УДК 517.538

Е. В. Ноздринова, О. В. Починка

О бифуркациях, меняющих гомотопический тип замыкания инвариантного седлового многообразия диффеоморфизма поверхности

Из гомотопической теории поверхностей хорошо известно, что объемлющая изотопия не меняет гомотопический тип замкнутой кривой. На языке динамических систем, это означает, что любая дуга в пространстве диффеоморфизмов, соединяющая изотопные диффеоморфизмы с инвариантными замкнутыми кривыми из разных гомотопических классов, обязательно претерпевает бифуркации. В настоящей работе описан сценарий, меняющий гомотопический тип замыкания инвариантного многообразия седловой точки полярного диффеоморфизма на двумерном торе на любой заданный гомотопически нетривиальный тип. При этом построенная дуга является устойчивой в пространстве диффеоморфизмов и не меняет класс топологической сопряженности исходного диффеоморфизма. Предложенные в работе идеи построения такой дуги для двумерного тора могут быть естественным образом обобщены на поверхности большего рода.

Ключевые слова: устойчивая дуга, бифуркация седло-узел, полярные диффеоморфизмы

§ 1. Введение и формулировка результата

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса-Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [29] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [22] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [24] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса-Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [8] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую [23].

Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены

Исследование динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041), локальные изменения динамики дугами без бифуркаций выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», построение дуги выполнено в Международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ при поддержке Правительства Российской Федерации (договор № 075-15-2019-1931).

устойчивой дугой (см. точное определение устойчивой дуги в разделе 2). Препятствия появляются уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1, которые соединяются устойчивой дугой только в случае совпадения чисел вращения [25].

Начиная с размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами. Они связаны с наличием периодических точек [4], [27], гетероклинических пересечений [17], диких вложений сепаратрис [7] и др. На шестимерной сфере известны примеры диффеоморфизмов источник-сток, не соединяющихся никакой гладкой дугой [6], что, собственно, является следствием существования различных гладких структур на сфере размерности 7. В размерности два и три нетривиальный факт существования пути без бифуркаций (дуги, состоящей из попарно топологически сопряженных структурно устойчивых диффеоморфизмов) между двумя системами источник-сток установлен в работах [6], [26].

Естественным обобщением систем источник-сток являются *полярные диффеоморфизмы* – диффеоморфизмы Морса-Смейла, неблуждающее множество Ω_f которых содержит ровно две узловые точки, а именно одну стоковую и одну источниковую. Из теории Морса следует, что такие диффеоморфизмы существуют на любых многообразиях. Например те, которые являются сдвигами на единицу времени градиентного потока функции Морса с одним минимумом и одним максимумом. Деформация таких потоков тесно связана с деформациями их функций Морса. Однако, полярные диффеоморфизмы типично не являются сдвигами на единицу времени потоков Морса-Смейла, поэтому прямой связи между деформациями диффеоморфизмов и деформациями функции Морса нет. Более того, даже в случае включаемости диффеоморфизма в поток, возникающие стандартные бифуркации (например гетероклиническое касание) при деформации функций Морса на уровне дискретизации не являются типичными для диффеоморфизмов. Поэтому построение устойчивой дуги между диффеоморфизмами является абсолютно самостоятельной задачей.

В настоящей работе рассматривается класс G полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации. В разделе 3 устанавливается, что любой диффеоморфизм $f \in G$ имеет в точности две седловые точки и изотопен тождественному. Кроме того, все диффеоморфизмы рассматриваемого класса попарно топологически сопряжены (см., например, [5], [11]). При этом замыкания устойчивых (неустойчивых) многообразий седловых точек разных диффеоморфизмов могут принадлежать любым гомотопическим классам замкнутых кривых на торе (см. рисунок 1). Откуда следует, что в общем случае не существует дуги без бифуркаций, соединяющей два диффеоморфизма рассматриваемого класса.

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Любые диффеоморфизмы $f, f' \in G$ соединяются устойчивой дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.*

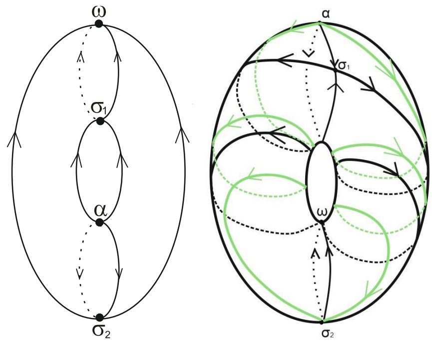


Рис. 1. Фазовый портрет диффеоморфизмов класса G

§ 2. Устойчивые дуги в пространстве диффеоморфизмов

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов многообразия M (*дугу*) $\varphi_t : M \to M, t \in [0,1]$. Дуга φ_t называется *гладкой*, если гладким является отображение $F : M \times [0,1] \to M$, заданное формулой $F(x,t) = \varphi_t(x)$.

Гладкая дуга φ_t называется *произведением гладких дуг* φ_t^1 *и* φ_t^2 *таких, что* $\varphi_1^1 = \varphi_0^2$, если $\varphi_t = \begin{cases} \varphi^1_{2\tau(t)}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi^2_{2\tau(t)-1}, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $\tau : [0,1] \to [0,1]$ — гладкая монотонная функция такая, что $\tau(t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ и $\tau(t) = 1$ для $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$. Мы будем писать $\varphi_t = \varphi_t^1 * \varphi_t^2$.

Согласно [23], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги φ_t, φ_t' называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0,1] \to [0,1]$, $H_t : M \to M$ такие, что $H_t \varphi_t = \varphi'_{h(t)} H_t, t \in [0,1]$ и H_t непрерывно зависит от t.

В работе [23] также установлено, что дуга $\{\varphi_t\}$, состоящая из диффеоморфизмов с конечным предельным множеством, является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек, $\varphi_{b_i}, i = 1, \ldots, q$ таких, что:

1) предельное множество диффеоморфизма φ_{b_i} содержит единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом;

2) диффеоморфизм φ_{b_i} не имеет циклов;

3) инвариантные многообразия всех периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекатся трансверсально;

4) переход через φ_{b_i} является типично проходящей бифуркацией седло-узел или удвоения периода, при этом седло-узловая точка является некритической.

Напомним определение типично проходящей бифуркации для случая неподвижного седло-узла.

Говорят, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ *проходит типично через седло-узловую бифуркацию* φ_{b_i} (см. рисуноки 2), если в некоторой окрестности негиперболической

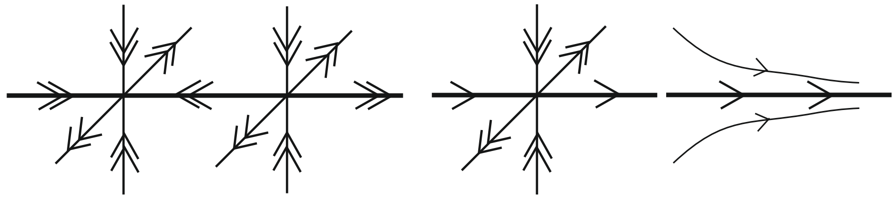


Рис. 2. Седло-узловая бифуркация

точки (p,b_i) дуга φ_t сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1,x_2,\dots,x_{1+n_u},x_{2+n_u},\dots,x_n)=$$

$$\left(x_1+\frac{{x_1}^2}{2}+\tilde{t},\pm 2x_2,\dots,\pm 2x_{1+n_u},\frac{\pm x_{2+n_u}}{2},\dots,\frac{\pm x_n}{2}\right),$$

где $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $|x_i|<1/2$, $|\tilde{t}|<1/10$.

В локальных координатах $(x_1,\dots,x_n,\tilde{t})$ бифуркация происходит в момент времени $\tilde{t}=0$ и начало координат $O\in\mathbb{R}^n$ является седло-узловой точкой. При этом ось Ox_1 является *центральным многообразием* W^c_O, полупространство $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1\geqslant 0, x_{2+n_u}=\dots=x_n=0\}$ является *неустойчивым многообразием* W^u_O, полупространство $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1\leqslant 0, x_2=\dots=x_{1+n_u}=0\}$ является *устойчивым многообразием* W^s_O точки O.

Если p — седло-узловая точка диффеоморфизма φ_{b_i}, то на устойчивом многообразии W^s_p точки p существует единственное φ_{b_i}-инвариантное слоение F^{ss}_p с гладкими слоями такими, что ∂W^s_p является слоем этого слоения [15]. F^{ss}_p называется *сильно устойчивым слоением* (см. рисунок 3). Аналогичное *сильно неустойчивое слоение* обозначается F^{uu}_p. Точка p называется *s-критической*, если существует некоторая гиперболическая периодическая точка q такая, что W^u_q пересекает некоторый слой слоения F^{ss}_p не трансверсально; *u-критичность* определяется аналогично. Точка p называется

- *полукритической*, если она является либо s- либо u-критической;
- *бикритической*, если она является s- и u-критической;
- *некритической*, если она не является полукритической[1].

§ 3. Динамика диффеоморфизмов класса G

В настоящем разделе устанавливаются основные динамические свойства диффеоморфизмов из класса G.

Напомним, что G – класс полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации.

Диффеоморфизм f является *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются.

[1]Впервые эффект неустойчивости дуги в окрестности критического седло-узла был открыт в 1974 г. В. Афраимовичем и Л. Шильниковым [1], [2]. Существование инвариантных слоений F^{ss}_p, F^{uu}_p ранее также было доказано в работе В. Лукьянова и Л. Шильникова [16].

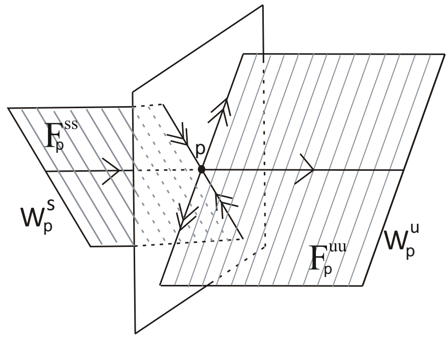


Рис. 3. Сильно устойчивое и неустойчивое слоения седло-узловой точки

Зафиксируем систему образующих фундаментальной группы тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$:

$$a = \mathbb{S}^1 \times \{0\} =< 1, 0 >; \ b = \{0\} \times \mathbb{S}^1 =< 0, 1 > .$$

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* $\widehat{L} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм, определенный матрицей $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, принадлежащей множеству $GL(2, \mathbb{Z})$ *унимодулярных целочисленных матриц* – матриц с определителем ± 1. То есть

$$\widehat{L}(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \pmod 1.$$

Теорема 2. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ обладает следующими свойствами:*

1. *Неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит в точности из четырех неподвижных гиперболических точек: стока ω_f, источника α_f и седел σ_f^1, σ_f^2, замыкания инвариантных многообразий которых являются замкнутыми кривыми:*

$$c_f^{s1} = cl\, W^s_{\sigma_f^1} = W^s_{\sigma_f^1} \cup \alpha_f, \ c_f^{u1} = cl\, W^u_{\sigma_f^1} = W^u_{\sigma_f^1} \cup \omega_f,$$

$$c_f^{s2} = cl\, W^s_{\sigma_f^2} = W^s_{\sigma_f^2} \cup \alpha_f, \ c_f^{u2} = cl\, W^u_{\sigma_f^2} = W^u_{\sigma_f^2} \cup \omega_f.$$

2. *Существует единственный выбор нумерации седловых точек σ_f^1, σ_f^2 и ориентации замыканий их инвариантных многообразий такой, что кривые c_f^{s1}, c_f^{u2} имеют гомотопический тип $< \mu_f^1, \nu_f^1 >$ и кривые c_f^{s2}, c_f^{u1} имеют гомотопический тип $< \mu_f^2, \nu_f^2 >$ в базисе a, b, при этом $J_f = \begin{pmatrix} \mu_f^1 & \mu_f^2 \\ \nu_f^1 & \nu_f^2 \end{pmatrix}$ является унимодулярной матрицей со следующими свойствами:*
   a) $\mu_f^1 \geqslant \mu_f^2 \geqslant 0$,
   b) $\nu_f^1 > \nu_f^2$, если $\mu_f^1 = \mu_f^2$,
   c) $\nu_f^2 = 1$, если $\mu_f^2 = 0$.
3. *Диффеоморфизм f изотопен тождественному отображению.*

Доказательство. Пусть $f \in G$. Докажем последовательно все пункты теоремы.

1. Обозначим через k^0_f, k^1_f, k^2_f число стоков, седел и источников, соответственно, диффеоморфизма f. Согласно [30] на торе $\mathbb{T}^2$ существует функция Морса, множество критических точек которой совпадает с множеством Ω_f и индексы критических точек совпадают с размерностями неустойчивых многообразий неблуждающих точек диффеоморфизма f. Тогда из неравенств Морса (см., например, [20]) следует, что

$$k^0_f - k^1_f + k^2_f = 0.$$

Поскольку диффеоморфизм f является полярным, то $k^0_f = k^2_f = 1$ и, следовательно $k^1_f = 2$. Таким образом, неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит в точности из четырех неподвижных гиперболических точек: стока ω_f, источника α_f и седел σ^1_f, σ^2_f.

