Математические заметки

Том 109 выпуск 3 март 2021

УДК 517.9+513.8

О несущих многообразиях многомерных диффеоморфизмов Морса–Смейла с двумя седловыми периодическими точками

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В статье описывается топологическая структура замкнутых многообразий размерности не меньшей четырех, на которых существуют диффеоморфизмы Морса–Смейла такие, что их неблуждающее множество содержит произвольное число стоковых периодических точек, произвольное число источниковых периодических точек и две седловые периодические точки. Приводится также описание несущих многообразий диффеоморфизмов Морса–Смейла с меньшим числом седловых периодических точек.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса–Смейла, неблуждающее множество, топологическая структура.

DOI: https://doi.org/???

Введение. Системы Морса–Смейла – структурно устойчивые динамические системы с нулевой топологической энтропией. Замечательным свойством этих систем является глубокая взаимосвязь между динамическими свойствами и топологической структурой несущих многообразий (см. сравнительно недавний обзор [1]), и то, что они существуют на любых (гладких) замкнутых многообразиях [2], [3]. В данной статье мы ограничимся рассмотрением систем Морса–Смейла с дискретным временем. Динамическая система с дискретным временем порождается диффеоморфизмом несущего многообразия, и такая система представляет собой совокупность итераций порождающего диффеоморфизма. В случае систем Морса–Смейла этот порождающий диффеоморфизм называется диффеоморфизмом Морса–Смейла (см. точные определения в следующем разделе).

Ясно, что структура несущего многообразия не изменится, если вместо исходного диффеоморфизма рассматриваются его итерации. Поэтому, не уменьшая общности, можно (и мы будем) рассматривать диффеоморфизмы Морса–Смейла, у которых

Работа выполнена при поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931), кроме доказательства теоремы 2, выполненного при поддержке РНФ (грант 17-11-01041).

периодические точки являются неподвижными точками. Через $MS(M^n; a, b, c)$ обозначим множество диффеоморфизмов Морса–Смейла замкнутого гладкого n-мерного многообразия M^n такое, что неблуждающее множество $NW(f)$ любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n; a, b, c)$ состоит из a стоковых неподвижных точек (стоков), b источниковых неподвижных точек (источников) и c седловых неподвижных точек (седел). Смейл [2] доказал, что всегда $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$. В размерности $n = 1$ всегда $c = 0$ и $a = b$, а несущее многообразие является окружностью $M^1 = S^1$. Для размерностей $n = 2, 3$ имеется большое число работ о взаимосвязи топологической структуры несущих многообразиях с динамикой диффеоморфизмов Морса–Смейла (см. обзоры [1], [4] и книгу [5] с обширной библиографией). Поэтому далее мы рассматриваем несущие многообразия размерности $n \geqslant 4$ (см. замечание в конце статьи).

Известно, что если $c = 0$, то $a = b = 1$ и несущее многообразие M^n является n-мерной сферой $\mathbb{S}^n$ [6]. Имеется описание топологической структуры несущего многообразия M^n и троек (a, b, c) в случае $c = 1$, см. предложение 4. Настоящая работа посвящена описанию топологической структуры замкнутых несущих многообразий M^n, $n \geqslant 4$, и троек (a, b, c) в случае $c = 2$.

Сначала рассматривается случай, когда оба седла диффеоморфизма $f \in MS(M^n; a, b, 2)$ являются седлами коразмерности один (т.е. одно из инвариантных многообразий седел одномерно). В следующей теореме через $N \otimes S^1$ обозначено тотальное пространство локально тривиального расслоения над S^1 со слоем N. Многообразие $N \otimes S^1$ получается из $N \times [0; 1]$ отождествлением $N \times \{0\}$ с $N \times \{1\}$ посредством некоторого диффеоморфизма $\tau \colon N \to N$. Везде далее $\mathbb{D}^k$ означает k-мерный замкнутый диск, а $\mathbb{S}^k$ – k-мерную сферу.

