Математические заметки

Том 110 выпуск 6 декабрь 2021

УДК 512.7

Автоморфизмы ненормальных торических многообразий

И. А. Болдырев, С. А. Гайфуллин

В работе получены критерии гибкости, жесткости и почти жесткости ненормальных аффинных торических многообразий. Для жестких и почти жестких торических многообразий явно вычислены группы автоморфизмов.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: торические многообразия, автоморфизмы, гибкие многообразия, жесткие многообразия.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12960

1. Введение. Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ будем обозначать $\mathbb{G}_a$. Рассмотрим неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X над полем $\mathbb{K}$. Если алгебраический тор $T \cong (\mathbb{K}^\times)^n$ действует на X с открытой орбитой, то X называется *торическим*. Зачастую в понятие торического многообразия вкладывают еще условие нормальности. Мы же не предполагаем X нормальным.

Мы будем изучать группу автоморфизмов многообразия X. В работе [1] введена подгруппа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ в группе регулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Подгруппа $\mathrm{SAut}(X)$ по определению порождена всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными $\mathbb{G}_a$. Точка $x \in X$ называется *гибкой*, если касательное пространство T_xX порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-подгрупп. Это эквивалентно тому, что орбита $\mathrm{SAut}(X)x$ открыта в X. Если все гладкие точки X являются гибкими, то многообразие X называется *гибким*. Напомним, что действие группы G на множестве называется *бесконечно транзитивным*, если для любых двух конечных наборов $(a_1,\dots,a_m)$, $a_i \neq a_j$, и $(b_1,\dots,b_m), b_i \neq b_j$, одинаковой длины существует элемент $g \in G$ такой, что $g\cdot a_i = b_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Интерес к гибким многообразиям во многом обусловлен следующей теоремой.

Теорема 1 [1; теорема 0.1]. *Для неприводимого аффинного многообразия X размерности $\geqslant 2$ следующие условия эквивалентны*:

(i) *группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует транзитивно на* X^{reg};

(ii) *группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует бесконечно транзитивно на* X^{reg};

(iii) *многообразие* X *гибко*.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00172).

Есть множество работ, которые доказывают гибкость многообразий того или иного класса, например, [1]–[5]. Один из первых примеров гибких многообразий дают невырожденные (т.е. без непостоянных обратимых регулярных функций) нормальные торические многообразия, см [2]. С другой стороны, если отказаться от условия нормальности, то торическое многообразие может оказаться не гибким. Например, торическая кривая $\{x^2 = y^3\}$ не является гибкой. Основной результат данной работы состоит в том, что получен критерий гибкости не обязательно нормальных торических многообразий. Ответ сформулирован как в терминах комбинаторного описания торических многообразий (теорема 1 и следствия 2 и 4), так и в геометрических терминах (следствие 1). Заметим, что теорема 1 обобщает результаты [2], так как в случае, когда торическое многообразие нормально, теорема 1 дает в точности условие невырожденности многообразия.

Гибкие многообразия соответствуют ситуации, когда группа $\mathrm{SAut}(X)$ большая и действует на X^{reg} транзитивно. В некотором смысле противоположная ситуация имеет место, когда группа $\mathrm{SAut}(X)$ тривиальна. В этом случае X называется *жестким* многообразием. Жесткие многообразия характерны тем, что в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ существует единственный максимальный алгебраический тор; см. [6; теорема 2.1]. Иногда это дает возможность явно описать группу автоморфизмов многообразия X, см. [6], [7]. Мы получаем критерий жесткости аффинного торического многообразия (теорема 2), а также явное описание групп автоморфизмов таких многообразий (теорема 3). Группа автоморфизмов жесткого торического многообразия X изоморфна полупрямому произведению тора на дискретную подгруппу $S(X)$, которую мы называем *группой симметрий моноида весов* многообразия X; см. определение 2. Если многообразие X не имеет непостоянных обратимых функций, то группа $S(X)$ конечна. Таким образом, группа автоморфизмов жесткого торического многообразия без непостоянных обратимых функций – это конечное расширение тора.

Еще один класс торических многообразий, для которого мы опишем группу автоморфизов – это аффинные торические почти жесткие многообразия. Многообразие X называется *почти жестким*, если оно не жесткое и подгруппа $\mathrm{SAut}(X)$ специальных автоморфизмов является абелевой. В данной работе получен критерий почти жесткости аффинного торического многообразия (теорема 4), а также описана группа автоморфизмов аффинного почти жесткого торического многообразия, как полупрямое произведение трех подгрупп (теорема 5).

2. Локально нильпотентные дифференцирования. Алгебраические $\mathbb{G}_a$-подгруппы в группе автоморфизмов аффинного многообразия X тесно связаны с локально нильпотентными дифференцированиями (ЛНД) алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$. Линейное отображение $\delta\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ называется *дифференцированием* алгебры $\mathbb{K}[X]$, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g.$$

Дифференцирование δ называется *локально нильпотентным*, если для любого $f \in \mathbb{K}[X]$ найдется такое натуральное число n, что $\delta^n(f) = 0$. Подробные сведения о ЛНД можно найти в книге [8]. Для данного ЛНД δ можно рассмотреть линейный оператор на $\mathbb{K}[X]$, который называется *экспонентой* δ:

$$\exp(\delta)(f) = f + \delta(f) + \frac{\delta^2(f)}{2!} + \frac{\delta^3(f)}{3!} + \cdots .$$

Поскольку δ локально нильпотентно, сумма в определении экспоненты конечна. Оператор $\exp(\delta)$ задает автоморфизм $\mathbb{K}[X]$ и, значит, соответствует автоморфизму многообразия X. Если функция f лежит в ядре ЛНД δ, то отображение $f\delta$ также ЛНД; оно называется *репликой* дифференцирования δ. Заметим, что константы лежат в ядре каждого ЛНД, а значит, для любого ЛНД δ операторы $t\delta$, $t \in \mathbb{K}$ также являются ЛНД. Используя это, каждому ЛНД δ можно поставить в соответствие $\mathbb{G}_a$-подгруппу $\mathcal{H}_\delta = \{\exp(t\delta) \mid t \in \mathbb{K}\}$ в $\operatorname{Aut}(\mathbb{K}[X])$. Более того, так получаются все алгебраические подгруппы, изоморфные $\mathbb{G}_a$.

Пусть на алгебре $\mathbb{K}[X]$ задана градуировка некоторой абелевой группой G:

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}[X]_g.$$

Тогда дифференцирование δ алгебры $\mathbb{K}[X]$ называется *G-однородным степени g_0*, если для любого $g \in G$ и любого однородного $f \in \mathbb{K}[X]_g$ выполнено $\delta(f) \in \mathbb{K}[X]_{g+g_0}$. В случае торического многообразия X алгебра $\mathbb{K}[X]$ обладает естественной градуировкой группой характеров тора. В п. 4 описано соответствие между однородными относительно этой градуировки ЛНД и так называемыми корнями Демазюра. Эти дифференцирования будут играть ключевую роль в дальнейшем повествовании. Если фиксирована $\mathbb{Z}$-градуировка $\mathbb{K}[X]$, то любое ЛНД ∂ раскладывается в сумму однородных дифференцирований $\partial = \sum_{i=l}^{k} \partial_i$ при этом крайние компоненты ∂_l и ∂_k – это ЛНД; см. [9; раздел 3]. Отсюда следует, что если задана $\mathbb{Z}^n$-градуировка, то любое ЛНД раскладывается в сумму однородных дифференцирований, выпуклая оболочка степеней полученных дифференцирований – это многогранник, а дифференцирования, соответствующие его вершинам, локально нильпотентны.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Группа $\operatorname{SAut}(X)$ коммутативна тогда и только тогда, когда у всех локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[X]$ ядра совпадают.*

Доказательство. Допустим, что есть два ЛНД δ_1 и δ_2 алгебры $\mathbb{K}[X]$, ядра которых не совпадают. Можно считать, что существует $f \in \operatorname{Ker}(\delta_1) \setminus \operatorname{Ker}(\delta_2)$. Докажем, что не все ЛНД перестановочны между собой. Если $\delta_1 \circ \delta_2 \neq \delta_2 \circ \delta_1$, то все доказано. Иначе рассмотрим следующие два ЛНД: $f\delta_1$ и δ_2. Имеем

$$(\delta_2 \circ f\delta_1)(g) = \delta_2(f)\delta_1(g) + f(\delta_2 \circ \delta_1)(g) = \delta_2(f)\delta_1(g) + (f\delta_1 \circ \delta_2)(g).$$

Если g таково, что $\delta_1(g) \neq 0$, то

$$(\delta_2 \circ f\delta_1)(g) \neq (f\delta_1 \circ \delta_2)(g).$$

Таким образом, найдутся два некоммутирующих ЛНД. Несложно видеть, что группы $\mathcal{H}_\delta$ для этих ЛНД также не коммутируют, что доказывает некоммутативность $\operatorname{SAut}(X)$.