Так как инвариантные многообразия различных седловых точек диффеоморфизма f не пересекаются, то, согласно [13; предложение 2.1.3],

$$cl(W^u_{\sigma^1_f}) \setminus W^u_{\sigma^1_f} = cl(W^u_{\sigma^2_f}) \setminus W^u_{\sigma^2_f} = \omega_f,$$

$$cl(W^s_{\sigma^1_f}) \setminus W^s_{\sigma^1_f} = cl(W^s_{\sigma^2_f}) \setminus W^s_{\sigma^2_f} = \alpha_f$$

и множества $c^{u1}_f = cl\, W^u_{\sigma^1_f},\ c^{s1}_f = cl\, W^s_{\sigma^1_f},\ c^{u2}_f = cl\, W^u_{\sigma^2_f},\ c^{s2}_f = cl\, W^s_{\sigma^2_f}$ гомеоморфны окружностям.

2. Обозначим через $< \mu^1_f, \nu^1_f >$, $< \mu^2_f, \nu^2_f >$ гомотопические типы ориентированных кривых c^{s1}_f, c^{u1}_f, соответственно, в базисе a, b. Положим $J_f = \begin{pmatrix} \mu^1_f & \mu^2_f \\ \nu^1_f & \nu^2_f \end{pmatrix}$. Из предыдущего пункта следует, что замкнутые кривые c^{s1}_f, c^{u1}_2 имеют единственную точку трансверсального пересечения σ^1_f. Тогда индекс пересечения этих кривых по модулю равен единице. Поскольку этот индекс совпадает с определителем матрицы J_f (см., например, [31; упр.7, стр. 28]), то матрица J_f является унимодулярной. Таким образом, кривые c^{s1}_f, c^{u1}_f не гомотопны нулю. Тогда, не уменьшая общности будем считать, что ориентация на кривых была выбрана так, что $\mu^i_f \geqslant 0$ и $\nu^i_f = 1$, если $\mu^i_f = 0$ (эти условия единственным образом ориентируют кривые).

Поскольку диффеоморфизм f является градиентно-подобным, то кривые c^{u1}_f, c^{s2}_f и c^{u2}_f, c^{s1}_f попарно не пересекаются. Тогда ориентированные кривые c^{u2}_f, c^{s2}_f также имеют гомотопические типы $< \mu^1_f, \nu^1_f >$ и $< \mu^2_f, \nu^2_f >$, соответственно, в базисе a, b (см., например, [31; теорема 13, стр. 25]). Тогда, не уменьшая общности будем считать, что нумерация седловых точек выбрана так, что $\mu^1_f \geqslant \mu^2_f$ и, если $\mu^1_f = \mu^2_f$, то $\nu^1_f > \nu^2_f$ (эти условия единственным образом определяют нумерацию седловых точек).

3. Диффеоморфизм f индуцирует изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ в фундаментальной группе тора $\pi_1(\mathbb{T}^2)$, изоморфной абелевой группе $\mathbb{Z}^2$. Тогда изоморфизм f_* однозначно определяется унимодулярной целочисленной матрицей $L_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, переводящей базис a, b в базис $< \alpha, \gamma >$, $< \beta, \delta >$. Диффеоморфизм f изотопен тождественному тогда и только тогда, когда $L_f = E$, где

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (см., например, [31; лемма 3, стр. 26]). Покажем, что $L_f=E$ для $f\in G$.

Положим $h=\widehat{J}_f^{-1}f\widehat{J}_f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$. По построению диффеоморфизм h гладко сопряжен с диффеоморфизмом f. При этом кривые c_h^{s1},c_h^{u2} и c_h^{s2},c_h^{u1} имеют гомотопические типы $<1,0>$ и $<0,1>$, соответственно. Поскольку все эти кривые являются h-инвариантными, то $L_h=E$. Так как $f=\widehat{J}_fh\widehat{J}_f^{-1}$, то $L_f=J_fL_hJ_f^{-1}=J_fEJ_f^{-1}=E$.

§ 4. Схема построения устойчивой дуги между диффеоморфизмами класса G

В этом разделе мы приведем схему доказательства теоремы 1 со ссылками на утверждения, которые будут доказаны в нижеследующих разделах.

Пусть $f,f'\in G$. Докажем, что диффеоморфизмы f,f' соединяются устойчивой дугой $\varphi_t:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2, t\in[0,1]$, все диффеоморфизмы которой являются градиентно-подобными за исключением конечного числа типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций.

Доказательство. В разделе 5, для любой унимодулярной целочисленной матрицы $J=\begin{pmatrix}\mu^1 & \mu^2\\ \nu^1 & \nu^2\end{pmatrix}$ такой, что $\mu^1\geqslant\mu^2\geqslant 0$ и $\nu^1>\nu^2$, если $\mu^1=\mu^2$, мы построим модельный диффеоморфизм $f_J\in G$, для которого $J_{f_J}=J$. В силу леммы 6.1, каждый диффеоморфизм $f\in G$ соединяется с модельным диффеоморфизмом f_{J_f} дугой без бифуркаций $H_{f,t}$. В силу леммы 8.2, диффеоморфизм f_J соединяется дугой $H_{J,t}$ с конечным числом типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций с диффеоморфизмом f_0. Тогда искомая дуга φ_t имеет вид

$$\varphi_t=H_{f,t}*H_{J_f,t}*H_{J_{f'},1-t}*H_{f',1-t}.$$

§ 5. Построение модельных диффеоморфизмов в классе G

В этом разделе для любой унимодулярной целочисленной матрицы $J=\begin{pmatrix}\mu^1 & \mu^2\\ \nu^1 & \nu^2\end{pmatrix}$ такой, что $\mu^1\geqslant\mu^2\geqslant 0$ и $\nu^1>\nu^2$, если $\mu^1=\mu^2$, мы построим модельный диффеоморфизм $f_J\in G$, для которого $J_{f_J}=J$.

Простейшим примером диффеоморфизма из класса G является прямое произведение двух копий диффеоморфизма источник-сток на окружности $\mathbb{S}^1$, обозначим его через f_0. Сначала построим диффеоморфизм источник-сток на окружности. Для этого рассcмотрим функцию $\bar{F}_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданную формулой:

$$\bar{F}_0(x)=x-\frac{1}{4\pi}sin\left(2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right).$$

По построению $x=\frac{1}{4}$ и $x=\frac{3}{4}$ – неподвижные точки отображения $\bar{F}_0$ на отрезке $[0,1]$ (см. рисунок 4). Рассмотрим проекцию $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ заданную формулой $\pi(x)=e^{2\pi ix}$. В силу того, что функция $\bar{F}_0$ является строго монотонно возрастающей и удовлетворяет условию $\bar{F}_0(x+1)=\bar{F}_0(x)+1$, она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма

$$F_0 = \pi \bar{F}_0 \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

По построению диффеоморфизм F_0 имеет неподвижный гиперболический сток

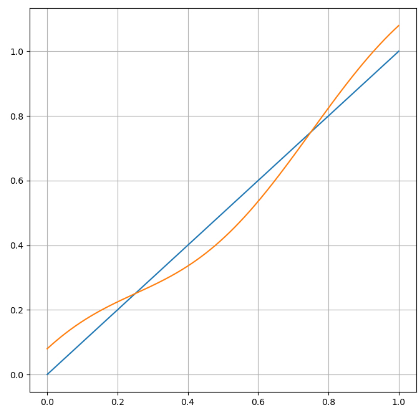


Рис. 4. График отображения $\bar{F}_0$

в точке $N = \pi\left(\frac{1}{4}\right)$ и неподвижный гиперболический источник в точке $S = \pi\left(\frac{3}{4}\right)$.

Определим диффеоморфизм $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой (см. рисунок 5)

$$f_0(z, w) = (F_0(z), F_0(w)),\ z, w \in \mathbb{S}^1.$$

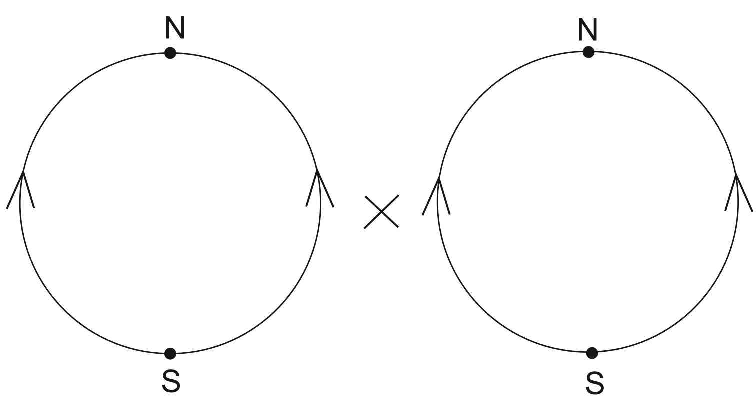


Рис. 5. Декартов квадрат диффеоморфизма F_0

По построению диффеоморфизм f_0 имеет неподвижный гиперболический сток в точке $\omega = (N, N)$, гиперболический источник $\alpha = (S, S)$ и имеет две седловые точки $\sigma_1 = (N, S), \sigma_2 = (S, N)$ (см. рисунок 6). При этом, замыкания инвариантных многообразий каждой из них лежат в классе образующих a, b. Именно,

$$c^{s1}_{f_0} = cl\, W^s_{\sigma_1} = \mathbb{S}^1 \times \{S\},\, c^{u1}_{f_0} = cl\, W^u_{\sigma_1} = \{N\} \times \mathbb{S}^1,$$
$$c^{s2}_{f_0} = cl\, W^s_{\sigma_2} = \{S\} \times \mathbb{S}^1,\, c^{u2}_{f_0} = cl\, W^u_{\sigma_2} = \mathbb{S}^1 \times \{N\}.$$

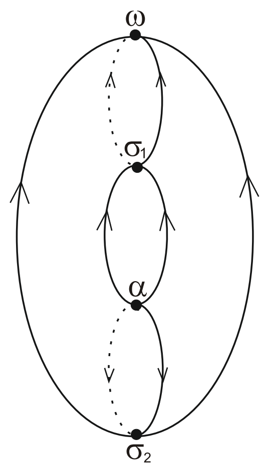


Рис. 6. Диффеоморфизм f_0

Положим $f_J = \widehat{J} f_0 \widehat{J}^{-1}$. Будем называть диффеоморфизм f_J *модельным.* Заметим, что по построению $f_E = f_0$.

§ 6. Построение дуги $H_{f,t}$

6.1. Схема построения.

Лемма 6.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется дугой без бифуркаций $H_{f,t}$ с диффеоморфизмом f_{J_f}.*

Доказательство. Приведем схему доказательства леммы 6.1 со ссылками на утверждения, которые будут доказаны ниже.

Рассмотрим отдельно два возможных случая: 1) $J_f = E$, 2) $J_f \neq E$.

1) В силу леммы 6.2, можно считать, что диффеоморфизм f в окрестности стока ω_f имеет локальную карту $(U_{\omega_f}, \psi_{\omega_f}), \psi_{\omega_f} : U_{\omega_f} \to \mathbb{R}^2$ такую, что диффеоморфизм $g = \psi_{\omega_f} f \psi^{-1}_{\omega_f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид $g(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Кроме того, в силу леммы 7.1, можно считать, что

$$\psi_{\omega_f}(c^{u2}_f \cap U_{\omega_f}) \subset Ox,\, \psi_{\omega_f}(c^{u1}_f \cap U_{\omega_f}) \subset Oy,$$

то есть кривые c^{u2}_f, c^{u1}_f являются гладкими. Поскольку они лежат в одном гомотопическом классе с кривыми $c^{u2}_{f_0} = \mathbb{S}^1 \times \{N\}$, $c^{u1}_{f_0} = \{N\} \times \mathbb{S}^1$, то, в силу предложения 1, существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\xi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что

$$\xi(c^{u1}_f) = c^{u1}_{f_0},\, \xi(c^{u2}_f) = c^{u2}_{f_0}.$$

Пусть $\xi_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – гладкая изотопия такая, что $\xi_0 = id$ и $\xi_1 = \xi$. Тогда дуга $\xi_t f \xi_t^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ соединяет диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $f_1 = \xi f \xi^{-1} \in G$ таким, что

$$c^{u1}_{f_1} = c^{u1}_{f_0},\ c^{s2}_{f_1} = c^{s2}_{f_0}.$$

Поскольку диффеоморфизмы f_1 и f_0 топологически сопряжены на замыканиях неустойчивых седловых многообразий, то, в силу леммы 7.2, существует дуга без биффуркаций, соединяющая f_1 с диффеоморфизмом $f_2 \in G$, совпадающим с f_0 в некоторых окрестностях K^u_1, K^u_2 кривых $c^{u1}_{f_0}$, $c^{u2}_{f_0}$.