Теорема 1. *Пусть оба седла диффеоморфизма $f \in MS(M^n; a, b, 2)$, $n \geqslant 4$, являются седлами коразмерности один. Тогда выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *диффеоморфизм $f \in MS(M^n; 1, 1, 2)$ и M^n гомеоморфно объединению двух экземпляров $\mathbb{D}^{n-1} \otimes S^1$*;
2) $f \in MS(\mathbb{S}^n, 2, 2, 2) \cup MS(\mathbb{S}^n, 1, 3, 2) \cup MS(\mathbb{S}^n, 3, 1, 2)$.

В случае, когда имеется только одно седло коразмерности один, доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть одно седло диффеоморфизма $f \in MS(M^n; a, b, 2)$, $n \geqslant 4$, является седлом коразмерности один, а второе седло не является седлом коразмерности один. Если замыкания одномерных сепаратрис седла коразмерности один образуют сегмент, то*

1) *размерность несущего многообразия может принимать только одно из следующих значений $n \in \{4, 8, 16\}$*;
2) $f \in MS(M^n; 1, 2, 2) \cup MS(M^n; 2, 1, 2)$;
3) *многообразие M^n является дизъюнктивным объединением открытого шара $\mathbb{B}^n$ и $n/2$-мерной сферы $S^{n/2}$, топологически вложенной в M^n, причем если $n \in \{8, 16\}$, то $S^{n/2}$ локально плоско вложена в M^n.*

Для случая, когда нет седел коразмерности один, мы доказываем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть диффеоморфизм $f \in MS(M^n; a, b, 2)$, $n \geqslant 4$, не имеет седел коразмерности один. Тогда $f \in MS(M^n; 1, 1, 2)$ и многообразие M^n односвязное.*

Замечание 1. Все множества диффеоморфизмов Морса–Смейла в выше приведенных утверждениях, непустые:

$$MS(\mathbb{D}^{n-1}\otimes S^1\cup\mathbb{D}^{n-1}\otimes S^1;1,1,2)\neq\varnothing,\qquad MS(\mathbb{S}^n,2,2,2)\neq\varnothing,$$
$$MS(\mathbb{S}^n,1,3,2)\neq\varnothing,\qquad MS(\mathbb{S}^n,3,1,2)\neq\varnothing,\qquad MS(M^n;1,2,2)\neq\varnothing,$$
$$MS(M^n;2,1,2)\neq\varnothing,\qquad MS(\mathbb{S}^n,1,1,2)\neq\varnothing.$$

Структура статьи следующая. В п. 1 приводятся основные определения и вспомогательные предложения, необходимые для доказательства основных результатов. Все основные результаты доказываются в п. 2.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $f\colon M^n\to M^n$ – диффеоморфизм замкнутого гладкого n-мерного ($n\geqslant 1$) многообразия M^n. Напомним, что точка $x\in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N_0 найдется $n_0\in\mathbb{Z}$ такое, что

$$|n_0|\geqslant N_0 \qquad \text{и} \qquad f^{n_0}(U)\cap U\neq\varnothing.$$

Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$. Очевидно, периодическая точка является неблуждающей. Периодическая точка $x_0\in\operatorname{Per}(f)$, $f^q(x_0)=x_0$, называется *гиперболической*, если производная

$$Df^q(x_0)\colon T_{x_0}M^n\to T_{x_0}M^n,$$

рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя, не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Для гиперболической точки x_0 существуют так называемые устойчивое $W^s(x_0)$ и неустойчивое $W^u(x_0)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y\in M^n$ таких, что

$$\varrho_M(f^{qk}x_0,f^{qk}y)\to 0 \qquad \text{при}\quad k\to+\infty\quad \text{и}\quad k\to-\infty\quad \text{соответственно},$$

где ϱ_M – это метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(x_0)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1}. Известно, что $W^s(x_0)$ и $W^u(x_0)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^s(x_0)}$ и $\mathbb{R}^{\dim W^u(x_0)}$ соответственно, и являются инъективными погружениями последних в M^n

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если $NW(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа периодических точек и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y\in NW(f)$.

