В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, *Матем. заметки*, 2022, том 111, выпуск 4, 616–619

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13351

Математические заметки

Том 111 выпуск 4 апрель 2022

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич

Ключевые слова: индекс Морса, градиентно-подобные потоки, топологическая классификация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13351

1. Введение и формулировка результатов. Напомним, что поток f^t, заданный на гладком замкнутом многообразии, называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально. В работе [1] Смейл доказал, что на любом замкнутом многобразии существует функция Морса (гладкая функция, все критические точки которой невырождены) и ее градиентный поток при некотором выборе метрики является градиентно-подобным. Поэтому градиентно подобный поток существует на любом замкнутом многобразии. В [2] Смейл также доказал, что для градиентно-подобных потоков верны неравенства Морса, связывающие структуру неблуждающего множества потока с топологией несущего многообразия. Как показывает предложение 1 ниже, эта связь становится наиболее явной при некоторых дополнительных требованиях.

Будем говорить, что градиентно-подобный поток f^t принадлежит *классу* $G(M^n)$, где M^n – связное замкнутое ориентируемое многообразие размерности $n \geqslant 3$, если выполнены следующие условия:

(a) индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия) любого седлового состояния равновесия потока f^t равен либо 1, либо $n-1$;

(b) инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются.

Для потока $f^t \in G(M^n)$ обозначим через ν_{f^t} и μ_{f^t} число седловых и узловых состояний равновесия соответственно и положим

$$g_{f^t} = \frac{\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2}{2}\,.$$

Везде ниже $\mathscr{S}^n_g$ обозначает многобразие, гомеоморфное сфере $\mathbb{S}^n$ при $g=0$ и связной сумме копий многобразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ при $g>0$.

Предложение 1. *Пусть $f^t \in G(M^n)$, $n \geqslant 2$. Тогда M^n гомеоморфно $\mathscr{S}^n_{g_{f^t}}$.*

Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00010).

Для $n=2$ предложение 1 непосредственно следует из работы [2]. Для $n\geqslant 3$ предложение 1 следует из работ [3], [4], в которых был получен его аналог для диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических кривых.

Теорема. *Пусть f^t – градиентно-подобный поток, заданный на многообразии $\mathscr{S}_g^n$, $g\geqslant 0$, $n\geqslant 4$. Если инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия потока f^t не пересекаются, то все седловые состояния равновесия имеют индекс Морса, равный 1 или $n-1$, т.е. $f^t\in G(\mathscr{S}_g^n)$. При этом существует $k\geqslant 0$ такое, что $\nu_{f^t}=2g+k$ и $\mu_{f^t}=k+2$.*

Другими словами, теорема утверждает, что для многообразий $\mathscr{S}_g^n$ с $n\geqslant 4$ условие (b) влечет условие (a).

Для сферы справедливость теоремы доказана в работе [5], где были получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков в классе $G(S^n)$, $n\geqslant 3$. Теорема позволит получить топологическую классификацию потоков из класса $\mathscr{S}_g^n$, $g>0$ в комбинаторных терминах с помощью методов работ [5], [6].

2. Гомологии связных сумм многообразий, гомеоморфных $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Везде ниже мы рассматриваем гомологии только с целыми коэффициентами. Наша цель вычислить гомологии $H_i(\mathscr{S}_g^n)=0$ для $i\in\{1,\dots,n-1\}$, $n\geqslant 4$, см. следствие ниже.

Будем говорить, что топологическое пространство X принадлежит классу $\mathscr{Z}$, если группы его сингулярных гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) являются свободными абелевыми группами конечных рангов, отличными от нуля только для конечного числа размерностей. Положим $\beta_i(X)=\operatorname{rank}H_i(X)$ для $i\geqslant 0$. Тогда корректно определена конечная сумма

$$p_X(t)=\sum_i\beta_i(X)t^i,$$

которая называется *многочленом Пуанкаре* пространства X.

В частности, если $X,Y\in\mathscr{Z}$, то из формулы Кюннета следует, что

$$H_i(X\times Y)=\bigoplus_{a+b=i}H_a(X)\otimes H_b(Y)$$

для всех $i\geqslant 0$ (см., например, [7; следствие (29.11.1)]). Так как группы гомологий X и Y предполагаются свободными абелевыми, то

$$\operatorname{rank}(H_a(X)\otimes H_b(Y))=\operatorname{rank}H_a(X)\operatorname{rank}H_b(Y),$$

откуда непосредственно вытекает следующее равенство:

$$p_{X\times Y}(t)=p_X(t)\,p_Y(t). \tag{1}$$

Предложение 2. *Пусть X, Y – связные замкнутые ориентируемые многообразия размерности $n\geqslant 2$. Тогда*

$$H_0(X\sharp Y)=H_n(X\sharp Y)=\mathbb{Z}\ \text{и}\ H_i(X\sharp Y)=H_i(X)\oplus H_i(Y)\qquad\text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

В частности, если $X,Y\in\mathscr{Z}$, то $X\sharp Y\in\mathscr{Z}$ и

$$p_{X\sharp Y}(t)=1+\sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i(X)+\beta_i(Y))t^i+t^n. \tag{2}$$

Доказательство. Тождества $H_0(X\sharp Y)=H_n(X\sharp Y)=\mathbb{Z}$ следуют из того, что $X\sharp Y$ является связным ориентируемым многообразием. Докажем остальные утверждения.

Пусть $D_1^n\subset X$, $D_2^n\subset Y$ – замкнутые n-диски, $\pi\colon(X\setminus\operatorname{int}D_1)\cup(Y\setminus\operatorname{int}D_2)\to X\sharp Y$ – естественная проекция,

$$X'=\pi(X\setminus\operatorname{int}D_1),\quad Y'=\pi(Y\setminus\operatorname{int}D_2),\qquad\mathbb{S}^{n-1}=X'\cap Y'\subset X\sharp Y.$$

Покажем, что $H_n(X')=0$ и что для каждого $1\leqslant i\leqslant n-1$ группа $H_i(X\sharp Y)$ изоморфна группе $H_i(X')\oplus H_i(Y')$. Тогда из того, что X гомеоморфно $X\sharp\mathbb{S}^n$, будет следовать, что группа $H_i(X)$ изоморфна группе $H_i(X')\oplus H_i(D_1)$, которая в свою очередь изоморфна $H_i(X')$. Это докажет, что группа $H_i(X\sharp Y)$ изоморфна $H_i(X)\oplus H_i(Y)$ для $1\leqslant i\leqslant n-1$, откуда непосредственно будет вытекать формула (2).

Рассмотрим точную последовательность Майера–Вьеториса для $(X\sharp Y; X', Y')$ (см., например, [7; (17.7)]):

$$\cdots\to H_i(\mathbb{S}^{n-1})\xrightarrow[z\mapsto(\alpha_i(z),\beta_i(z))]{\mathbf{A}_i}H_i(X')\oplus H_i(Y')\xrightarrow{\mathbf{B}_i}H_i(X\sharp Y)\xrightarrow{\partial_i}H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})\xrightarrow{\mathbf{A}_{i-1}}\cdots,$$

где α_i и β_i индуцированы вложениями $\mathbb{S}^{n-1}\subset X'$ и $\mathbb{S}^{n-1}\subset Y'$ соответственно. Тогда из того, что $H_i(\mathbb{S}^{n-1})=0$ при $i\neq 0,n-1$, получаем, что $\mathbf{B}_{n-1}$ – эпиморфизм, $\mathbf{B}_i$ – изоморфизм при $2\leqslant i\leqslant n-2$, а $\mathbf{B}_1$ – мономорфизм.

С другой стороны, так как $\mathbb{S}^{n-1}=\partial X'=\partial Y'$, то α_{n-1}, β_{n-1}, а значит, и $\mathbf{A}_{n-1}$ нулевые. Поэтому $\mathbf{B}_{n-1}$ инъективен и, следовательно, является изоморфизмом. Кроме того, так как $\mathbb{S}^{n-1}$, X' и Y' связны, то α_0 и β_0 – изоморфизмы. Поэтому $\mathbf{A}_0$ инъективен. Следовательно, $\mathbf{B}_1$ сюръективен, а значит, является изоморфизмом.

Наконец, так как $\mathbf{A}_{n-1}=0$, то $\partial_n\colon\mathbb{Z}=H_n(X\sharp Y)\to H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})=\mathbb{Z}$ сюръективен, а значит, является изоморфизмом. Следовательно, $\mathbf{A}_n\colon 0=H_n(\mathbb{S}^{n-1})\to H_n(X')\oplus H_n(Y')$ сюръективен. Поэтому $H_n(X')=H_n(Y')=0$.

Следствие. *Группа $H_i(\mathscr{S}_g^n)$, $n\geqslant 3$, тривиальна при $2\leqslant i\leqslant n-2$, изоморфна $\mathbb{Z}^g$ при $i\in\{1,n-1\}$ и изоморфна $\mathbb{Z}$ при $i\in\{0,n\}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{S}^k\in\mathscr{Z}$ для $k\geqslant 1$ и $p_{\mathbb{S}^k}(t)=1+t^k$. Поэтому из формулы (1) следует, что

$$p_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1}(t)=p_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)p_{\mathbb{S}^1}(t)=(1+t^{n-1})(1+t)=1+t+t^{n-1}+t^n.$$

Тогда в силу формулы (2)

$$p_{\mathscr{S}_g^n}(t)=1+gt+gt^{n-1}+t^n$$

при $g\geqslant 0$. Это и означает, что

$$H_0(\mathscr{S}_g^n)=H_n(\mathscr{S}_g^n)=\mathbb{Z},\qquad H_1(\mathscr{S}_g^n)=H_{n-1}(\mathscr{S}_g^n)=\mathbb{Z}^g,\qquad H_i(\mathscr{S}_g^n)=0,\quad 2\leqslant i\leqslant n-2.$$

3. Индекс пересечения. Пусть X, Y – гладкие замкнутые ориентированые подмногообразия гладкого ориентированого многообразия M^n, пересекающиеся трансверсально, причем $\dim X+\dim Y=n$. Тогда пересечение $X\cap Y$ состоит из конечного числа точек. Каждой точке $p\in X\cap Y$ припишем число j_p, равное 1 (соответственно -1), если ориентация касательного пространства T_xM^n совпадает (соответственно противоположна) с ориентацией, порождаемой ориентацией касательных пространств T_pX, T_pY. Число, равное сумме

$$\sum_{p\in X\cap Y}j_p,$$

называется *индексом пересечения* многообразий X и Y.

Следующее утверждение вытекает из [8; теорема I, § 70].

Предложение 3. *Пусть S^p, S^q – сферы размерностей p, q, гладко вложенные в ориентируемое гладкое многообразие M^n, $p+q=n$, и сфера S^q гомологична нулю. Тогда индекс пересечения сфер S^p, S^q равен нулю.*

4. Доказательство теоремы. Пусть f^t – градиентно-подобный поток без гетероклинических пересечений, заданный на многообразии $\mathscr{S}_g^n$, $g>0$. Покажем, что множество его седловых состояний равновесия состоит из точек, индексы Морса которых равны 1 и $n-1$. Предположим противное: пусть f^t – поток, удовлетворяющий условиям предложения и его неблуждающее множество содержит седловое состояние равновесия σ, индекс Морса которого i принадлежит множеству $\{2,\dots,n-2\}$. Так как по предположению инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются, то в силу [9; теорема 2.1] найдется единственная пара α, ω источникового и стокового состояний равновесия такая, что

$$\operatorname{cl} W^s_\sigma = W^s_\sigma \cup \alpha, \qquad \operatorname{cl} W^u_\sigma = W^u_\sigma \cup \omega.$$

Следовательно, замыкания устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий точки σ являются сферами размерностей $n-i$ и i соответственно, гладко вложенными во всех точках, кроме, может быть, точек α, ω. Эти сферы трансверсально пересекаются в единственной точке σ, поэтому их индекс пересечения равен по модулю единице. С другой стороны, согласно следствию

$$H_i(\mathscr{S}_g^n) = H_{n-i}(\mathscr{S}_g^n) = 0, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2.$$

Поэтому в силу предложения 3 индекс пересечения сфер $\operatorname{cl} W^u_\sigma$ и $\operatorname{cl} W^s_\sigma$ должен быть равен нулю. Полученное противоречие доказывает отсутствие седлового состояния равновесия с индексом Морса $i \in \{2,\dots,n-2\}$.

Пусть c_i – число неподвижных точек потока f^t индекса i. Тогда $\nu_{f^t} = c_1 + c_{n-1}$ и $\mu_{f^t} = c_0 + c_n$. Кроме того, в силу неравенств Морса, доказанных в [5; теорема 4.1], $c_i \geqslant \beta_i(\mathbb{S}_g^n)$. В силу следствия имеем $c_1, c_{n-1} \geqslant g$, а значит, $\nu_{f^t} = 2g+k$ для некоторого $k \geqslant 0$. Поэтому

$$\mu_{f^t} = \nu_{f^t} + 2 - 2g = k+2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Smale, *Ann. of Math.* (2), **74** (1961), 199–206. **[2]** S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49. **[3]** C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, *Topology Appl.*, **117** (2002), 335–344. **[4]** V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, *J. Math. Sci.*, **208**:1 (2015), 81–90. **[5]** С. Ю. Пилюгин, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254. **[6]** V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, D. Malyshev, *Nonlinearity*, **33**:12 (2020), 7088–7113. **[7]** M. Greenbergrvin, J. Harper, *Algebraic Topology. A First Course*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1981. **[8]** H. Seifert, W. Threlfall, *A Text Book of Topology*, Academic Press, New York, 1980. **[9]** S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа
экономики» (Нижегородский филиал)
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило
08.11.2021
Принято к публикации
15.11.2021

Е. Я. Гуревич
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа
экономики» (Нижегородский филиал)
E-mail: egurevich@hse.ru