По построению многообразие множество $A = c^{u1}_{f_0} \cup c^{u2}_{f_0}$ является аттрактором диффеоморфизмов f_2, f_0 и множество $U_A = K^u_1 \cup K^u_2$ является его окрестностью. По построению пространство $\mathbb{T}^2 \setminus U_A$ гомеоморфно двумерному диску и содержит в своей внутренности точки α и α_{f_2}. В силу [14; теорема 3.2, глава 8], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\eta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что

$$\eta(\alpha_f) = \alpha,\ \eta|_{U_A} = id.$$

В силу теоремы о продолжении изотопии (см., например, [18; Теорема 5.8]), существует дуга $\eta_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такая, что $\eta_0 = id$, $\eta_1 = \xi$ и $\eta_t|_{U_A} = id$. Тогда дуга $\eta_t f_2 \eta_t^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ соединяет диффеоморфизм f_2 с диффеоморфизмом $f_3 = \eta f_2 \eta^{-1} \in G$ таким, что $f_2|_{U_A \cup \alpha} = f_0|_{U_A \cup \alpha}$. Более того, в силу леммы 6.2, можно считать, что диффеоморфизм f_3 совпадает с диффеоморфизмом f_0 в окрестности источника α. Тогда, в силу леммы 7.3, существует дуга без биффуркаций, соединяющая диффеоморфизм f_3 с диффеоморфизмом $f_0 = f_{E_f}$.

2) Для диффеоморфизма $f \in G$ такого, что $J_f \neq E$ положим $h = \widehat{J}_f^{-1} f \widehat{J}_f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Тогда диффеоморфизм h принадлежит классу G и $J_h = E$. Согласно пункту 1) существует дуга без бифуркаций $\zeta_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такая, что $\zeta_0 = h$ и $\zeta_1 = f_0$. Тогда

$$H_{f,t} = \widehat{J}_f \zeta_t \widehat{J}_f^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$$

– искомая изотопия, соединяющая диффеоморфизм $H_{f,0} = f$ с диффеоморфизмом $H_{f,1} = \widehat{J}_f f_0 \widehat{J}_f^{-1} = f_{J_f}$.

6.2. Приведение структурно устойчивого диффеоморфизма к линейному в окрестностях гиперболических периодических точек. Пусть p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$. *Типом точки* p называется набор параметров (q_p, ν_p, μ_p), где $q_p = \dim W^u_p$, $\nu_p = +1(-1)$, если $f|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию и $\mu_p = +1(-1)$, если $f|_{W^s_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию. В силу [28; Теорема 5.5], диффеоморфизм f в некоторой окрестности точки p типа (q_p, ν_p, μ_p) топологически сопряжен линейному диффеоморфизму пространства $\mathbb{R}^n$, заданному матрицей

$$A_p = \begin{pmatrix} \nu_p \cdot 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_p \cdot 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 \end{pmatrix},$$

где количество строк матрицы A_p, содержащих число 2 (включая $\nu_p \cdot 2$), равно q_p. Обозначим через $\bar{A}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейный диффеоморфизм, заданный матрицей A_p. Положим $\mathbb{R}^u = Ox_1 \dots x_{q_p}$, $\mathbb{R}^s = Ox_{q_p+1} \dots x_n$, $\bar{A}^u_p = \bar{A}_p|_{\mathbb{R}^u}$ и $\bar{A}^s_p = \bar{A}_p|_{\mathbb{R}^s}$. Тогда в координатах $x^u = (x_1, \dots, x_{q_p}) \in \mathbb{R}^u$, $x^s = (x_{q_p+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^s$ диффеоморфизм $\bar{A}_p$ имеет вид

$$\bar{A}_p(x^u, x^s) = (\bar{A}^u_p(x^u), \bar{A}^s_p(x^s)).$$

Лемма 6.2. *Пусть структурно устойчивый диффеоморфизм $\varphi_0 : M^n \to M^n$ имеет изолированную гиперболическую неподвижную точку p, и пусть (U_0, ψ_0) — локальная карта многообразия M^n такая, что $p \in U_0$, $\psi_0(p) = O$ и U_0 не содержит неблуждающих точек диффеоморфизма φ_0, отличных от p. Тогда существуют окрестности U_1, U_2 точки p, $U_2 \subset U_1 \subset U_0$, и дуга $\varphi_t : M^n \to M^n, t \in [0,1]$ без бифуркаций такая, что:*

1) диффеоморфизм φ_t, $t \in [0,1]$, совпадает с диффеоморфизмом φ_0 вне множества U_1;

2) p – изолированная гиперболическая точка для каждого φ_t;

3) $W^s_p(\varphi_t) = W^s_p(\varphi_0)$ и $W^u_p(\varphi_t) = W^u_p(\varphi_0)$ вне множества U_1;

4) диффеоморфизм $\psi_0 \varphi_1 \psi_0^{-1}$ совпадает с диффеоморфизмом $\bar{A}_p$ на множестве $\psi_0(U_2)$.

Доказательство. Для $r > 0$ положим $B_r = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2\}$, $B^u_r = \{(x_1, \dots, x_{q_p}) \in \mathbb{R}^u : \sum\limits_{i=1}^{q_p} x_i^2 \leqslant r^2\}$ и $B^s_r = \{(x_{q_p+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^s : \sum\limits_{i=q_p+1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2\}$.

В силу структурной устойчивости диффеоморфизма φ_0, любой достаточно близкий к φ_0 в C^1-топологии диффеоморфизм соединяется с φ_0 дугой без бифуркаций. Тогда, в силу леммы Фрэнкса [9][2], можно считать, что диффео-

[2] В лемме Фрэнкса в окрестности U_p неподвижной точки p диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ рассматривается локальная карта (U_p, ψ_p), где $\psi_p^{-1} = exp : T_x M^n \to U_p$ – экспоненциальное отображение. Тогда в этих локальных координатах диффеоморфизм f имеет вид $\hat{f} = exp^{-1} f exp : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Утверждение леммы Фрэнкса состоит в том, что в любой окрестности диффеоморфизма f существует диффеоморфизм g, имеющий неподвижную точку p и линейное локальное представление $\hat{g} = exp^{-1} g exp$, если оно достаточно близко к Df_p. Таким образом, в любой окрестности диффеоморфизма f существует диффеоморфизм g, имеющий неподвижную точку p и линейное локальное представление, заданное матрицей, все собственные значения которой попарно различны.

морфизм $\bar\varphi_0=\psi_0\varphi_0\psi_0^{-1}$ в некотором шаре $B_{r_0}\subset\psi_0(U_0)$ совпадает с линейным диффеоморфизмом $\bar\Phi_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, заданным матрицей Φ_p, все собственные значения которой попарно различны. Тогда диффеоморфизм $\bar\Phi_p$ гладко сопряжен с линейным диффеоморфизмом $\bar Q_p$, заданным нормальной Жордановой формой Q_p матрицы Φ_p (см., например, [10; Глава 3]). То есть существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\xi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ такой, что $\bar Q_p=\xi\bar\Phi_p\xi^{-1}$. В силу [19; Раздел 6, Лемма 2], ξ является изотопным тождественному, что означает наличие изотопии ξ_t от $\xi_0=id$ до $\xi_1=\xi$. В силу теоремы о продолжении изотопии (см., например, [18; Теорема 5.8]), существует изотопия $\Xi_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ от тождественного отображения $\Xi_0=id$, которая совпадает с ξ_t на B_{r_2} и является тождестенной вне B_{r_1} для некоторых $r_2<r_1<r_0$. Таким образом, дуга $\bar\eta_t=\Xi_t\bar\Phi_p\Xi_t^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ соединяет диффеоморфизм $\bar\eta_0=\bar\Phi_p$ с диффеоморфизмом $\bar\eta_1$, совпадающим с $\bar Q_p$ на B_{r_2} и с $\bar\Phi_p$ вне B_{r_1}. Кроме того, $\bar\eta_t$ – дуга без бифуркаций, O – изолированная гиперболическая точка для каждого $\bar\eta_t$ и $W^s_O(\bar\eta_t)=W^s_O(\bar\Phi_p)$, $W^u_O(\bar\eta_t)=W^u_O(\bar\Phi_p)$ вне множества B_{r_1}.

Если $Q_p=A_p$, то лемма доказана. В противном случае, в силу того, что собственные значения матрицы Q_p попарно различны, она имеет квазидиагональную форму с блоками, состоящими либо из собственных значений, либо из матриц вида $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}$, где $0<\alpha^2+\beta^2<1$ или $\alpha^2+\beta^2>1$. Тогда диффеоморфизм $\bar Q_p$ имеет вид

$$\bar Q_p(x^u,x^s)=(\bar Q^u_p(x^u),\bar Q^s_p(x^s)),$$

где $(\bar Q^u_p)^{-1}(B^u_r)\subset int\,B^u_r$ для любого диска B^u_r и $\bar Q^s_p(B^s_r)\subset int\,B^s_r$ для любого диска B^s_r. Выберем $r_3<r_2$ так, что $B^u_{r_3}\times(\bar Q^s_p)^{-1}(B^s_{r_3})\subset int\,B_{r_2}$. Выберем $r^u_4,r^s_4\in(r_3/2,r_3)$ таким образом, что $(\bar Q^u_p)^{-1}(B^u_{r_3})\subset int\,B^u_{r^u_4}$ и $\bar Q^s_p(B^s_{r_3})\subset int\,B_{r^s_4}$.

В доказательстве Предложения 5.4 монографии [28] построены дуги $\bar\tau^u_t:\mathbb{R}^u\to\mathbb{R}^u$, $\bar\tau^s_t:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ из линейных гиперболических сжатий, такие, что

- $(\bar\tau^u_t)^{-1}(B^u_r)\subset int\,B^u_r$ для любого диска B^u_r и $\bar\tau^s_t(B^s_r)\subset int\,B^s_r$ для любого диска B^s_r;
- $\bar\tau^u_0=\bar Q^u_p$, $\bar\tau^u_1=\bar A^u_p$ и $\bar\tau^s_0=\bar Q^s_p$, $\bar\tau^s_1=\bar A^s_p$.

Рассмотрим изотопии $\bar\lambda^u_t=\bar Q^u_p\bar\tau^u_t$, $\bar\lambda^s_t=(\bar Q^s_p)^{-1}\bar\tau^s_t$, которые соединяют тождественное отображение $\bar\lambda^u_0=\bar\lambda^s_0=id$ с диффеоморфизмамм $\bar\lambda^u_1=\bar Q^u_p(\bar A^u_p)^{-1}$, $\bar\lambda^s_1=(\bar Q^s_p)^{-1}\bar A^s_p$, соответственно. По построению $\bar\lambda^u_t(B^u_{r_3})\subset\bar Q^u_p(B_{r^u_4})$ и $\bar\lambda^s_t(B^s_{r_3})\subset(\bar Q^s_p)^{-1}(B_{r^s_4})$ для каждого $t\in[0,1]$. Тогда, в силу теоремы о продолжении изотопии (см., например, [18; Теорема 5.8]), существуют изотопии $\bar\Lambda^u_t:\mathbb{R}^u\to\mathbb{R}^u$, $\bar\Lambda^s_t:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ от тождественного отображения $\bar\Lambda^u_0=\bar\Lambda^s_0=id$, которые совпадают с $\bar\lambda^u_t$, $\bar\lambda^s_t$ на $B^u_{r_3}$, $B^s_{r_3}$ и являются тождественными вне $\bar Q^u_p(B_{r^u_4})$, $(\bar Q^s_p)^{-1}(B_{r^s_4})$, соответственно. Положим

$$\bar\Lambda_t(x^u,x^s)=((\bar\Lambda^u_t)^{-1}\bar Q^u_p(x^u),\bar Q^s_p\bar\Lambda^s_t(x^s)).$$

Обозначим через $\bar\zeta_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ дугу, совпадающую с $\bar\eta_1$ вне B_{r_2} и совпадающая с $\bar\Lambda_t$ на B_{r_2}. Выберем $r_5<r_4$ так, что $B_{r_5}\subset\bar Q^u_p(B^u_{r_3})\times B^s_{r_3}$. Положим $\bar U_2=B_{r_5}$, $\bar U_1=B_{r_1}$ и

$$\bar\varphi_t=\bar\eta_t*\bar\zeta_t.$$

Тогда $\bar{\varphi}_t$ – дуга без бифуркаций, совпадающая с $\bar{\varphi}_0$ вне $\bar{U}_1$, O – изолированная гиперболическая точка для каждого $\bar{\varphi}_t$, $W^s_O(\bar{\varphi}_t) = W^s_O(\bar{\varphi}_0)$, $W^u_O(\bar{\varphi}_t) = W^u_O(\bar{\varphi}_0)$ вне множества $\bar{U}_1$ и диффеоморфизм $\bar{\varphi}_1$ совпадает с диффеоморфизмом $\bar{A}_p$ на $\bar{U}_2$. Таким образом, дуга $\varphi_t : M^n \to M^n$, совпадающая с $\psi_0^{-1}\bar{\varphi}_1\psi_0$ на U_0 и совпадающая с φ_0 вне U_0 удовлетворяет всем условиям леммы относительно окрестностей $U_1 = \psi_0^{-1}(\bar{U}_1)$ и $U_2 = \psi_0^{-1}(\bar{U}_2)$.