Пусть $f\colon M^n\to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Неподвижная гиперболическая точка $p\in NW(f)$ называется *узлом*, если либо $\dim W^s(p)=n$ (в этом случае p является *стоком*), либо $\dim W^u(p)=n$ (в этом случае p является *источником*). Гиперболическая неподвижная точка $\sigma\in NW(f)$ называется *седлом*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Если $\dim W^u(\sigma)=i$, то каждую компоненту множества $W^u(\sigma)\setminus\{\sigma\}$ будем называть *i-мерной неустойчивой сепаратрисой*, а каждую компоненту множества $W^s(\sigma)\setminus\{\sigma\}$ будем называть *$(n-i)$-мерной устойчивой сепаратрисой.* Седло $\sigma\in NW(f)$ называется *седлом коразмерности один*, если одна из его сепаратрис одномерная. Из того, что точка разбивает одномерное евклидово пространство, но не разбивает евклидово пространство большей размерности следует, что одномерное (устойчивое или неустойчивое) многообразие седловой периодической точки состоит из самой седловой точки и двух одномерных сепаратрис, а i-мерное многообразие при $i \geqslant 2$ состоит из седловой точки и одной i-мерной сепаратрисы.

Пусть $W^\tau(\sigma)$ – инвариантное многообразие седла σ размерности $i \geqslant 1$, где τ означает символ u или s. Если $i \geqslant 2$, то обозначим через $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ сепаратрису седла σ, принадлежащую $W^\tau(\sigma)$. Если $i \geqslant 2$ (т.е. инвариантное многообразие $W^\tau(\sigma)$ одномерное), то $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ означает одну из двух сепаратрис, которые при необходимости мы будем обозначать через $W^\tau_{\mathrm{sep},1}(\sigma)$, $W^\tau_{\mathrm{sep},2}(\sigma)$. Будем говорить, что сепаратриса $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ *не имеет гетероклинических пересечений*, если она не пересекается с другими сепаратрисами. Нам понадобятся следующие известные утверждения (см. [1]).

Предложение 1. *Пусть $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ – d-мерная сепаратриса седла σ диффеоморфизма Морса–Смейла, не имеющая гетероклинических пересечений. Тогда сепаратриса $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ принадлежит области притяжения $W^s(p)$ (соответственно отталкивания $W^u(p)$) ровно одной стоковой (соответственно источниковой) периодической точки p.*

Более того, если $d \geqslant 2$, то топологическое замыкание $\operatorname{clos} W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ сепаратрисы $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ равно
$$\operatorname{clos} W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma) = W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma) \cup \{p\}$$
и является топологически вложенной d-мерной сферой.

Если $d = 1$ и каждая одномерная сепаратриса $W^{u(s)}_{\mathrm{sep,j}}(\sigma)$, $j = 1, 2$, принадлежит области притяжения $W^s(p_j)$ (соответственно отталкивания $W^u(p_j)$) ровно одной стоковой (соответственно источниковой) периодической точки p_j, то топологическое замыкание $\operatorname{clos}(W^{u(s)}_{\mathrm{sep},1}(\sigma) \cup W^{u(s)}_{\mathrm{sep},2}(\sigma))$ есть либо топологически вложенный замкнутый сегмент при $p_1 \neq p_2$, либо топологически вложенная окружность при $p_1 = p_2$.

Предложение 2. *Пусть σ – седло коразмерности один диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, $n \geqslant 4$, и предположим, что обе одномерныесепаратрисы $\mathrm{Sep}_1(\sigma)$, $\mathrm{Sep}_2(\sigma)$ седла σ не имеют гетероклинических пересечений.*

Если $\operatorname{clos}(\mathrm{Sep}_1(\sigma) \cup \mathrm{Sep}_2(\sigma))$ есть топологически вложенная окружность S_0, то S_0 имеет замкнутую окрестность T гомеоморфную $\mathbb{D}^{n-1} \otimes S^1$ и содержащую только две неподвижные точки: седло sigma *и некоторый узел n_0.*

Более того, если n_0 – сток, то окрестность T вперед-инвариантна, а если n_0 – источник, то T назад-инвариантна.