Пусть теперь ядра всех ЛНД совпадают. Рассмотрим два ЛНД δ_1 и δ_2. Согласно [8; принцип 12] существуют такие элементы $f, g \in \operatorname{Ker}(\delta_1) = \operatorname{Ker}(\delta_2)$, что $f\delta_1 = g\delta_2$. Тогда δ_1 и δ_2 коммутируют, а значит, группы $\mathcal{H}_{\delta_1}$ и $\mathcal{H}_{\delta_2}$ коммутируют. Таким образом, $\operatorname{SAut}(X)$ порождена семейством перестановочных между собой коммутативных подгрупп. Следовательно, $\operatorname{SAut}(X)$ коммутативна. Лемма 1 доказана.

3. Аффинные торические многообразия. В этом пункте мы изложим основные факты об аффинных торических многообразиях. Более подробные сведения о торических многообразиях можно найти, например в книгах [10] и [11]. Неприводимое алгебраическое многообразие называется *торическим*, если алгебраический тор $T = (\mathbb{K}^\times)^n$ регулярно действует на нем с открытой орбитой. Действие T на X можно считать эффективным. Подчеркнем, что в определении торического многообразия мы не предполагаем, что X нормально. Нас интересует случай аффинного многообразия X. Аффинное торическое многообразие X задается конечно порожденным моноидом P весов T-полуинвариантных регулярных функций. А именно, отождествим группу характеров T со свободной абелевой группой $M = \mathbb{Z}^n$; при этом целочисленному вектору $m \in \mathbb{Z}^n$ соответствует характер χ^m. Поскольку открытая орбита в X изоморфна T, имеем вложение алгебр регулярных функций $\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[T]$. Отождествляя алгебру $\mathbb{K}[X]$ с ее образом при этом вложении, получаем следующую P-градуированную подалгебру:

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{m\in P} \mathbb{K}\chi^m \subset \bigoplus_{m\in M} \mathbb{K}\chi^m = \mathbb{K}[T].$$

Рассмотрим векторное пространство $M_\mathbb{Q} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ над полем рациональных чисел. Моноид P порождает конус $\sigma^\vee = \mathbb{Q}_{\geqslant 0}P \subset M_\mathbb{Q}$. Поскольку P конечно порожден, конус $\sigma^\vee$ является конечно порожденным конусом. То, что действие T на X эффективно, равносильно тому, что моноид P не лежит ни в какой собственной подрешетке решетки M, отсюда в частности следует, что конус $\sigma^\vee$ не лежит ни в каком собственном подпространстве пространства $M_\mathbb{Q}$. Многообразие X является нормальным тогда и только тогда, когда моноид P *насыщен*, т.е. $P = M \cap \sigma^\vee$. В случае, когда P не насыщен, моноид $P_{\mathrm{sat}} = M \cap \sigma^\vee$ будем называть *насыщением* моноида P. Элементы из $P_{\mathrm{sat}} \setminus P$ будем называть *дырками* моноида P. Введем несколько определений согласно [12].

Определение 1. Элемент p моноида P называется *точкой насыщения* моноида P, если сдвинутый конус $p + \sigma^\vee$ не содержит дырок, т.е. $(p + \sigma^\vee) \cap M \subset P$.

Грань τ конуса $\sigma^\vee$ называется *почти насыщенной*, если в ней есть точка насыщения моноида P. Иначе τ называется *нигде не насыщенной*.

Следующая лемма известна, но для удобства мы приведем ее доказательство.

Лемма 2. *Максимальная грань (весь конус $\sigma^\vee$) является почти насыщенной.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ – система порождающих моноида P. Так как множество

$$S = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \mid \lambda_i \in \mathbb{Q},\ 0 \leqslant \lambda_i < 1\}$$

является ограниченным, в нем содержится лишь конечное число элементов из M. Обозначим $S \cap M = \{b_1, \ldots, b_l\}$. Так как действие T на X эффективно, группа, порожденная P, совпадает с M. Значит, для каждого j существуют c_j и d_j из P такие, что $b_j = c_j - d_j$. Рассмотрим $d = d_1 + \cdots + d_l$. Докажем, что

$$(d + \sigma^\vee) \cap M \subset P.$$

Пусть $m \in \sigma^\vee \cap M$, что равносильно условию $d + m \in (d + \sigma^\vee) \cap M$. Поскольку векторы $a_1, \ldots, a_r$ порождают $\sigma^\vee$, элемент m представляется линейной комбинацией

$$m = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_r a_r, \qquad \mu_i \in \mathbb{Q}, \quad \mu_i \geqslant 0.$$

Обозначая через $[\,\cdot\,]$ целую часть числа, а через $\{\,\cdot\,\}$ – дробную, получаем

$$m=\sum_{i=1}^{r}[\mu_i]a_i+\sum_{i=1}^{r}\{\mu_i\}a_i.$$

Поскольку первое слагаемое лежит в M и $m\in M$, то и второе слагаемое лежит в M. Так как $\{\mu_i\}<1$, получаем, что $\sum_{i=1}^{r}\{\mu_i\}a_i\in S$. Следовательно, существует k такое, что $\sum_{i=1}^{r}\{\mu_i\}a_i=b_k$. Получаем

$$d+m=\sum_{j=1}^{l}d_j+\sum_{i=1}^{r}[\mu_i]a_i+b_k=\sum_{j\neq k}d_j+\sum_{i=1}^{r}[\mu_i]a_i+c_k\in P.$$

Лемма 2 доказана.

Решетку однопараметрических подгрупп тора T обозначим через N. Решетка N является двойственной решеткой к решетке M, между ними есть целочисленное спаривание $M\times N\to\mathbb{Z}$, которое мы будем обозначать $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$. Это спаривание продолжается по линейности до спаривания между векторными пространствами $N_{\mathbb{Q}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ и $M_{\mathbb{Q}}$. В пространстве $N_{\mathbb{Q}}$ определим конус σ, двойственный к $\sigma^{\vee}$, следующим образом:

$$\sigma=\{v\in N_{\mathbb{Q}}\mid \forall\, w\in\sigma^{\vee}:\langle w,v\rangle\geqslant 0\}.$$

Конус σ является строго острым (т.е. он не содержит ненулевых подпространств) конечно порожденным конусом.

Существует биекция между гранями размерности k конуса σ и гранями размерности $n-k$ конуса $\sigma^{\vee}$. А именно, грани $\tau\preccurlyeq\sigma$ соответствует грань

$$\widehat{\tau}=\tau^{\perp}\cap\sigma^{\vee}\preccurlyeq\sigma^{\vee}.$$

Также существует биекция между гранями размерности $n-k$ конуса $\sigma^{\vee}$ и k-мерными T-орбитами в X. Грани $\widehat{\tau}\preccurlyeq\sigma^{\vee}$ соответствует орбита, открытая в множестве нулей идеала

$$I_{\widehat{\tau}}=\bigoplus_{m\in P\setminus\widehat{\tau}}\mathbb{K}\chi^m.$$

Композиция этих биекций дает биекцию между k-мерными гранями конуса σ и k-мерными T-орбитами. Орбиту, соответствующую грани τ, будем обозначать O_τ.

В случае нормального многообразия X множество особых точек X^{sing} имеет коразмерность не менее 2, а значит, алгебры регулярных функций на всем X и на множестве гладких точек X^{reg} совпадают. В случае же ненормального многообразия эти алгебры различаются. Несмотря на то, что многообразие X^{reg} может не являться аффинным, удобно будет переходить от X к X^{reg}, так как алгебра $\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]$ устроена проще, чем $\mathbb{K}[X]$.