Следствие 6.1. *Утверждение, аналогичное лемме 6.2 имеет место и в случае, когда точка p является периодической с периодом m. Для доказательства достаточно взять изотопию для диффеоморфизма f^m с неподвижной точкой p, существующую в силу леммы 6.2, и распространить ее дволь окрестности орбиты точки p в силу диффеоморфизма f.*

§ 7. Выпрямление инвариантных седловых многообразий

Инвариантное многообразие седловой точки диффеоморфизма Морса-Смейла всегда является гладким подмногообразием. Однако его замыкание даже в градиентно-подобном случае может не является даже топологическим подмногообразием (см., например, рисунок 7). В этом разделе мы приведем утверждения и факты, позволяющие соединить любой градиентно-подобный 2-диффеоморфизм дугой без бифуркаций с диффеоморфизмом, у которого замыкания инвариантных многообразий всех седловых точек являются гладкими подмногообразиями.

Предложение 1. *(*[31; теорема 13, стр. 25] *и* [21]*,* [13; утверждение 10.60] *и* [13; утверждение 10.51]*) Пусть на торе $\mathbb{T}^2$ имеется $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ попарно не пересекающихся замкнутых гладких кривых $c_1, \dots, c_p$, имеющих гомотопический тип $< 1, 0 >$ и $q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ попарно не пересекающихся замкнутых гладких кривых $d_1, \dots, d_q$, имеющих гомотопический тип $< 0, 1 >$ таких, что каждая пара кривых c_i, d_j пересекается трансверсально по одной точке. Пусть C_p – дизъюнктное объединение p окружностей вида $\mathbb{S}^1 \times \{w\}$, $w \in \mathbb{S}^1$ и D_q – дизъюнктное объединение q окружностей вида $\{z\} \times \mathbb{S}^1$, $z \in \mathbb{S}^1$. Тогда существует изотопный тождественному диффеоморфизм $\xi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\xi(c_1 \cup \dots \cup c_p) = C_p$ и $\xi(d_1 \cup \dots \cup d_q) = D_q$.*

Лемма 7.1. *Пусть диффеоморфизм $\varphi_0 : M^2 \to M^2$ имеет гиперболический сток ω_0 и гиперболические седла $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ такие, что их неустойчивые сепаратрисы $\gamma^1_{\varphi_0}, \dots, \gamma^k_{\varphi_0}$ лежат в бассейне стока $W^s_{\omega_0}$ и имеют тот же период m, что и сток ω_0. Пусть (U_0, ψ_0) — локальная карта многообразия M^2 такая, что $\omega_0 \in U_0$, $\psi_0(\omega_0) = O$ и $\varphi_0^m(U_0) \subset U_0$. Пусть $L_k \subset \mathbb{R}^2$ – пучок лучей $l_1, \dots, l_k$, имеющих в полярных координатах (ρ, θ) вид $l_i = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta = \theta_i\}$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$. Тогда существуют окрестности V_1, V_2 точки ω_0 такие, что $V_2 \subset V_1 \subset U_0$ и дуга $\varphi_t : M^2 \to M^2$, $t \in [0, 1]$ без бифуркаций со следующими свойствами:*

1) диффеоморфизм φ_t, $t \in [0, 1]$ совпадает с диффеоморфизмом φ_0 вне множества $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$ и $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(\omega_0)$ является гиперболической стоковой орбитой периода m для всех φ_t;

2) $\psi_0(\bigcup\limits_{i=0}^{k}\gamma^i_{\varphi_1})\cap V_2)\subset L_k$, *где* $\gamma^i_{\varphi_1}$ *неустойчивые сепаратрисы седел* σ_i *относительно диффеоморфизма* φ_1.

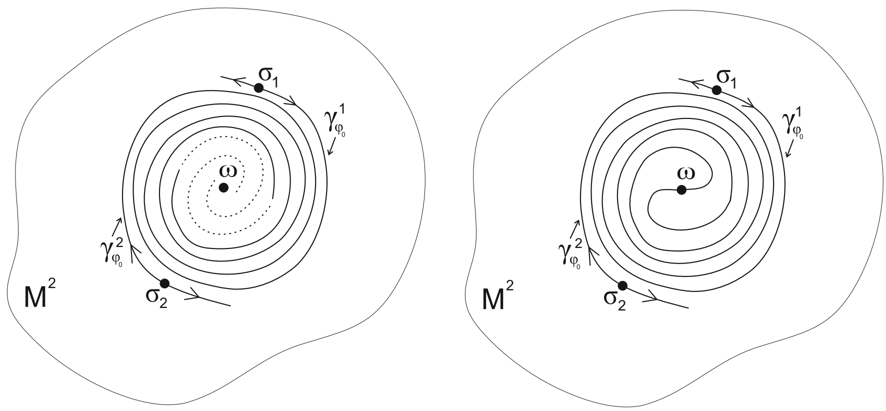


Рис. 7. Выпрямление сепаратрисы

Доказательство. Пусть $\phi_0=\varphi_0^m$ и $\bar\phi_0=\psi_0\phi_0\psi_0^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Обозначим через $O(0,0)$ начало координат в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для любого $r>0$ положим $B_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<r^2\}$. В силу леммы 6.2, не уменьшая общности можно считать, что $\bar\phi_0=g$, где $g(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ на диске B_{2r_0} для некоторого $r_0>0$. Положим $K_0=B_{2r_0}\setminus B_{r_0},\gamma^i_{\bar\phi_0}=\psi_0(\gamma^i_{\varphi_0})$.

Обозначим через E_g множество сжатий $\bar\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, совпадающих с $\bar\phi_0$ вне B_{2r_0} и с g на $B_{r_{\bar\phi}}$, где $r_{\bar\phi}\leqslant 2r_0$. Для любого $\bar\phi\in E_g$ положим

$$\gamma^i_{\bar\phi}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bar\phi^k(\gamma^i_{\bar\phi_0}\cap K_0).$$

По построению $\bar\phi$-инвариантные кривые $\gamma^i_{\bar\phi}$ совпадают с $\bar\phi_0$-инвариантными кривыми $\gamma^i_{\bar\phi_0}$ вне диска B_{r_0}. Тогда для доказательства леммы достаточно построить дугу из сжатий $\bar\phi_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, t\in[0,1]$ такую, что

$\bar 1$) диффеоморфизм $\bar\phi_t, t\in[0,1]$ совпадает с диффеоморфизмом $\bar\phi_0$ вне множества B_{r_0};

$\bar 2$) $\psi_0(\bigcup\limits_{i=0}^{k}\gamma^i_{\varphi_1})\cap V_2)\subset L_k$.

Дуга $\varphi_t:M^2\to M^2$ получается из дуги $\bar\phi_t$ как и в лемме 6.2, если положить $V_1=\psi_0^{-1}(B_{r_0})$ и $V_2=\psi_0^{-1}(B_{r_{\bar\phi_1}})$.

Для построения дуги $\bar\phi_t$ введем следующие обозначения для любого диффеоморфизма $\bar\phi\in E_g$.

Представим двумерный тор $\mathbb{T}^2$ как пространство орбит действия диффеоморфизма g на множестве $\mathbb{R}^2\setminus O$ и обозначим через $p:\mathbb{R}^2\setminus O\to\mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Зафиксируем на торе $\mathbb{T}^2$ образующие $\hat a=p(OX^+)$ и $\hat b=p(\mathbb{S}^1)$. Положим $\hat l_i=p(l_i)$ и $K_{\bar\phi}=B_{r_{\bar\phi}}\setminus B_{r_{\bar\phi}}/2$, $\hat\gamma^i_{\bar\phi}=p(\gamma^i_{\bar\phi}\cap K_{\bar\phi})$. Тогда кривые $\hat\gamma^i_{\bar\phi}$

являются узлами на торе $\mathbb{T}^2$, имеющими разложение $< 1, -n_{\bar\phi} >, n_{\bar\phi} \in \mathbb{Z}$ по базису $\hat a, \hat b$ (см., например, [13]).

Дуга $\bar\phi_t$ будет гладким произведением дуг η_t и ζ_t, где

I) дуга $\eta_t, t \in [0,1]$ состоит из сжатий, совпадающих с диффеоморфизмом $\bar\phi_0$ вне множества B_{r_0} и соединяет диффеоморфизм $\eta_0 = \bar\phi_0$ с некоторым диффеоморфизмом $\eta_1 \in E_g$ таким, что узлы $\hat\gamma_{\eta_1}$ и $\hat\xi_{\eta_1}$ имеют разложение $< 1, 0 >$ по базису $\hat a, \hat b$;

II) дуга $\zeta_t \in E_g, t \in [0,1]$ соединяет диффеоморфизм $\zeta_0 = \eta_1$ с диффеоморфизмом ζ_1 таким, что $\hat\gamma^i_{\zeta_1} = \hat l_i$.

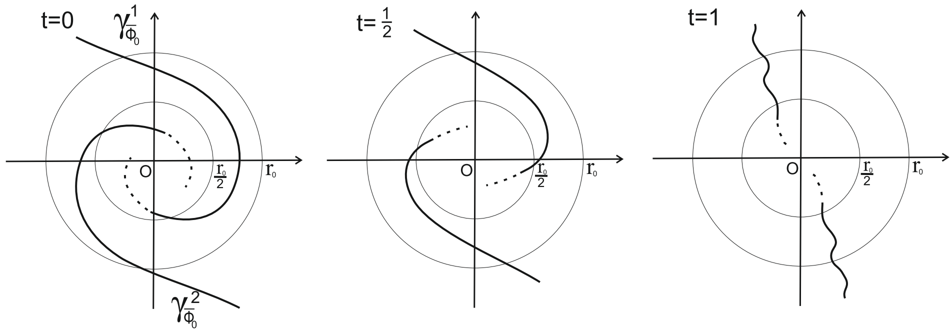


Рис. 8. Иллюстрация к лемме 7.1, часть I)

I) Если $n_{\bar\phi} = 0$, то положим $\eta_t = \bar\phi_0$ для всех $t \in [0,1]$. В противном случае определим диффеоморфизм $\theta_t, t \in [0,1] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в полярных координатах ρ, φ так, что $\theta_t(O) = O$ и $\theta_t(\rho e^{i\varphi}) = \rho e^{i(\varphi + \varphi_t(\rho))}$, где $\varphi_t(\rho)$ – гладкая монотонная функция, равная $2n_{\bar\phi}\pi t$ для $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ и равная 0 для $\rho \geqslant 1$. Тогда $\eta_t = \theta_t \bar\phi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ искомая дуга (см. рисунок 8).

II) По построению диффеоморфизм $\eta_1 \in E_g$ и узлы $\hat\gamma^i_{\eta_1}$ имеют разложение $< 1, 0 >$ по базису $\hat a, \hat b$. Положим $\hat L_k = p(L_k)$. Согласно предложению 1, существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\hat h(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \hat\gamma^i_{\eta_1}) = \hat L_k$. Для $r > 0$ положим $K_r = B_r \setminus B_{r/2}$. Выберем открытое покрытие $D = \{D_1, \dots, D_q\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar D_i$ множества $p^{-1}(D_i)$ является подмножеством K_{r_i} для некоторых $r_i < \frac{r_{i-1}}{2}$ и $r_1 \leqslant r_0/2$. Согласно [3; лемма о фрагментации] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat w_1, \dots, \hat w_q : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

i) для каждого $i \in \{1, \dots, q\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat w_{i,t}\}$, тождественная вне D_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat w_i$;

ii) $\hat h = \hat w_1 \dots \hat w_q$.

Пусть $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, который совпадает с $(p|_{K_{r_i}})^{-1}\hat w_{i,t} p$ на K_{r_i} и совпадает с тождественным отображением вне K_{r_i} (см. рисунок 9). Тогда искомая дуга определяется формулой

$$\zeta_t = \nu_1 w_{1,t} \dots w_{q,t}.$$

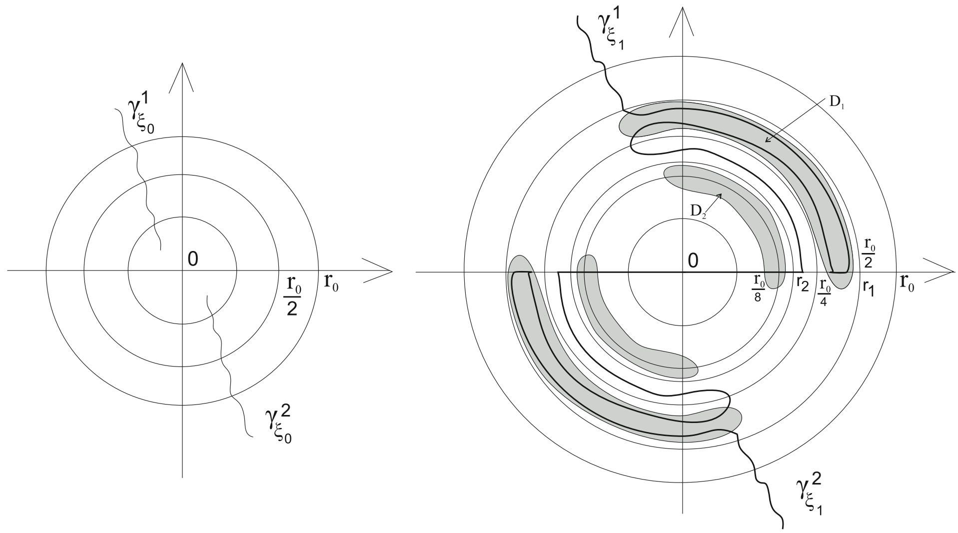


Рис. 9. Иллюстрация к лемме 7.1, часть II)

7.1. Изменение динамики в окрестности аттрактора. В этом разделе мы докажем, что динамика градиентно-подобного 2-диффеоморфизма в окрестности гладко вложенного замыкания неустойчивого многообразия седловой точки, можно заменить на любую топологически сопряженную переходом по дуге без бифуркаций.