Предложение 3. *Пусть σ – седло коразмерности один диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, $n \geqslant 4$, и предположим, что обе одномерные сепаратрисы $\mathrm{Sep}_1(\sigma)$, $\mathrm{Sep}_2(\sigma)$ седла σ не имеют гетероклинических пересечений.*

Если $\operatorname{clos}(\mathrm{Sep}_1(\sigma) \cup \mathrm{Sep}_2(\sigma))$ есть топологически вложенный сегмент I, то I имеет замкнутую окрестность B гомеоморфную n-мерному диску и содержащую только три неподвижные точки: седло σ и два узла n_1, n_2.

Более того, если n_1, n_2 – стоки, то окрестность B вперед-инвариантна, а если n_1, n_2 – источники, то B назад-инвариантна.

Для случая, когда диффеоморфизм Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, $n \geqslant 4$, имеет ровно одно седло, т.е. $f \in MS(M^n; a, b, 1)$, мы для ссылок приводим следующее утверждение, которое можно извлечь из работ [7], [8].

Предложение 4. *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого n-мерного многообразия M^n, $n \geqslant 4$, и предположим, что неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из a стоков $\omega_1, \dots, \omega_a$, b источников $\alpha_1, \dots, \alpha_b$ и одного седла σ. Тогда имеет место один из следующих случаев*:

1) *$a + b = 3$, т.е. $a = 1$, $b = 2$ или $a = 2$, $b = 1$, и многообразие M^n является сферой $\mathbb{S}^n$; более того, в случае $a = 1$, $b = 2$ неустойчивый индекс Морса седла σ равен $(n-1)$, а в случае $a = 2$, $b = 1$ неустойчивый индекс Морса седла σ равен единице*;
2) *$a = b = 1$, и размерность многообразия принимает одно из следующих значений $n \in \{4, 8, 16\}$; более того, M^n является дизъюнктивным объединением открытого шара $\mathbb{B}^n$ и $n/2$-мерной сферы $S^{n/2}$, топологически вложенной в M^n, причем если $n \in \{8, 16\}$, то $S^{n/2}$ локально плоско вложена в M^n; кроме этого, седло σ имеет $n/2$-мерные сепаратрисы.*

2. Доказательства основных результатов. В этом разделе доказываются основные результаты статьи. Мы будем использовать следующую операцию разрезания многообразия M^n вдоль подмногообразия коразмерности один. Пусть $N^{n-1} \subset M^n$ – $(n-1)$-мерное подмногообразие. Под *разрезанием* M^n вдоль N^{n-1} понимается удаление из M^n достаточно малой окрестности U подмногообразия N^{n-1}, гомеоморфной $N^{n-1} \times (0;1)$, так что получается (возможно, несвязное) многообразие $\operatorname{clos}(M^n \setminus U)$ с двумя дополнительными граничными компонентами, каждая из которых гомеоморфна N^{n-1}. Строгое обоснование возможности такой операции см. в [9].

Доказательство теоремы 1. Сперва рассмотрим ситуацию, когда сепаратрисы коразмерности один обоих седел не пересекаются с одномерными сепаратрисами. Пусть $\operatorname{Sep}_1(\sigma_i)$, $\operatorname{Sep}_2(\sigma_i)$ – одномерные сепаратрисы седла σ_i, $i = 1, 2$. Согласно предположению,

$$
\begin{gathered}
(\operatorname{Sep}_1(\sigma_1) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_1)) \cap (W^s(\sigma_2) \cup W^u(\sigma_2)) = \varnothing, \\
(\operatorname{Sep}_1(\sigma_2) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_2)) \cap (W^s(\sigma_1) \cup W^u(\sigma_1)) = \varnothing.
\end{gathered}
$$

Согласно предложению 1, имеются следующие три возможности

(a) $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_1) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_1)) = S_1$ и $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_2) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_2)) = S_2$ – окружности;
(b) $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_1) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_1))$ и $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_2) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_2))$ суть сегменты;
(c) $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_1) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_1))$ – окружность, а $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_2) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_2))$ – сегмент.

