993)
80. Van Riper K A *Astrophys. J.* **329** 339 (1988)
81. Harding A K, Lai D *Rep. Prog. Phys.* **69** 2631 (2006)
82. Mushtukov A A, Ognev I S, Nagirner D I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **485** L131 (2019)
83. Patruno A et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **370** L6 (2006)
84. Begelman M C *Astrophys. J.* **568** L97 (2002)
85. Podsiadlowski Ph, Rappaport S, Han Z *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **341** 385 (2003)
86. Fabrika S, Vinokurov A, Atapin K, in *Proc. of the Fourteenth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories, 12–18 July 2015, Rome, Italy* (Eds M Bianchi, R T Jansen, R Ruffini) (Singapore: World Scientific, 2018) p. 1023
87. Bachetti M et al. *Nature* **514** 202 (2014)
88. Carpano S, Jin C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **477** 3178 (2018)
89. Бисноватый-Коган Г С, Фридман А М *Астрон. журн.* **46** 721 (1969); Bisnovatyi-Kogan G S, Fridman A M *Sov. Astron.* **13** 566 (1970)
90. Basko M M, Sunyaev R A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **175** 395 (1976)
91. Fowler W A, Hoyle F *Astrophys. J. Suppl.* **9** 201 (1964)
92. Kubo R *Statistical Mechanics, an Advanced Course with Problems and Solutions* (Amsterdam: North-Holland, 1965)
93. Hakim R *Introduction to Relativistic Statistical Mechanics: Classical and Quantum* (Hackensack, NJ: World Scientific, 2011)
94. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 1963); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1965)
95. Соколов А А, Тернов И М *Релятивистский электрон* (М.: Наука, 1983); Пер. на англ. яз.: Sokolov A A, Ternov I M *Radiation from Relativistic Electrons* (New York: American Institute of Physics, 1986)
96. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1971)
97. Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1963); Пер. на англ. яз.: Gradshteyn I S, Ryzhik I M *Table of Integrals, Series, and Products* 4th ed. (New York: Academic Press, 1965)
98. Wang Y-M, Frank J *Astron. Astrophys.* **93** 255 (1981)
99. Mushtukov A A et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **454** 2539 (2015)

Free electron gas and electron–positron pair equilibrium in a magnetic field

G.S. Bisnovatyi-Kogan^{(1,2,3,*), I.A. Kondratyev^(1,4,†)}

⁽¹⁾ Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

⁽⁴⁾ National Research University Higher School of Economics, Physics Department, ul. Staraya Basmannaya 21/4, korp. 5, 105066 Moscow, Russian Federation

E-mail: ^(*) gkogan@iki.rssi.ru, ^(†) mrkondratyev95@gmail.com

The thermodynamic properties of electron gas under the extreme conditions of high temperature, high matter density, and/or a strong magnetic field largely determine the behavior of matter in upper layers of neutron stars and accretion columns of magnetized neutron stars in binary systems. A strong magnetic field in these objects makes the motion of electrons across the field essentially quantum. The possible electron degeneracy and relativism of electrons are also important. When studying accretion onto a magnetar in a binary system, the prolific generation of electron–positron pairs in the quantizing magnetic field should also be taken into account. We consider in detail the thermodynamic properties of a gas of free electrons in strong magnetic fields, taking into account their relativism and degeneracy, as well as the equilibrium creation of electron–positron pairs in a high-temperature plasma in the presence of a quantizing magnetic field.

Keywords: Fermi gas, magnetic field, Landau levels, electron-positron pairs, neutron stars

PACS numbers: 05.30.Fk, 71.70.Di, 97.60.Jd

Bibliography — 99 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **191** (5) 543–557 (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.08.038827>

Received 1 May 2020, revised 12 August 2020

Physics–Uspekhi **64** (5) (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.08.038827>