Лемма 7.2. *Пусть*

- $\phi_0 : M^2 \to M^2$ – *сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на ориентируемой поверхности* M^2,
- $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – *седловые неподвижные точки диффеоморфизма* ϕ_0, *кривая* $c = \bigcup\limits_{i=1}^{n} cl\, W^u_{\sigma_i}$ – *гладко вложена в* M^2 *и имеет захватывающую окрестность* K_0,
- *диффеоморфизм* ϕ_1 *топологически сопряжен с диффеоморфизмом* ϕ_0 *на кривой* c *и в некоторой ее окрестности.*

Тогда существует дуга без бифуркаций $\varphi_t : M^2 \to M^2$, $t \in [0,1]$ *и окрестность* $K_* \subset K_0$ *кривой* c *со следующими свойствами:*

1. $\varphi_0 = \phi_0$, φ_1 *совпадает с* ϕ_1 *на* K_* *и совпадает с* ϕ_0 *вне* K_0;
2. ϕ_1 *совпадает с* ϕ_0 *вне* K_0 *и, если* ϕ_1 *совпадает с* ϕ_0 *в некоторой окрестности стока на кривой* c, *то* φ_t *совпадает с* ϕ_0 *в этой окрестности.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда кривая c является замкнутой (в случае, когда кривая c не является замкнутой, доказательство аналогичное). Тогда существует гладкое вложение $\nu : \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \to M^2$ такое, что $\nu : \mathbb{S}^1 \times \{0\} = c$ и $K_0 = \nu(\mathbb{S}^1 \times [-1,1])$.

Искомая дуга φ_t будет гладким произведением дуг без бифуркаций μ_t и δ_t, где

I) дуга $\mu_t, t \in [0,1]$ соединяет диффеоморфизм $\mu_0 = \varphi_0$ с диффеоморфизмом μ_1 таким, что $\Omega_{\eta_1|_c} = \Omega_{\phi_1|_c}$;

II) дуга $\delta_t, t \in [0,1]$ соединяет диффеоморфизм $\delta_0 = \mu_1$ с искомым диффеоморфизмом $\delta_1 = \varphi_1$.

I) Если $\Omega_{\phi_0|_c} = \Omega_{\phi_1|_c}$, то $\mu_t = \phi_0$ для всех $t \in [0,1]$. В противном случае, по условию диффеоморфизмы $w_0 = \phi_0|_c, w_1 = \phi_1|_c$ являются топологически сопряженными грубыми преобразованиями окружности. В силу [17], они имеют одинаковое число гиперболических притягивающих и отталкивающих периодических точек, чередующихся на окружности. Тогда возможны три случая расположения этих точек на окружности c: 1) существуют периодические точки p_0^0, p_0^1 диффеоморфизмов w_0, w_1, соответственно, которые совпадают и имеют одинаковую устойчивость; 2) существует дуга $\beta \subset c$ такая, что $int\,\beta$ содержит периодические точки p_0^0, p_0^1 диффеоморфизмов w_0, w_1, соответственно, одинаковой устойчивости и не содержит других периодических точек диффеоморфизмов w_0, w_1; 3) существует дуга $\beta \subset c$ такая, что $int\,\beta$ содержит все периодические точки обоих диффеоморфизмов $p_0^0, p_1^0, p_0^1, p_1^1, \dots, p_{2n-2}^0, p_{2n-1}^0, p_{2n-2}^1, p_{2n-1}^1$, расположенные на дуге в указанном порядке, где p_{2i}^0, p_{2i}^1 – притягивающие точки, p_{2i-1}^0, p_{2i-1}^1 – отталкивающие точки диффеоморфизмов w_0, w_1, соответственно, для $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

В случае 1) положим $\beta = c \setminus U_0$, где U_0 – дуга окружности c, содержащая точку p_0^0 и не содержащая никаких других периодических точек диффеоморфизмов w_0, w_1. Выберем трубчатую окрестность $N(\beta) \subset K_0$ дуги β так, что существует диффеоморфизм $h : N(\beta) \to \Pi$, где $\Pi = [0,1] \times [-1,1]$. Перенумеруем $p_1^0, p_2^0, \dots, p_{2n-1}^0$; $p_1^1, p_2^1, \dots, p_{2n-1}^1$ периодические точки диффеоморфизмов w_0, w_1, соответственно, на дуге β так, что $0 < h(p_1^0) < h(p_2^0) < \dots < h(p_{2n-1}^0) < 1$; $0 < h(p_1^1) < h(p_2^1) < \dots < h(p_{2n-1}^1) < 1$.

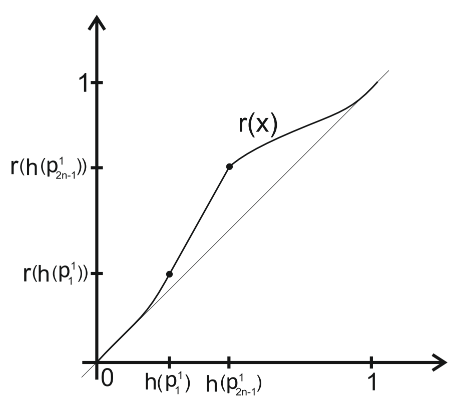


Рис. 10. График функции $r(x)$

Рассмотрим гладкую монотонно возрастающую функцию $r(x) : [0,1] \to [0,1]$, являющуюся тождественной в некоторых окрестностях точек 0, 1 и на множестве $h(\nu(B))$, такую, что $r(h(p_i^0)) = h(p_i^1)$ (см. рисунок 10). Положим

$r_t(x) = tr(x) + (1-t)x$, $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$ и $r_{t,y}(x) = (1-y)r_t(x) + yx, x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$, $y \in [0,1]$. Определим гладкую изотопию $R_t : \Pi \to \Pi$ формулой

$$R_t(x,y) = (r_{t,y^2}(x), y).$$

Поскольку изотопия R_t является тождественной на $\partial\Pi$ для всех $t \in [0,1]$, то существует гладкая изотопия $\rho_t : M^2 \to M^2$, тождественная вне $N(\beta)$ и совпадающая с $h^{-1}R_t h$ на $N(\beta)$. Тогда $\mu_t = \rho_t f \rho_t^{-1}$ является искомой изотопией, совмещающей периодические точки диффеоморфизма w_0 с периодическими точками диффеоморфизма w_1 на дуге β.

В случае 2), используя технику выше, искомая изотопия μ_t составляется из изотопии, совмещающей точку p_0^0 с точкой p_0^1 на дуге β и изотопии, совмещающей периодические точки диффеоморфизма w_0 с периодическими точками диффеоморфизма w_1 на дуге, дополнительной к β.

В случае 3) искомая изотопия μ_t совмещает периодические точки диффеоморфизма w_0 с периодическими точками диффеоморфизма w_1 с сохранением порядка на дуге β.

Если ϕ_1 совпадает с ϕ_0 в некоторой окрестности стока на кривой c, то, очевидно, дугу μ_t можно построить совпадающей с ϕ_0 в этой окрестности.

II) Если μ_1 совпадает с ϕ_1 в некоторой окрестности окружности c, то $\delta_t = \mu_1$ для всех $t \in [0,1]$. В противном случае, поскольку окружность c является аттрактором для диффеоморфизма ϕ_1, то существует гладкое кольцо $K \subset int\, K_0$, являющееся захватывающей окрестностью аттрактора c диффеоморфизма ϕ_1. Выберем значение $0 < \varepsilon_* < 1$ так, что для кольца $K_* = \nu(\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon_*, \varepsilon_*])$ справедливо включение $K_* \subset int\,(\phi_1^2(K) \cap \mu_1^2(K_0))$. Из теоремы о кольце (см., например, [31]), существует диффеоморфизм $\gamma : K \to K_0$ такой, что $\gamma|_{K_{\varepsilon_*}} = id$ и $\gamma(\phi_1^i(K)) = \mu_1^i(K_0)$, $i = 1, 2$. Зададим на $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ диффеоморфизмы $\tilde{\phi}_1 = \nu^{-1}\gamma\phi_1\gamma^{-1}\nu$ и $\tilde{\mu}_1 = \nu^{-1}\mu_1\nu$. Положим

$$\tilde{\xi}_t = (1-t)\tilde{\mu}_1 + t\tilde{\phi}_1.$$

Тогда дуга $\tilde{q}_t = \tilde{\mu}_1^{-1}\tilde{\xi}_t$ соединяет тождественное отображение $\tilde{q}_0 = id$ с диффеоморфизмом $\tilde{q}_1 = \tilde{\mu}_1^{-1}\tilde{\phi}_1$ и $\tilde{q}_t(\tilde{\mu}_1(\mathbb{S}^1 \times [-1,1])) \subset \mathbb{S}^1 \times (-1,1)$. В силу теоремы о продолжении изотопии (см., например, [18; Теорема 5.8]), существует изотопия $\tilde{Q}_t : \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \to \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$, совпадающая $\tilde{q}_t$ на $\tilde{\mu}_1(\mathbb{S}^1 \times [-1,1])$ и тождественная на $\mathbb{S}^1 \times \{-1,1\}$. Тогда искомая изотопия $\delta_t : M^2 \to M^2$, совпадает с μ_1 вне K_0 и совпадает с $\mu_1\nu\tilde{Q}_t\nu^{-1}$ на K_0.

Если ϕ_1 совпадает с μ_1 в некоторой окрестности стока на кривой c, то, очевидно, кольцо K можно выбрать совпадающим с кольцом K_0 и диффеоморфизм γ тождественным в этой окрестности.

7.2. Изменение динамики в блуждающем множестве. Замыкания неустойчивых седловых многообразий любого градиентно-подобного 2-диффеоморфизма образуют связный аттрактор этого диффеоморфизма, а дуальный к нему репеллер состоит из всех источников (см., например, [12]). В этом разделе мы докажем, что любые два диффеоморфизма, совпадающие в некоторых окрестностях таких аттрактора и репеллера, могут быть соединены дугой без бифуркаций.

Лемма 7.3. *Пусть градиентно-подобные 2-диффеоморфизмы* $\varphi_0, \varphi_1 \quad : M^2 \to M^2$ *совпадают на замыканиях неустойчивых седловых многообразий и в некоторых их окрестностях, а также в окрестностях источников. Тогда существует дуга без бифуркаций их соединяющая.*

Доказательство. Пусть A – аттрактор диффеоморфизмов φ_0, φ_1, образованный замыканиями неустойчивых многообразий всех седловых точек, и R – дуальный к нему репеллер, состоящий из источников. Пусть K_A – захватывающая окрестность аттрактора A. Тогда каждая компонента связности $M^2 \setminus K_A$ является двумерным диском, лежащим в бассейне некоторого источника из репеллера R. Выберем в репеллере источники $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ с попарно не пересекающимися орбитами периодов $m_1, \dots, m_k$, соответственно так, что $R = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=0}^{m_i-1} \varphi_0^j(\alpha_i)$.

Ниже мы построим дугу $H_{\varphi_0,\alpha_1,t}$ без бифуркаций со следующими свойствами:

- $H_{\varphi_0,\alpha_1,t}$ соединяет диффеоморфизм φ_0 с диффеоморфизмом $\varphi_{\alpha_1} = H_{\varphi_0,\alpha_1,1}$ таким, что $\varphi_{\alpha_1} = \varphi_1$ на $K_A \cup \bigcup\limits_{j=0}^{m_i-1} \varphi_0^j(W^u_{\alpha_1})$;

- $H_{\varphi_0,\alpha_1,t} = \varphi_0$ вне $K_A \cup \bigcup\limits_{j=0}^{m_i-1} \varphi_0^j(W^u_{\alpha_1})$.

Аналогичным образом строятся дуги $H_{\varphi_{\alpha_1},\alpha_2,t}, \dots, H_{\varphi_{\alpha_{k-1}},\alpha_k,t}$. Тогда искомая дуга φ_t будет следующим гладким произведением дуг

$$\varphi_t = H_{\varphi_0,\alpha_1,t} * \dots * H_{\varphi_{\alpha_{k-1}},\alpha_k,t}$$

Построение дуги $H_{\varphi_0,\alpha_1,t}$. Для простоты будем считать источник α_1 неподвижным. В случае, когда точка α_1 является периодической с периодом m_1 достаточно взять изотопию для диффеоморфизма f^{m_1} с неподвижной точкой α_1 и распространить ее дволь окрестности орбиты точки α_1 в силу диффеоморфизма φ_0.