В случае (a), в силу предложения 2, окружность S_i имеет окрестность T_i, гомеоморфную $\mathbb{D}^{n-1} \otimes S^1$, $i = 1, 2$. Покажем, что одна из окрестностей T_i вперед-инвариантна, а другая окрестность – назад-инвариантна.

Предположим противное. Для определенности предположим, что обе окрестности T_1 , T_2 назад-инвариантны, т.е. $f^{-1}(T_i) \subset T_i$, $i = 1, 2$. Так как диффеоморфизм f Морса–Смейла имеет только две устойчивые сепаратрисы $\operatorname{Sep}_1(\sigma_i)$, $\operatorname{Sep}_2(\sigma_i)$, $i = 1, 2$, принадлежащие $T_1 \cup T_2$, то в множестве $M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$ нет источников. Из связности множества $M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$ вытекает, что в $M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$ имеется ровно один сток. Следовательно, f имеет три узла. Поскольку неустойчивые многообразия $W^u(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ не пересекаются, то в силу [10], число узлов диффеоморфизма f должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что одна из окрестностей T_i вперед-инвариантна, а другая окрестность – назад-инвариантна.

Предположим для определенности, что окрестность T_1 назад-инвариантна, а окрестность T_2 вперед-инвариантна. Тогда T_1 содержит источник $\alpha \in S_1 \subset T_1$, а T_2 содержит сток $\omega \in S_2 \subset T_2$. Покажем, что в множестве $M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$ нет неподвижных точек диффеоморфизма f.

Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что имеется сток $\omega_0 \in M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$. Заметим, что поскольку инвариантное многообразие $W^u(\sigma_1)$ односвязно, его предельное множество $\mathrm{Lim}(W^u(\sigma_1))$ является связным множеством. По условию диффеоморфизм f имеет только два неустойчивых многообразия. Отсюда и включений $W^u(\sigma_2) \subset T_2$, $\omega_0 \in M^n \setminus (T_1 \cup T_2)$ следует включение $\omega_0 \in \mathrm{Lim}(W^u(\sigma_1))$. Так как $\mathrm{Lim}(W^u(\sigma_1))$ связно, то $\mathrm{Lim}(W^u(\sigma_1))$ не может содержать $W^u(\sigma_2) \cup \{\omega\} \subset T_2$. Следовательно,

$$W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) = \varnothing.$$

В силу предложения 1 объединение $W^u(\sigma_1) \cup \{\omega_0\} = S_0^{n-1}$ есть топологически вложенная $(n-1)$-мерная сфера, которую мы обозначим через S_0^{n-1}. Поскольку ее коразмерность строго больше двух, то S_0^{n-1} является локально плоско вложенной сферой [11], [12]. Она не разбивает многообразие M^n, так как окружность $\mathrm{clos}(\mathrm{Sep}_1(\sigma_1) \cup \mathrm{Sep}_2(\sigma_1))$ пересекает S_0^{n-1} трансверсально ровно в одной точке. Поэтому разрезание M^n вдоль S_0^{n-1} дает связное многообразие $\widehat{M}^n$ с двумя граничными компонентами M_1, M_2, каждая из которых гомеоморфна S_0^{n-1}. Заклеим M_1, M_2 n-мерными шарами B_1^n, B_2^n соответственно.