Лемма 3. *Пусть аффинному торическому многообразию X соответствует конус σ. Уберем у конуса σ те ребра, которые соответствуют орбитам, состоящим из особых точек, и рассмотрим конус γ, порожденный оставшимися ребрами. Тогда алгебра регулярных функций на квазиаффинном многообразии X^{reg} гладких точек – это*

$$\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]=\bigoplus_{m\in M\cap\gamma^{\vee}}\mathbb{K}\chi^m.$$

Доказательство. Поскольку многообразие X^{reg} является T-инвариантным, его алгебра функций раскладывается в прямую сумму весовых компонент. Таким образом, нужно лишь понять, какие из функций χ^m регулярны на X^{reg}. Допустим, что некоторая функция χ^{m_0} не регулярна на X^{reg}. Множество точек, где эта функция не определена, является T-инвариантным, т.е. состоит из орбит. Если удалить из X^{reg} подмножество, состоящее из всех орбит коразмерности 2, то алгебра регулярных функций не изменится. На открытой орбите все функции χ^m, $m \in M$, регулярны. А значит, функция χ^{m_0} не определена на некоторой T-орбите коразмерности 1. Итак, функция χ^m регулярна на X^{reg} тогда и только тогда, когда она регулярна на всех гладких орбитах коразмерности 1.

Многообразие X^{reg} нормально. Известная формула, см. [11; раздел 3.3], утверждает, что порядок функции χ^m на дивизоре O_ρ равен $\langle m, v_\rho\rangle$. Регулярность χ^m на X^{reg} дает условие $\langle m, v_\rho\rangle \geqslant 0$ для всех ребер ρ таких, что O_ρ состоит из гладких точек. Эти условия и задают конус $\gamma^\vee$. Лемма 3 доказана.

Иногда моноид весов обладает симметриями, что дает возможность рассмотреть некоторую дискретную подгруппу в группе автоморфизмов торического многообразия. Пусть $\varphi\colon M_\mathbb{Q} \to M_\mathbb{Q}$ – линейный оператор, причем $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, т.е. $\varphi(M) = M$. Предположим, что $\varphi(P) = P$. Оператор φ индуцирует автоморфизм $\alpha(\varphi)$ алгебры $\mathbb{K}[X]$ по формуле $\alpha(\varphi)(\chi^m) = \chi^{\varphi(m)}$. Пусть ψ – еще один линейный оператор из стабилизатора $St_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}(P)$. Легко видеть, что $\alpha(\varphi \circ \psi) = \alpha(\varphi) \circ \alpha(\psi)$. Таким образом, α – это инъективный гомоморфизм из $St_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}(P)$ в $\mathrm{Aut}(X)$.

Определение 2. Образ вложения α назовем *группой симметрий* моноида P и будем обозначать $S(X)$.

Замечание 1. Пусть конус $\sigma^\vee$ не содержит прямой, что эквивалентно тому, что конус σ не лежит ни в какой гиперплоскости и тому, что X не допускает непостоянных обратимых функций. Тогда группа $S(X)$ конечна. Это следует из того, что оператор φ должен переставлять примитивные (т.е. с взаимно простыми в совокупности координатами) векторы на ребрах конуса $\sigma^\vee$. Также группа $S(X)$ будет конечной в случае, когда $\sigma^\vee$ – прямая, поскольку в этом случае $S(X)$ изоморфна подгруппе в $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

В любом другом случае группа $S(X)$ является бесконечной дискретной группой. В самом деле, есть два варианта. Первый состоит в том, что $\sigma^\vee$ – все пространство $M_\mathbb{Q}$ размерности $n \geqslant 2$. Тогда несложно убедиться, что $P = M$ и $S(X) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Второй вариант состоит в том, что $\sigma^\vee$ содержит нетривиальное подпространство, но сам пространством не является. Обозначим через W максимальное подпространство в $\sigma^\vee$. Тогда $L = W \cap M$ – это некоторая ненулевая подрешетка в M. Фиксируем некоторый элемент $v \neq 0$ решетки N. Тогда для любого элемента $l \in L$ оператор φ_l, заданный по формуле $\varphi_l(m) = m + \langle m, v\rangle l$ обладает свойством $\varphi_l(P) = P$. Автоморфизмы $\alpha(\varphi_l)$ для всех $l \in L$ образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфную L.

4. ЛНД на аффинных торических многообразиях. Пусть Y – нормальное торическое многообразие. В работе [13] описаны все нормализуемые тором $\mathbb{G}_a$-подгруппы в $\mathrm{Aut}(Y)$ для полных торических многообразий Y. Нас же интересует случай аффинного многообразия Y. В этом случае нормализуемые тором $\mathbb{G}_a$-подгруппы в $\mathrm{Aut}(Y)$ соответствуют M-однородным ЛНД алгебры $\mathbb{K}[Y]$, которые были описаны в [14]. Мы напомним эту классификацию и применим для того, чтобы построить M-однородные дифференцирования для не нормального аффинного торического многообразия X.

Пусть многообразию X соответствует моноид P и конус σ. Обозначим через Y нормальное аффинное торическое многообразие, соответствующее моноиду P_{sat}. Рассмотрим ребро ρ конуса σ. Обозначим через v_ρ примитивный целочисленный вектор вдоль ребра ρ. Элемент $e \in M$ называется *корнем Демазюра конуса* σ, *соответствующим* ρ, если $\langle e, v_\rho\rangle = -1$ и для любого другого ребра ξ конуса σ выполнено $\langle e, v_\xi\rangle \geqslant 0$. Множество всех корней Демазюра, соответствующих ребру ρ, будем обозначать $\mathscr{R}_\rho$. Несложно видеть, что для каждого ребра ρ множество $\mathscr{R}_\rho$ непусто и, более того, бесконечно. Каждому корню Демазюра $e \in \mathscr{R}_\rho$ соответствует ЛНД ∂_e алгебры $A = \mathbb{K}[Y] = \bigoplus_{m \in P_{\mathrm{sat}}} \mathbb{K}\chi^m$, которое задается на однородных элементах формулой

$$\partial_e(\chi^m) = \langle m, v_\rho\rangle \chi^{m+e}.$$

Любое M-однородное ЛНД алгебры A пропорционально ∂_e для некоторого корня Демазюра. Дифференцирование ∂_e является M-однородным степени e. Ядром дифференцирования ∂_e является подалгебра $\bigoplus_{m \in M \cap \widehat{\rho}} \mathbb{K}\chi^m$. Если подалгебра $\mathbb{K}[X] \subset A$ является ∂_e-инвариантной, то ∂_e индуцирует ЛНД алгебры $\mathbb{K}[X]$, которое мы будем обозначать δ_e. Несложно видеть, что подалгебра $\mathbb{K}[X]$ является ∂_e-инвариантной тогда и только тогда, когда $(P + e) \cap P_{\mathrm{sat}} \subset P$.

Пример 1. Рассмотрим многобразие, соответствующее моноиду

$$P = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0} \mid (a, b) \neq (1, 0)\}.$$

Имеем $\sigma^\vee = \operatorname{cone}((1, 0), (0, 1))$, $\sigma = \operatorname{cone}((1, 0), (0, 1))$. Обозначим $\rho = \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(0, 1)$. Тогда $\mathscr{R}_\rho = \{e_k = (k, -1) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Дифференцирование δ_{e_k} корректно определено при $k \geqslant 2$ (см. рис. 1).

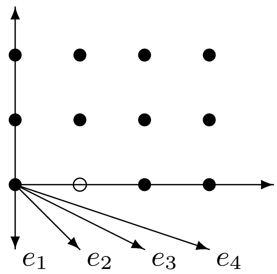

Рис. 1

Следующее предложение является ключевым для всей работы. Оно дает критерий существования корректно определенного дифференцирования δ_e, $e \in \mathscr{R}_\rho$, для данного ρ, как в терминах гладкости орбит коразмерности 1, так и на комбинаторном языке в терминах полугруппы P.