Обозначим через Φ_{φ_1} множество градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхности M^2, совпадающих с φ_1 на K_A и в некоторой окрестности точки α_1 (в частности, диффеоморфизм φ_0 принадлежит множеству Φ_{φ_1}). Тогда любой диффеоморфизм $\varphi \in \Phi_{\varphi_1}$ гладко сопряжен на $W^u_{\alpha_1} \setminus \alpha_1$ с φ_1 посредством диффеоморфизма

$$\rho_\varphi(x) = \varphi_1^{-k}(\varphi^k(x)),$$

где $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\varphi^k(x) \in K_A$ для $x \in W^u_{\alpha_1} \setminus \alpha$. Таким образом, $\varphi_1 = \rho_\varphi \varphi_0 \rho_\varphi^{-1}$ на $W^u_{\alpha_1} \setminus \alpha_1$.

Для диффеоморфизма φ возможны два случая: I) ρ_φ гладко продолжается на точку α_1 условием $\rho_\varphi(\alpha_1) = \alpha_1$, II) ρ_φ не продолжается гладко на точку α_1.

В случае I), в силу [32] диффеоморфизм ρ_φ изотопен тождественному. Более того, в силу теоремы Тома о продолжении изотопии, на $W^u_{\alpha_1}$ существует гладкая изотопия $\varrho_{\varphi,t}$ такая, что $\varrho_{\varphi,0} = id$, $\varrho_{\varphi,1} = \rho_\varphi$ и $\varrho_{\varphi,t} = id$, $t \in [0,1]$ в некоторой окрестности $K_\varphi \subset K_A$ аттрактора A. Изотопия $\varrho_{\varphi,t}$ продолжается до изотопии несущей поверхности $\varrho_{\varphi,t}: M^2 \to M^2$ тождественным отображением вне $W^u_{\alpha_1}$. Тогда дуга без бифуркаций

$$H_{\varphi,\alpha_1,t} = \varrho^{-1}_{\varphi,t}\varphi\varrho_{\varphi,t}$$

соединяет диффеоморфизм φ с диффеоморфизмом φ_1.

В случае II), применим следующую конструкцию. Пусть $(U_{\alpha_1}, \psi_{\alpha_1}), \psi_{\alpha_1}: U_{\alpha_1} \to \mathbb{R}^2$, $\psi_{\alpha_1} = O$ – локальная карта многообразия M^2. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ диффеоморфизмы $\bar\varphi = \psi_{\alpha_1}\varphi\psi^{-1}_{\alpha_1}$, $\bar\varphi_1 = \psi_{\alpha_1}\varphi_1\psi^{-1}_{\alpha_1}$ и $\bar\rho_\varphi = \psi_{\alpha_1}\rho_\varphi\psi^{-1}_{\alpha_1}$, являющиеся локальными представлениями диффеоморфизмов φ, φ_1 и ρ, соответственно. Поскольку точка O является гиперболическим источником диффеоморфизмов φ и φ_1, то существует 2-диск $B_\varphi \ni O$ такой, что $\bar\varphi^{-1}(B_\varphi) \subset int\, B_\varphi$ и кольцо K_φ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма $\bar\varphi$ на $int\, B_\varphi \setminus \{O\}$.

Представим $\mathbb{T}^2$ как пространство орбит $(int\, B_\varphi \setminus \{O\})/\bar\varphi$. Обозначим через $p_\varphi: B_\varphi \setminus \{O\} \to \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Тогда кривая $b = p_\varphi(\partial B_\varphi)$ имеет гомотопический тип $<0,1>$ и можно однозначно определить кривую a, имеющую гомотопический тип $<1,0>$ такую, что кривые a, b являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Так как $\bar\rho_\varphi$ переводит орбиты $\bar\varphi$ в орбиты $\bar\varphi_1$ и K_φ является общей фундаментальной областью для $\bar\varphi, \bar\varphi_1$ на $int\ B_\varphi \setminus \{O\}$, то $\bar\rho_\varphi$ проектируется на $\mathbb{T}^2$ формулой $\hat\rho_\varphi = p_\varphi\bar\rho_\varphi p^{-1}_\varphi$. Тогда индуцированный изоморфизм $\hat\rho_{\varphi *}: \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ сохраняет гомотопический класс образующей a и, следовательно, задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого целого n_φ.

Рассмотрим два подслучая: а) $n_\varphi = 0$; б) $n_\varphi \neq 0$.

В подслучае а), построим дугу без бифуркаций $\nu_{\varphi,t}: M^2 \to M^2$ такую, что $\nu_{\varphi,0} = \varphi$, $\nu_{\varphi,1} \in \Phi_{\varphi_1}$ и диффеоморфизм $\rho_{\nu_{\varphi,1}}$ гладко продолжается на источник α_1. Тогда дуга без бифуркаций

$$H_{\varphi,\alpha_1,t} = \nu_{\varphi,t} * (\varrho^{-1}_{\nu_{\varphi,1},t}\nu_{\varphi,1}\varrho_{\nu_{\varphi,1},t})$$

соединяет диффеоморфизм φ с диффеоморфизмом φ_1.

Опишем построение дуги $\nu_{\varphi,t}$.

Выберем покрытие $U = \{U_1, \dots, U_q\}$ тора $\mathbb{T}^2$, состоящее из 2-дисков таких, что некоторая компонента связности множества $p^{-1}_\varphi(U_i)$ является подмножеством кольца $K_i = B_i \setminus \bar\varphi^{-1}(B_i)$, полученного из 2-диска B_i такого, что $B_i \subset \bar\varphi^{-1}(B_\varphi)$, $i = 1, \dots, q$.

В силу леммы о фрагментации [3] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat w_1, \dots, \hat w_q: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такие, что

i) для каждого $i = \overline{1,q}$ существует $U_{j(i)} \in U$ такое, что для каждого $t \in [0,1]$ отображение $\hat w_{i,t}$ является тождественным вне $U_{j(i)}$, где $\{\hat w_{i,t}\}$ — гладкая изотопия между тождественным отображением и $\hat w_i$;

ii) $\hat\rho_\varphi = \hat w_1 \dots \hat w_q$.

Выберем числа $n_i \in \mathbb{N}$ так, что $\bar\varphi^{-n_q}(B_{j(q)}) \subset \dots \subset \bar\varphi^{-n_1}(B_{j(1)})$. Положим $\bar K_i = \bar\varphi^{-n_{j(i)}}(B_{j(i)}) \setminus \bar\varphi^{-n_{j(i)}-1}(B_{j(i)})$. Обозначим через $\bar w_{i,t}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, совпадающий с $(p_\varphi|_{\bar K_i})^{-1}\hat w_{i,t}p_\varphi$ на $\bar K_i$ и тождественный вне $\bar K_i$.

Положим $\bar{w}_t = \bar{w}_{1,t}\dots,\bar{w}_{q,t}$ и $\bar{\nu}_{\varphi,t} = \bar{\varphi}\bar{w}_t^{-1}$. Обозначим через $\nu_{\varphi,t} : M^2 \to M^2$ диффеоморфизм, совпадающий с $\psi_{\alpha_1}^{-1}\bar{\nu}_{\varphi,t}\psi_{\alpha_1}$ на B_φ и совпадающий с φ вне B_φ. Тогда $\nu_{\varphi,1} \in \Phi_{\varphi_1}$ поскольку $\bar{\nu}_{\varphi,1}$ совпадает с $\bar{\varphi}_1$ на некотором диске $B_{\nu_{\varphi,1}} = \bar{\varphi}^{-m}(B_\varphi) \subset \bar{\varphi}^{-n_{j(q)}-1}(B_{j(q)})$. По построению $\bar{\rho}_{\nu_{\varphi,1}} = \bar{\varphi}_1^{-m}\bar{\rho}_\varphi(\bar{\varphi}\bar{w}_1^{-1})^m$ и, следовательно, $\hat{\rho}_{\nu_{\varphi,1}}(\hat{x}) = \hat{x}$, $\hat{x} \in \mathbb{T}^2$.

Таким образом, диффеоморфизм $\rho_{\nu_{\varphi,1}}$ в окрестности точки α_1 совпадает с некоторой степенью диффеоморфизма φ и, следовательно, гладко продолжается на точку α_1.

В подслучае b), построим дугу без бифуркаций $\mu_{\varphi,t} : M^2 \to M^2$ такую, что $\mu_{\varphi,0} = \varphi$, $\mu_{\varphi,1} \in \Phi_{\varphi_1}$ и $n_{\mu_{\varphi,1}} = 0$. Тогда дуга без бифуркаций

$$H_{\varphi,\alpha_1,t} = \mu_{\varphi,t} * \nu_{\mu_{\varphi,1},t} * (\varrho^{-1}_{\nu_{\mu_{\varphi,1},1},t}\nu_{\mu_{\varphi,1},1}\varrho_{\nu_{\mu_{\varphi,1},1},t})$$

соединяет диффеоморфизм φ с диффеоморфизмом φ_1.

Опишем построение дуги $\mu_{\varphi,t}$.

Введем на диске B_φ координаты r, ϕ в которых кривая $\bar{\varphi}^{-k}(\partial B_\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$ имеет вид $r = 2^{-k}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Определим диффеоморфизм $\bar{\theta}_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ так, что $\bar{\theta}_t(O) = O$ и $\bar{\theta}_t(r,\phi) = re^{i(\phi+\phi_t(r))}$, где $\phi_t(r)$ – гладкая монотонная функция, равная $-2n_\varphi\pi t$ для $r \leqslant \frac{1}{2}$ и равная 0 для $r \geqslant 1$. Положим $\bar{\mu}_{\varphi,t} = \bar{\varphi}\bar{\theta}_t$ и обозначим через $\mu_{\varphi,t} : M^2 \to M^2$ диффеоморфизм, совпадающий с $\psi_{\alpha_1}^{-1}\bar{\mu}_{\varphi,t}\psi_{\alpha_1}$ на B_φ и совпадающий с φ вне B_φ. Тогда $\mu_{\varphi,1} \in \Phi_{\varphi_1}$ поскольку $\bar{\mu}_{\varphi,1}$ совпадает с $\bar{\varphi}_1$ на диске $B_{\mu_{\varphi,1}} = \bar{\varphi}^{-1}(B_\varphi)$. По построению $\bar{\rho}_{\mu_{\varphi,1}} = \bar{\varphi}_1^{-1}\bar{\rho}_\varphi\bar{\varphi}\bar{\theta}_1$ и, следовательно, $n_{\mu_{\varphi,1}} = 0$.

§ 8. Построение дуги $H_{J,t}$

8.1. Построение вспомогательных функций. В этом разделе мы строим модельные функции, которые в дальнейшем будут использованы в построении устойчивой дуги. В основе построения лежит принцип склейки бесконечно гладких функций посредством следующей *сигмоид-функции*.

Пусть $a < b$ и $\delta_{a;b} : \mathbb{R} \to [0,1]$ сигмоид-функция, определенная формулой (см. рисунок 11)

$$\delta_{a;b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{1}{1+\exp\left(\frac{(a+b)/2-x}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)}, & a < x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Определим функцию $\bar{\phi}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. рисунок 12):

$$\bar{\phi}_1(x) = x - \frac{1}{12\pi} sin\left(6\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$

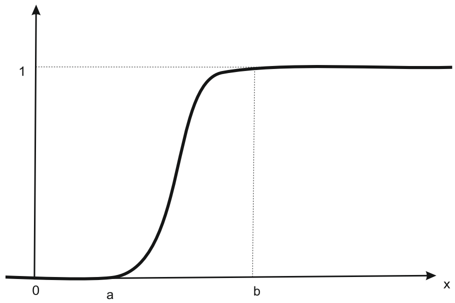


Рис. 11. График сигмоид-функции

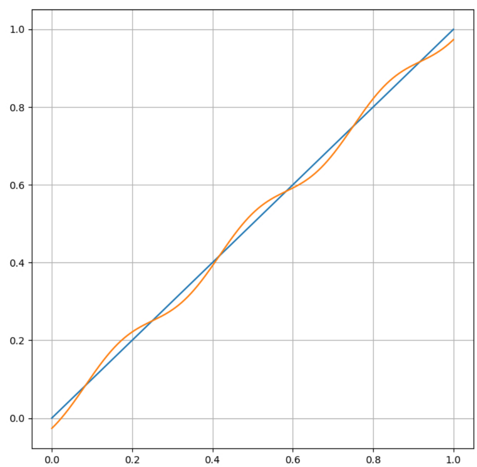


Рис. 12. График фукции $\bar{\phi}_1(x)$

Определим функцию $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. рисунок 13):

$$\bar{g}_1(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 0,26, \\ (1 - \delta_{0,26;0,27}(x))\bar{\phi}_0(x) + \delta_{0,26;0,27}(x)\bar{\phi}_1(x),\ 0,26 < x < 0,27, \\ \bar{\phi}_1(x),\ 0,27 \leqslant x \leqslant 0,76, \\ (1 - \delta_{0,76;0,77}(x))\bar{\phi}_1(x) + \delta_{0,76;0,77}(x)\bar{\phi}_0(x),\ 0,76 < x < 0,77, \\ \bar{\phi}_0(x),\ 0,77 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Определим функцию $\bar{\phi}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. рисунок 14):

$$\bar{\phi}_2(x) = x + \frac{1}{4\pi} sin\left(\frac{5}{6}\pi\left(x - \frac{5}{12}\right)\right).$$