Тогда мы получим замкнутое многообразие $\widetilde{M}^n$. Поскольку в исходном многообразии M^n сфера S_0^{n-1} имела назад-инвариантную окрестность, то f можно продолжить на многообразие $\widetilde{M}^n$ до диффеоморфизма Морса–Смейла $\widetilde{f}\colon \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ с двумя стоками $\omega_i \in B_i^n$, $i = 1, 2$. Тогда неблуждающее множество диффеоморфизма $\widetilde{f}$ состоит из седла σ_2, источника α и, хотя бы трех стоков ω, ω_i, $i = 1, 2$, что противоречит предложению 4.

Таким образом,

$$NW(f) = \{\alpha\} \cup \{\omega\} \cup \{\sigma_1\} \cup \{\sigma_2\} \in T_1 \cup T_2.$$

Более того, множество $S_1 \subset T_1$ отталкивающее, а множество $S_2 \subset T_2$ – притягивающее. Так как ∂T_1 суть компакт, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^k(\partial T_1) \subset T_2$. Отсюда следует, что $f \in MS(M^n; 1, 1, 2)$, а многообразие M^n гомеоморфно объединению двух экземпляров $\mathbb{D}^{n-1} \otimes S^1$.

В случае (b) обозначим сегменты $\mathrm{clos}(\mathrm{Sep}_1(\sigma_1) \cup \mathrm{Sep}_2(\sigma_1))$, $\mathrm{clos}(\mathrm{Sep}_1(\sigma_2) \cup \mathrm{Sep}_2(\sigma_2))$ через I_1 и I_2 соответственно. Рассмотрим сначала случай, когда I_1 является отталкивающим множеством, а I_2 – притягивающим. Тогда имеются окрестности $U_i \supset I_i$, $i = 1, 2$, такие, что $U_1 \subset f(U_1)$ и $f(U_2) \subset U_2$. Поэтому в $U_1 \cup U_2$ можно модифицировать f так, чтобы получить диффеоморфизм Морса–Смейла $\widetilde{f}\colon M^n \to M^n$ такой, что $\widetilde{f}$ будет иметь один источник $\alpha_0 \in U_1$, один сток $\omega_0 \in U_2$, и $\widetilde{f}$ будет совпадать с f вне $U_1 \cup U_2$. Поэтому $\widetilde{f}$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла без седловых периодических точек. Следовательно, $\widetilde{f} \in MS(\mathbb{S}^n, 1, 1, 0)$ и $f \in MS(\mathbb{S}^n, 2, 2, 2)$.

Предположим теперь, что I_1 и I_2 являются отталкивающими множествами. Используя вышеприведенный метод удаления седел и предложение 4, можно показать, что $\widetilde{f} \in MS(\mathbb{S}^n, 1, 2, 1) \cup MS(\mathbb{S}^n, 2, 1, 1)$, и следовательно, $f \in MS(\mathbb{S}^n, 1, 3, 2) \cup MS(\mathbb{S}^n, 3, 1, 2)$.

Докажем, что случай (c) не реализуется. Предположим противное. Удалив седло σ_2, принадлежащее сегменту $\operatorname{clos}(\operatorname{Sep}_1(\sigma_2) \cup \operatorname{Sep}_2(\sigma_2))$, мы получим диффеоморфизм Морса–Смейла $\widetilde{f} \in MS(M^n; 1, 1, 1)$. Согласно предложению 4, обе сепаратрисы оставшегося седла σ_1 должны быть $n/2$-мерными. Это противоречит тому, что по условию σ_1 является седлом коразмерности один.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда сепаратриса коразмерности один одного из седел, скажем σ_1, пересекает одномерную сепаратрису другого седла σ_2. Покажем, что тогда $f \in MS(\mathbb{S}^n, 2, 2, 2)$. Будем для определенности считать, что одномерные сепаратрисы седел σ_i, $i = 1, 2$, являются устойчивыми сепаратрисами. Поскольку в графе Смейла периодические точки не образуют циклов, то