Предложение 1. *Пусть X – аффинное торическое многообразие, σ – соответствующий конус и ρ – ребро σ. Пусть O_ρ – соответствующая орбита. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *гипергрань $\widehat{\rho}$ конуса $\sigma^\vee$ почти насыщена*;

2) *существует корень Демазюра $e \in \mathscr{R}_\rho$ конуса σ такой, что соответствующее дифференцирование δ_e алгебры $\mathbb{K}[X]$ корректно определено*;
3) *орбита O_ρ состоит из гладких точек.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть P – моноид весов многообразия X. Поскольку гипергрань $\widehat{\rho}$ почти насыщена, существует элемент $w \in P \cap \widehat{\rho}$ такой, что

$$(w + \sigma^\vee) \cap M \subset P.$$

Пусть $r \in \mathscr{R}_\rho$ – некоторый корень Демазюра, соответствующий ребру ρ. Возьмем целочисленный вектор u в относительной внутренности грани $\widehat{\rho}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого ребра $\xi \neq \rho$ конуса σ имеем

$$\langle r + ku, v_\rho\rangle = \langle r, v_\rho\rangle + k\langle u, v_\rho\rangle = -1, \qquad \langle r + ku, v_\xi\rangle = \langle r, v_\xi\rangle + k\langle u, v_\xi\rangle \geqslant 0.$$

Таким образом, $r + ku \in \mathscr{R}_\rho$ для любого натурального k. При достаточно большом k для любого $z \in r + ku + \sigma^\vee$ выполнено $\langle z, v_\xi\rangle > \langle w, v_\xi\rangle$ при всех $\xi \neq \rho$. Значит,

$$(r + ku + \sigma^\vee) \cap \sigma^\vee \subset w + \sigma^\vee.$$

Обозначим $e = r + ku$ для данного k. Тогда

$$(e + P) \cap P_{\mathrm{sat}} \subset (e + \sigma^\vee) \cap \sigma^\vee \subset w + \sigma^\vee.$$

Отсюда

$$(e + P) \cap P_{\mathrm{sat}} \subset (w + \sigma^\vee) \cap M \subset P.$$

А значит, формула $\delta_e(\chi^m) = \langle m, v_\rho\rangle\chi^{m+e}$ задает корректно определенное дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$.

2) $\Rightarrow$ 3). Доказательство этой импликации практически повторяет доказательство леммы 14 и теоремы 6 из [4]. Дифференцирование δ_e соответствует $\mathbb{G}_a$-действию $\mathcal{H}_e$ на X. Поскольку идеал функций, обращающихся в нуль на O_ρ – это

$$\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} = \bigoplus_{m \in P \setminus \widehat{\rho}} \mathbb{K}\chi^m \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Ker}\delta_e = \bigoplus_{m \in P \cap \widehat{\rho}} \mathbb{K}\chi^m,$$

существует функция $f = \chi^m$ такая, что $f \in \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$, но $\delta_e(f) \notin \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$. Возьмем такую точку $x \in O_\rho$, что $\delta_e(f)(x) \neq 0$. Можно считать, что x не лежит в замыканиях орбит $\overline{O}_\xi$ для всех ребер ξ конуса σ, отличных от ρ. Тогда найдется $s \in \mathcal{H}_e$ такое, что $s \cdot x \notin \overline{O}_\rho$. Поскольку $\mathcal{H}_e$-орбита точки x неприводима и не лежит целиком ни в каком $\overline{O}_\zeta$, существует точка $y = s \cdot x$ такая, что y не лежит в замыкании орбиты $\overline{O}_\zeta$ для всех ребер ζ конуса σ. Значит, y лежит в открытой T-орбите. Так как открытая T-орбита состоит из гладких точек, точка y гладкая. Следовательно, и точка x гладкая, т.е. O_ρ состоит из гладких точек.

3) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем точку $x \in O_\rho$. Точка x является гладкой точкой замыкания $\overline{O}_\rho$. Алгебра регулярных функций на многообразии $\overline{O}_\rho$ – это

$$\mathbb{K}[\overline{O}_\rho] = \bigoplus_{m \in P \cap \widehat{\rho}} \mathbb{K}\chi^m.$$

Обозначим через $\mathfrak{m}_x$ максимальный идеал в алгебре $\mathbb{K}[\overline{O}_\rho]$, соответствующий x, а через $\mathfrak{M}_x$ – максимальный идеал в алгебре $\mathbb{K}[X]$, соответствующий x. Тогда $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{m}_x \oplus \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$. Отсюда

$$\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}/(\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 + \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}).$$

Так как x – гладкая точка X, выполнено $\dim X = \dim \mathrm{T}_x X = \dim \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$. С другой стороны, поскольку x – гладкая точка $\overline{O}_\rho$, имеем

$$\dim \overline{O}_\rho = \dim \mathrm{T}_x \overline{O}_\rho = \dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Из того, что O_ρ – орбита коразмерности 1, следует, что

$$\dim \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}/(\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 + \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}) = 1.$$

Выберем $\chi^w \in \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$ такой, что

$$\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} = \langle \chi^w \rangle \oplus (\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 + \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}).$$

Фиксируем некоторую систему порождающих $a_1, \dots, a_r$ полугруппы P. Будем считать, что $a_1, \dots, a_l$ лежат в грани $\widehat{\rho}$, а элементы $a_{l+1}, \dots, a_r$ не лежат в этой грани. Предположим, что решетка $L = \mathbb{Z}(a_1, \dots, a_l)$ не совпадает с $M \cap \rho^\perp$. Рассмотрим решетку $\Lambda = \mathbb{Z}(a_1, \dots, a_l, w)$. Докажем, что $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$ лежит в пространстве $W = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{K}\chi^\lambda$. Для каждого натурального k введем обозначение

$$V_k = \bigoplus_{m \in M,\, \langle m, v_\rho \rangle = k} \mathbb{K}\chi^m.$$

Докажем по индукции, что $(\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_k) \subset W$.

База индукции. Пусть k_0 – наименьшее число для которого $V_{k_0} \cap \mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \neq \{0\}$. Поскольку $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 \cap V_{k_0} = \{0\}$, получаем, что

$$\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k_0} \subset \langle \chi^w \rangle \oplus \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}.$$

Заметим, что

$$\{m \in \Lambda \mid \langle m, v_\rho \rangle = k_0\} = w + L.$$

Если $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k_0}$ не лежит в $\bigoplus_{m \in w+L} \mathbb{K}\chi^m$, то существует $\alpha \in M \setminus \Lambda$ такое, что $\langle \alpha, v_\rho \rangle = k_0$ и

$$S = \bigoplus_{m \in \alpha + L} \mathbb{K}\chi^m \neq \{0\}.$$

Так как $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k_0} \subset \langle \chi^w \rangle \oplus \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$, получаем

$$\mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k_0} \subset \bigoplus_{m \in w+L} \mathbb{K}\chi^m + \mathfrak{m}_x\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}.$$

Отсюда следует, что $S = \mathfrak{m}_x S$. Поскольку идеал $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$ конечно порожден, S является конечно порожденным $\mathbb{K}[\overline{O}_\rho]$-модулем. По лемме Накаямы существует элемент $u \in \mathfrak{m}_x$ такой, что $u \cdot f = f$ для всех $f \in S$. Однако если $u \cdot \chi^m = \chi^m$, то $u = 1$, а $1 \notin \mathfrak{m}_x$.

Шаг индукции. Пусть $k' > k_0$ и для $k < k'$ утверждение доказано. Тогда выполнено

$$\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k'} \subset \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 \oplus \mathfrak{m}_x \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}.$$

Однако из предположения индукции следует, что $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 \cap V_{k'} \subset W$. Если $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \cap V_{k'}$ не лежит в W, то существует $\alpha \in M \setminus L$ такое, что $\langle \alpha, v_\rho \rangle = k'$ и

$$S_{k'} = \bigoplus_{m \in \alpha + L} \mathbb{K}\chi^m \neq \{0\}.$$

С другой стороны, $S_{k'} \cap \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 = \{0\}$, что означает, что $S_{k'} \subset \mathfrak{m}_x \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$, а значит, $S_{k'} = \mathfrak{m}_x S_{k'}$. Опять получаем противоречие с леммой Накаямы.

Итак, мы доказали, что $\mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \subset W$. Отсюда следует, что $\mathbb{K}[X] \subset W$. Так как действие T на X эффективно, отсюда следует, что $\Lambda = M$.

Допустим, что грань $\widehat{\rho}$ нигде не насыщена. Теорема 3.3 из работы [12] утверждает, что для некоторого элемента b базиса Гильберта полугруппы P_{sat} не существует разложения в виде

$$b = x_1 a_1 + \dots + x_r a_r, \qquad \text{где} \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_j \geqslant 0, \quad j > l.$$

Из того, что $\Lambda = M$, следует, что $L = M \cap \rho^\perp$. Следовательно, b не лежит в грани $\widehat{\rho}$. Пусть $\langle b, v_\rho \rangle = k$. Тогда $V_k \cap I_{\widehat{\rho}} = \{0\}$. Значит, k не делится на k_0. Следовательно, $k_0 \neq 1$. С другой стороны то, что T действует на X эффективно, влечет то, что есть $\widetilde{k}$ такое, что $\widetilde{k}$ не делится на k_0 и $V_{\widetilde{k}} \cap \mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \neq \{0\}$. Будем считать, что $\widetilde{k}$ минимально с таким свойством. Тогда $V_{\widetilde{k}} \cap \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 = \{0\}$. Опять из леммы Накаямы следует, что не может быть верно включение $V_{\widetilde{k}} \cap \mathrm{I}_{\widehat{\rho}} \subset \mathfrak{m}_x \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}$. Значит, $\dim \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}/(\mathrm{I}_{\widehat{\rho}}^2 + \mathfrak{m}_x \mathrm{I}_{\widehat{\rho}}) \geqslant 2$, противоречие. Предложение 1 доказано.

5. Гибкие торические многообразия. В этом пункте будет доказан критерий гибкости аффинного торического многообразия (теорема 1), а также даны его переформулировки в геометрических и комбинаторных терминах (следствия 1, 2 и 4).

Лемма 4. *Пусть X – гибкое аффинное многообразие. Тогда квазиаффинное многообразие X^{reg} не допускает непостоянных обратимых регулярных функций.*

Доказательство. Поскольку X гибкое, $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X^{reg} транзитивно. Так как автоморфизм переводит гладкие точки в гладкие, любое $\mathbb{G}_a$-действие на X можно ограничить на X^{reg}. Как доказано в работе [15], каждому $\mathbb{G}_a$-действию на квазиаффинном многообразии соответствует ЛНД алгебры регулярных функций на нем. Однако обратимая функция лежит в ядре любого ЛНД; см. [8; принцип 1 (b)]. Получаем, что любая обратимая функция f является $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантной. Значит, множества $\{f = c\}$ являются $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантными для всех $c \in \mathbb{K}$, что противоречит гибкости, если f не постоянна. Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть аффинному торическому многообразию X соответствует конус σ. Удалим те ребра конуса σ, которые соответствуют орбитам, состоящим из особых точек, и рассмотрим конус γ, порожденный оставшимися ребрами. Многообразие X гибкое тогда и только тогда, когда конус γ не лежит ни в какой гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть конус γ лежит в некоторой гиперплоскости $H \subset N_{\mathbb{Q}}$. Тогда конус $\gamma^\vee$ содержит прямую $H^\perp$. По лемме 3 наличие прямой в $\gamma^\vee$ влечет наличие непостоянных обратимых регулярных функций на X^{reg}. По лемме 4 многообразие X не является гибким.

Пусть теперь конус γ не лежит ни в какой гиперплоскости. Это значит, что в конусе σ можно выбрать такие n ребер $\rho_1, \dots, \rho_n$, соответствующих гладким орбитам, что $\{v_{\rho_1}, \dots, v_{\rho_n}\}$ образуют базис $N_{\mathbb{Q}}$. По предложению 1 существуют корни Демазюра $e_1, \dots, e_n$, где $e_i \in \mathscr{R}_{\rho_i}$ такие, что корректно определены ЛНД δ_{e_i}. Рассмотрим точку $p = (1, 1, \dots, 1) \in T \subset X$. Тогда для стандартного базиса

$$\{m_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, m_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

решетки M выполнено $\chi^{m_i}(p) = 1$, откуда для любого $m \in M$ выполнено $\chi^m(p) = 1$. Касательные векторы к $\mathbb{G}_a$-орбитам $\mathcal{H}_{e_i} p$ имеют вид $(\delta_{e_i}(\chi^{m_1})(p), \dots, \delta_{e_i}(\chi^{m_n})(p))$. При этом

$$\delta_{e_i}(\chi^{m_j})(p) = \langle m_j, v_{\rho_i}\rangle \chi^{m_j + e_i}(p) = \langle m_j, v_{\rho_i}\rangle.$$

Для того, чтобы доказать, что касательные векторы в точке p к орбитам $\mathcal{H}_{e_i} p$ линейно независимы, нужно доказать, что определитель матрицы $n \times n$ с элементами $\langle m_j, v_{\rho_i}\rangle$ не равен нулю. Это следует из того, что $\{m_1, \dots, m_n\}$ – базис $M_{\mathbb{Q}}$, а $\{v_{\rho_1}, \dots, v_{\rho_n}\}$ – базис $N_{\mathbb{Q}}$.

Мы получили, что p – гибкая точка многообразия X. Так как p лежит в открытой T-орбите, вся эта орбита состоит из гибких точек.

Для любой грани τ конуса $\sigma^\vee$ можно выбрать примитивный вектор $n \in N$ такой, что $\tau = \sigma^\vee \cap \langle n\rangle^\perp$. Это дает градуировку

$$\mathbb{K}[X]_i = \bigoplus_{\langle m, n\rangle = i} \mathbb{K}\chi_m.$$

Эта градуировка имеет тривиальные отрицательные компоненты. Из [5; предложение 3, следствие 1] следует, что для каждой гладкой орбиты ее замыкание не является $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантным. (Так как статья [5] посвящена нормальным многообразиям, в условии предложения 3 статьи [5] есть условие нормальности многообразия, но нигде в доказательстве оно не используется, поэтому оно верно и для многообразий, не являющихся нормальными.) Значит, существует элемент из $\mathrm{SAut}(X)$, который переводит точку этой орбиты в точку открытой орбиты. Это означает, что все гладкие точки X являются гибкими. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Если многообразие X нормально, то все орбиты коразмерности 1 гладкие. Значит, конус γ совпадает с конусом σ. В этом случае утверждение теоремы 1 совпадает с результатом [2; теорема 2.1].

Дадим несколько эквивалентных переформулировок теоремы 1. Первая из них дает критерий гибкости торического многообразия в чисто геометрических терминах, т.е. не содержит комбинаторных данных конуса, соответствующего торическому многообразию X.

Следствие 1. *Аффинное торическое многообразие X гибкое тогда и только тогда, когда не существует регулярной функции $f \in \mathbb{K}[X]$ такой, что множество нулей функции f состоит только из особых точек.*

Доказательство. То, что множество нулей f состоит только из особых точек эквивалентно тому, что f обратима на X^{reg}. Непостоянная обратимая функция в $\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]$ является M-однородной, см. [16; теорема 3.1], т.е. имеет вид $c\chi^m$, где $c, m \neq 0$. Обратный элемент к $c\chi^m$ – это $c^{-1}\chi^{-m}$, поэтому обратимость $c\chi^m$ эквивалентна наличию прямой в $\gamma^\vee$. По теореме 1 в $\gamma^\vee$ есть прямая тогда и только тогда, когда X не гибко. Следствие 1 доказано.

Вторая переформулировка теоремы 1, напротив, дает критерий гибкости в терминах моноида весов P. Она получается применением предложения 1 к результатам теоремы 1.

Следствие 2. *Аффинное торическое многообразие X гибкое тогда и только тогда, когда не существует гиперплоскости в пространстве $N_\mathbb{Q}$, содержащей все ребра ρ_i конуса σ такие, что грань $\widehat{\rho_i}$ является почти насыщенной.*

Любая ограниченная часть моноида P не влияет на почти насыщенность грани. То есть если есть два моноида P и P', которые отличаются друг от друга только конечным числом элементов, то они соответствуют одному и тому же конусу $\sigma^\vee$, и если грань $\tau \preccurlyeq \sigma^\vee$ насыщена для P, то она насыщена и для P'. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Если в P конечное число дырок и конус σ не лежит ни в какой гиперплоскости, то многообразие X гибкое.*

Несложно видеть, что для двумерного конуса условие почти насыщенности обеих гиперграней равносильно конечности количества дырок. В общем случае условие конечности числа дырок не является необходимым для гибкости, так как можно расположить бесконечное количество дырок так, чтобы это не изменило почти насыщенности гиперграней. Однако можно утверждать, что все дырки P расположены "вдоль" нигде не насыщенных гиперграней и граней меньшей размерности.

Лемма 5. *Пусть P – моноид, соответствующий конусу σ. Обозначим через $\rho_1, \dots, \rho_k$ ребра σ и через $v_1, \dots, v_k$ – примитивные векторы на них. Для заданного натурального числа $d \in \mathbb{N}$ введем обозначение*

$$L_i(d) = \{m \in M \cap \sigma^\vee \mid \langle m, v_i \rangle \leqslant d\}.$$

Пусть зафиксировано натуральное $s \leqslant k$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *гиперграни $\widehat{\rho_1}, \dots, \widehat{\rho_s}$ почти насыщены;*
2) *существует константа $c \in \mathbb{N}$ такая, что для любой дырки u моноида P либо $u \in L_t(c)$ для некоторого $t > s$, либо $u \in L_i(c) \cap L_j(c)$ для некоторых $i, j \leqslant s$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). По лемме 2 в $\sigma^\vee$ есть точка насыщения, обозначим ее z. Пусть $x_i = \langle z, v_i \rangle$. Возьмем $d > x_i$ для всех i. Тогда если для всех i выполнено $u \notin L_i(d)$, то $\langle u, v_i \rangle > d > \langle z, v_i \rangle$, а значит, $u - z \in \sigma^\vee \cap M$. То, что z – точка насыщения, означает, что $u \in P$, что противоречит условию, что u – дырка. Таким образом, существует i такое, что $u \in L_i(d)$.

Пусть $i \leqslant s$. Тогда в грани $\widehat{\rho_i}$ есть точка насыщения w. Обозначим $y_j = \langle w, v_j \rangle$. Возьмем $c_i > y_j$ для всех j. Тогда если для всех $j \neq i$ выполнено $u \notin L_j(c_i)$, то $\langle u, v_j \rangle > c_i > \langle w, v_j \rangle$. Так как $\langle w, v_i \rangle = 0$, получаем $u - w \in \sigma^\vee \cap M$, что противоречит тому, что w – точка насыщения, а u – дырка. Таким образом, существует $j \neq i$ такое, что $u \in L_j(c_i)$.

Положим $c = \max\{d, c_1, \dots, c_s\}$. Тогда $u \in L_i(c)$ и если $i \leqslant s$, то $u \in L_j(c)$ для некоторого $j \neq i$.

2) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем натуральное $i \leqslant s$. Рассмотрим такую точку $w \in \widehat{\rho_i} \cap M$, что $w \notin L_j(c)$ для всех $j \neq i$. Тогда для любого $u \in w + \sigma^\vee \cap M$ выполнено $u \notin L_j(c)$, а значит, $u \in P$. Лемма 5 доказана.

Лемма 5 и следствие 2 позволяют получить еще одну переформулировку теоремы 1, которая дает критерий гибкости торического многообразия в терминах дырок в соответствующем моноиде.

Следствие 4. *Пусть аффинному торическому многообразию X соответствует моноид P и конус σ. Тогда X гибкое тогда и только тогда, когда существует такая нумерация $\rho_1, \dots, \rho_k$ ребер конуса σ, что выполнены следующие условия:*

1) *ребра $\rho_1, \dots, \rho_n$ не лежат в одной гиперплоскости;*
2) *существует натуральное число c такое, что для любой дырки u моноида P либо $u \in L_t(c)$ для некоторого $t > n$, либо $u \in L_i(c) \cap L_j(c)$, где $i, j \leqslant n$.*

Пример 2. Приведем пример гибкого торического многообразия с множеством особых точек коразмерности 1. Рассмотрим подмоноид P в $\mathbb{Z}^3$, состоящий из всех точек (a, b, c), удовлетворяющих условиям $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $c \leqslant a + b$, $c \neq a + b - 1$. Конус $\sigma^\vee$ задан неравенствами $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $c \leqslant a + b$ и имеет 4 гиперграни, на каждой из которых одно неравенство обращается в равенство. Легко убедиться, что гиперграни $\{a = 0\}$, $\{b = 0\}$ и $\{c = 0\}$ являются почти насыщенными, а гипергрань $\{c = a + b\}$ – нигде не насыщенной. По предложению 1 орбита коразмерности 1, соответствующая гиперграни $\{c = a + b\}$ состоит из особых точек. При этом конус γ порожден векторами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, следовательно, по теореме 1 торическое многообразие, соответствующее P, гибко.

6. Жесткие торические многообразия. Напомним, что аффинное многообразие X называется *жестким*, если группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ тривиальна. Это условие эквивалентно тому, что алгебра $\mathbb{K}[X]$ не допускает нетривиальных ЛНД. В этом пункте мы доказываем критерий жесткости аффинного торического многообразия X, а также даем явное описание группы автоморфизмов жесткого торического многообразия.

Теорема 2. *Аффинное торическое многообразие X является жестким тогда и только тогда, когда множество гладких точек X^{reg} совпадает с открытой T-орбитой.*

Доказательство. Множество гладких точек открыто. Значит, если на X есть не открытая орбита, состоящая из гладких точек, то любая орбита, содержащая ее в замыкании, также состоит из гладких точек. Следовательно, существует орбита коразмерности 1, состоящая из гладких точек. Тогда по предложению 1 существует ЛНД δ_e алгебры $\mathbb{K}[X]$, т.е. многообразие X не жесткое.

Пусть теперь X^{reg} совпадает с открытой T-орбитой. Тогда $X^{\mathrm{reg}} \cong T$, а значит, алгебра $\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]$ порождена обратимыми функциями. Это означает, что $\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]$ не допускает ненулевых ЛНД, т.е. X^{reg} жестко. Поскольку любое нетривиальное

$\mathbb{G}_a$-действие на X задает нетривиальное $\mathbb{G}_a$-действие на X^{reg}, многообразие X жестко. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Лемма 1 дает критерий жесткости многообразия X по его моноиду весов P. А именно, многообразие X жесткое тогда и только тогда, когда ни одна из гиперграней конуса $\sigma^\vee$ не является почти насыщенной.

Жесткие многообразия характерны тем, что их группа автоморфизмов имеет единственный максимальный тор, являющийся нормальной погруппой в $\mathrm{Aut}(X)$; см. [6; теорема 2.1]. Это дает возможность описать явно группу автоморфизмов жесткого аффинного торического многообразия. Напомним, что мы уже знаем две подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$: так как X торическое, тор T вложен в $\mathrm{Aut}(X)$; кроме того, в определении 2 введена подгруппа $S(X) \subset \mathrm{Aut}(X)$.

Теорема 3. *Пусть X – жесткое аффинное торическое многообразие. Группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(X)$ *есть полупрямое произведение* $S(X) \leftthreetimes T$.

Доказательство. Пусть ψ – автоморфизм $\mathbb{K}[X]$. Так как T – нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$, автоморфизм ψ переводит M-однородные функции в M-однородные. Из того, что ψ сохраняет умножение, следует, что существует линейный оператор $\varphi\colon M_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ такой, что $\varphi(P) = P$, и для любого $m \in M$ существует ненулевая константа λ такая, что $\psi(\chi^m) = \lambda\chi^{\varphi(m)}$. Напомним, что в п. 3 введен гомоморфизм $\alpha\colon St_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}(P) \to \mathrm{Aut}(X)$.

Рассмотрим автоморфизм $\zeta = \psi \circ \alpha(\varphi)^{-1}$. Имеем $\zeta(\chi^m) = \lambda\chi^m$. Из того, что ζ – автоморфизм, следует, что коэффициенты пропорциональности λ согласованы и отображение $m \mapsto \lambda$ является гомоморфизмом $M \to \mathbb{K}^\times$. Следовательно, ζ действует на $\mathbb{K}[X]$ так же, как некоторый элемент тора T. Таким образом, мы доказали, что $S(X)$ и T порождают $\mathrm{Aut}(X)$. То, что они не пересекаются, очевидно. Поскольку T – нормальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, получаем $\mathrm{Aut}(X) \cong S(X) \leftthreetimes T$. Теорема 3 доказана.

Пример 3. Рассмотрим многообразие X, соответствующее моноиду P, состоящему из всех целых точек (a, b) таких, что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, кроме точек $(0, 2k+1)$ и точек $(2k+1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (см. рис. 2). Данное многообразие жесткое, так как обе одномерных грани не насыщенные.

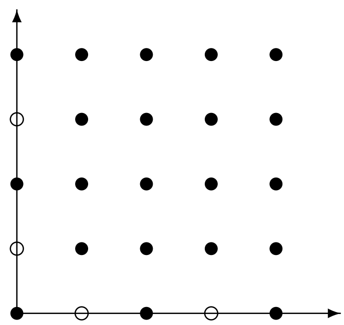

Рис. 2

Подгруппа $S(X)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Она состоит из тривиального автоморфизма и автоморфизма, отражающего конус относительно диагонали. Группа автоморфизмов многообразия X изоморфна $\mathbb{Z}_2 \leftthreetimes (\mathbb{K}^\times)^2$.

7. Почти жесткие торические многообразия. В этом пункте мы изучим еще один класс аффинных торических многообразий, у которых возможно описать группу автоморфизмов. Эта группа уже не будет алгебраической, однако она оказывается полупрямым произведением трех своих подгрупп, каждая из которых имеет явное описание.

Определение 3. Многообразие X называется *почти жестким*, если оно не является жестким и все ЛНД алгебры $\mathbb{K}[X]$ коммутируют между собой.

Для почти жесткого многообразия X обозначим коммутативную группу $\mathrm{SAut}(X)$ через $\mathcal{U}(X)$. Из леммы 1 следует, что многообразие X почти жесткое тогда и только тогда, когда ядра всех ЛНД на $\mathbb{K}[X]$ совпадают. Пусть есть ЛНД ∂, тогда можно рассмотреть следующую коммутативную подгруппу в группе автоморфизмов $\mathbb{U}(\partial) = \{\exp(f\partial) \mid f \in \operatorname{Ker}\partial\}$. Иногда термин "почти жесткое многообразие" применяют к более узкому классу многообразий, для которых все ЛНД являются репликами одного дифференцирования ∂. В этом случае $\mathcal{U}(X) = \mathbb{U}(\partial)$. Однако не любое почти жесткое многообразие обладает таким свойством; см. пример 5.

Теорема 4. *Аффинное торическое многообразие X является почти жестким тогда и только тогда, когда в конусе σ существует единственное ребро ρ такое, что гипергрань $\widehat{\rho}$ почти насыщенная.*

Доказательство. Если почти насыщенных гиперграней у конуса $\sigma^\vee$ нет, то по теореме 2 многообразие X жесткое. Пусть у конуса $\sigma^\vee$ есть почти насыщенная гипергрань ρ. По предложению 1 существует корень Демазюра $e \in \mathscr{R}_\rho$ такой, что дифференцирование δ_e корректно определено. Тогда выполняется

$$\operatorname{Ker}\delta_e = \bigoplus_{m\in P\cap\widehat{\rho}} \mathbb{K}\chi^m.$$

Если есть хотя бы две почти насыщенные гиперграни, то не для всех ЛНД ядра совпадают, а значит, X не является почти жестким. Напротив, предположим, что есть лишь одна почти насыщенная гипергрань τ. Пусть ∂ – ЛНД на $\mathbb{K}[X]$. Тогда ∂ раскладывается в сумму однородных дифференцирований. Вершины многогранника степеней слагаемых являются степенями однородных ЛНД, т.е. корнями Демазюра. Все они имеют степень -1 по отношению к градуировке, соответствующей гиперграни τ. Значит, ∂ также имеет степень -1 по отношению к этой градуировке. Следовательно, ∂ содержит в ядре нулевую компоненту этой градуировки. По [8; принцип 11] степень трансцендентности $\operatorname{Ker}\partial$ на 1 меньше, чем $\dim X$. Отсюда $\operatorname{Ker}\partial$ совпадает с нулевой компонентой. Значит, ядра всех ЛНД совпадают и X почти жесткое. Теорема 4 доказана.

Пусть $\widehat{\rho}$ – единственная почти насыщенная гипергрань конуса $\sigma^\vee$. Ей соответствует $\mathbb{Z}$-градуировка

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i, \qquad \text{где} \quad \mathbb{K}[X]_i = \bigoplus_{\langle m,v_\rho\rangle = i} \chi^m.$$

Опишем группу автоморфизмов почти жесткого торического многообразия.

Теорема 5. *Группа автоморфизмов почти жесткого аффинного торического многообразия X изоморфна полупрямому произведению $(S(X) \leftthreetimes T) \leftthreetimes \mathcal{U}(X)$.*

Доказательство. Так как σ имеет единственную почти насыщенную гипергрань, конус $\gamma^\vee$ – полупространство. Следовательно, алгебра $\mathbb{K}[X^{\mathrm{reg}}]$ изоморфна $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$. Поскольку каждый автоморфизм многообразия X при ограничении на X^{reg} задает автоморфизм X^{reg} и разные автоморфизмы X дают разные автоморфизмы X^{reg}, мы имеем вложение

$$\Theta\colon \operatorname{Aut}(X) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(X^{\mathrm{reg}}) \cong \operatorname{Aut}(A).$$

Заметим, что любое M-однородное ЛНД имеет степень -1 по отношению к $\mathbb{Z}$-градуировке, введенной перед теоремой. Рассмотрим произвольное ЛНД ∂. Его можно разложить в конечную сумму $\mathbb{Z}$-однородных дифференцирований. При этом крайние компоненты будут локально нильпотентны. Если крайние компоненты имеют степень -1, исходное ЛНД было однородным степени -1. Допустим ∂_k – крайняя компонента (и следовательно, ЛНД) степени $k \neq -1$ относительно $\mathbb{Z}$-градуировки. Тогда ∂_k можно разложить на M-однородные компоненты, каждая из которых имеет степень k относительно $\mathbb{Z}$-градуировки. Но хотя бы одна из этих компонент соответствует вершине выпуклой оболочки степеней и является ЛНД. То есть получается M-однородное ЛНД со степенью k по отношению к $\mathbb{Z}$-градуировке. Противоречие. Значит, ∂ однородно степени -1 по $\mathbb{Z}$-градуировке.

Обозначим

$$B = \mathbb{K}[x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}].$$

Ядро любого ЛНД ∂ имеет вид $\mathbb{K}[X] \cap B$. В самом деле, так как степень ∂ равна -1, то нулевая компонента градуировки лежит в ядре. С другой стороны, так как $\widehat{\rho}$ – гипергрань, степень трансцендентности $\mathbb{K}[X] \cap B$ равна $\dim X - 1$. А так как это нулевая компонента градуировки, если прибавить любой элемент не из $\mathbb{K}[X] \cap B$, то степень трансцендентности возрастет. Однако по [8; принцип 11 (e)] степень трансцендентности $\operatorname{Ker} \partial$ равна $\dim X - 1$. То есть $\operatorname{Ker} \partial = \mathbb{K}[X] \cap B$. Отсюда, так как $\deg \partial = -1$, следует, что

$$\operatorname{Ker} \partial^2 = \mathbb{K}[X] \cap (B \oplus x_1 B).$$

То есть ядро квадрата любого ЛНД имеет вид $\mathbb{K}[X] \cap (B \oplus x_1 B)$. Таким образом, при любом автоморфизме φ алгебры $\mathbb{K}[X]$, имеем

$$\Theta(\varphi)(x_1) = f x_1 + g, \qquad \text{где} \quad f, g \in B.$$

Так как φ – автоморфизм, то f обратим, а значит, $f = c\chi^m$, где $m, -m \in P$ и $c \neq 0$. Существуют $\beta \in S(X)$ и $\tau \in T$ такие, что

$$\Theta(\beta)(x_1) = \chi^{-m} x_1 \qquad \text{и} \qquad \Theta(\tau)(x_1) = c^{-1} x_1.$$

Тогда

$$\Theta(\tau \circ \beta \circ \varphi)(x_1) = x_1 + h, \qquad \text{где} \quad h \in B.$$

Обозначим $\psi = \Theta(\tau \circ \beta \circ \varphi)$. Так как ψ – это образ автоморфизма X, для каждого $p \in P$ элемент $\psi(\chi^p) \in A$ раскладывается на линейную комбинацию элементов χ^m, $m \in P$. Рассмотрим отображение $\overline{\psi}\colon A \to A$, которое на B совпадает с ψ и $\overline{\psi}(x_1) = x_1$. Мономы Лорана, входящие с ненулевыми коэффициентами в $\overline{\psi}(\chi^m)$, образуют подмножество в множестве мономов Лорана, входящих с ненулевыми коэффициентами в $\psi(\chi^m)$. Следовательно, $\overline{\psi}$ индуцирует эндоморфизм $\mathbb{K}[X]$.

Но так как $\overline{\psi^{-1}} = (\overline{\psi})^{-1}$, получаем, что $\overline{\psi}$ – образ при Θ некого автоморфизма $\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$. Более того, автоморфизм γ индуцирован автоморфизмом из $\mathrm{Aut}(B) \cong \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}) \leftthreetimes T$, и значит, γ есть композиция элементов $S(X)$ и T. Имеем

$$\begin{aligned} \Theta(\gamma^{-1} \circ \tau \circ \beta \circ \varphi)(x_1) &= x_1 + \widetilde{h}, \qquad && \widetilde{h} \in B, \\ \Theta(\gamma^{-1} \circ \tau \circ \beta \circ \varphi)(x_i) &= x_i, && i \geqslant 2. \end{aligned}$$

Если в $\widetilde{h}$ входит с ненулевым коэффициентом моном Лорана χ^m, то P инвариантен относительно сдвига на $e = m - (1, 0, \dots, 0)$. Тогда корректно определено ЛНД δ_e алгебры $\mathbb{K}[X]$. Тогда $\gamma^{-1} \circ \tau \circ \beta \circ \varphi$ – композиция автоморфизмов из $\mathcal{U}(X)$.

Таким образом, мы проследили, что любой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ раскладывается в композицию автоморфизмов из $S(X)$, T и $\mathcal{U}(X)$. При этом $\mathcal{U}(X) = \mathrm{SAut}(X)$ – нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$, каждый элемент которой унипотентен. С другой стороны, дискретная подгруппа $S(X)$ нормализует тор T. Значит, пересечение $S(X) \leftthreetimes T$ с $\mathcal{U}(X)$ тривиально и $\mathrm{Aut}(X) = (S(X) \leftthreetimes T) \leftthreetimes \mathcal{U}(X)$. Теорема 5 доказана.

Пример 4. Рассмотрим многообразие X, соответствующее моноиду P, состоящему из всех точек $(a, b) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$, кроме точек $(2k+1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (см. рис. 3). Данное многообразие почти жесткое, так как грань $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}(0, 1)$ конуса $\sigma^\vee$ почти насыщена, а грань $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}(1, 0)$ нигде не насыщена.

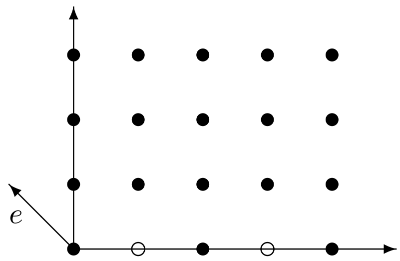

Рис. 3

Подгруппа $S(X)$ для этого многообразия тривиальна. Несложно убедиться, что подгруппа $\mathcal{U}(X)$ в данном случае имеет вид $\mathbb{U}(\delta_e)$, где $e = (-1, 1)$. Группа автоморфизмов многообразия X изоморфна $T \leftthreetimes \mathbb{U}(\delta_e)$.

Выпишем автоморфизмы явно. Имеем

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x^2, y, xy] = \mathbb{K}[u, v, w]/(uv^2 - w^2).$$

Тор T действует по правилу

$$(t_1, t_2) \cdot (u, v, w) = (t_1^2 u, t_2 v, t_1 t_2 w).$$

Дифференцирование δ_e задано по правилу $\delta_e(u, v, w) = (w, 0, v^2)$. При этом $\mathrm{Ker}\, \delta_e = \mathbb{K}[v]$. В итоге получается, что любой автоморфизм X имеет вид

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1^2\left(u + f(v)w + \dfrac{f^2(v)v^2}{2}\right) \\ t_2 v \\ t_1 t_2 (w + f(v)v^2) \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{K}^\times, \quad f \in \mathbb{K}[v].$$

Пример 5. Удалим из моноида P в предыдущем примере точку $(0,1)$. На существование насыщенных точек в гранях это не повлияет. Таким образом, соответствующее многообразие X останется почти жестким (см. рис. 4).

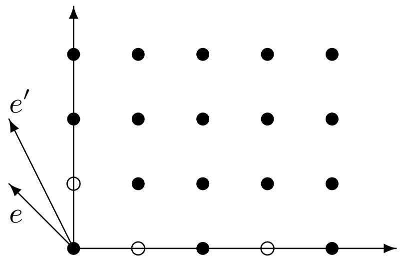

Рис. 4

Группы $S(X)$, $\mathcal{U}(X)$ и $\mathrm{Aut}(X)$ будут такие же, как в прошлом примере. Однако теперь не все ЛНД являются репликами δ_e. Действительно, например, для $e' = (-1,2)$ выполнено $\delta_{e'} = \chi^{(0,1)}\partial_e$. Но в этом примере $\chi^{(0,1)}$ не является регулярной функцией на X. Таким образом, $\mathcal{U}(X)$ не совпадает с $\mathbb{U}(\delta)$ ни для какого ЛНД δ.

Авторы выражают благодарность И. В. Аржанцеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, “Flexible varieties and automorphism groups”, *Duke Math. J.*, **162**:4 (2013), 767–823.

[2] И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян, “Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 3–30.

[3] А. Ю. Перепечко, “Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:4 (2013), 45–52.

[4] А. А. Шафаревич, “Гибкость S-многообразий полупростых групп”, *Матем. сб.*, **208**:2 (2017), 121–148.

[5] S. Gaifullin, A. Shafarevich, “Flexibility of normal affine horospherical varieties”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **147**:8 (2019), 3317–3330.

[6] I. Arzhantsev, S. Gaifullin, “The automorphism group of a rigid affine variety”, *Math. Nachr.*, **290**:5-6 (2017), 662–671.

[7] S. Gaifullin, *On Rigidity of Trinomial Hypersurfaces and Factorial Trinomial Varieties*, 2019, arXiv: 1902.06136v2.

[8] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Encyclopaedia Math. Sci., **136**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[9] H. Flenner, M. Zaidenberg, “On the uniqueness of $\mathbb{C}^*$-actions on affine surfaces”, *Affine Algebraic Geometry*, Contemp. Math., **369**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 97–111.

[10] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric Varieties*, Grad. Stud. Math., **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[11] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[12] A. Takemura, R. Yoshida, “Saturation points on faces of a rational polyhedral cone”, *Integer Points in Polyhedra-Geometry*, *Number Theory*, *Representation Theory*, *Algebra*, *Optimization*, *Statistics*, Contemp. Math., **452**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 147–162.

[13] M. Demazure, “Sous-groupes algebraiques de rang maximum du groupe de Cremona”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **3** (1970), 507–588.

[14] A. Liendo, "Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations", *Transform. Groups*, **15**:2 (2010), 389–425.

[15] I. Arzhantsev, "Infinite transitivity and special automorphisms", *Ark. Mat.*, **56**:1 (2018), 1–14.

[16] Э. Б Винберг, В. Л. Попов, "Теория инвариантов", *Алгебраическая геометрия* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309.

И. А. Болдырев
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: anesecer@gmail.com

С. А. Гайфуллин
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: sgayf@yandex.ru

Поступило
16.11.2020
После доработки
14.07.2021
Принято к публикации
21.07.2021