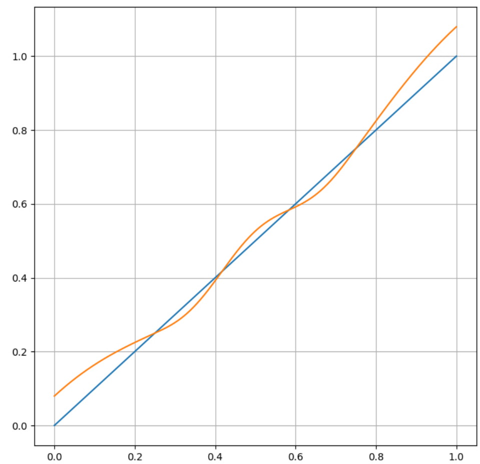


Рис. 13. График функции $\bar{g}_1(x)$

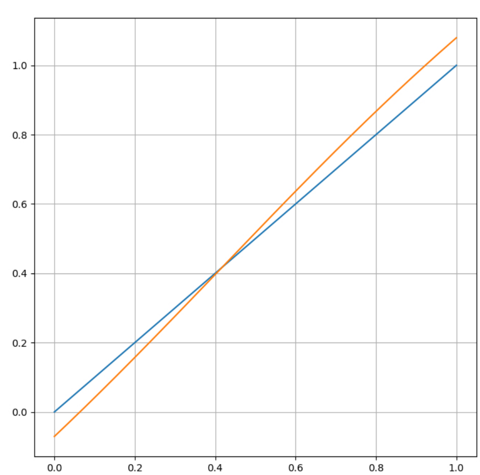


Рис. 14. График фукции $\bar{\phi}_2(x)$

Определим функцию $\bar{g}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. рисунок 15):

$$\bar{g}_2(x) = \begin{cases} \bar{g}_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 0,42, \\ (1 - \delta_{0,42;0,43}(x))\bar{g}_1(x) + \delta_{0,42;0,43}(x)\bar{\phi}_2(x),\ 0,42 < x < 0,43, \\ \bar{\phi}_2(x),\ 0,43 \leqslant x \leqslant 0,98, \\ (1 - \delta_{0,98;0,99}(x))\bar{\phi}_2(x) + \delta_{0,98;0,99}(x)\bar{g}_1(x),\ 0,98 < x < 0,99, \\ \bar{g}_1(x),\ 0,99 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

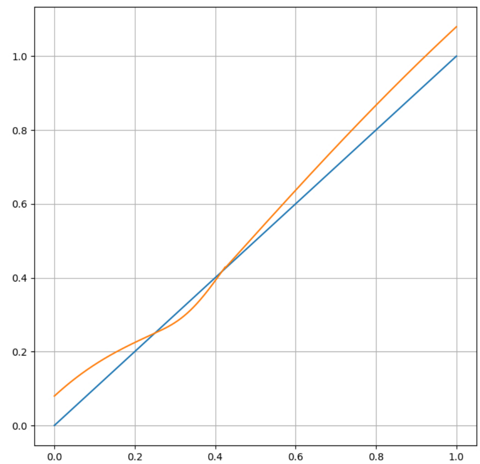


Рис. 15. График фукции $\bar{g}_2(x)$

8.2. Построение модельных дуг. В этом разделе мы построим дуги, которые являются основными компонентами, составляющими дугу $H_{J,t}$.

Для $n \in \mathbb{Z}$ положим $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Лемма 8.1. *Диффеоморфизм f_0 соединяется с диффеоморфизмом f_{J_1} устойчивой дугой $H_{0,1,t}$ с двумя типично проходящими некритическими седло-узловыми бифуркациями.*

Доказательство. Везде далее в этом доказательстве отображения без черты являются проекциями на $\mathbb{S}^1$ посредством π отображения с чертой, заданного на прямой $\mathbb{R}$. Устойчивая дуга $H_{0,1,t}$, соединяющая диффеоморфизм f_0 с диффеоморфизмом f_{J_1} является произведением дуг Γ^1_t, Γ^2_t, построенных в шаге 1 и шаге 2 ниже и дуги $H_{\Gamma^2_1,t}$.

Шаг 1. Первая седло-узловая бифуркация.

1. Рождение седло-узловой точки.

Начнем с диффеоморфизма $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, определенного формулой:

$$f_0(z,w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)),\ z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Положим

$$\bar{\eta}^1_t(x) = (1-t)\bar{\phi}_0(x) + t\bar{g}_1(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

и

$$\bar{\eta}^1_{t,\tau}(x) = (1-\tau)\bar{\eta}^1_t(x) + \tau\bar{\phi}_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],\ \tau \in [0,1].$$

Определим гладкую дугу $H^1_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой:

$$H^1_t(z,w) = \begin{cases} (\phi_0(z), \eta^1_{t,|8x-2|}(w)), z = \pi(x),\, x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right),\, w \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(z,w), z = \pi(x),\, x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right),\, w \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

При $t = \frac{3}{4}$, диффеоморфизм $H^1_{\frac{3}{4}}$ имеет седло-узловую точку $p = (N, \pi(0))$, чье устойчивое многообразие диффеоморфно полуплоскости, границей которой является дуга γ_p (см. рисунок 16).

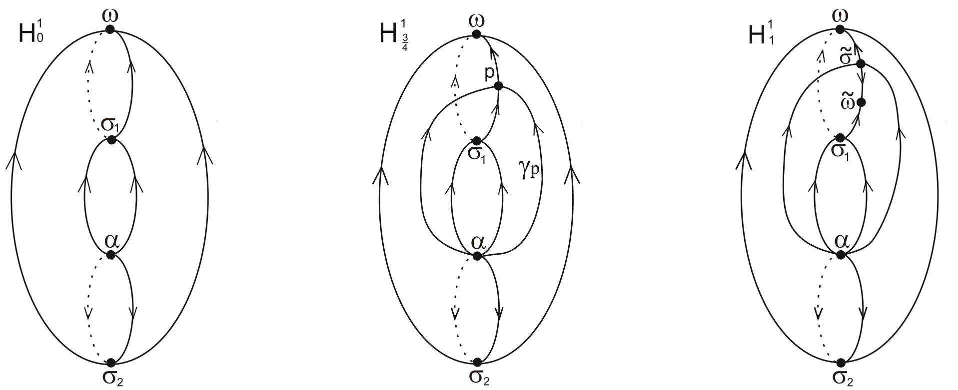


Рис. 16. Изотопия H^1_t на торе

2. Поворот сепаратрисы седла σ_2.

Рассмотрим фундаментальную область $K = \left[\pi(0), \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$ ограничения диффеоморфизма f_0 на $V = \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$. Положим $\hat{V} = V/f_0$. Тогда $\hat{V}$ – двумерный тор, полученный из K отождествлением границ в силу отображения f_0. Обозначим через $q : V \to \hat{V}$ естественную проекцию. Положим $\hat{\gamma}_2 = q(W^u_{\sigma_2} \cap V)$ и $\hat{\gamma}_1 = q(W^s_{\sigma_1} \cap V)$. Поскольку диффеоморфизм H_t при всех $t \in [0,1]$ совпадает с f_0 на кольце $\left[\pi(-\frac{1}{4}), \pi\left(\frac{1}{8}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$, то корректно определена окружность $\hat{\gamma}_p = q(\gamma_p \cap K)$.

Положим $W = \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \times \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ и $\hat{W} = p(W)$. По построению окружность $\hat{\gamma}_p$ делит кольцо $\hat{W}$ на два кольца, замыкания которых обозначим через $\hat{W}_1, \hat{W}_2$, полагая, что $\hat{\gamma}_1 \subset \hat{W}_1$ и $\hat{\gamma}_2 \subset \hat{W}_2$ (см. рисунок 17).

Выберем гладкую не гомотопную нулю кривую $\hat{\gamma} \subset int\,\hat{W}_1$, трансверсальную проекции сильно устойчивого слоения седло-узловой точки. Такая кривая всегда существует, поскольку проекция каждого слоя этого слоения является кривой, накручивающейся на узел $\hat{\gamma}_1$ (см. рисунок 17). Согласно работе [31], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h}_1 : \hat{V} \to \hat{V}$ такой, что $\hat{h}_1(\hat{\gamma}_2) = \hat{\gamma}$.

Для $x_i \in [-\frac{1}{4}; 0]$ положим $K_i = [\pi(x_i); (\pi(\bar{\phi}_0^{-1}(x_i))] \times \mathbb{S}^1$. Выберем открытое покрытие $D = \{D_1, \ldots, D_{k_1}\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar{D}_i$ множества $q^{-1}(D_i)$ является подмножеством K_i для некоторых $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$. Согласно лемме о фрагментации [3] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k_1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

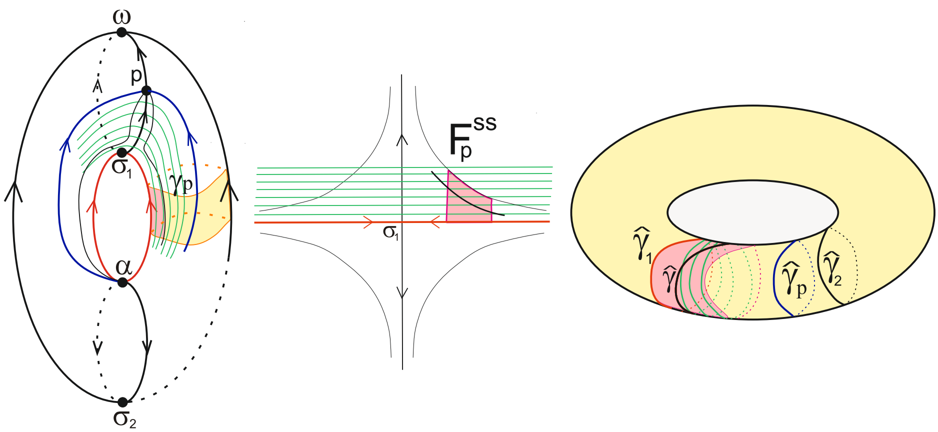


Рис. 17. Выбор кривой $\hat{\gamma}$

i) для каждого $i \in \{1, \dots, k_1\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{w}_{i,t}\}$, тождественная вне D_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat{w}_i$;

ii) $\hat{h}_1 = \hat{w}_1 \dots \hat{w}_{k_1}$.

Пусть $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, который совпадает с $(q|_{K_i})^{-1}\hat{w}_{i,t}q$ на K_i и совпадает с тождественным отображением вне K_i. Положим

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{k_1,t} f_0, \quad G^1_t = \begin{cases} \zeta_{2t},\ 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ \zeta_1,\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} .$$

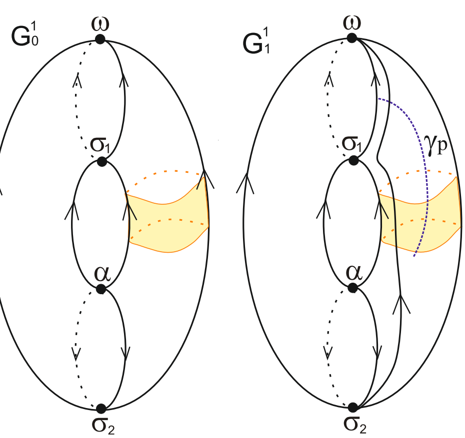


Рис. 18. Изотопия G^1_t на торе

3. Объединение изотопий H^1_t и G^1_t.

Определим гладкую дугу $\Gamma_t^1:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, $t\in[0,1]$ формулой (см. рисунок 19):

$$\Gamma_t^1(z,w)=\begin{cases}H_t^1(z,w), z=\pi(x), x\in\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ w\in\mathbb{S}^1,\\ G_t^1(z,w), z=\pi(x),\ x\in\left(-\frac{1}{4},0\right),\ w\in\mathbb{S}^1,\\ f_0(z,w), z=\pi(x),\ x\in\left[-\frac{5}{8},-\frac{1}{4}\right]\cup[0;\frac{1}{8}],\ w\in\mathbb{S}^1\end{cases}.$$

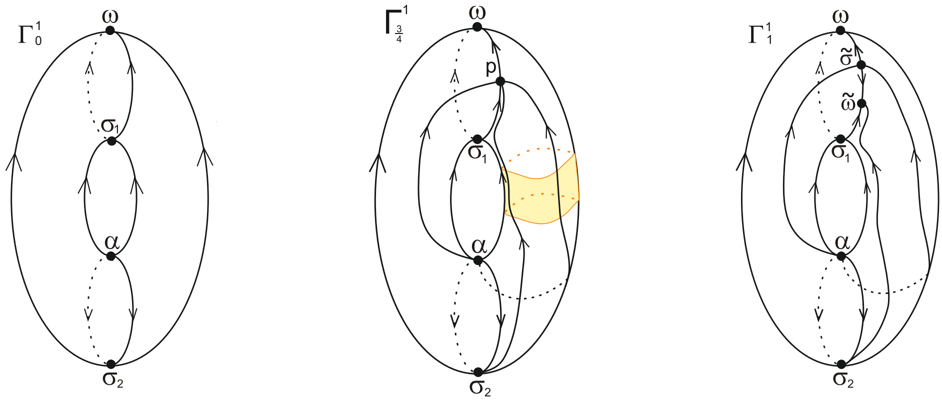


Рис. 19. Изотопия Γ_t^1 на торе

Шаг 2. Вторая седло-узловая бифуркация.