$$W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_1) = \varnothing.$$

Отсюда и предложения 1 следует, что $\operatorname{clos}(W^u(\sigma_2)) = S^{n-1}$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой, содержащей сток ω. Так как $n \geqslant 4$, то S^{n-1} является локально плоско вложенной $(n-1)$-мерной сферой [11], [12]. Разрезав M^n вдоль S^{n-1}, получим многообразие $\widehat{M}^n$ с двумя граничными компонентами M_1, M_2, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}^{n-1}$. Приклеив к M_1, M_2 n-мерные шары B_1^n, B_2^n соответственно, мы получим замкнутое многообразие $\widetilde{M}^n$. Поскольку S^{n-1} суть притягивающее множество, f можно продолжить на $\widetilde{M}^n$ так, чтобы получить диффеоморфизм Морса–Смейла $\widetilde{f}\colon \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ со стоками $\omega_i \in B_i^n$, $i = 1, 2$. Отметим, что диффеоморфизм $\widetilde{f}$ имеет только одно седло σ_1 и не имеет неподвижных точек σ_2, ω.

Если многообразие $\widetilde{M}^n$ связно, то неблуждающее множество $NW(\widetilde{f}\,)$ содержит только одно седло σ_1 с неустойчивым индексом Морса $(n-1)$ и, по крайней мере, два стока ω_i, $i = 1, 2$. Это противоречит предложению 4. Если многообразие $\widetilde{M}^n$ несвязно, то одна из его компонент $\widetilde{M}_2^n$ не содержит седел. Следовательно, $\widetilde{M}_2^n = \mathbb{S}^n$, а неблуждающее множество $NW(\widetilde{f}\,) \cap \widetilde{M}_2^n$ в $\widetilde{M}_2^n$ состоит из стока и источника. Отсюда вытекает, что $M^n = \widetilde{M}_1^n \sharp \mathbb{S}^n$ гомеоморфно $\widetilde{M}_1^n$, и $NW(\widetilde{f}\,)$ содержит только один источник. Из предложения 4 следует, что $\widetilde{f} \in MS(\mathbb{S}^n; 1, 2, 1)$. Поэтому $f \in MS(\mathbb{S}^n, 2, 2, 2)$.

Доказательство теоремы 2. Для определенности будем считать, что f имеет седло σ коразмерности один с устойчивыми одномерными сепаратрисами и седло σ_0, которое не является седлом коразмерности один. Так как инвариантные многообразия седловых периодических точек диффеоморфизма Морса–Смейла должны пересекаться трансверсально, одномерные сепаратрисы седла σ не имеют гетероклинических пересечений. Согласно предложению 3 топологическое замыкание $\operatorname{clos} W^s(\sigma)$ является сегментом I, на концах которого расположены источники α_1, α_2.

Более того, I имеет замкнутую назад-инвариантную окрестность B гомеоморфную n-мерному диску, т.е. $\operatorname{int} f(B) \subset B$. Поэтому в B можно модифицировать f так, чтобы получить диффеоморфизм Морса–Смейла $\widetilde{f}\colon M^n \to M^n$ такой, что $\widetilde{f}$ будет иметь в B один источник $\alpha_0 \in B$, и $\widetilde{f}$ будет совпадать с f вне B. Другими словами, по сравнению с f, диффеоморфизм $\widetilde{f}$ имеет на один источник и на одно седло меньше. Поскольку $\widetilde{f}$ имеет ровно одно седло, коразмерность которого больше единицы, в силу предложения 4 размерность многообразия M^n может принимать только одно из следующих значений $n \in \{4, 8, 16\}$, и M^n является дизъюнктивным объединением открытого шара $\mathbb{B}^n$ и $n/2$-мерной сферы $S^{n/2}$ причем если $n \in \{8, 16\}$, то $S^{n/2}$ локально плоско вложена в M^n; кроме этого, седло σ_0 имеет $n/2$-мерные сепаратрисы. Более того, так как $\widetilde{f} \in MS(M^n; 1, 1, 1)$, то $f \in MS(M^n; 1, 2, 2)$.

Ясно, что если предположить, что седло σ коразмерности один имеет неустойчивые одномерные сепаратрисы, то получим $f \in MS(M^n; 2, 1, 2)$.

Доказательство теоремы 3. Хорошо известно, что если диффеоморфизм Морса–Смейла не содержит седел коразмерности один, то он является полярным диффеоморфизмом, т.е. $a = b = 1$ [1], [6]. Осталось доказать, что многообразие M^n односвязное. Рассмотрим отображение $\gamma \colon S^1 \to M^n$, представляющее элемент фундаментальной группы $\pi_1(M^n)$. Не уменьшая общности, можно считать γ гладким вложением [13]. Более того, деформацией отображения γ можно добиться того, чтобы образ $\gamma(S^1)$ не содержал неподвижных точек диффеоморфизма f.

Поскольку инвариантные многообразия седел являются образами гладких иммерсий евклидовых пространств, и их конечное число, то последовательно деформируя γ, можно добиться того, чтобы образ $\gamma(S^1)$ пересекался трансверсально со всеми инвариантными многообразиями седел. Действительно, сперва трансверсальность пересечения можно получить с сепаратрисами, которые не имеют гетероклинических пересечений, поскольку вне некоторых окрестностей неподвижных точек эти сепаратрисы являются вложениями компактных областей евклидовых пространств [13]. Вне некоторых окрестностей этих сепаратрис, остальные сепаратрисы (с гетероклиническими пересечениями) также являются вложениями компактных областей евклидовых пространств. Таким образом, можно считать, что $\gamma(S^1)$ трансверсально пересекает все инвариантные многообразия седел.

По условию коразмерность всех инвариантных многообразий седел больше единицы. Так как $\gamma(S^1)$ суть окружность, трансверсальность пересечения $\gamma(S^1)$ с инвариантными многообразиями седел означает, что $\gamma(S^1)$ принадлежит области притяжения или отталкивания стока или источника соответственно. Поскольку такая область гомеоморфна открытому шару, кривая $\gamma(S^1)$ стягиваема в точку. Это влечет односвязность многообразия M^n.

Замечание 2. Анализ доказательства теоремы 3 показывает, что ее утверждение справедливо для произвольного числа седел. Мы благодарим рецензента, обратившего на это наше внимание.

Замечание 3. Для удобства читателя приведем список замкнутых двумерных и трехмерных многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла с одним и двумя седлами. Единственными двумерными многообразиями, допускающими диффеоморфизмы Морса–Смейла с одним седлом являются сфера и прективная плоскость. Единственным трехмерным многообразием, допускающим диффеоморфизмы Морса–Смейла с одним седлом является сфера. Единственными двумерными многообразиями, допускающими диффеоморфизмы Морса–Смейла с двумя седлами являются сфера, тор, бутылка Клейна и прективная плоскость. Трехмерными многообразиями, допускающими диффеоморфизмы Морса–Смейла с двумя седлами являются линзы, сфера, прямое и косое произведение двумерной сферы на окружность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *УМН*, **74**:1 (445) (2019), 41–116.

[2] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

[3] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.

[4] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Глобальная динамика систем Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **261**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2008, 115–139.

[5] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск, 2011.

[6] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Тр. МИАН, **271**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 111–133.

[7] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.

[8] V. Medvedev, E. Zhuzhoma, “Morse–Smale systems with few non-wandering points”, *Topology Appl.*, **160**:3 (2013), 498–507.

[9] R. J. Daverman, G. A. Venema, *Embeddings in Manifolds*, Grad. Stud. Math., **106**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[10] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством”, *Матем. тр.*, **21**:2 (2018), 163–180.

[11] А. В. Чернавский, “Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток”, *Докл. АН СССР*, **167**:3 (1966), 528–530.

[12] J. C. Cantrell, “Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 716–718.

[13] Л. С. Понрягин, *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий*, Наука, М., 1976.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

В. С. Медведев
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: medvedev-1942@mail.ru

Поступило
11.03.2020
После доработки
01.07.2020
Принято к публикации
05.10.2020