1. Слияние седловой и узловой точек.

Для всех $t\in[0;1]$ положим $\bar\eta_t^2(x)=t\bar g_2(x)+(1-t)\bar g_1(x), x\in\mathbb{R}$ и

$$\bar\eta_{t,\tau}^2(x)=(1-\tau)\bar\eta_t^2(x)+\tau\bar\phi_0(x),\ x\in\mathbb{R},\ t\in[0,1],\ \tau\in[0,1].$$

Определим гладкую дугу $H_t^2:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, $t\in[0,1]$ формулой:

$$H_t^2(z,w)=\begin{cases}(\phi_0(z),\eta^2_{t,|8x-2|}(z)), z=\pi(x),\ x\in\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ w\in\mathbb{S}^1,\\ \Gamma_1(z,w), z=\pi(x),\ x\in\left(-\frac{5}{8},\frac{1}{8}\right),\ w\in\mathbb{S}^1\end{cases}.$$

Дуга H_t^2 реализует слияние стока $\tilde\omega$ и седла σ_1 в седло-узловую точку $\tilde p$ и дальнейшее ее исчезновение. Обозначим через $\beta_{\tilde p}$ границу устойчивого многообразия седло-узла $\tilde p$.

2. Поворот сепаратрисы седла σ_2.

Поскольку диффеоморфизм H_t^2 при всех $t\in[0,1]$ совпадает с f_0 на кольце K, то корректно определены окружности $\hat\beta_2=q(W^u_{\sigma_2}\cap K)$, $\hat\beta_1=q(W^s_{\tilde\sigma}\cap K)$ и $\hat\beta_{\tilde p}=q(\beta_{\tilde p}\cap K)$. Положим $\hat W_3$ окрестность кривой $\hat\beta_1$, тогда выберем гладкую не гомотопную нулю кривую $\hat\gamma\subset\hat W_3$, трансверсальную проекции сильно устойчивого слоения седло-узловой точки. Такая кривая всегда существует, поскольку проекция каждого слоя этого слоения является кривой, накручивающейся на узел $\hat\beta_1$ (строим аналогично пункту 2 шага 1).

Согласно работе [31], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat h_2:\hat V\to\hat V$ такой, что $\hat h_2(\hat\beta_2)=\hat\beta$ и $\hat h_2(\hat\beta_1)=\hat\beta_1$.

Выберем открытое покрытие $U=\{U_1,\dots,U_{k_2}\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar U_i$ множества $q^{-1}(U_i)$ является подмножеством K_i для некоторых

$x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$. Согласно лемме о фрагментации [3] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

i) для каждого $i \in \{1, \dots, k_2\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{v}_{i,t}\}$, тождественная вне U_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat{v}_i$;

ii) $\hat{h}_2 = \hat{v}_1 \dots \hat{v}_{k_2}$.

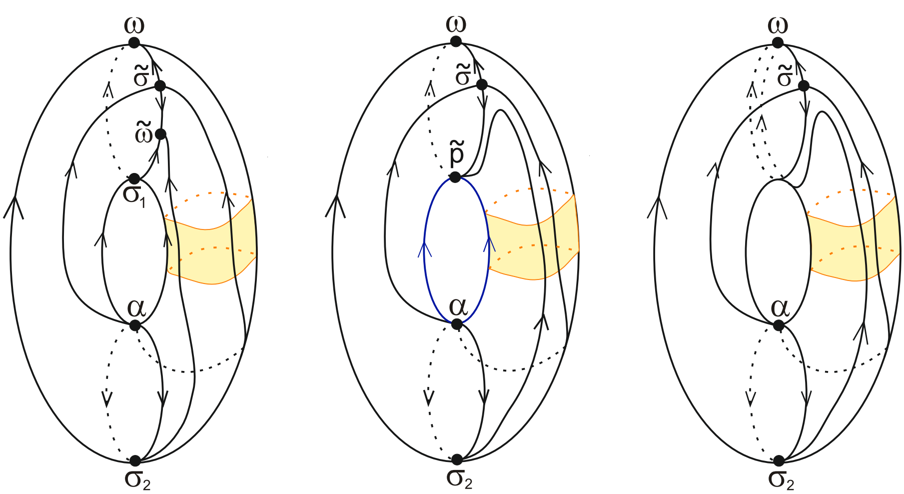
Пусть $v_{i,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, который совпадает с $(q|_{K_i})^{-1}\hat{v}_{i,t}q$ на K_i и совпадает с тождественным отображением вне K_i. Положим

$$\xi_t = v_{1,t} \dots v_{k_2,t}\Gamma_1, \quad G_t^2 = \begin{cases} \xi_{2t}, \; 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ \xi_1, \; \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

3. Объединение изотопий H_t^2 и G_t^2.

Определим гладкую дугу $\Gamma_t^2 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой (см. рисунок 19):

$$\Gamma_t^2(z,w) = \begin{cases} H_t^2(z,w), z = \pi(x), \; x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \; w \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^2(z,w), z = \pi(x), \; x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), \; w \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(z,w), z = \pi(x), \; x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup [0; \frac{1}{8}], \; w \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$



а) $t = 0$ б) $t = \frac{1}{2}$ б) $t = 1$

Рис. 20. Изотопия Γ_t^2 на торе.

В силу леммы 6.1 диффеоморфизм Γ_1^2 можно соединить дугой без бифуркаций $H_{\Gamma_1^2,t}$ с диффеоморфизмом f_{J_1}.

Обозначим через $H_{n,n+1,t}$ дугу с двумя седло-узловыми бифуркациями, соединяющую диффеоморфизмы f_{J_n}, $f_{J_{n+1}}$ и заданную формулой

$$H_{n,n+1,t} = \hat{J}_n H_{0,1,t} \hat{J}_n^{-1}.$$

8.3. Алгоритм построения дуги $H_{J,t}$. В этом разделе, используя построенные выше модельные дуги, мы докажем следующую лемму.

Лемма 8.2. *Диффеоморфизм f_J соединяется устойчивой дугой $H_{J,t}$ с конечным числом типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций с диффеоморфизмом f_0.*

Доказательство. Пусть $J = \begin{pmatrix} \mu^1 & \mu^2 \\ \nu^1 & \nu^2 \end{pmatrix}$ – унимодулярная целочисленная матрица такая, что $\mu^1 \geqslant \mu^2 \geqslant 0$ и $\nu^1 > \nu^2$, если $\mu^1 = \mu^2$. Рассмотрим следующие возможности для матрицы J: 1) $\mu^2 = 0$; 2) $\mu^1 = \mu^2 = 1$; 3) $\mu^2 > \mu^1 > 0$. Построим дугу $H_{J,t}$ в каждом из случаев отдельно.

В случае 1) $J = J_n$. Если $n > 0$, то $H_{J_n,t} = H_{n-1,n,1-t} * \cdots * H_{0,1,1-t}$ – искомая дуга. Если $n < 0$, то $H_{J_n,t} = \hat{J}_n H_{J_{-n},1-t} \hat{J}_n^{-1}$ – искомая дуга.

В случае 2) $H_{J,t} = \hat{J} H_{J_{-1},1-t} \hat{J}^{-1} * H_{J_{\nu^2},t}$ – искомая дуга.

В случае 3) применение алгоритма Евклида к паре μ_1, μ_2 порождает последовательность натуральных чисел $n_1, \dots, n_m$, $k_1, \dots, k_m$ таких, что $\mu^1 = n_1\mu^2 + k_1$, $\mu^2 = n_2 k_1 + k_2$, $k_1 = n_3 k_2 + k_3, \dots, k_{m-2} = n_m k_{m-1} + k_m$, где $k_{m-1} = 1$, $k_m = 0$. Положим $k_{-1} = \mu^1$, $k_0 = \mu^2$. Тогда последовательность $k_{-1}, k_0, k_1, \dots, k_m$ удовлетворяет рекурентному соотношению

$$k_{i+1} = n_{i+1} k_i - k_{i-1},\ i = 0, ..., m-1.$$

Положим $l_{-1} = \nu^1$, $l_0 = \nu^2$ и определим последовательность $l_{-1}, l_0, l_1, \dots, l_m$ рекурентным соотношением

$$l_{i+1} = n_{i+1} l_i - l_{i-1},\ i = 0, ..., m-1.$$

Положим $L_i = \begin{pmatrix} k_{i-1} & k_i \\ l_{i-1} & l_i \end{pmatrix}, i = 0, ..., m$. Тогда дуга $F_{i,t} = \hat{L}_{i-1} H_{J_{-n_i},t} \hat{L}_{i-1}^{-1}$, $i = 1, ..., m$ соединяет диффеоморфизмы $f_{L_{i-1}}$ и f_{L_i} и содержит $2n_i$ некритических седло-узловых бифуркаций. Поскольку $f_{L_m} = f_{J_{l_{m-1}}}$, то $H_{J,t} = F_{1,t} * ... * F_{m,t} * H_{J_{l_{m-1}}}$ – искомая дуга.

Список литературы

[1] V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov, “On some global bifurcations associated with the disappearance of a saddle-node fixed point”, *Doc. USSR Academy of Sciences*, **219**:6 (1974), 1281–1284.

[2] V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov, “On small periodic disturbances of autonomous systems”, *Doc. USSR Academy of Sciences*, **214**: 4 (1974), 739–742.

[3] A. Banyaga, “On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms”, *Topology*, 16 (1977), 279–283.

[4] P. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46.

[5] A.N. Bezdenezhykh, V.Z. Grines, “Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds”, *I. Sel. Math. Sov.*, **11**:1 (1992), 1–11.

[6] Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, О.В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Труды МИ РАН*, 256 (2007), 54–69.

[7] В.З. Гринес, О.В. Починка, “О простом изотопическом классе диффеоморфизма “источник-сток” на 3-сфере”, *Математические заметки*, **94**:6 (2013), 828–845.

[8] G. Fleitas, “Replacing tangencies by saddle-nodes”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **8**:1 (1977), 47–51.

[9] J. Franks, “Necessary conditions for the stability of diffeomorphisms”, *Trans. A. M. S.*, 158 (1971), 301–308.

[10] И.М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М. Наука, 1971, 273 с.

[11] В. З. Гринес, С.Х. Капкаева, О.В. Починка, “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **205**:10 (2014), 19–46.

[12] В. Гринес, В. Медведев, О. Починка, Е. Жужома, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Труды МИАН им. В.А. Стеклова*, 271 (2010), 111–133.

[13] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Switzerland, Springer International Publishing, 2016.

[14] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer 1976, reprint 1997.

[15] M. W. Hirsh, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer Lecture Notes in Math., 1977, 583 c.

[16] V.I. Lukyanov, L.P. Shilnikov, “On some bifurcations of dynamical systems with homoclinic structures”, *Doc. USSR Academy of Sciences*, **243**: 1 (1978), 26–29.

[17] S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs”, *Inventiones mathematical*, 51 (1979), 1–7.

[18] J. Milnor *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton university press, 1965.

[19] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The Univ. Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.

[20] Дж. Милнор, *Теория Морса*, М.: Мир, 1965, 184 с.

[21] J. Munkres, “Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms”, *Ann. 2110 Math.* **72**: 3 (1960), 521–554.

[22] S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, “Stable arcs of diffeomorphisms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*,**82**: 3 (1976), 499–502 .

[23] S.E. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publications mathematiques de l' I.H.E.S*, 57 (1983), 5–71.

[24] S. Newhouse, M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows”, *Asterisque*, 31 (1976), 15–41.

[25] E. Nozdrinova, “Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **14**:4 (2018), 543–551.

[26] E. Nozdrinova, O. Pochinka “On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere”, *Journal of Physics: Conference Series*, **990**:1 (2018),1–7.

[27] E. Nozdrinova, O. Pochinka, “Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **41**:3 (2021), 1101–1131.

[28] Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, 1998, 301 с.

[29] J. Palis, C. Pugh, “Fifty problems in dynamical systems”, *Lecture Notes in Math.*, 468 (1975), 345–353.

[30] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[31] D. Rolfsen, “Knots and links”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:5 (1977), 931–935.

[32] Smale S. Diffeomorphisms of the 2-sphere. Proc. AMS. (1959), Vol. 10, pp. 621–26.

Е. В. Ноздринова (E. V. Nozdrinova)
Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
E-mail: maati@mail.ru

Поступила в редакцию
30.04.2021

О. В. Починка (O. V. Pochinka)
Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru