ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ
серия основана в 1996 г.

Т.В. ВОЛКОВА

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ ИНЖЕНЕРНЫХ ФАКУЛЬТЕТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва
ИНФРА-М
2021

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
В67

Волкова Т.В.

В67 Курс математического анализа для студентов-бакалавров инженерных факультетов : учебное пособие / Т.В. Волкова. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 268 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1013010.

ISBN 978-5-16-014950-9 (print)
ISBN 978-5-16-107446-6 (online)

Учебное пособие подготовлено на основе лекций по математическому анализу, читавшихся автором. Математический формализм изложения классических учебников не подходит для восприятия современного студента, поэтому материал представлен в сжатой и более доступной для усвоения форме.

Соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования последнего поколения.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки «Информационные системы и технологии» и «Информатика и вычислительная техника».

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-16-014950-9 (print)
ISBN 978-5-16-107446-6 (online)

Предисловие

Разделы 1–3 данного учебного пособия написаны на основе материалов годового курса лекций по математическому анализу, которые автор читала студентам инженерных факультетов в 2004–2011 гг. в Московском институте электроники и математики (МИЭМ) на кафедре математического анализа. При чтении лекций были использованы классические учебники и методические разработки кафедры, но большой математический формализм изложения классических учебников не подходит для восприятия современного студента. Поэтому в своем курсе автор старалась добиться более упрощенного и сжатого изложения материала. Достигалось это с помощью более наглядного, часто геометрического изложения как основных понятий, так и доказательств. При этом при геометрическом определении основных понятий всегда делалось их сведение к принятому в стандартном изложении. В частности, даются как основные геометрические определения производной, определенных интегралов. В курсе не разбирались подробно двойные интегралы, но для ознакомления было дано геометрическое определение через объем, и из геометрических приложений определенного интеграла для вычисления двойного интеграла по простейшей области получена формула сведения к повторному.

При рассмотрении несобственных интегралов 1-го рода геометрическая иллюстрация приводилась только для пояснения стандартного определения, которое давалось в классическом варианте. Причем объяснялось, почему геометрическое определение здесь не эквивалентно стандартному.

Понятие дифференцируемости здесь сводится к существованию касательной прямой для графика функции одного переменного и касательной плоскости для графика функции нескольких переменных.

Что касается обоснований, то часто давалось геометрическое доказательство, которое иногда применялось как не очень строгий, но более понятный аналог аналитического.

Кроме того, в данном учебном пособии уменьшено число основных понятий и теорем. Например, вместо 24 определений пределов функций одного переменного дается одно, из которого все остальные получаются элементарными подстановками.

Формула бинома Ньютона не упоминалась и не использовалась. Вместо нее в выводе второго замечательного предела для последовательностей использовано очень легко получаемое упрощенное неравенство Бернулли.

Для функций многих переменных не выводится формула Тейлора. Единственное ее приложение — достаточное условие локального экстремума — абсолютно строго получено без этой формулы. (Заметим, что при этом формула Тейлора для функций одного переменного дана во всех формах со строгим выводом, так как она необходима для получения нестандартных соотношений эквивалентности).

Числовые ряды сопоставлены с ранее изученными несобственными интегралами 1-го рода. Отсюда и из признаков сходимости несобственных интегралов без труда получаются признаки сходимости для неотрицательных рядов.

Если определений дано немного, то доказательств автор старалась приводить как можно больше, по возможности упрощая их, иногда просто заменяя их пояснениями к доказательству, чтобы студенты могли понять, откуда получаются формулируемые результаты.

При написании книги очень полезными оказались обсуждения тем в процессе чтения курса, проводившиеся с преподавателями кафедры математического анализа МИЭМ профессором В.В. Лебедевым, ныне покойным профессором К.К. Ливановым, доцентом А.В. Романовым.

Данный курс соответствовал программе подготовки специалистов, которых выпускал МИЭМ в 2000–2012 гг., причем в 2010–2012 гг. этот курс для специалистов был сильно сжат. Поэтому при переходе к выпуску бакалавров уже в МИЭМ НИУ ВШЭ программа не претерпела больших изменений и данный курс вполне отвечает современной программе математического анализа для бакалавров, особенно годового курса, который читается сейчас в МИЭМ НИУ ВШЭ на факультете фундаментальной информатики и вычислительной техники на специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

На специальности 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» в настоящее время курс полуторагодовой, он несколько шире, но отличие только в подробном изучении кратных и криволинейных интегралов и функциональных рядов (в данном пособии нет рядов Фурье). Поэтому в остальном предлагаемое учебное пособие полностью соответствует и этой учебной программе. Оно предназначено для студентов-бакалавров.

В результате освоения курса студент будет:

знать

- базовые понятия курса;

уметь

- проводить доказательства ключевых теорем курса;

владеть

- навыками использования математического аппарата курса для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности.

Раздел 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. НАТУРАЛЬНЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ, СРАВНЕНИЕ, МОДУЛЬ. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА НА ПРЯМОЙ. ПРИМЕРЫ ИНТЕРВАЛОВ И ПОЛУИНТЕРВАЛОВ

Натуральными числами называются числа, которыми считают количество элементов в конечном множестве: 1, 2, 3, и т.д. Их множество обозначают через

$$N = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Целыми числами называют все натуральные числа, натуральные числа со знаком «–» и ноль. Их множество обозначают через $Z = \{N, -N, 0\}$.

Рациональными числами называют обыкновенные дроби $r = p/q$, где p — целое, q — натуральное.

Действительными числами называются бесконечные десятичные дроби.

Считается, что мы задали бесконечную десятичную дробь, если мы можем указать способ, каким можно найти любой десятичный знак этой дроби.

Например, для любой *неотрицательной* (лежащей правее нуля) точки прямой «a» мы можем однозначно сказать, в какой из промежутков $[n, n + 1)$ для целого n она входит. Тогда n будет целой частью бесконечной десятичной дроби, соответствующей «a».

Рассмотрим $a - n$. Это число имеет целую часть 0. Соответственную ему бесконечную дробь с точностью до k цифры после запятой находим, определяя, в какой промежуток $\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right)$ для целого $m \le 10^k - 1$ входит точка $a - n$, и получим, что m дает k цифр после запятой для «a». Здесь k — целые, $k \ge 0$. Понятно, что начинать нужно с $k = 1$. Для *отрицательной* (лежащей левее нуля) точки необходимо определить десятичную запись для $-a$ и поставить знак «–». Вопрос о том, каждой ли бесконечной неотрицательной десятичной дроби соответствует точка прямой, решается положительно, если опираться на аксиому «непрерывности» прямой. Действительно, строя последовательно, как и выше, промежутки $\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right)$ для $a - n$ (m — первые k цифр его десятичной части), в результате получим последовательность вложенных отрезков $\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right]$ с бесконечно убывающими длинами. Если бы у них не было общей точки на прямой, то там была бы «дырка». Поэтому аксиомы геометрии предполагают существование такой общей точки. Она и будет иметь запись $a - n$. Чтобы получить точку, соответствующую a, нужно сдвинуться из построенной точки на n единиц вправо. Для отрицательных чисел a находим десятичную запись для $-a$ и ставим перед ней знак «–». Отыскивая точку для отрицательной дроби a, находим точку для $-a$ и берем симметричную ей точку относительно начала координат для a.

Договоримся далее множество всех вещественных чисел обозначать через **Q**.

Итак, *вещественные числа изображаются точками прямой*, которую будем обозначать через **R**. При этом:

1) числа считаются ***равными,*** если изображаются одной и той же точкой прямой. Например, 1,000... = 0,999..., 23,306999... = = 23,307000..., хотя числа имеют разную запись. Две записи будут иметь все десятично-рациональные числа (одна запись с нулями, другая со всеми девятками на конце);

2) считается, что $\boldsymbol{a < b}$, если a лежит левее b на прямой. При этом $\boldsymbol{b > a}$;

3) числа больше нуля называются ***положительными***, меньше нуля — ***отрицательными***.

Модулем действительного числа называется расстояние от точки на прямой, изображающей это число, до нуля. Получаем, что

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{для } a \ge 0, \\ -a, & \text{для } a < 0. \end{cases}$$

Расстояние между точками a и b на прямой равно $|\,b - a\,|$.

Перейдем теперь к описанию числовых множеств.

Числовым множеством называется любой набор точек прямой.

Примеры множеств:

1) *отрезок* $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$;

2) *интервал* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$;

3) *полуинтервалы* $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$; $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$.

Такие же обозначения будем применять для лучей, бесконечных в одну сторону. При этом a либо b могут быть либо $+\infty$, либо $-\infty$ (например, $(-3, +\infty)$, $(-\infty, 0]$).

Для всех этих множеств будем употреблять единое обозначение «промежуток» $\langle a, b\rangle$, где «$\langle$» $= \begin{cases} (\\ [\end{cases}$, «$\rangle$» $= \begin{cases}) \\ ] \end{cases}$ (a или b могут быть $\pm\infty$).

С такими множествами вы уже знакомы из школьной программы. Введем новые множества, которые нам понадобятся в математическом анализе. Это окрестности.

Окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется $\{x : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $O_\varepsilon(a)$. Это симметричный интервал с центром в a, стягивающийся к a при уменьшении ε, «двусторонняя» окрестность точки. Также рассматриваются односторонние окрестности точки.

Правой окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется $\{x : a \le x < a + \varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $O_\varepsilon(a+)$. Это полуинтервал справа от a, стягивающийся к a при уменьшении ε.

Левой окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется $\{x : a - \varepsilon < x \le a\}$. Эта окрестность обозначается как $O_\varepsilon(a-)$. Это полуинтервал слева от a, стягивающийся к a при уменьшении ε.

Проколотыми окрестностями точки a называются окрестности точки a с выброшенной точкой a.

Проколотой окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется множество $\{x : a - \varepsilon < x < a\} \cup \{x : a < x < a + \varepsilon\}$.

Эта окрестность обозначается как $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$. Это два симметричных друг другу интервала относительно a, приближающихся к a при уменьшении ε, «двусторонняя» проколотая окрестность точки. Также рассматриваются односторонние проколотые окрестности точки.

Правой проколотой окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется $\{x : a < x < a + \varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a+)$. Это интервал справа от a, приближающийся к a при уменьшении ε.

Левой проколотой окрестностью точки а радиуса ε ***на прямой*** называется $\{x : a - \varepsilon < x < a\}$. Эта окрестность обозначается как $\overset{o}{O}_{\varepsilon}(a-)$. Это интервал слева от a, приближающийся к a при уменьшении ε. Причем любая двусторонняя или односторонняя окрестность с меньшим радиусом есть часть любой такой же окрестности с бóльшим радиусом. Поэтому требование, чтобы множество имело общие точки с любой окрестностью точки a какого-то вида радиуса меньше ε, равносильно требованию, чтобы множество имело общие точки с любой ε-окрестностью того же вида точки a. То же касается проколотых окрестностей.

Окрестностью $+\infty$ ***на прямой радиуса*** ε ***называется*** $\{x : x > \varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $O_{\varepsilon}(+\infty)$.

Окрестностью $-\infty$ ***на прямой радиуса*** $\varepsilon > 0$ ***называется*** $\{x : x < -\varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $O_{\varepsilon}(-\infty)$.

Окрестности $\pm\infty$ объединяют в одну окрестность бесконечности ∞ следующим образом. ***Окрестностью*** ∞ ***на прямой радиуса*** $\varepsilon > 0$ ***называется*** $\{x : |x| > \varepsilon\}$. Эта окрестность обозначается как $O_{\varepsilon}(\infty)$. Окрестности $\pm\infty$, ∞ — это открытые бесконечные вправо или влево лучи или их объединения. Эти лучи «стягиваются» к $\pm\infty$ или ∞ при неограниченном возрастании радиуса. Причем любая окрестность меньшего радиуса содержит любую окрестность большего радиуса. Поэтому требование, чтобы множество имело общие точки с любой окрестностью $\pm\infty$ радиуса больше ε равносильно требованию, чтобы множество имело общие точки с любой окрестностью точки $\pm\infty$, ∞.

Считаем, что *проколотые окрестности* $\pm\infty$, ∞ совпадают с целыми окрестностями.

Напомним теперь часто используемые операции над множествами и некоторые символы.

Пусть A и B — числовые множества.

1. Будем говорить, что $A \subset B$, если A является частью B (т.е. любое число из A содержится в B).

2. Будем называть ***объединением множеств*** A и B множество $A \bigcup B$, содержащее все элементы как из A, так и из B (собираем оба множества в «одну корзинку»).

3. Будем называть ***пересечением множеств*** A и B множество $A \bigcap B$, содержащее все элементы, принадлежащие как A, так и B («общая» часть этих множеств).

4. Будем называть ***дополнением*** до множества A в R множество всех точек R, не принадлежащих A. Дополнение до A обозначаем $\overline{A}$.

Договоримся писать $x \in A$, если x — ***элемент*** множества A.

Символом $\exists$ будем для краткости заменять слово «существует». Символом $\forall$ будем заменять слова «для любого». Символ $\Rightarrow$ обозначает «следует». Символ $\Leftrightarrow$ обозначает «эквивалентно», т.е. из левого утверждения «следует» правое и наоборот (т.е. $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ выполнены одновременно). Эти символы общеупотребительны в математике.

Определение 1.1 (ограниченность множества). Числовое множество A называется ***ограниченным сверху (снизу)***, если $\exists$ число M такое, что $\forall\ x \in A$ выполнено неравенство $x \le M$ $(x \ge M)$. При этом число M называется ***ограничивающим A сверху (снизу)***.

Множество, ограниченное как сверху, так и снизу, называется ***ограниченным***.

Замечание. *Ограниченность* множества A можно выразить модульным неравенством: $\exists$ число M такое, что $\forall\ x \in A$ будет $|x| \le M$. Проверьте это!

Чисел, ограничивающих A сверху (снизу), очень много. Вместе с M числа $M + n$, $\forall\ n \in N$ ограничивают A сверху.

Определение 1.2 (верхняя, нижняя грань). ***Верхней гранью*** множества A называется *наименьшее* из чисел, ограничивающих A сверху.

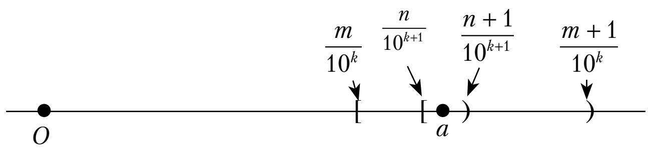
Нижней гранью множества A называется *наибольшее* из чисел, ограничивающих A снизу.

Теорема 1.1. Любое ограниченное сверху (снизу) множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Пояснения к доказательству (нестрого). Заметим, что для ограниченного сверху множества A множество $-A = \{-x$ если $x \in A\}$ будет ограничено снизу, и нижняя грань для $-A$ будет верхней гранью для множества A со знаком «минус». Если при этом число m ограничивает множество A снизу, то ноль будет ограничивать снизу множество $A - m = \{x - m\ \forall\ x \in A\}$. Если мы найдем нижнюю грань a для множества $A - m$, то для A нижняя грань будет на $a + m$. Поэтому покажем существование нижней грани для ограниченного снизу числом 0 множества. Для этого достаточно найти все десятичные знаки нижней грани.

Рассмотрим на прямой точки вида $\frac{m}{10^k}$, $m \in Z$, последовательно для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Для них будем брать запись, оканчивающуюся нулями (у этих чисел две записи, другая оканчивается девятками). При фиксированном k среди этих чисел найдется максимальное, ограничивающее A снизу. Если $k = 0$, то получаем целую часть, которая в дальнейшем отделяется запятой. При увеличении k на единицу эти числа будут возрастать не более чем на девять единиц

$(k + 1)$-го разряда, в котором у предыдущей границы был ноль. Все цифры до k-го разряда после запятой вместе с целой частью будут совпадать с соответствующими цифрами предыдущей границы. Иными словами, все эти числа при разных k будут иметь одинаковые цифры в разрядах, одновременно ненулевых или нулевых в каждой из границ (рис. 1.1). Поэтому они будут вместе определять одну бесконечную десятичную дробь, т.е. действительное число, которое и будет нижней гранью множества A.



$$a \in \left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right), \quad a \in \left[\frac{n}{10^{k+1}}, \frac{n+1}{10^{k+1}}\right)$$

$$\frac{m}{10^k} = a_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k 000...$$

$$\frac{n}{10^{k+1}} = a_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k\alpha_{k+1}00...$$

$$a_0 \in \{0, 1, 2, ...\}$$

$$\alpha_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$$

$$a = a_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_k\alpha_{k+1}... \text{ нижняя грань } A$$

Рис. 1.1

Примеры

1. Ограниченными будут все рассмотренные выше множества, кроме окрестностей бесконечностей. При этом окрестности $+\infty$ ограничены только снизу, а окрестности $-\infty$ — только сверху.

2. Верхней гранью $\langle a, b\rangle$ будет b, нижней гранью a.

Для нижней (верхней) грани множества A вводят специальное обозначение:

$$\inf A \ (\sup A).$$

Перейдем к числовым функциям числового аргумента.

1.2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1.3 (числовая функция). Пусть для любого $x \in X \subset R$ определено *единственное* число y. Тогда говорят, что *за-*

дана функция $y = f(x)$. При этом множество X называется ***областью определения*** функции $f(x)$.

Образом множества $A \subset X$ называется $\{y = f(x),\ \text{где}\ x \in A\}$. Оно обозначается как $f(A)$.

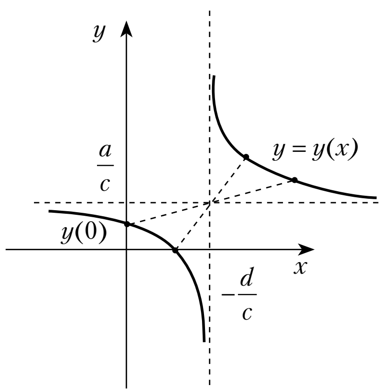
Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество $f(X)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами (x, y), где $x \in A,\ y = f(x)$. Будем обозначать его как $\mathbf{\Gamma} = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$.

Пример графика: дробно-линейная несократимая функция

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},\ c \neq 0,\ y = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{e}{x+\frac{d}{c}},\ \text{где}\ e = \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \neq 0,\ \text{так}$$

как y несократима. Эта формула получена при $a \neq 0$, но она верна и при $a = 0$. Тогда график получается из графика $y = \frac{e}{x}$, имеющего вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$ со сдвигом вдоль оси OX на $-\frac{d}{c}$ и вдоль оси OY — на $\frac{a}{c}$. Вертикальная асимптота станет $x = -\frac{d}{c}$, а горизонтальная — $y = \frac{a}{c}$. Достаточно нарисовать эти асимптоты и какую-либо точку, входящую в график (например, $(0, y(0))$ на рисунке), чтобы нарисовать весь график — гиперболу, симметричную относительно точки пересечения асимптот (рис. 1.2).



$$y = \frac{ax+b}{cx+d},\ c \neq 0$$

Рис. 1.2

Свойство графика. График функции пересекает каждую вертикальную прямую $x = b$, для $b \in X$ (область определения) ровно в одной точке. Поэтому окружность на плоскости не является графиком функции.

Примеры

1. Любое множество на плоскости, обладающее приведенным выше *свойством графика*, задает функцию.

2. $y = x^2$, $y = \sin(x)$, область определения равна $X = R$, $y = \ln x$, $X = (0, +\infty)$. Область значений у x^2 $E = \{x : x \geq 0\}$, y $\ln(x)$ – R; у $\sin(x)$ — $[-1, +1]$. Эти функции заданы аналитически (формулой).

3. Функция знака числа $sign(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0, \\ 0, x = 0 \end{cases}$ (задана таблично).

Определение 1.4 (четная, нечетная, периодическая функция). Функция $f(x)$ с областью определения X называется ***четной (нечетной)***, если $\forall\, x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x)$ для *нечетной*). Функция $f(x)$ с областью определения X называется ***периодической***, если для некоторого числа T (периода) $\forall\, x \in X \Rightarrow x \pm T \in X$ и $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Замечание. Периодов у функции много (например, $\pm nT, n \in N$). Наименьший положительный из всех периодов функции и называют обычно ее «периодом».

Свойства графиков. График четной функции симметричен относительно оси OY, график нечетной — симметричен относительно начала координат.

График ***периодической*** функции нужно построить на периоде, а затем перенести параллельно оси на расстояния $\pm nT, n \in N$.

Пример. $y = \sin x$ — нечетная и периодическая, $y = \cos(x)$ — четная и периодическая, период обеих равен 2π.

Определение 1.5 (ограниченная функция). Функция $f(x)$ с областью определения X называется ***ограниченной***, если множество $f(X)$ ограничено (с двух сторон!).

Пример. $Y = f(x) = \sin(x)$ — ограничена, так как $X = R$, а $f(X) = [-1, +1]$ — ограничено (и сверху, и снизу).

Определение 1.6 (монотонность, интервалы монотонности). Функция $f(x)$ с областью определения X называется ***возрастающей (убывающей)*** на $A \subset X$, если $\forall\, x_1 < x_2$ в A будет $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Она называется ***строго возрастающей (убывающей)*** на A, если все неравенства строгие ($<$ вместо $\leq$, $>$ вместо $\geq$). Функция называется монотонной на A, если она либо возрастает, либо убывает на A. Аналогично строго монотонная функция строго возрастает, либо строго убывает на A. Если $A = X$, то $f(x)$ называется ***монотонной* (*строго монотонной*)**.

Если $f(x)$ (строго) монотонна на A и множество A нельзя расширить с сохранением монотонности на нем функции, то множество A называется ***интервалом монотонности*** для $f(x)$.

Свойства. Если двигаться по интервалу монотонности слева направо (в положительном направлении оси OX), то график над интервалом идет *вверх* («в горку») для *возрастающей* функции и *вниз* («под горку») для *убывающей*.

Примеры. $F(x) = \sin(x)$, интервалы монотонности:

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],$$

$n \in Z$, n — четное — $\uparrow$ (возрастание), n — нечетное — $\downarrow$ (убывание). $y = \ln(x)$ — строго монотонна (строго возрастает на $(0, +\infty)$ — области определения).

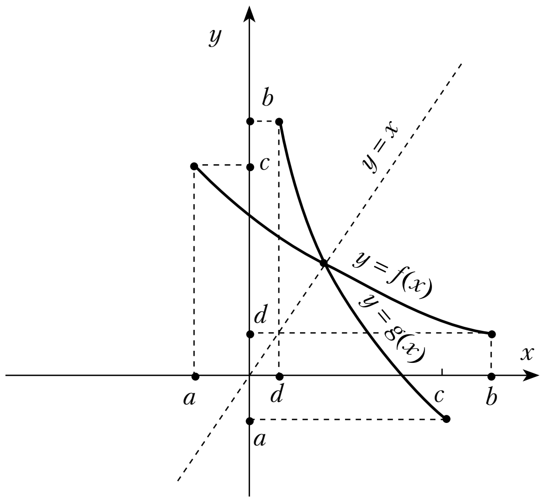
Определение 1.7 (сложная функция). Пусть функция $f(x)$ имеет область определения X и область значений E. Для функции $g(x)$ область определения Y содержит область значений E для $f(x)$. Тогда для x из X определено единственное значение $g(f(x))$. Иными словами, на X определена функция $g(f(x))$, которую мы назовем ***сложной функцией*** или суперпозицией функций $f(x)$ и $g(x)$.

Замечание. Здесь $f(x)$ называется *внутренней* функцией, $g(x)$ — *внешней*. Например, $\ln(\sin(x))$ имеет область определения $\bigcup\limits_{n\in Z}(2\pi n, 2\pi n + \pi)$. Внутренняя функция $\sin x$, внешняя $\ln x$.

Определение 1.8 (обратной функции). Пусть функция $f(x)$ имеет область определения X и область значений Y. $g(x)$ имеет область определения Y и область значений X. Причем $y = f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = g(y)$ для всех возможных x, y. Тогда $g(x)$ называется ***обратной*** к $f(x)$, а $f(x)$ — ***обратной*** к $g(x)$.

Замечание 1. Если обратная функция существует, то графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла. Действительно, из определения $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. Поэтому графики прямой и обратной функции совпадают, если обратную записать как $x = g(y)$, т.е. считать независимым переменным y, а функцией $-x$. Чтобы отсюда получить график $y = g(x)$, нужно поменять x, y местами, т.е. преобразовать координатную плоскость так, чтобы оси поменялись местами с сохранением их направлений. Таким преобразованием будет симметрия относительно прямой $y = x$ (рис. 1.3).

Замечание 2. Обратная функция не всегда существует. Например, $y = x^2$ не имеет обратной на $[-1,\ 1]$, так как $(-1)^{2} = 1^2 = 1$, и неизвестно, чему должна равняться обратная функция от 1, а вот на $[0,\ 1]$ эта функция имеет обратную $y = \sqrt{x}$.



$g(x)$ — обратная к $f(x)$

Рис. 1.3

Вообще, если функция строго монотонна на множестве, то не может быть равенства значений этой функции в разных точках и для любого значения функции найдется единственное соответствующее значение аргумента, т.е. можно определить обратную функцию. Это формулируется в следующей теореме.

Теорема 1.2. Если $f(x)$ строго монотонна на промежутке $\langle a, b\rangle$ и $f\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$, то у $f(x)$ существует обратная функция $g(x)$ с областью определения $\langle c, d\rangle$ и областью значений $\langle a, b\rangle$, причем $g(x)$ имеет тот же характер монотонности, что и $f(x)$ (возрастает или убывает одновременно с $f(x)$).

Замечание. Здесь a или b могут быть $\pm\infty$.

Доказательство не приводим.

Примеры

1. Функции a^x при $a > 0$, $a \neq 1$ строго монотонны на $\mathbf{R}$ с областью значений $(0, +\infty)$. Поэтому они имеют обратную функцию $\log_a(x)$ с областью определения $(0, +\infty)$ и областью значений $\mathbf{R}$ (области меняются местами).

2. Функция $\cos(x)$ строго убывает на на $[0, \pi]$ и имеет там область значений $[-1, +1]$. Ее обратная $\arccos(x)$ определена на $[-1, +1]$ и имеет область значений $[0, \pi]$ (рис. 1.4).

Здесь везде графики прямой и обратной функции симметричны относительно биссектрисы 1 координатного угла.

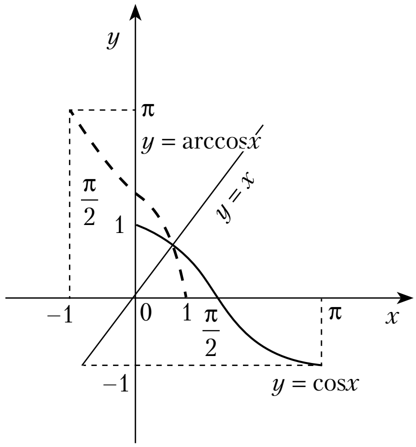


Рис. 1.4

Контрольные вопросы и задания

1. Определите окрестности точек и $\pm\infty$ (приведите их обозначения, изображение и разные виды записи через неравенства и промежутки).
2. Дайте определение множества, ограниченного сверху, снизу, и просто ограниченного множества.
3. Дайте определение нижней и верхней границ множества. Приведите примеры.
4. Что такое функция, ее область определения, область значений и график функции?
5. Определите четные и нечетные, периодические функции, приведя примеры.
6. Что такое ограниченные и монотонные функции? Что такое интервалы монотонности функции? Приведите примеры.
7. Дайте определение сложной и обратной функции. Приведите примеры.
8. Каковы условия существования обратной функции? Приведите условия соответствующей теоремы.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Приведите графический пример функции, определенной на $(3, +\infty)$, такой, что она убывает, не ограничена сверху и $f(5) = 0$.

2. Постройте графики функций $y = x^2 - (x+2)|x-1| - x + 2$, $y = \dfrac{|x+4| + x}{x+2}$ и определите графически интервалы их монотонности.
3. Приведите графический пример функции, определенной на $(3, +\infty)$, такой, что она убывает, ограничена только снизу и $f(5) = 0$.
4. Постройте графики функций $y = (x+3)|x-2| - x^2 + x - 6$, $y = \dfrac{x - |x+3|}{x + 1{,}5}$ и определите графически интервалы их монотонности.

Тесты

1. Укажите А. область определения и Б. область значений функции $y = \arccos x$:

А. 1) $[0, \pi]$, 2) $[-1, 1]$, 3) $[-\pi / 2, \pi / 2]$;

Б. 1) $[0, \pi]$, 2) $[-1, 1]$, 3) $[-\pi / 2, \pi / 2]$.

2. Является ли функция $y = \ln x$ нечетной?

1) является; 2) не является.

3. Является ли функция $y = x^2$ ограниченной; ограниченной снизу; ограниченной сверху?

1) ограничена; 2) ограничена сверху; 3) ограничена снизу.

4. Найдите все интервалы монотонности функции $y = 1/x$. Сколько их и каков на них характер монотонности функции?

1) один интервал возрастания $(-\infty, +\infty)$; 2) два интервала возрастания $(-\infty, 0], (0, +\infty)$; 3) два интервала возрастания $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

5. Как связаны графики функции и ее обратной?

1) они симметричны относительно OX; 2) они симметричны относительно OY; 3) они симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Глава 2
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 2.1. ***Числовой последовательностью*** называется набор чисел $\{a_n\}$, где $n \in N$.

Замечание. Записывая последовательность $a_n = a(n)$, $n \in N$, можно определять ее как числовую функцию с областью определения N. Как функция она имеет график — набор точек плоскости с натуральными абсциссами $n = 1, 2, 3, \ldots$

Примеры

1. $a_n = \sin(n)$. Точки графика лежат на синусоиде $y = \sin(x)$ и имеют натуральные абсциссы (рис. 2.1).

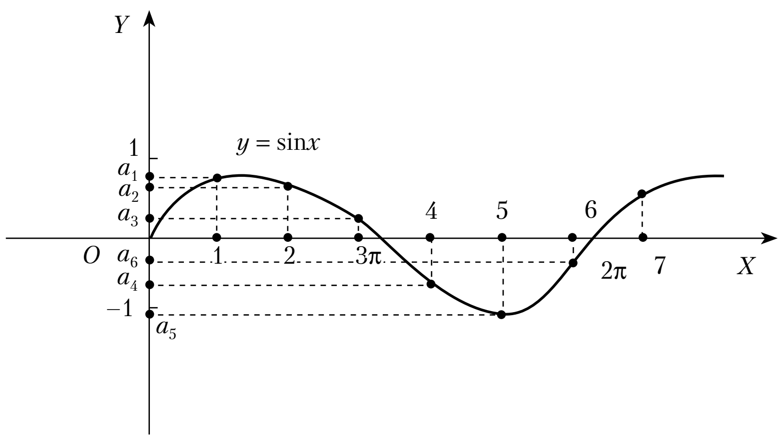


Рис. 2.1. График $a_n = \sin n$ («·»)

2. $a_n = (-1)^n$.

Определение 2.2 (ограниченность). Последовательность a_n называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если множество точек $A = \{a_1, a_2, a_3, a_n \ldots\} \subset R$ *ограничено сверху* (*снизу*).

Последовательность a_n называется ***ограниченной***, если множество A *ограничено*.

Примеры

1. Обе последовательности предыдущего примера ограничены.

2. Последовательность 1, 2, 3, ..., n, ... ограничена снизу и не ограничена сверху.

3. Последовательность $a_n = n \cdot (-1)^n$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

Далее можно было бы дать определение монотонной последовательности a_n через монотонность функции $f(n) = a_n$. Дадим более простое эквивалентное определение.

Определение 2.3 (монотонность). Последовательность a_n называется ***возрастающей*** **(*убывающей*)**, если

$$a_n \leq a_{n+1} \forall\, n \in N;$$

$$\left(a_n \geq a_{n+1} \forall\, n \in N\right).$$

Последовательность a_n называется ***строго возрастающей*** **(*строго убывающей*)**, если

$$a_n < a_{n+1} \forall\, n \in N;$$

$$\left(a_n > a_{n+1} \forall\, n \in N\right).$$

Последовательность a_n называется ***монотонной*** **(*строго монотонной*)**, если она либо возрастает (строго), либо убывает (строго).

Примеры

Последовательность 1, 2, 3, ..., n, ... строго возрастает, следовательно, она строго монотонна.

Последовательность $a_n = n \cdot (-1)^n$ немонотонна.

Как и для функции, монотонность видна по графику последовательности: он идет вдоль OX «в гору» или «под гору» при монотонности, колеблется — при немонотонности.

2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Мы не можем изобразить все точки последовательности на числовой оси, так как их бесконечно много. Поэтому интересен вопрос, как ведут себя точки последовательности при движении номера n к бесконечности.

Изобразим для этого точки последовательности на числовой оси. Для сопоставления с графиком последовательности удобно взять эту ось вертикальной, на которой обозначаются значения функции. Здесь могут быть следующие случаи:

1) с ростом n точки последовательности a_n неограниченно приближаются к какой-то точке a оси;

2) с ростом n точки последовательности a_n неограниченно уходят вверх по вертикальной оси;

3) с ростом n точки последовательности a_n неограниченно уходят вниз по вертикальной оси;

4) с ростом n точки последовательности a_n никуда конкретно не устремляются, колеблются.

Определение 2.4. Если с ростом n точки последовательности a_n неограниченно приближаются к какой-то точке a числовой оси, то говорят, что при $n \to \infty$ последовательность имеет пределом число a, что записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, что следует из рис. 2.2. Точки становятся все ближе к нулю.

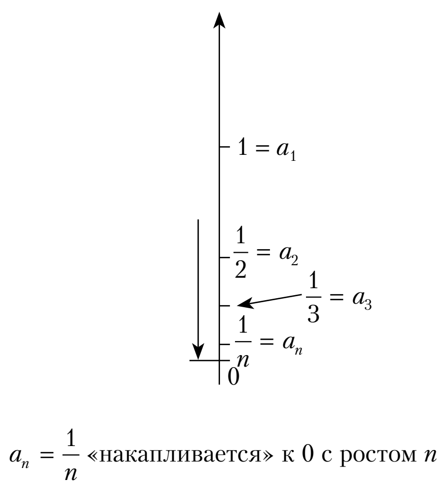
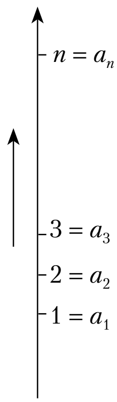


Рис. 2.2

Определение 2.5. Если с ростом n точки последовательности a_n неограниченно уходят вверх по вертикальной оси, то говорят, что при $n \to \infty$ последовательность имеет пределом $+\infty$, что записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, что следует из рис. 2.3. Точки уходят все дальше вверх.

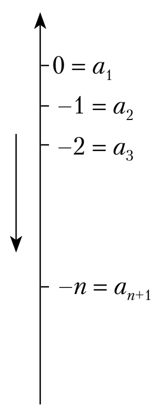


$a_n = n$ уходит в $+\infty$ с ростом n

Рис. 2.3

Определение 2.6. Если с ростом n точки последовательности a_n неограниченно уходят вниз по вертикальной оси, то говорят, что при $n \to \infty$ последовательность имеет пределом $-\infty$, что записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - n = -\infty$, что следует из рис. 2.4. Точки уходят все дальше вниз.



$a_n = 1 - n$ уходит в $-\infty$ с ростом n

Рис. 2.4

Если с ростом n точки последовательности a_n никуда конкретно не устремляются, колеблются, то говорят, что предела у последовательности не существует. Например, $a_n = (-1)^n$ (рис. 2.5).

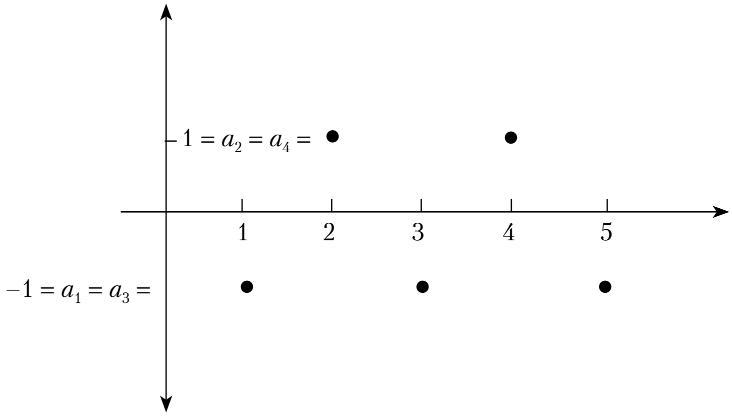


График $a_n = (-1)^n$

Рис. 2.5

Все описанные в определениях 2.4–2.6 случаи схематично изображены на рис. 2.6, *а–г*.

Попробуем с использованием рис. 2.6 проанализировать эти случаи более подробно и привести точные математические определения[1]:

1) с ростом номера n точки последовательности a_n неограниченно приближаются к какой-то точке a оси. Это значит, что расстояние между a_n и a, равное $|a - a_n|$, станет меньше любого числа $\varepsilon > 0$ при каком-то большом n и таким останется далее. В математике это выражают так: ***говорят, что*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ***если*** $\forall\, \varepsilon > 0 \exists$ ***натуральное N, такое, что*** $\forall\, n > N$ ***будет*** $|a - a_n| < \varepsilon$. Заметим, что неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$ по определению означает $a_n \in O_\varepsilon(a)$, т.е. приближаться к точке a означает попадать в любые сколь угодно малые, а значит, и в любые ее окрестности и затем там оставаться;

2) с ростом n точки последовательности a_n неограниченно уходят вверх по вертикальной оси, а значит, неограниченно приближаются к $+\infty$. Это означает, что a_n будут попадать в любые окрестности $+\infty$ и потом будут там оставаться. Но ε — окрестность плюс бесконечности задается неравенством $x > \varepsilon$. Итак, ***говорят, что*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ***если*** $\forall\, \varepsilon > 0 \exists$ ***натуральное N, такое, что*** $\forall\, n > N$ ***будет*** $a_n > \varepsilon$. Другими словами, $a_n \in O_\varepsilon(+\infty)$;

[1] Определения приводятся для справок. На экзамене разрешается давать определение, приводимое ранее.

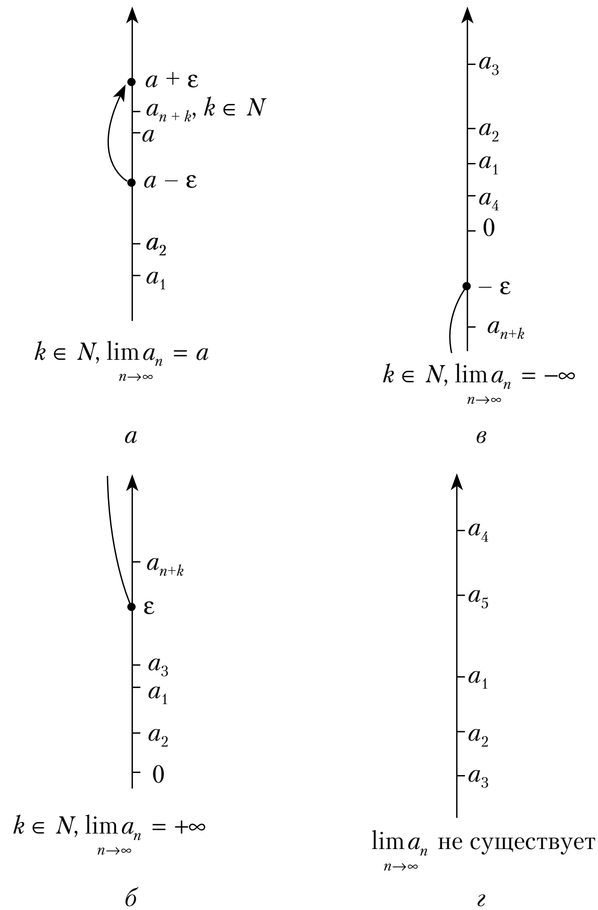


Рис. 2.6

3) с ростом n точки последовательности a_n неограниченно приближаются к $-\infty$. Аналогично предыдущему, ***говорят, что*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ***если*** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ ***натуральное N,*** **такое, что** $\forall\, n > N$ **будет** $a_n < -\varepsilon$. $(O_\varepsilon(-\infty) = \{x : x < -\varepsilon\}$, поэтому $x \in O_\varepsilon(-\infty))$.

Замечание. Пользуясь приведенными замечаниями, будем в дальнейшем иногда объединять все три определения пределов последовательностей в одно. Для этого под греческой буквой ω будем понимать любой из трех символов: число a, $+\infty$ или $-\infty$:

$$\omega = \begin{cases} \text{числу } a, \\ +\infty, \\ -\infty. \end{cases}$$

Определение 2.7. ***Говорят, что*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \omega$, **где** $\omega = \begin{cases} \text{числу } a, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{cases}$ ***если*** $\forall\, \varepsilon > 0$ ***члены последовательности с ростом n неограниченно приближаются к*** ω ***(т.е. точки последовательности попадут при некотором большом n в любую окрестность*** $O_\varepsilon(\omega)$ ***и останутся там при n > N)***.

Примеры пределов (по графикам последовательностей, которые лежат на графиках соответствующих функций) приведены на рис. 2.7.

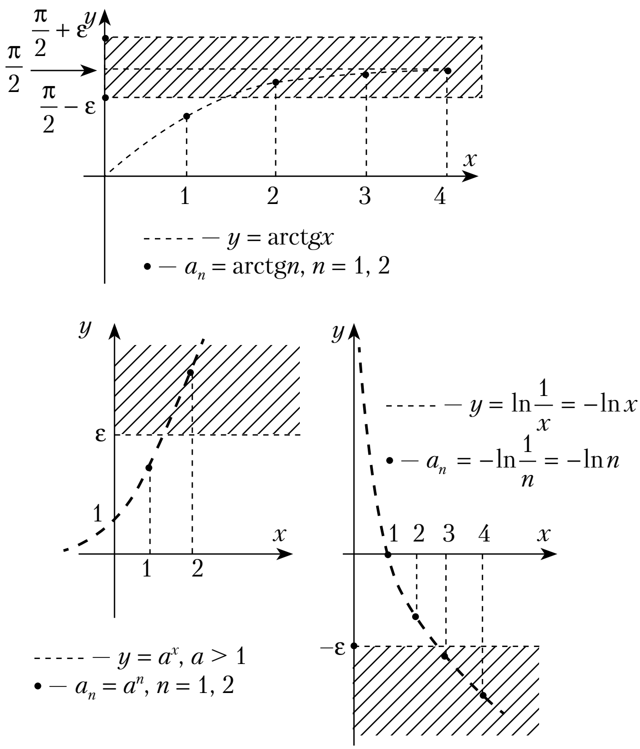


Рис. 2.7

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{arctg}(n) = \frac{\pi}{2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty, a > 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\infty.$

Определение 2.8. Последовательность называется ***сходящейся***, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Последовательность примера 1 сходится, последовательности примеров 2 при $a > 1$ и примера 3 не сходятся.

Рассмотрим графические свойства пределов.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ члены последовательности попадут при некотором большом n в окрестность $O_\varepsilon(a)$ и останутся там при $n > N$. При этом график последовательности попадет при некотором большом n в полосу на плоскости $\{(x, y) : a - \varepsilon < y < a + \varepsilon\}$ и там останется (рис. 2.8, *а*).

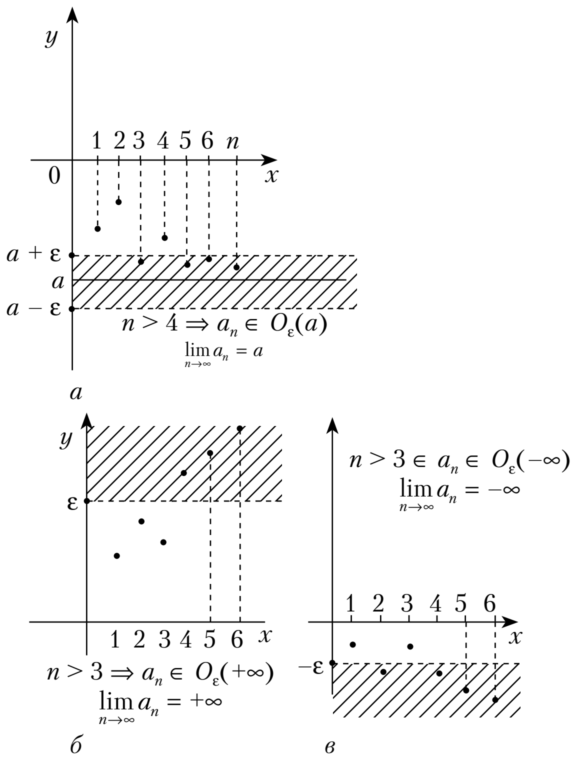


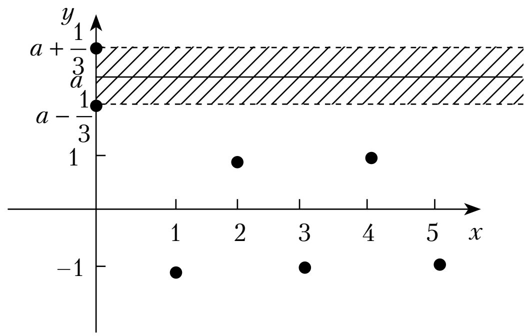
Рис. 2.8

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ натуральное N, такое, что $\forall\, n > N$ будет $a_n > \varepsilon$. При этом график последовательности попадет при не-

котором большом n в полосу на плоскости $\{(x, y) : \varepsilon < y\}$ и там останется (см. рис. 2.8, *б*).

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ члены последовательности попадут при некотором большом n в окрестность $O_\varepsilon(-\infty)$ и останутся там при $n > N$. При этом график последовательности попадет при некотором большом n в полосу на плоскости $\{(x, y) : -\varepsilon > y\}$ и там останется (см. рис. 2.8, *в*).

4. Используя эти свойства, видим по рис. 2.9, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела: в ограниченную полосу размера $2/3$ график с некоторого места не попадает, а с неограниченными полосами при $\varepsilon = 1$ не пересекается.



$a_n = (-1)^n$ предел не существует

Рис. 2.9

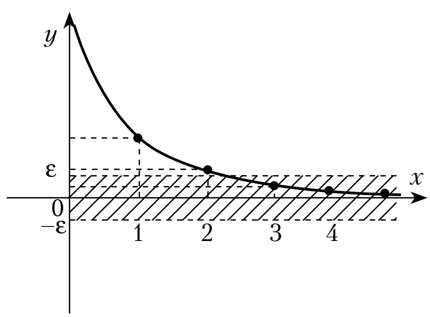


Рис. 2.10

Примеры вычисления пределов

1. $a_n = c$ — постоянная последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Из графического смысла точки последовательности приближаются к c, так как совпадают с ним.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, что следует из графика на рис. 2.10.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$.

Рассмотрим далее некоторые общие свойства пределов.

2.3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема 2.1а (единственность предела).

Если одновременно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \omega_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \omega_2$, то $\omega_1 = \omega_2$.

Доказательство. Положим противное — $\omega_1 \neq \omega_2$. Тогда из рис. 2.8, *а–в* следует, что по геометрическому смыслу пределов, каковы бы ни были разные ω_1 и ω_2, найдутся две непересекающиеся горизонтальные полосы на плоскости, в которых будет лежать график данной последовательности с $n > N_1$ в одной полосе и с $n > N_2$ — в другой (разберите сами подробно все случаи!). Поэтому при $n > \max\{N_1, N_2\}$ график этой последовательности лежит в обеих полосах сразу. Но этого не может быть, так как полосы не пересекаются, что доказывает теорему.

Определение 2.9 (подпоследовательность). Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ — любая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$, занумерованная индексом $k = 1, 2, 3, \ldots$, называется ***подпоследовательностью*** последовательности $\{a_n\}$.

Замечание. Любая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ либо совпадает со всеми натуральными номерами, либо имеет пропуски в натуральном ряду между какими-то ее соседними членами. Поэтому ее члены будут больше или равны их натуральных номеров: $n_k \geq k$.

Примеры подпоследовательностей. Для $n_k = 2k - 1$ для натуральных k получим подпоследовательность $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$, состоящую из элементов данной последовательности с нечетными номерами.

Для $n_k = 2k$ для натуральных k получим подпоследовательность $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ с четными номерами.

Теорема 2.1 (предел подпоследовательности). Если последовательность a_n имеет предел, конечный или бесконечный, то любая ее ***подпоследовательность*** a_{n_k} *будет иметь тот же предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \omega$, где $\omega = \begin{cases} \text{числу } a, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{cases}$ тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ члены последовательности попадут при некотором большом n в окрестность $O_\varepsilon(\omega)$ и останутся там при $n > N$. Поскольку всегда $n_k \geq k$, следовательно, при $k > N \Rightarrow n_k > N$ и a_{n_k} попадут в $O_\varepsilon(\omega)$. Значит, подпоследовательность имеет тот же предел.

Следствие (независимость предела от изменения конечной части последовательности). Значение предела и его существование не зависят от изменения конечной части последовательности.

Действительно, одна последовательность, начиная с какого-то номера N_1, совпадает с другой последовательностью с другого номера N_2. Их совпадающая часть будет подпоследовательностью как той, так и другой последовательности, и будет иметь предел, равный пределам обоих, если они существуют. При этом если общая часть имеет предел, то ее члены попадают в любую ε-окрестность предела, начиная с ее номера N. Но это будут, например, все члены первой последовательности, начиная с номера $N_1 + N - 1$, которые будут также членами второй с номера $N_2 + N - 1$.

Поэтому исходные последовательности имеют тот же предел, что и общая часть. Иными словами, всегда предел общей части существует одновременно с пределами обеих последовательностей и равен этим пределам, которые получаются равными и существующими одновременно.

Теорема 2.2 (ограниченность сходящейся последовательности). Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство

По определению сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и при $n > N$ все a_n будут находиться в ε-окрестности точки a (например, для $\varepsilon = 1$). Эта окрестность есть интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и, следовательно, ограничена, а вместе с ней ограничена содержащаяся там часть последовательности с номера $N + 1$. Вне окрестности — конечное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Оно ограничено минимальным и максимальным элементами. Вся последовательность будет тогда ограничена как объединение двух ограниченных частей, что и требовалось доказать.

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n) = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, последовательность $\operatorname{arctg}(n)$ сходится.

Согласно теореме 2.2 сходящаяся последовательность ограничена. По рис. 2.7 видно, что она ограничена 0 снизу и $\frac{\pi}{2}$ сверху.

2. При $a > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ и последовательность не сходится.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$. Последовательность $\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ тоже не сходится.

2.4. СВЯЗЬ ОГРАНИЧЕННОСТИ С ПРЕДЕЛАМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Покажем, что не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Возьмем $a_n = (-1)^n$. По графику (см. рис. 2.9) видно, что точки последовательности не могут поместиться с некоторого номера ни в какую горизонтальную полоску ширины 2/3 ($\varepsilon = 1/3$). Значит, конечного предела не существует.

Бесконечных пределов ограниченная последовательность иметь не может по следующей теореме 2.3, где изучаются свойства последовательностей с бесконечными пределами.

Теорема 2.3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то a_n ограничена снизу и не ограничена сверху.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, то a_n ограничена сверху и не ограничена снизу.

Действительно, в первом случае последовательность с некоторого места попадет в любую окрестность $(\varepsilon, +\infty)$, т.е. ее члены станут больше любого $\varepsilon > 0$ и, значит, не могут никаким ε быть ограничены сверху. Но эта окрестность ограничена снизу, а вне ее только конечное число членов последовательности, которые тоже ограничены снизу их минимумом. Поэтому вся последовательность ограничена снизу.

Аналогичные рассуждения для второго случая (см. рис. 2.8).

Не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Но если к ограниченности добавить монотонность, то ситуация изменится.

Теорема 2.4 (признак сходимости Вейерштрасса). Ограниченная и монотонная последовательность a_n имеет предел.

Доказательство. Предположим для определенности, что последовательность убывает. Множество $\{a_n\}$ ограничено снизу и имеет нижнюю грань a.

Нижняя грань — максимальное из чисел, ограничивающих множество снизу. Поэтому $a + \varepsilon$ уже не ограничивает это множество снизу $\forall\, \varepsilon > 0$, а значит, найдется $a_N < a + \varepsilon$. При этом все последующие члены при $n > N$ из-за убывания последовательности будут не больше: $a_n \le a_N < a + \varepsilon$, $a_n \ge a$ — своей нижней грани, окончательно $a - \varepsilon < a \le a_n < a + \varepsilon$.

При $n > N$ члены последовательности будут находиться внутри ε-окрестности числа a — своего предела, т.е. имеют нижнюю грань своим пределом.

Замечание. Для возрастающей последовательности пределом будет, соответственно, верхняя грань $\{a_n\}$.

Следствие. Если члены монотонной последовательности принадлежат конечному отрезку $[a, b]$, то ее предел принадлежит тому же отрезку (так как предел равен верхней или нижней грани последовательности). При этом a — нижняя граница последовательности, не превосходит нижней грани последовательности, b — верхняя граница последовательности, не менее ее верхней грани, кроме того, нижняя грань не более верхней, и значит, верхняя и нижняя грани последовательности принадлежат отрезку $[a, b]$.

2.5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 2.5 (арифметические свойства сходящихся последовательностей). Пусть две последовательности сходятся, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда

1) последовательность $a_n + b_n$ сходится, и ее предел равен $a + b$;

2) последовательность $a_n \cdot b_n$ тоже сходится, и ее предел равен ab;

3) если c — число, то ca_n сходится и ее предел равен ca;

4) последовательность $|a_n|$ сходится, и ее предел равен $|a|$;

5) если $b \ne 0$, то $\dfrac{a_n}{b_n}$ сходится и ее предел равен $\dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Обе сходящиеся последовательности ограничены по теореме 2.2.

Пусть $|a_n| < C, |b_n| < C, |a| < C, |b| < C$ при всех n и пусть $C > 1$ (его можно так увеличить). По определению пределов для $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ такое K, что $\forall\, n > K$ будет выполнено $|a - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$.

Аналогично для $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ M$ такое, что $\forall\, n > M$ будет выполнено $|b - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$.

Тогда для $N = \max(K, M)$ при $n > N$ будут выполнены оба неравенства. При этом

$$\left|a+b-\left(a_n+b_n\right)\right|=\left|\left(a-a_n\right)+\left(b-b_n\right)\right|\le\left|a-a_n\right|+\left|b-b_n\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2C}+\frac{\varepsilon}{2C}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\left(C>1\right).$$

Иными словами, $a_n + b_n$ сходится к $a + b$.

Далее,

$$\left|ab-a_nb_n\right|=\left|ab-ab_n+ab_n-a_nb_n\right|=\left|a\left(b-b_n\right)+b_n\left(a-a_n\right)\right|\le$$

$$\le\left|a\right|\left|b-b_n\right|+\left|b_n\right|\left|a-a_n\right|<C\frac{\varepsilon}{2C}+C\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon$$

при $n > N$. Иными словами, a_nb_n сходится к ab.

При фиксированном c $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, отсюда получим, что ca_n сходится к ca.

Из неравенства $\left|\left|a_n\right|-\left|a\right|\right|\le\left|a_n-a\right|$ следует, что при $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ (что будет выполнено при $n > N$) будет также $\left|\left|a_n\right|-\left|a\right|\right|\le\left|a_n-a\right|<\varepsilon$, и значит, $\left|a_n\right|$ сходится к $\left|a\right|$.

Теперь покажем, что $\frac{1}{b_n}$ сходится к $\frac{1}{b}$ при $b \ne 0$.

Действительно, пусть $b > 0$.

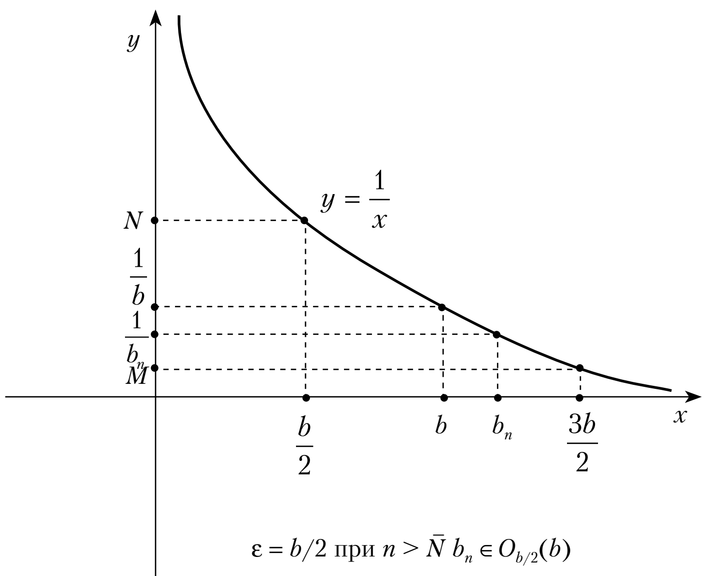


Рис. 2.11

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, получаем по рис. 2.11, что при $b > 0$ $1/b_n$, $n = \bar{N} + 1, 2, \ldots$, и $1/b$ ограничены в совокупности числами M и N. Но $b_n \neq 0$, поэтому $1/b_n$, $n = 1, 2, \ldots, \bar{N}$ тоже ограничены. Значит, вся последовательность $1/b_n$, $n = 1,2,3,...$, и $1/b$ ограничены в совокупности.

По предыдущему уже доказанному п. 4 ненулевая последовательность $|b_n|$ сходится к $|b|$. Поскольку $|b| > 0$, то к $|b_n|$ и $|b|$ применимы рассуждения, иллюстрированные рис. 2.11. Поэтому существует $D > 0$ такое, что $\left|\frac{1}{b_n}\right| < D$, $\left|\frac{1}{b}\right| < D$ и тогда

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = |b - b_n|\left|\frac{1}{b_n}\right|\left|\frac{1}{b}\right| < |b - b_n| D^2 < \frac{\varepsilon}{D^2} D^2 = \varepsilon$$

при $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{D^2}$, что выполнено при $n > L$. Это и есть сходимость $\frac{1}{b_n}$ к $\frac{1}{b}$.

Далее сходимость $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} a_n$ к a/b следует из п. 2 о сходимости произведения сходящихся последовательностей.

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{5}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + 5 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 + 5 \cdot 0 = 2.$

2. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$, $a > 1$. Рассмотрим отношение следующего члена к предыдущему: $\frac{(n+1)\cdot a^n}{a^{n+1}\cdot n} = \frac{(n+1)}{an} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$. Поэтому начиная с какого-то номера N будет $1 + \frac{1}{n} < a$ (рис. 2.12). Тогда $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{a} < a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Иными словами, начиная с некоторого номера отношение следующего члена к предыдущему будет меньше единицы. Значит, каждый следующий будет меньше предыдущего, и последовательность строго убывает с некоторого места. Значит, она с этого места еще и ограничена: снизу, так как все члены положительны, а сверху, потому что любая убывающая последовательность ограничена сверху первым членом. Поэтому последовательность сходится с некоторого места, а значит и сходится вся целиком. Поскольку эта ограниченная сходящаяся последовательность положительна, т.е. принадлежит отрезку $[0, K]$ и убывает, то ее предел по следствию теоремы 2.4 принадлежит тому же отрезку и, значит, неотрицателен.

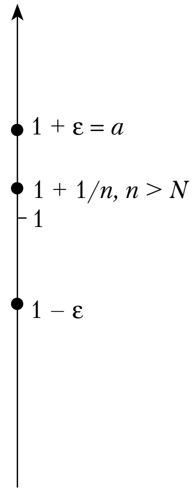


Рис. 2.12

Итак, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = A$ и $A \geq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^{n+1}} = A$ как предел подпоследовательности.

Если A не равно нулю, то по теореме об арифметических свойствах пределов

$$1 = \frac{A}{A} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a} = \frac{1}{a} < 1,$$

т.е. $1 < 1$, что неверно. Значит, предположение, что A не равно нулю, неверно, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0,\ a > 1$.

Определим число e. Для этого введем в рассмотрение последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и покажем, что она убывает и ограничена, а значит, имеет предел по признаку Вейерштрасса (теорема 2.4). Для этого докажем лемму.

Лемма 1. Если $a > 0$, то $(1+a)^n > 1+na$ при натуральном $n > 1$.

Доказательство. При $n = 2$ $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$, так как $a^2 > 0$.

По индукции, пусть для некоторого n $(1 + a)^n > 1 + na$. Тогда

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n (1 + a) > (1 + an)(1 + a) =$$
$$= 1 + an + a + a^2 n = 1 + (n + 1)a + a^2 n > 1 + (n + 1)a,$$

так как $a^2 n > 0$. Иными словами, из справедливости утверждения для n следует его справедливость для $n + 1$. По принципу математической индукции отсюда и из справедливости неравенства для $n = 2$ следует его справедливость для всех натуральных $n > 1$, что и требовалось доказать.

Воспользуемся этой леммой для доказательства убывания последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Для этого рассмотрим отношение:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n + 1)^{n+1} (n + 1)^{n+2}}{(n + 2)^{n+2} (n)^{n+1}} =$$
$$= \frac{(n + 1)^{2(n+2)} (n)}{(n + 2)^{n+2} (n)^{n+2} (n + 1)} = \frac{(n^2 + 2n + 1)^{n+2}}{(n^2 + 2n)^{n+2}} \left(\frac{n}{n + 1}\right) =$$
$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \left(\frac{n}{n + 1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \left(\frac{n}{n + 1}\right),$$

по лемме это строго больше, чем

$$\left(1 + \frac{n + 2}{n^2 + 2n}\right)\left(\frac{n}{n + 1}\right) = \frac{(n + 1)n}{n(n + 1)} = 1,$$

т.е. $a_n > a_{n+1}$ и последовательность убывает.

Имеем $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$. Поэтому убывающая последовательность ограничена снизу единицей, а сверху — своим первым членом, значит, она ограничена и монотонна. По признаку Вейерштрасса (теорема 2.4) она имеет конечный предел, который обозначается в математике через e.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$. Тогда по свойствам конечных пределов (теорема 2.5) будет $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{e}{1+0}=e$, т.е. доказана.

Теорема 2.6 (второй замечательный предел). Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ имеет конечный предел, который называют числом e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Замечание. $1\le e\le 4$ — это следует из того, что члены убывающей последовательности $4=a_1\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>1$, тоже сходящейся к e, принадлежат отрезку $[1,4]$. Тогда из следствия к теореме 2.4 (признаку Вейерштрасса) этому же отрезку принадлежит и предел последовательности, т.е. число e. В действительности имеет место более точная оценка $2\le e\le 3$, а именно иррациональное $e\approx 2{,}71828$.

Пример (использования второго замечательного предела для вычисления похожих пределов). Найти предел последовательности $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e\cdot 1}=\frac{1}{e}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое последовательность и ее график? Приведите пример.
2. Что такое монотонные последовательности? Приведите примеры.
3. Что такое ограниченные сверху, снизу и просто ограниченные последовательности? Приведите примеры.
4. Когда последовательность имеет конечный предел? (Можно ответить графически.)
5. Когда последовательность имеет предел $+\infty$? (Можно ответить графически.)

6. Когда последовательность имеет предел $-\infty$? (Можно ответить графически.)
7. Приведите достаточное условие существования конечного предела последовательности (признак Вейерштрасса). Приведите пример последовательности, удовлетворяющей ему.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательности

$$a_n = \frac{\cos \pi n}{3n-2};\ a_n = 2n + 3(-1)^n.$$

2. Докажите по определению

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(n^2+1\right) = +\infty.$$

3. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательности

$$a_n = n + \frac{24}{n};\ a_n = n - |n-6|.$$

4. Докажите по определению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+5}} = 0.$$

5. Найдите пределы последовательностей

$$a_n = \frac{n\sin n + 3}{(2n+1)\sqrt{n^2+1}};\ a_n = \sqrt[n]{2^{-3n} + 3^{-2n}}.$$

6. Найдите пределы последовательностей

$$a_n = \left(\frac{\ln\left(n^2+\sqrt{n}\right)}{\ln\left(n^3+2\right)}\right);\ a_n = \frac{10^n + 5^n + 2^n}{2^{n+2}5^{n+1} + n}.$$

Тесты

1. Может ли предел подпоследовательности сходящейся последовательности не существовать?

1) может; 2) не может.

2. Может ли существовать предел подпоследовательности, если последовательность не имеет предела?

1) может; 2) не может.

3. Откуда ограничена последовательность, имеющая конечный предел?

1) ограничена сверху; 2) ограничена снизу; 3) ограничена с обеих сторон, т.е. ограничена.

4. Откуда ограничена последовательность, имеющая предел $+\infty$?

1) ограничена сверху; 2) ограничена снизу; 3) ограничена с обеих сторон, т.е. ограничена.

5. Откуда ограничена последовательность, имеющая предел $-\infty$?

1) ограничена сверху; 2) ограничена снизу; 3) ограничена с обеих сторон, т.е. ограничена.

Глава 3
ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. ВСЕВОЗМОЖНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ОСИ *OX*. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ОСИ *OY*. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КАК СВЯЗЬ ОПРЕДЕЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ АРГУМЕНТА ПО ОСИ *OX* С КАКИМ-ТО ВОЗМОЖНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ПО ОСИ *OY*

Последовательность можно рассматривать как функцию с областью определения множеством натуральных чисел. По множеству натуральных чисел можно двигаться только в одном направлении — уходя в бесконечность, поэтому пределы последовательностей рассматриваются только при $n \to \infty$. Если функция определена на всей оси, то двигаться по области определения можно следующими способами:

1) по направлению к точке a слева (обозначаем $x \to a-$);
2) по направлению к точке справа (обозначаем $x \to a+$);
3) по направлению к точке a сразу с двух сторон ($x \to a$);
4) по направлению к $-\infty$ ($x \to -\infty$);
5) по направлению к $+\infty$ ($x \to +\infty$);
6) по направлению к ∞: одновременно к $+\infty$ и $-\infty$ ($x \to \infty$) (рис. 3.1).

Если x движется по направлению к точке a, то мы не будем интересоваться значением функции в этой точке и поэтому считаем, что x попадает в любые (как угодно маленькие) *проколотые* окрестности точки a. При движении к $\pm\infty$ или ∞ x попадает в любые окрестности этой ∞. Для удобства дальнейшей записи, будем считать, что *проколотые окрестности бесконечностей совпадают с их обычными окрестностями*:

$$\overset{\circ}{O}_\varepsilon(\pm\infty) = O_\varepsilon(\pm\infty).$$

Все эти движения мы будем обозначать общим символом $x \to \theta$, где θ — один из символов $a-$, $a+$, a, $\pm\infty$, ∞.

По области значений (ось OY) нас будут интересовать только четыре движения:

1) к точке b с двух сторон ($y \to b$);
2) к $+\infty$ ($y \to +\infty$);
3) к $-\infty$ ($y \to -\infty$);
4) к ∞ ($y \to \infty$).

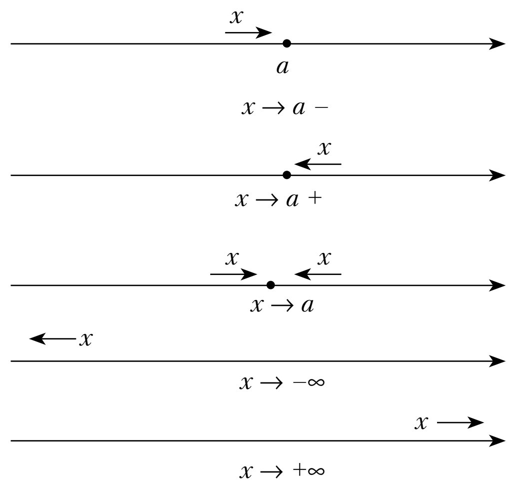


Рис. 3.1

При этом никогда не исключают попадания в точку b, т.е. $f(x)$ попадает в любые (не проколотые) окрестности своего предела. Аналогично все эти движения будем обозначать как $y \to \omega$ ($\omega =$ $= b, \pm\infty, \infty$).

Пусть теперь задана функция $y = f(x)$, ***определенная в окрестности*** $\overset{o}{O}_{\delta_1}(\theta)$, $\theta = (a\,-, a\,+, a, \pm\infty, \infty)$.

Определение 3.1. Если при x, достаточно приближающемся к θ, значения $y = f(x)$ неограниченно приближаются к ω, то говорят, что $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = \omega$.

Заметим: это означает, что значения $y = f(x)$ попадут в любую ε-окрестность ω при x из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_{\delta}(\theta)$.

Аналогично тому, как это сделано для последовательностей, дадим для справок точное математическое определение предела функции (не для запоминания).

Определение 3.1а. Говорим, что предел $f(x)$ при x, стремящемся к θ, равен ω, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, такое, что при $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta}(\theta)$ будет $f(x) \in O_{\varepsilon}(\omega)$. Это записывают как $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = \omega$.

Заметим, что всевозможных рассматриваемых движений по оси OX существует шесть, а по оси OY — четыре, поэтому для функций имеем $6 \cdot 4 = 24$ вида различных пределов. Все их можно подробно записать, просто подставляя в определение 3.1 (или соответствующее строгое определение 3.1а) конкретные окрестности конкретных θ и ω.

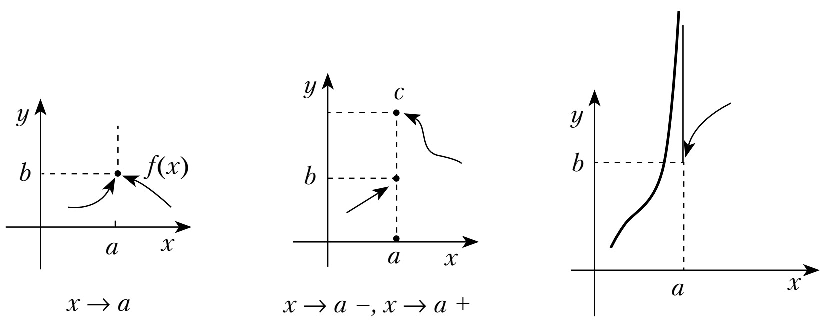
Пример. Дадим определение $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \infty$ (здесь $\theta = 1+,\ \omega = \infty$). По определению 3.1 при x, приближающихся к единице справа, $f(x)$ будет неограниченно приближаться к ∞. Иными словами, по определению 3.1а $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что при $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(1+)$ значение $y = f(x)$ попадает в окрестность $O_\varepsilon(\infty)$.

Вспоминаем, что $\overset{\circ}{O}_\delta(1+) = (1, 1+\delta)$; $O_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$.

Подставляя в определение 3.1а, получим: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что для $x \in (1, 1+\delta)$ будет $f(x) \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$. Или то же самое через неравенства: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что для $1 < x < 1+\delta$ будет $|f(x)| > \varepsilon$.

Предлагаем самостоятельно расписать таким образом все 24 типа пределов для функций.

Перейдем к графическому смыслу пределов. Как мы говорили, если при $x \to \theta$ значения $y = f(x)$ стремятся к ω, то $\lim\limits_{x \to \theta} f(x) = \omega$. Если $\theta = a$, $a\pm$, $\omega = b$ — числа, то это означает приближение графика к точке плоскости (a, b) при $x \to \theta$ (рис. 3.2).



$x \to a$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$x \to a-,\ x \to a+$
$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c$

$x \to a+$
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$

Рис. 3.2

Будем теперь условно будем изображать $+\infty$ как «точку» на оси OX на правом краю листа тетради или соответственно $+\infty$ как «точку» оси OY на верхнем краю листа тетради. Далее условимся изображать $-\infty$ как «точку» на оси OX на левом краю листа тетради и соответственно $-\infty$ как «точку» на оси OY на нижнем краю листа тетради. Тогда можно иллюстрировать все остальные пределы как движение графика к (θ, ω) при $x \to \theta$. Заметим, что в случае бесконечных пределов или пределов на бесконечности вспомогательная «точка» (θ, ω) не должна достигаться графиком функции (как точка горизонта, которая удаляется, если к ней приближаться (рис. 3.3)).

Это удобно для изображения графика функции, имеющей заданный предел.

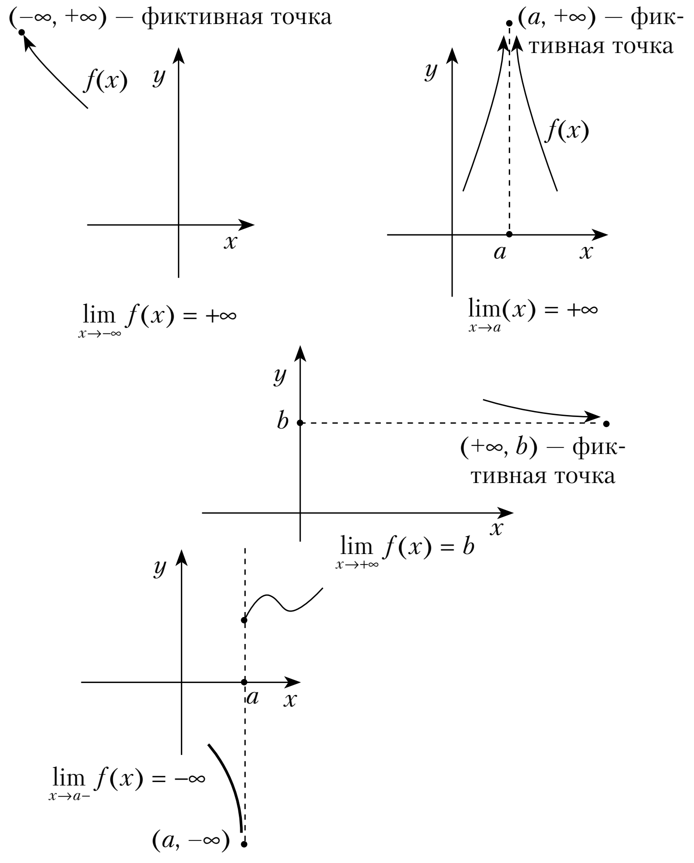
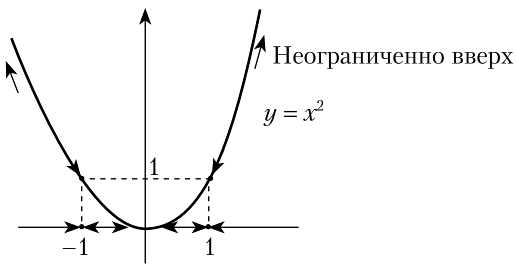


Рис. 3.3

Для более точных рассуждений заметим, что *если* $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = \omega$, *то в некоторой проколотой окрестности* θ *график функции попадет* *в горизонтальную полосу, координата y в которой находится в любой ε-окрестности ω.*

Заметим, что если предел последовательности был связан только с последовательностью, то предел функции зависит не только от функции, но и от того, куда стремится аргумент x.

Например для $f(x) = x^2$ предел x^2 равен нулю при $x \to 0$. Этот предел равен $+\infty$ при $x \to \infty$ и равен единице при $x \to \pm 1$ (см. график на рис. 3.4).



$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to\pm 1} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Рис. 3.4

Между перечисленными пределами существуют некоторые связи.

Теорема 3.1. Функция имеет предел в точке тогда и только тогда, когда она имеет оба односторонних предела в этой точке, которые равны между собой.

Доказательство следует из того, что двусторонняя проколотая окрестность точки есть объединение проколотых односторонних окрестностей и в объединении любых проколотых левой и правой односторонних окрестностей содержится проколотая двусторонняя окрестность той же точки.

Поэтому, если значения функции в проколотой двусторонней окрестности попадают в ε-окрестность предела, то туда же попадают значения функции как в правой, так и в левой половине окрестности. Иными словами, из существования двустороннего предела следует существование равных ему односторонних.

Если теперь значения функции из какой-то левой проколотой окрестности и какой-то правой попадут в ε-окрестность общего предела, то там же будут находиться значения функции в двусторонней окрестности с радиусом, меньшим из двух радиусов. Другими словами, из существования равных односторонних пределов следует существование такого же двустороннего.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1а. Функция имеет предел при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда она имеет оба предела при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, которые равны между собой.

3.2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Рассмотрим общие свойства пределов. Они похожи на свойства пределов последовательностей. Всюду далее мы будем употреблять общее обозначение для всех пределов функций $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = \omega$, где θ — один из символов $a-$, $a+$, a, $\pm\infty$, ∞, $\omega = b$, $\pm\infty$, ∞.

Определение 3.2. Функция называется локально ограниченной в обобщенной «точке» θ, если она ограничена в некоторой проколотой окрестности θ.

Теорема 3.2 (локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел). Если $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = b$ конечен, то функция $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности θ.

Доказательство. По определению предела, в некоторой проколотой окрестности θ значения функции принадлежат $O_1(b) = (b-1, b+1)$ — ограниченному множеству, а это значит, что функция ограничена в этой проколотой окрестности.

Теорема 3.3 (арифметические свойства конечных пределов). Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\theta} g(x) = c$, d — число. Тогда существуют $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) + g(x) = b + c$, $\lim\limits_{x\to\theta} f(x)g(x) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) \cdot d = b \cdot d$ и, если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\theta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Доказательство абсолютно аналогично доказательству для последовательностей и поэтому не приводится.

Далее рассмотрим бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение 3.3. Функция $M(x)$, определенная в проколотой окрестности θ, называется ***бесконечно большой*** при $x \to \theta$, если $\lim\limits_{x\to\theta} M(x) = \infty$.

Функция $\alpha(x)$, определенная в проколотой окрестности θ, называется ***бесконечно малой*** при $x \to \theta$, если $\lim\limits_{x\to\theta} \alpha(x) = 0$.

Замечание. Обычно бесконечно малые функции обозначаются, как и здесь, греческими буквами.

Теорема 3.4 (свойства бесконечно малых). Сумма двух бесконечно малых при $x \to \theta$, произведение двух таких бесконечно малых, а также произведение такой бесконечно малой на локально ограниченную при $x \to \theta$ также являются бесконечно малыми.

Доказательство. Для суммы и произведения бесконечно малых все следует из арифметических свойств пределов и того, что $0 + 0 = 0$ и $0 \cdot 0 = 0$.

Пусть теперь $\alpha(x)$ — бесконечно малая, а $|h(x)| < M$ — ограниченная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_{\delta_1}(\theta)$. Тогда по определению нулевого предела бесконечно малой $\forall\, \varepsilon > 0$ будет $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_{\delta}(\theta) \subset \overset{o}{O}_{\delta_1}(\theta)$ (при δ меньшем, чем δ_1, если θ —число, и при δ большем, чем δ_1 при бесконечном θ). При этом в той же окрестности $|\alpha(x)h(x)| = |\alpha(x)||h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$ $\forall\, \varepsilon > 0$. Это и значит, что произведение бесконечно малой на ограниченную имеет нулевой предел и является бесконечно малой.

Следствие. $\alpha(x)$ — бесконечно малая тогда и только тогда, когда $|\alpha(x)|$ — бесконечно малая. Это следует из того, что модуль числа получается из самого числа умножением на $+1$ или -1 и наоборот, а функция со значениями $+1$ и -1 — ограничена.

Пример. По графику $y = \dfrac{1}{x}$ бесконечно большая при $x \to 0$ и бесконечно малая при $x \to \infty$.

3.3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО КОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ. СВЯЗЬ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ И ОСНОВНЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Теорема 3.5 (основное свойство конечных пределов). Функция $f(x)$ имеет конечный предел b при $x \to \theta$ тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \theta$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов функция $f(x)$ имеет конечный предел b при $x \to \theta$ тогда и только тогда, когда $\alpha(x) = f(x) - b$ имеет предел 0, т.е. является бесконечно малой при $x \to \theta$. Поскольку $f(x) = b + (f(x) - b) = b + \alpha(x)$, все доказано.

Теорема 3.6 (связь бесконечно малых и бесконечно больших). Если $M(x)$ бесконечно большая при $x \to \theta$, то $\dfrac{1}{M(x)}$ — бесконечно малая при $x \to \theta$. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \theta$, не обращающаяся в ноль в $\overset{\circ}{O}_{\delta}(\theta)$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to \theta$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела ∞ в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}_{\delta_1}(\theta)$ будет $|M(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Из свойств неравенств в той же окрестности будет $\left|\dfrac{1}{M(x)}\right| < \varepsilon$. Это значит, что $\dfrac{1}{M(x)}$ имеет предел 0, т.е. является бесконечно малой при $x \to \theta$.

Обратно для бесконечно малой ее модуль — тоже бесконечно малая и, значит, $\forall\, \varepsilon > 0 \; |\alpha(x)| < \dfrac{1}{\varepsilon}$ в $\overset{\circ}{O}_{\delta_1}(\theta) \subset \overset{\circ}{O}_{\delta}(\theta)$. Тогда $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > \varepsilon$ в той же окрестности. Иными словами, $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to \theta$, а значит, является бесконечно большой при $x \to \theta$.

Замечание. Результат теоремы можно выразить символическим равенством $\dfrac{1}{\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = \infty$, если под «0» понимать бесконечно малые функции, локально не равные нулю, а под «∞» — бесконечно большие.

Кроме того, какие-то другие из арифметических свойств пределов можно перенести на бесконечные пределы, например:

$$+\infty + a = +\infty;$$

$$-\infty + a = -\infty;$$

$$\infty + a = \infty;$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty;$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty;$$

$$\infty \cdot a = \infty \text{ при } a \neq 0;$$

$$\infty \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{1}{\infty} = 0,\ \frac{1}{0} = \infty.$$

Для других действий с бесконечными пределами результат заранее неизвестен. Это так называемые неопределенности, а именно:

$$\infty + \infty,\ \infty - \infty,\ \infty \cdot 0,\ \frac{\infty}{\infty}.$$

Это будет видно в следующих примерах.

Примеры. По графикам можно найти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to 0+}\ln(x) = -\infty,\ \lim_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0}x = 0.$$

Далее покажем неоднозначность в неопределенностях:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}0 = 0 = «\infty + \infty»,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} = \infty = «\infty + \infty»;$$

$$\lim_{x\to 0}x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}1 = 1 = «0 \cdot \infty»,\ \lim_{x\to 0}x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}x = 0 = 0 = «0 \cdot \infty»;$$

$$\lim_{x\to 0}x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty = «0 \cdot \infty».$$

3.4. СВЯЗЬ ПРЕДЕЛОВ И НЕРАВЕНСТВ. СОХРАНЕНИЕ СТРОГОГО НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ПРЕДЕЛАМИ. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ В НЕСТРОГОМ НЕРАВЕНСТВЕ. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ В ДВОЙНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

Теперь приведем связи пределов функций с неравенствами.

Теорема 3.7 (сохранение строгого неравенства между пределами для функций). Пусть существуют конечные пределы $\lim_{x\to\theta}f(x) = b$, $\lim_{x\to\theta}g(x) = c$, причем $b < c$. Тогда для функций выполняется такое же неравенство в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$, а именно для всех x из этой окрестности будет $f(x) < g(x)$.

Доказательство. Поскольку $b < c$, найдется $\varepsilon > 0$, чтобы было $b + \varepsilon < c - \varepsilon$ (ε-окрестности b, c не пересекаются (рис. 3.5), причем любое число из $O_\varepsilon(b)$ меньше любого числа из $O_\varepsilon(c)$). По определению предела в каких-то проколотых окрестностях θ $f(x)$ попадут в нижнюю из этих окрестностей, а $g(x)$ — в верхнюю. В меньшей из этих двух проколотых окрестностей θ и будет $f(x) < g(x)$.

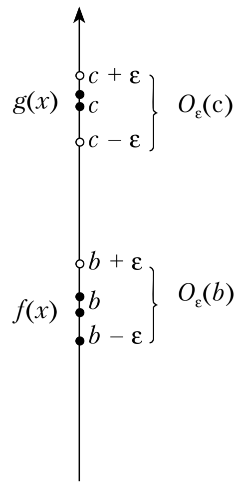


Рис. 3.5

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ в некоторой проколотой окрестности θ и $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = b$, то $b \geq 0$.

Действительно, при $b < 0$ по теореме 3.7 было бы в некоторой проколотой окрестности θ также $f(x) < 0$, что неверно. Значит, предположение неверно и $b \geq 0$.

Теорема 3.8 (переход к пределу в нестрогом неравенстве). Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to\theta} g(x) = b$, причем $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов $\lim\limits_{x\to\theta} g(x) - f(x) = b - a$ и $g(x) - f(x) \geq 0$ в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$. Тогда по следствию из теоремы 3.7 будет $b - a \geq 0$, т.е. $b \geq a$.

Следующая теорема позволяет не только оценивать значение предела, но и устанавливать его существование, исходя из неравенств.

Теорема 3.9 (переход к пределу в двойном неравенстве). Пусть существуют одинаковые (не обязательно конечные, но не равные ∞!) пределы у функций $\lim\limits_{x\to\theta} f(x) = \omega$, $\lim\limits_{x\to\theta} g(x) = \omega$. При этом в некоторой проколотой окрестности θ выполнено неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ для некоторой функции $h(x)$, определенной в этой окрестности. Тогда существует $\lim\limits_{x\to\theta} h(x) = \omega$.

Доказательство. По определению пределов $f(x)$ и $g(x)$ попадут в любую ε-окрестность ω при x из некоторых двух проколотых окрестностей θ. Для x из $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$ — пересечения этих двух окрестностей — одновременно $f(x)$ и $g(x)$ попадут в указанную ε-окрестность ω. Эта окрестность не проколотая, поэтому она состоит для допустимых ω из одного конечного или бесконечного куска, в котором вместе с двумя точками содержатся все промежуточные точки (рис. 3.6).

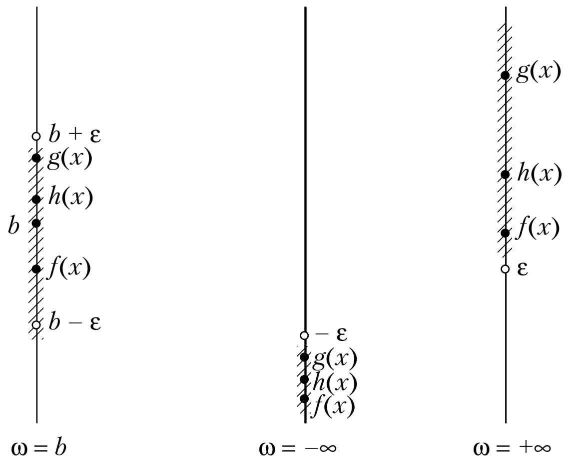


Рис. 3.6

Иными словами, число $h(x)$, лежащее по неравенству между $f(x)$ и $g(x)$, тоже попадет в эту окрестность при x из некоторой $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to\theta} h(x) = \omega$.

Замечание. Теорема неверна для $\theta = \infty$.

Действительно, $-x < 0 < x$, $x \in O_1(\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{x\to\infty}(-x) = \infty \neq$ $\neq \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$.

Дело здесь в том, что окрестности бесконечности распадаются на два несвязных куска!

Пример. Используем переход к пределу в неравенстве для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x} = 0$ при $a > 1$.

Действительно, вспомним, что в главе 2 после теоремы 2.5 в примере 2 был вычислен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ при $a > 1$. Воспользуемся этим, поместив каждое действительное число между соседними целыми числами: $n(x) \le x < n(x)+1$. Такая функция $n(x)$ определена для любого x и $n(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда, поскольку при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает, то верно неравенство

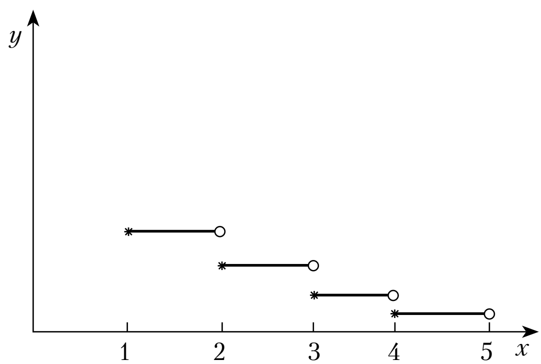
$$\frac{n(x)}{a^{n(x)+1}} \le \frac{x}{a^x} \le \frac{n(x)+1}{a^{n(x)}}. \tag{3.1}$$

Поскольку график функции $\frac{n(x)}{a^{n(x)}}$ представляет собой «размытый» график последовательности $\frac{n}{a^n}$ (рис. 3.7, *а*), графически они имеют общий предел, равный нулю, на $n(x) \to +\infty$ и $n \to \infty$. Вычислим пределы правой и левой частей неравенства (3.1):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n(x)}{a^{n(x)+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(x)}{a^{n(x)}}\frac{1}{a} \overset{\text{Предел произведения}}{=} 0\cdot\frac{1}{a} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n(x)+1}{a^{n(x)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(x)}{a^{n(x)}} + \frac{1}{a^{n(x)}} \overset{\text{Предел суммы}}{=} 0+0 = 0,$$

так как $a^{n(x)}$ — бесконечно большая.



$*$ — график n/a^n

—— — график $n(x)/a^{n(x)}$

Рис. 3.7

Другими словами, пределы правой и левой частей двойного неравенства совпадают. Тогда по теореме о двойном неравенстве существует предел функции $\frac{x}{a^x}$ при $x \to +\infty$, равный нулю.

3.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПОДСТАНОВКОЙ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЙ

Примеры вычисления пределов функций

1. Вычисление заменой переменной. Пусть $\lim\limits_{x\to\theta} y(x) = \lambda$, $y(x) \neq \lambda$ в окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$ и $\lim\limits_{y\to\lambda} g(y) = \omega$. Тогда $\lim\limits_{x\to\theta} g(y(x)) = \lim\limits_{y\to\lambda} g(y) = \omega$ (иллюстрацией служит рис. 3.8).

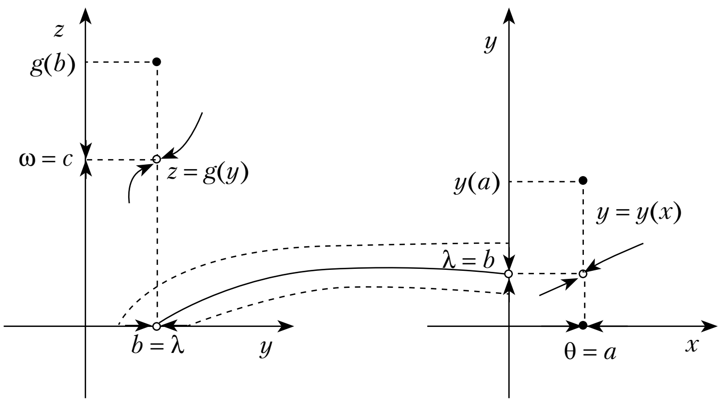


Рис. 3.8

Заметим, что это всегда выполнено, если $\lambda = \infty$, а также при замене $y = \dfrac{1}{x}$ и $\theta = \infty$, и при замене $y = -x$ верно в любом предельном процессе из-за строгой монотонности функции. Этими заменами мы и будем далее в основном пользоваться.

2. Самый простой способ вычисления пределов функций в точке — подстановка в функцию предельного значения аргумента. Это можно делать не для всех функций.

Определение 3.4 (непрерывной функции). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0$ можно вычислять подстановкой, иными словами $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.5 (непрерывной справа, слева). Функция $f(x)$ называется непрерывной справа или слева в точке x_0, если она определена в правой или левой окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0 \pm$ можно вычислять подстановкой, иными словами $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.6 (непрерывность на промежутке). Функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка (в концах, ему принадлежащих, с одной стороны).

Пример. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на $[-10, 0)$. Она не непрерывна в нуле, но ноль не принадлежит промежутку!

Замечание. «Значения» для некоторых элементарных функций на границах области определения (в частности на «прилежащих» к ней бесконечностях) можно тоже «определить» через пределы, а потом использовать для вычисления пределов подстановкой! Приведем возможную табличку:

$$(+\infty)^n = \begin{cases} +\infty, n > 0, \\ 0, n < 0; \end{cases}$$

$$\ln(0) = -\infty,\ \ln(+\infty) = +\infty;\ a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, a > 1, \\ 0, 0 < a < 1; \end{cases} \quad a^{-\infty} = \begin{cases} 0, a > 1, \\ +\infty, 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{1}{0\pm} = \pm\infty.$$

Замечание. Непрерывность функции в точке графически означает, что график функции не «рвется» в этой точке.

Замечание. Примеры непрерывных функций в точке дает следующая теорема, которую мы не доказываем.

Теорема 3.10 (непрерывность элементарных функций). Все элементарные функции непрерывны в точках своей области определения.

Иллюстрацией к доказательству, которое мы не приводим, служит видимая «неразрывность» графиков элементарных функций в точках их области определения.

Пример. $\lim\limits_{x \to 1-} \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to a^2+1} \ln x = \ln(a^2 + 1)$.

Теорема 3.11 (арифметические свойства непрерывных функций). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, c — число. Тогда $f(x) + g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$ также неперерывны в этой точке. Если при этом $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в x_0.

Доказательство. Вычислим соответствующие пределы, воспользовавшись арифметическими свойствами пределов и тем, что пределы непрерывных функций вычисляются подстановкой:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0} cf(x)\overset{\text{Предел произведения на число}}{=}c\lim_{x\to x_0} f(x)=cf(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)\overset{\text{Предел произведения}}{=}\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\substack{\text{Предел частного}\\ \text{Предел знаменателя}\neq 0}}{=}\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Итак, мы убедились, что пределы суммы, произведения на число, произведения и частного двух функций также вычисляются подстановкой, т.е. они непрерывны по определению.

Теорема 3.12 (непрерывность обратной функции). Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a,b\rangle$ и имеет на нем обратную функцию $g(x)$, определенную на $\langle c,d\rangle$. Тогда обратная функция непрерывна на промежутке $\langle c,d\rangle$.

Пояснение к доказательству. Воспользуемся графическим определением непрерывности в точке как «неразрывности» графика функции в этой точке. По условию график $f(x)$ «неразрывен» во всех точках промежутка $\langle a,b\rangle$, причем в концевых с одной стороны. Но график $g(x)$ на $\langle c,d\rangle$ по свойству графика обратной функции получается из графика $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$ симметрией относительно биссектрисы первого координатного угла, при которой «неразрывность» в соответствующих точках сохраняется. Поэтому график $g(x)$ будет «неразрывен» во всех точках промежутка $\langle c,d\rangle$, а $g(x)$ будет там непрерывна.

Примеры. $\sin x$ непрерывна на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда обратная функция $\arcsin x$ непрерывна на $[-1,1]$. Далее e^x непрерывна на $(-\infty,+\infty)$. Следовательно, обратная функция $\ln(x)$ непрерывна на $(0,+\infty)$.

Теорема 3.13 (непрерывность сложной функции (суперпозиции)). Пусть $g(x)$ непрерывна в x_0, $f(y)$ непрерывна в $g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в x_0.

Доказательство (графическое (рис. 3.9)).

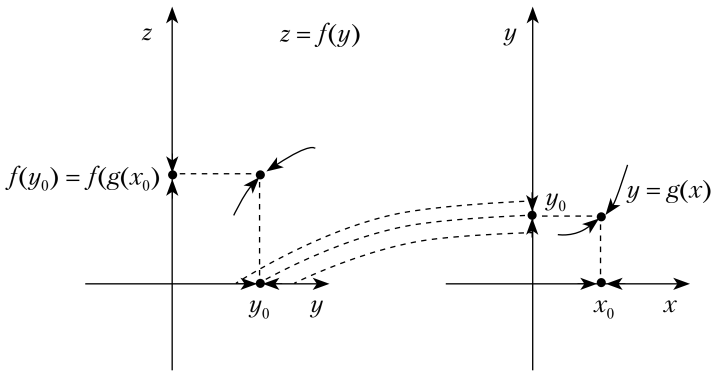


Рис. 3.9

Изобразим на двух чертежах графики $y = g(x)$ и $z = f(y)$. При движении x по первому графику по направлению к x_0 из непрерывности функции следует, что y движется к $y_0 = g(x_0)$. По второму графику смотрим, что происходит со сложной функцией z при движении y к y_0. Из непрерывности $z(y)$ следует, что z движется к $z(y_0) = f(g(x_0)$. Предел вычисляется подстановкой, а это доказывает непрерывность сложной функции.

Пример. Пусть $f(x)$ непрерывна. Тогда непрерывна функция $|f(x)|$ как суперпозиция двух непрерывных: внутренней функции $f(x)$ и внешней $|x|$.

Перейдем к вычислению так называемых замечательных пределов.

Теорема 3.14 (первый замечательный предел). Существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 3.10). Справедливо неравенство:

$$S(\Delta OAB) < S\big(\text{сектора}\, OAB\big) < S\big(\Delta ODB\big).$$

Иными словами, $\dfrac{\sin x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{2}$. Делим на $\sin(x) > 0$ и умножаем на 2, $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$. Берем от обеих частей положительного неравенства убывающую функцию $y = 1/z$ (переворачиваем дроби, меняя неравенства), $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$. Теперь в этом неравенстве переходим к пределу при $x \to 0+$. Получим $\lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1 = \lim\limits_{x\to 0+} \cos x =$ $= \cos(0) = 1$ (предел косинуса вычислен подстановкой). Пределы крайних частей неравенства равны. По теореме о переходе к пределу в двойном неравенстве существует $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

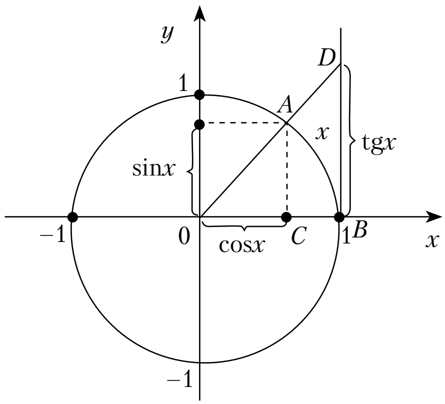


Рис. 3.10

Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \text{заменяем } t = -x,\ t \to 0+ \right\} = \lim_{t\to 0+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

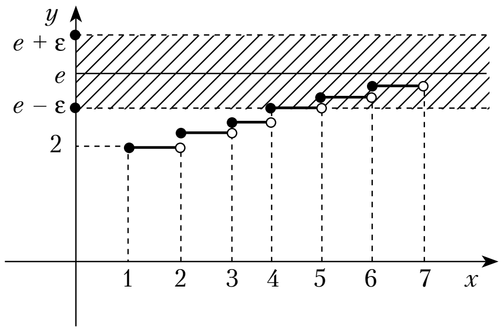
Оба односторонние предела при $x \to \pm 0$ существуют и равны, значит, двусторонний предел при $x \to 0$ тоже существует и равен общему значению односторонних пределов. Получили $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 3.15 (второй замечательный предел). Существует $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Доказательство. Докажем существование одинакового предела для $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. По теореме 3.1а это будет доказывать существование того же предела на бесконечности. При доказательстве используем второй замечательнй предел для последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Далее рассмотрим функцию $n(x) = n$ при $n \le x < n + 1$, при $x \ge 1$, n натуральное. Получим по определению всегда $n(x) \le x < n(x) + 1$ при $x \ge 1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}. \qquad (3.2)$$



● — график $(1 + 1/n)^n$

——— — график $(1 + 1/n(x))^{n(x)}$

Рис. 3.11

Заметим, что график функции $\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)}$ представляет собой «размытый» график последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ (рис. 3.11). Этот график одновременно с графиком последовательности попадет в горизонтальную полосу, ордината которой находится в $(e-\varepsilon, e+\varepsilon)$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)} = e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)+1}$ (последний предел получается из предела последовательности с заменой n на $n + 1$).

Найдем пределы крайних частей в неравенстве (3.2), пользуясь арифметическими свойствами пределов:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)+1}}{\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)} = \frac{e}{(1+0)} = e.$$

Аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}=e$. Опять получили одинаковые пределы у крайних частей неравенства. По теореме о двойном неравенстве существует предел средней части, равный пределам крайних, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Для доказательства существования предела при $x\to\infty$ достаточно доказать существововование такого же предела при $x\to-\infty$.

Проверим это:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left\{\begin{matrix} t=-x \\ t\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Теорема доказана.

Следствие (другая форма второго замечательного предела). $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Имеем

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left\{\begin{matrix} t=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{t} \\ t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

Теорема 3.16 (другие замечательные пределы):

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0,\ a\neq1,\ \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Все эти пределы получаются из двух замечательных заменой переменных и подстановкой предельных значений в непрерывные функции, а именно:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

В следующем пределе используем строго монотонную в окрестности 0 замену переменной.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left\{\begin{array}{c} t = \operatorname{arctg} x \\ x = \operatorname{tg} t \\ t \to \operatorname{arctg} 0 = 0 \end{array}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} t}{t}\right)} = \frac{1}{1} = 1;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$ получается аналогично заменой, которая тоже строго монотонна.

$$\left\{\begin{array}{c} t = \arcsin x \\ x = \sin t \\ t \to 0 \end{array}\right\}, \ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e) = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{\begin{array}{c} t = a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \\ x = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln a} \\ t \to a^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}\ln a = \frac{1}{1}\ln a = \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)}\right)\cdot\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\cdot\alpha\cdot 1 = \alpha,$$

так как при $x \to 0$ будет $\alpha\ln(1+x) \to \alpha\ln 1 = \alpha\cdot 0 = 0$.

3.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ. СТАНДАРТНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИ $x \to 0$. ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ НА ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ПРЕДЕЛУ. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Замечание. Многие из приведенных пределов дают для предела отношения двух функций значение 1. Если функции равны, то их отношение везде равно единице. Если же предел отношения равен единице, то функции «стремятся» стать равными, они «равны в пределе». Оказывается, это дает право заменять одну из этих функций на другую при вычислении пределов. Рассмотрим подробно соответствующие понятия.

Определение 3.7. Говорят, что две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и ненулевые в окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$, эквивалентны при $x \to \theta$, если существует $\lim\limits_{x\to\theta}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Это обозначается как $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \theta$.

Замечание. Это определение в учебниках дается только для сравнения бесконечно малых функций. Мы отступаем от такой практики. Если функция имеет конечный ненулевой предел, то по нашему определению она получается эквивалентной своему пределу как постоянной функции. Бывает удобно заменить ее на эту постоянную функцию при дальнейшем вычислении предела.

Примеры эквивалентных функций дают пределы, вычисленные в теоремах 3.14 и 3.16. При $x \to 0$ верны следующие соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x;$$

$$\arcsin x \sim x;$$

$$\operatorname{tg} x \sim x;$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

$$\ln(1+x) \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a \text{ при } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ \alpha \neq 0.$$

Пример. При $x \to 0$ $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{3}$; $e^{5x} - 1 \sim 5x\ln e = 5x$.

Проанализируем свойство эквивалентности.

Теорема 3.17. Если $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$, то $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \theta$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + g(x)\cdot\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \theta$.

Доказательство. Имеем по определению эквивалентности $\lim\limits_{x\to\theta}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. По основному свойству пределов (теорема 3.5)

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Это означает, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot \alpha(x)$, что и требовалось доказать. Повторяя рассуждения в обратном порядке и пользуясь тем, что функция $g(x)$ не обращается в ноль, получим доказательство в другую сторону.

Замечание. Рассматривая полученное равенство, мы в правой части можем выделить два слагаемых: функцию $g(x)$, эквивалентную $f(x)$, и функцию $g(x)$, умноженную на бесконечно малую функцию, т.е. функцию очень маленькую по сравнению с $g(x)$ и $f(x)$. Первая часть $g(x)$ называется при этом ***главным слагаемым*** во всей сумме.

Очень важно уметь находить для сложной функции простую, ей эквивалентную. Это поясняет следующее свойство эквивалентных функций.

Теорема 3.18. Пусть при $x \to \theta$ $f_1(x) \sim f(x)$; $g_1(x) \sim g(x)$; $h_1(x) \sim h(x)$. Тогда следующие пределы не существуют одновременно или равны между собой: $\lim\limits_{x\to\theta} \dfrac{f_1(x) \cdot g_1(x)}{h_1(x)} = \lim\limits_{x\to\theta} \dfrac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$ (иными словами, при переходе к пределу мы можем заменять множители и делители в выражении на эквивалентные им функции).

Доказательство. По теореме 3.17 имеем:

$$f_1(x) = f(x) + \alpha(x) f(x) = f(x)\big(1 + \alpha(x)\big);$$

$$g_1(x) = g(x)\big(1 + \beta(x)\big);$$

$$h_1(x) = h(x)\big(1 + \gamma(x)\big),$$

где $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ — бесконечно малые при $x \to \theta$. Тогда

$$\lim_{x\to\theta} \frac{f_1(x) \cdot g_1(x)}{h_1(x)} = \lim_{x\to\theta} \frac{f(x)\big(1 + \alpha(x)\big) \cdot g(x)\big(1 + \beta(x)\big)}{h(x)\big(1 + \gamma(x)\big)} =$$

$$= \lim_{x\to\theta} \left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} \right) \cdot \left(\frac{\big(1 + \alpha(x)\big)\big(1 + \beta(x)\big)}{1 + \gamma(x)} \right) = \lim_{x\to\theta} \frac{f(x) g(x)}{h(x)},$$

так как предел второго множителя равен единице по свойствам пределов, и этот множитель заменяется на 1, которой эквивалентен. При этом самый левый и самый правый пределы существуют или не существуют одновременно.

3.7. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ СИМВОЛ «О». ШКАЛА БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Определение 3.8 («очень маленькая» по сравнению с данной функция). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$ и не обращаются там в ноль. Говорят, что $g(x)$ является «очень маленькой» по сравнению с $f(x)$ при $x \to \theta$, если существует $\lim\limits_{x\to\theta}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Это обозначается как $g(x) = o(f(x))$ при $x \to \theta$. (Читать обозначение нужно как «$g(x)$ есть «o»-маленькое от $f(x)$ при $x \to \theta$»).

Замечание 1. Эквивалентным определением будет следующее определение.

Определение 3.8а. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(\theta)$ и не обращаются там в ноль. Говорят, что $g(x)$ является «очень маленькой» по сравнению с $f(x)$ при $x \to \theta$, если $g(x) = \alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \theta$.

Эквивалентность определений следует из основного свойства пределов, дающего для нулевого предела следующее: $\lim\limits_{x\to\theta}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \theta$. Но $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \alpha(x)$ для ненулевых функций эквивалентна равенству $g(x) = \alpha(x)f(x)$.

Замечание 2. Для понятия «o» справедливо следующее: если $g(x) = o(f(x)), h(x) = o(f(x))$ при $x \to \theta$, то $\alpha g(x) + \beta h(x) = o(f(x))$ при $x \to \theta$; α, β — числа.

Доказывается из аналогичных свойств бесконечно малых.

Используем теперь символ «о»-маленькое для сравнения бесконечно больших функций при $x \to +\infty$. Заметим, что в примере к теореме 3.9 вычислен $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x} = 0$ при $a > 1$, т.е. в новых обозначениях $x = o(a^x)$при $x \to \infty$.

Пользуясь предыдущим результатом, найдем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left\{\begin{matrix} y = \ln x \\ y \to +\infty \\ x = e^y \end{matrix}\right\} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 0.$$

Это означает $\ln(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

Итак, получена при $a > 1$ и $x \to +\infty$ ***«шкала бесконечностей»***: $\ln x \prec x \prec a^x$, где через «$g(x) \prec f(x)$» мы обозначили $g(x) = o(f(x))$.

На самом деле отсюда можно получить расширенную шкалу сравнения бесконечно больших при $0 < \alpha < \beta$, $1 < a < b$, $x \to +\infty$: $\ln(x) \prec x^\alpha \prec x^\beta \prec a^x \prec b^x$ (проделайте это).

Пример использования. Имеем по шкале бесконечностей $-5\ln x - x^2 + e^{5x} = e^{5x} + o(e^{5x})$, что эквивалентно e^{5x} при $x \to +\infty$. Поэтому, заменяя при переходе к пределу функции на эквивалентные, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{5\ln x - x^2 + e^{5x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{5x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{3x}} = 0.$$

3.8. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЯХ (ДВЕ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА И ТЕОРЕМА КОШИ)

Непрерывные в точке и на промежутке функции были приведены в определениях 3.4–3.6. Докажем некоторые теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

Теорема 3.19 (первая теорема Вейерштрасса). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть a_n — бесконечная последовательность точек из $[a, b]$. Тогда существует ее подпоследовательность a_{n_k}, сходящаяся к точке $c \in [a, b]$.

Замечание. Будем считать, что $a > 0$. В противном случае заменим отрезок $[a, b]$ отрезком $[1, 1 + b - a]$, а точки последовательности a_n точками $a_n + 1 - a$ и докажем, что для подпоследовательности $a_{n_k} + 1 - a$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} + 1 - a = c_1 \in [1, 1 + b - a]$.

Тогда существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c_1 - 1 + a = c \in [a, b]$.

Доказательство. Итак, $a > 0$. Наша последовательность ограничена числом a снизу и числом b сверху. Если целое число p меньше a, а целое число $q > b$, то последовательность a_n содержится между целыми числами p и q. Поскольку $a > 0$, положим $p = 0$. Рассмотрим все целые числа из отрезка $[p, q]$. Их число конечно. Поэтому на полуинтервале $[r_1, r_1 + 1)$ между какими-нибудь соседними из них содержится бесконечное множество точек нашей последовательности.

Пусть a_{n_1} — любая из них. Она имеет целую часть $r_1 \geq 0$. Разобъем отрезок $[r_1, r_1 + 1]$ на 10 равных отрезков длины 0,1 десятичнорациональными точками. Поскольку весь отрезок содержал бесконечно много точек последовательности, один из 10 полуинтервалов длины 0,1, а именно $[r_2, r_2 + 0{,}1)$, содержит бесконечно много членов последовательности (заметим, что r_2 имеет целую часть r_1 и один десятичный знак после запятой). Возьмем один попадающий в указанный полуинтервал член последовательности a_{n_2} с номером $n_2 > n_1$. Его целая часть и первая цифра после запятой совпадают с r_2, целая часть которого есть r_1 и т.д. Получим последовательность десятично-рациональных точек r_k, десятичная запись каждой следующей из которых отличается от записи предыдущей на одну цифру самого младшего разряда. Поэтому существует число c (бесконечная десятичная дробь), совпадающее с r_k до k-разряда после запятой $\forall k$. Поэтому $c = \lim\limits_{k\to\infty} r_k$. Кроме того, построена подпоследовательность a_{n_k} последовательности a_n такая, что $r_k < a_{n_k} < r_k + 10^{-k+1}$.

Имеем:

$$\lim_{k\to\infty} r_k = c, \lim_{k\to\infty} r_k + 10^{-k+1} \overset{\text{Предел суммы}}{=} \lim_{k\to\infty} r_k + \lim_{k\to\infty} 10^{-k+1} = c + 0 = c.$$

Итак, пределы левой и правой части двойного неравенства совпадают. По теореме о переходе к пределу в двойном неравенстве существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c$. Переходя к пределу в неравенстве $a < a_{n_k} < b$, получим $a \le c \le b$. Значит, c — точка отрезка, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Тогда не ограничен и ее модуль $|f(x)|$, который непрерывен на $[a, b]$ как суперпозиция непрерывных $f(x)$ и $|x|$.

Из неограниченности и неотрицательности модуля следует существование последовательности точек x_n из $[a, b]$ таких, что $|f(x_n)| > n$ для любого натурального n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$. По лемме существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, $c \in [a, b]$, т.е. определено число $f(c)$. Для предела подпоследовательности значений $|f(x_{n_k})|$ имеем то же значение, что и для предела последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$.

Поскольку x_{n_k} сходится к c, а $|f(x)|$ непрерывна, число $|f(c)| = \lim\limits_{x_{n_k}\to c} |f(x_{n_k})| = \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$. Это противоречит тому, что $f(c)$ — число.

Итак, полученное противоречие доказывает, что предположение о неограниченности непрерывной функции на отрезке неверно, т.е. $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Теорема 3.20 (вторая теорема Вейерштрасса). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она достигает на нем своего максимума и минимума.

Доказательство. Нужно доказать, что существуют две точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ отрезка $[a, b]$ такие, что для любой точки x отрезка будет выполнено неравенство $f(\bar{x}_1) \le f(x) \le f(\bar{x}_2)$. Иными словами, существуют $\bar{x}_1$ — точка минимума и точка $\bar{x}_2$ — точка максимума. Докажем, что существует точка минимума. Для максимума доказательство аналогично.

В предыдущей теореме доказано, что наша функция и, следовательно, ее множество значений ограничены. Поэтому по теореме о существовании верхней и нижней грани ограниченное множество значений функции на отрезке имеет нижнюю и верхнюю грань. Другими словами, существуют числа m, M такие, что на отрезке выполняются неравенства

$$m \le f(x) \le M. \tag{3.3}$$

При этом m — максимальное, а M — минимальное из чисел, им удовлетворяющих. Поэтому для любого натурального n число $m + \dfrac{1}{n}$ уже не ограничивает множество значений снизу, т.е. существует точка отрезка x_n такая, что

$$m \le f(x_n) < m + \frac{1}{n}. \tag{3.4}$$

Тогда отсюда следует, что последовательность $f(x_n)$ сходится к m.

Согласно лемме к предыдущей теореме найдется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к точке отрезка c. В силу непрерывности функции $f(x)$ $f(c) = \lim\limits_{x_{n_k} \to c} f\left(x_{n_k}\right) = \lim\limits_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = m$, так как по построению (3.4) $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = m$. Поэтому в силу (3.3) найдена точка минимума $\overline{x_1} = c$, и $f(\bar{x}_1) = m \le f(x)\ \forall x \in [a, b]$. То есть функция принимает на отрезке свое минимальное значение. Для максимального значения все аналогично.

Теорема 3.21 (теорема Коши о промежуточном значении). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть $A = f(a)$, $B = f(b)$ — значения, принимаемые на концах отрезка, C лежит между A и B. Тогда существует точка c из $[a, b]$, в которой $f(c) = C$.

Доказательство. Если $A = B = C$, то значение C принимается на концах отрезка. Пусть $A \ne B$, и для определенности будем считать $A > C > B$. В противном случае доказательство аналогично. Рассмотрим все точки отрезка, в которых $f(x) > C$. Это множество ограничено отрезком и не пусто, так как содержит точку a. Пусть c — его верхняя грань на отрезке. Тогда в силу непрерывности функции $f(c) \geq C$. (Точку c можно приблизить слева последовательностью точек из множества $x_n \to c$, в которых $f(x_n) > C$. Далее переходим к пределу в этом неравенстве.)

Точки справа от верхней грани множества ему не принадлежат по определению верхней грани, т.е. в них неравенство $f(x) > C$ не выполняется, значит, в них на $[c, b]$ должно быть $f(x) \leq C$. Поскольку $f(b) = B < C \leq f(c)$, значит, $c < b$ и можно рассматривать правый предел функции в точке c. В силу непрерывности, а также связи одностороннего и двустороннего предела и предельного перехода в неравестве:

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x) \leq C.$$

Другими словами, одновременно

$$\begin{cases} f(c) \leq C, \\ f(c) \geq C. \end{cases}$$

Значит, $f(c) = C$ и значение C принимается на отрезке.

Следствие 1 (теорема о множестве значений непрерывной на отрезке функции). Множество значений функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, есть отрезок от ее минимума до ее максимума, так как любое значение между ними принимается по доказанной теореме на принадлежащем $[a, b]$ отрезке с концами в точках максимума и минимума функции (см. вторую теорему Вейерштрасса).

Следствие 2 (теорема Коши о нулях). Если непрерывная на отрезке функция принимает на концах значения разных знаков, то она обращается на этом отрезке в ноль. Действительно, ноль есть промежуточное значение между двумя значениями разных знаков и принимается на отрезке по теореме о промежуточном значении.

3.9. ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Определение 3.9 (точки разрыва). Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется ***точкой разрыва*** для $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в x_0.

Замечание. Графически точка разрыва характеризуется тем, что график функции нельзя нарисовать ни в какой непроколотой окрестности x_0 неразрывной кривой линией.

Проанализируем подробнее точки разрыва. Если функция непрерывна в x_0, то ее предел в точке x_0 вычисляется подстановкой: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Для разрывной функции это не выполняется. При этом могут быть следующие случаи:

1) существует двусторонний $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, который не равен $f(x_0)$. В этом случае можно сделать функцию непрерывной в точке x_0, изменив ее значение только в одной точке x_0 с $f(x_0)$ на a. Поэтому такая точка разрыва называется ***устранимой***;

2) не существует двусторонний $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Здесь тоже может быть два случая: а) существуют оба ***конечных*** односторонних предела, которые не равны, так как не существует двусторонний предел. Такая точка разрыва называется ***точкой разрыва 1-го рода***; б) хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен. Такая точка разрыва называется ***точкой разрыва 2-го рода***.

Итак, мы получили следующую классификацию точек разрыва.

Определение 3.10. Точка разрыва функции называется ***устранимой*** точкой разрыва, если в ней значение функции не определено либо не равно двустороннему пределу в этой точке, который существует.

Точка разрыва называется ***точкой разрыва 1-го рода***, если в этой точке существуют оба конечных односторонних предела, которые не совпадают.

Точка разрыва называется ***точкой разрыва 2-го рода***, если в ней хотя бы один из односторонних пределов не существует либо бесконечен.

Примеры

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. 0 — точка разрыва, в ней значение функции не определено. Поскольку существует двусторонний $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то это устранимая точка разрыва; положив $f(0) = 1$, получим непрерывную в нуле функцию, т.е. устраним разрыв.

2. $f(x) = sign\, x = \begin{cases} 1, \ -x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$ В нуле существуют оба односторонних предела: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$; $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} -1 = -1$. Они

конечны, но не равны друг другу. Поэтому 0 — точка разрыва 1-го рода.

3. $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Точка 0 является точкой разрыва. Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{0+} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{0+} = +\infty$. Хотя односторонние пределы и совпадают, однако оба они бесконечны. Поэтому 0 — точка разрыва 2-го рода.

Контрольные вопросы и задания

1. Определите понятие конечного предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (можно графически).
2. Определите понятие предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (можно графически).
3. Определите понятие конечного предела $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ (можно графически).
4. Что такое бесконечно большие и бесконечно малые функции? Опишите связи между ними.
5. Как называются функции, пределы которых в точке можно вычислять подстановкой?
6. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса для функций, непрерывных на отрезке.
7. Определите функцию, непрерывную на отрезке.
8. Определите точки разрыва функции и опишите виды точек разрыва с примерами.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Приведите графический пример функции такой, что

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 4-0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 4+0} f(x) = -3,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Выясните характер точек разрыва $x = 1$, $x = 4$.

2. Постройте графики функций:

$$y = \frac{4}{|2x-3|} - 4,\ y = 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{\pi}{3},\ y = -\left|\sqrt{2x+9} - 3\right|.$$

Исследуйте графически эти функции на ограниченность. Укажите интервалы знакопостоянства, непрерывности и монотонности.

3. Постройте графики функций:

$$y = \frac{2x^2 + x}{|x|} - x - 7,\ y = \frac{2x^2 - x - 3}{|x^2 - 1|}.$$

Укажите точки разрыва. Найдите односторонние пределы в этих точках. Выясните характер этих точек разрыва.

4. Дайте определение предела $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{2x-3}=5$. Построив график соответствующей функции, укажите на осях величину ε и соответствующую ей величину δ.

5. Вычислите пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+\ln|x|}}{\sqrt{9x^2+3x+2}},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2^x+3^x+\pi^x\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}},\ \lim_{x\to 0,\infty}\frac{\sqrt{2\ln^2|x|+\ln|x|}}{\ln\left(x^2+x^4\right)}.$$

Тесты

1. Определите понятие конечного предела $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=8$ в терминах неравенств:

1) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $0<|x-1|<\delta$ будет $|f(x)-8|<\varepsilon$; 2) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $|x-1|<\delta$ будет $|f(x)-8|<\varepsilon$; 3) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $0<|x-1|<\varepsilon$ будет $|f(x)-8|<\delta$.

2. Определите понятие предела $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$ в терминах неравенств:

1) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $0<|x+1|<\delta$ будет $f(x)>\varepsilon$; 2) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $|x+1|<\delta$ будет $f(x)>\varepsilon$; 3) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $0<|x+1|<\varepsilon$ будет $|f(x)|>\varepsilon$.

3. Определите понятие конечного предела $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ в терминах неравенств:

1) $\forall\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $|x|<\delta$ будет $|f(x)-3|<\varepsilon$; 2) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $x<\delta$ будет $|f(x)-3|<\varepsilon$; 3) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: при $x<-\delta$ будет $|f(x)-3|<\varepsilon$.

4. Чему равен $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln x}{\cos x}$?

1) 0; 2) 1; 3) $\dfrac{\ln 5}{\cos 5}$.

5. Найдите точки разрыва функции $\dfrac{x}{\sin x}$ и определите их характер:

1) разрыв 1-го рода $x=\pi n$, n — целое; 2) устранимый разрыв $x=0$, разрыв 2-го рода $x=\pi n$, целое $n\neq 0$; 3) разрыв 2-го рода $x=\pi n$, n — целое.

Глава 4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ В ТОЧКЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

Самыми простыми из известных функций являются линейные. Рассматривая графики элементарных функций, можно заметить, что вблизи точки из области определения они похожи на линейные. Сходство тем больше, чем в меньшей окрестности точки мы их рассматриваем.

На рис. 4.1 изображен график такой функции вблизи точки, рассматриваемый в микроскоп с увеличением в 10, 100 и 1000 раз.

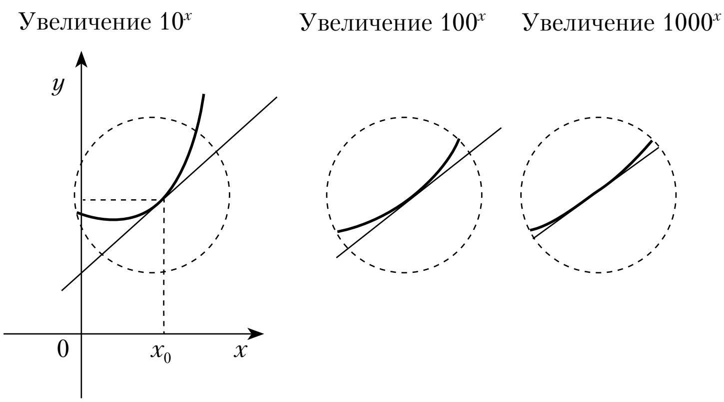
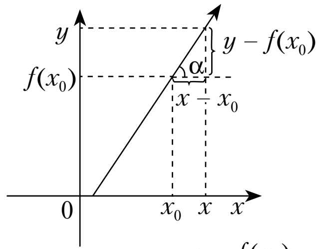


Рис. 4.1

Мы видим, что в последнем случае его трудно отличить от прямой линии.

Такие функции называются дифференцируемыми в точке. Их мы и будем изучать в этой главе. Строгие определения мы дадим далее.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Попытаемся определить, что такое касательная прямая к графику функции в точке x_0. Касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$ естественно считать проходящую через эту точку прямую (рис. 4.2) $y = f(x_0) + A(x - x_0)$, с которой график функции стремится совпасть при $x \to x_0$. Это можно понимать так, что отличие функции от касательной прямой есть величина, очень маленькая по сравнению с расстоянием от x до x_0 при $x \to x_0$, т.е. $f(x) - y = o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. Запишем это в формальном определении.



$$\operatorname{tg}\alpha = A = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Рис. 4.2

Определение 4.1 (касательной к графику). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда касательной к ее графику в точке $(x_0, f(x_0))$ назовем проходящую через эту точку прямую $y = f(x_0) + A(x - x_0)$, если $f(x) - y = o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Замечание. Если соединить оба условия в определении касательной, исключая y, то мы получим условие на функцию, имеющую касательную: $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. Это условие не только необходимо, но и достаточно для существования касательной $y = f(x_0) + A(x - x_0)$.

Определение 4.2 (дифференцируемости). Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее график имеет касательную в этой точке. Замечание позволяет вывести отсюда общепринятое условие дифференцируемости, которое в стандартных учебниках служит определением дифференцируемости.

Теорема 4.1. Функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 тогда и только тогда, когда при $x \to x_0$ имеет место формула

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0), \tag{4.1}$$

где A — постоянное число.

Доказательство изложено в замечании к определению 4.1, причем A является угловым коэффициентом касательной.

Следствие 1 (непрерывность дифференцируемой функции). Для дифференцируемой функции найдем:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)\right)=a\cdot 0+0\cdot 0=0.$$

Иными словами,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=f(x_0)+0=f(x_0).$$

Предел вычисляется подстановкой; значит, ***дифференцируемая в точке функция непрерывна в этой точке***.

Замечание. В математическом анализе приведенная в условии формула (4.1) называется асимптотической формулой линеаризации (АФЛ). Слово «асимптотическая» указывает здесь на справедливость этой формулы только в процессе предельного перехода при $x \to x_0$, ибо она содержит символ «o», имеющий смысл только в предельном процессе.

Следствие 2. Если угловой коэффициент касательной $A \neq 0$, то приращение касательной $A(x - x_0)$ есть главное слагаемое в приращении функции $f(x) - f(x_0)$, поэтому приращение касательной эквивалентно приращению функции.

Следствие 3. Касательная прямая в точке к графику единственна. При $A \neq 0$ это верно, так как две прямые через точку с неравными нулю угловыми коэффициентами, приращения которых в этой точке эквивалентны, совпадают. Действительно, отношение приращений прямых постоянно (это отношение угловых коэффициентов) и стремится к единице только при равенстве угловых коэффициентов. При $A = 0$ $f(x) - f(x_0)$ по АФЛ очень мало по сравнению с $(x - x_0)$ и не может быть эквивалентно $A_1(x - x_0)$ при другом $A_1 \neq 0$.

Замечание. Касательная к графику может не существовать. Например, для $f(x) = |x|$ нет касательной в $x_0 = 0$. Действительно, справа от нуля график есть прямая $y = x$ и, значит, ее приращению эквивалентно приращение графика при $x \to 0+$. Наоборот, слева от нуля график есть прямая $y = -x$, и ее приращение эквивалентно приращению функции при $x \to 0-$. Но эти прямые не совпадают, поэтому общей касательной и справа и слева не существует.

Определение 4.3. Производной в точке x_0 для дифференцируемой в этой точке функции $f(x)$ называется угловой коэффициент наклона касательной в этой точке. Производная от $f(x)$ в точке x_0 обозначается как $f'(x_0)$.

Теорема 4.2 (уравнение касательной). Если $f(x)$ имеет касательную в x_0, то ее уравнение будет:

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Касательная имеет угловой коэффициент A и проходит через $(x_0, f(x_0))$, т.е. $\dfrac{y_{\text{кас}} - f(x_0)}{x - x_0} = A$ (см. рис.4.2) или

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + A(x - x_0) \overset{\substack{\text{Определение}\\ \text{производной}}}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Сформулируем в этих обозначениях теорему.

Теорема 4.3. Функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 тогда и только тогда, когда при $x \to x_0$ имеет место формула

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0). \qquad (4.2)$$

При этом $A = f'(x_0)$.

Определение 4.4 (формула линеаризации). Пусть $f(x)$ дифференцируема в x_0. Тогда при x, близких к x_0, имеет место приближенная формула, называемая формулой линеаризации (ФЛ):

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Эта формула имеет место при x, близких к x_0, так как получается отбрасыванием в точной формуле (АФЛ) $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, где $A = f'(x_0)$ слагаемого, очень маленького по сравнению с $(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Теорема 4.4 (формула для вычисления производной):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Доказательство. Приращение дифференцируемой функции

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) =$$
$$= f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

по свойству «очень маленькой» функции, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Разделим это равенство на $(x - x_0)$:

$$\frac{\Delta f(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x).$$

Итак, функция $\frac{\Delta f(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ отличается от числа $f'(x_0)$ на бесконечно малую $\alpha(x)$. По основному свойству конечных пределов

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4.5 (еще необходимое и достаточное условие дифференцируемости) $f(x)$ дифференцируема в x_0 тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$, который будет в этом случае равен производной: $A=f'(x_0)$.

Доказательство. По свойству конечных пределов

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Умножая на $(x-x_0)$, получим эквивалентное соотношение $f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0)$ — уже полученное условие дифференцируемости (теорема 4.1).

Определение 4.5 (дифференциала). Пусть $f(x)$ дифференцируема в x_0. Тогда дифференциалом $f(x)$ в точке x_0 называется приращение касательной к графику в этой точке. Дифференциал обозначается как $df(x_0)$.

Теорема 4.6 (формула для дифференциала). Пусть $f(x)$ дифференцируема в x_0. Тогда дифференциал от $f(x)$ в x_0 есть произведение производной $f'(x_0)$ в этой точке на приращение икса dx: $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

Доказательство. Тангенс наклона касательной есть по определению $f'(x_0)$. Дифференциал по определению есть приращение касательной, т.е. произведение ее углового коэффициента ни приращение икса: $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

Примеры вычисления производных (рис. 4.3).

1. Производная константы есть ноль. Действительно, график константы есть горизонтальная линия, являющаяся касательной к самой себе в любой точке. Ее угловой коэффициент равен нулю и равен производной.

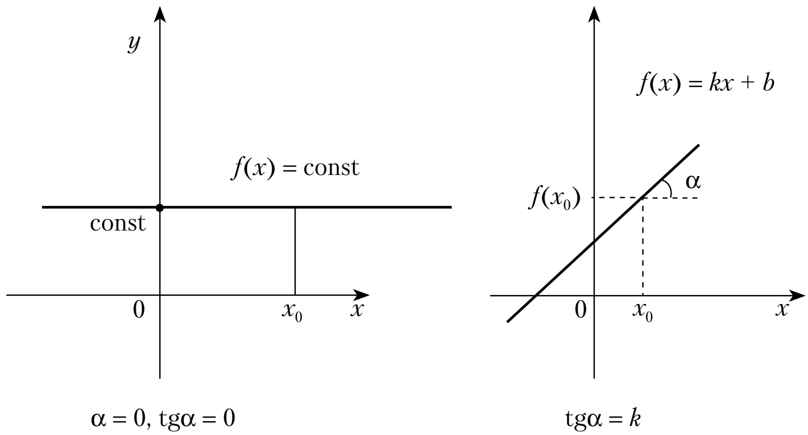


Рис. 4.3

2. $(kx + b)' = k$. Действительно, касательной к прямой является она сама. Ее угловой коэффициент равен k. И он равен производной.

3. $\sin x' = \cos x$. Вычислим по формуле (теорема 4.4):

$$\sin x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \overset{1\,\text{замеч. предел}}{=}$$

$$= 1 \cdot \cos\left(x + \frac{0}{2}\right) = \cos x.$$

Второй из пределов вычисляется подстановкой в непрерывную функцию предельного значения.

1. $(e^x)' = e^x$;

$$\left(e^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{\text{Вынесение константы за предел}}{=}$$

$$\overset{\text{Вынесение константы за предел}}{=} e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{\text{Один из замечательных пределов}}{=}$$

$$\overset{\text{Один из замечательных пределов}}{=} e^x \cdot 1 = e^x.$$

4.2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ. ПРИМЕРЫ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 4.7 (производная суммы, произведения и произведения на константу). Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в x_0, то дифференцируемы и их сумма и произведение. Если c — число, то дифференцируема $cf(x)$. Если $g(x) \neq 0$, то дифференцируемо частное $\frac{f(x)}{g(x)}$. При этом:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x); \ \left(cf(x)\right)' = cf'(x);$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство. Вычислим пределы для производных, получив требуемые равенства:

а) для суммы функций —

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-\left(f(x)+g(x)\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)+\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x} \overset{\text{Предел суммы}}{=}$$
$$\overset{\text{Предел суммы}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x)+g'(x);$$

б) для произведениия на число —

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \overset{\substack{\text{Линейность}\\ \text{пределов}}}{=} cf'(x);$$

в) для произведения —

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\overset{\substack{\text{Вычтем}\\ \text{и прибавим}\\ \text{одно и то же}\\ \text{в числителе}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Вычтем}\\ \text{и прибавим}\\ \text{одно и то же}\\ \text{в числителе}}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\begin{gathered}f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+\\ +f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\end{gathered}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)+f(x)\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x}\overset{\substack{\text{Предел}\\ \text{суммы}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Предел}\\ \text{суммы}}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\overset{\substack{\text{2 раза}\\ \text{предел}\\ \text{произве-}\\ \text{дения}}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+$$

$$+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

(в последней строчке применяются формулы для производных и вычисление подстановкой предела непрерывной из-за дифференцируемости функции $g(x)$);

г) для частного; сначала найдем $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ через предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{g(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\frac{1}{g(x+\Delta x)}=$$

$$=-\frac{g'(x)}{g(x)g(x)}=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

(в последней строчке применяются формулы для производной и вычисление подстановкой предела непрерывной из-за дифференцируемости функции $g(x)$).

Найдем теперь по этой формуле и формуле предыдущего пункта:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

что и требовалось доказать.

Примеры

1. При натуральном n $(x^n)' = nx^{n-1}$. Это верно для $n = 1$. Будем доказывать по индукции. Пусть утверждение верно для какого-то n. Докажем его для $n + 1$, т.е. нужно доказать, что $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Действительно, по правилу дифференцирования произведения и предположению индукции получим

$$\left(x^{n+1}\right)' = \left(x^n \cdot x\right)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot x' = nx^n + x^n = (n+1)x^n,$$

что и требовалось доказать. Например, $x^{2'} = 2x$, $x^{3'} = 3x^2$ и т.д.

2. При целом $n < 0$

$$\left(x^n\right)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' \overset{\substack{\text{Производная}\\ \text{дроби}}}{=} \frac{1'x^{-n} - \left(x^{-n}\right)'}{x^{-2n}} =$$

$$= \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

При $n = 0$ она тоже верна (проверьте!).

3. $\operatorname{tg} x' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Имеем $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. По теореме о производной дроби:

$$\operatorname{tg} x' = \frac{\sin x' \cos x - \sin x \cos x'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 4.8 (производная сложной функции). Пусть $g(x)$ дифференцируема в x_0, $f(y)$ дифференцируема в $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ дифференцируема в x_0 и ее производная равна $f\left(g\left(x_0\right)\right)' = f'\left(g\left(x_0\right)\right) \cdot g'\left(x_0\right)$.

Доказательство. Вычислим производную: при $\Delta g \neq 0$ в $O_\delta(x_0)$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(g\left(x_0 + \Delta x\right)\right) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} y = g\left(x_0 + \Delta x\right), y_0 = g\left(x_0\right), \\ \Delta y = \Delta g \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0, \text{ из-за непрерывности } g\left(x\right) = \\ \Delta y = \Delta g \neq 0 \text{ по предположению} \end{cases}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(y_0 + \Delta y\right) - f\left(y_0\right)}{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(y_0 + \Delta y\right) - f\left(y_0\right)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

(как предел произведения и замена $y = g(x)$)

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(y_0 + \Delta y\right) - f\left(y_0\right)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'\left(y_0\right) g'\left(x_0\right) = \left\{y_0 = g\left(x_0\right)\right\} =$$

$$= f'\left(g(x_0)\right) g'\left(x_0\right).$$

Если $\Delta g = 0$ в точках любой окрестности $O_\delta(x_0)$, то $g'(x_0) = 0$. Кроме того, для некоторых точек в любой $O_\delta(x_0)$ $g(x_0 + \Delta x) - g\left(x_0\right) = \Delta g = 0$.

Это значит, что $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$ и отношение

$$\frac{f\left(g\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(g\left(x_0\right)\right)\right.}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ где } \Delta y = \Delta g = 0 \to 0, \\ \dfrac{\Delta f}{\Delta y} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ где } \Delta y = \Delta g \neq 0 \to f'(g\left(x_0\right) \cdot g'\left(x_0\right) = 0, \\ \text{так как } g'\left(x_0\right) = 0. \end{cases}$$

Другими словами, предел в любом случае есть $0 = f'(g(x_0))g'(x_0)$, так как $g'\left(x_0\right) = 0$.

Пример:

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{(\ln a)x}\right)' = e^{(\ln a)x} \left((\ln a)x\right)' = a^x \ln a.$$

Теорема 4.9 (производная обратной функции). Пусть $f(x)$ дифференцируема в x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$, $f(x_0) = y_0$. Пусть $f(x)$ имеет в некоторой окрестности x_0 обратную функцию $g(y)$, определенную в окрестности y_0. Тогда $g(x)$ дифференцируема в y_0, причем $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Графическое пояснение к доказательству представлено на рис. 4.4.

Поскольку график обратной функции $g(x)$ симметричен графику $f(x)$ относительно $y = x$ и точка (x_0, y_0) симметрична точке (y_0, x_0), то график $g(x)$ будет иметь касательную в y_0, симметричную касательной для $f(x)$ в x_0. В силу симметрии (см. рис. 4.4) прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A_1 = \angle A = \alpha$ — углу наклона касательной к графику $f(x)$ в x_0 и $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x_0)$. Тогда угол наклона касательной A_1B_1 к графику $g(x)$ в y_0 будет дополнять угол $A_1 = \alpha$ до $\dfrac{\pi}{2}$ и его тангенс, равный производной $g'(y_0)$ будет равен $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

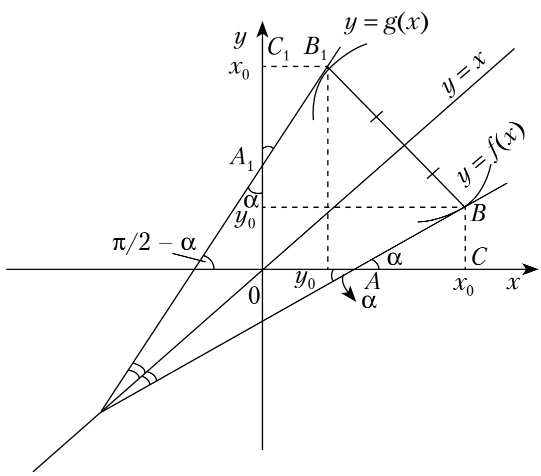


Рис. 4.4

Дифференцируемость означает наличие касательной к графику в точке.

Производная — это угловой коэффициент касательной, поэтому существует $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Примеры

1. e^x — обратная к $\ln x$. Условия теоремы 4.9 выполнены для всех точек $x = e^y$ из области определения $\ln x$. Поэтому $\ln x' = \frac{1}{e^{y'}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

2. $\arcsin x$ обратная к $\sin x$. Условия теоремы 4.9 выполнены для всех точек $x = \sin y$ из области определения $\arcsin x$ кроме $x = \pm 1$. Поэтому

$$\arcsin x' = \frac{1}{\sin y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $\operatorname{arctg} x$ обратная к $\operatorname{tg} x$. Условия теоремы 4.9 выполнены для всех точек $x = \operatorname{tg} y$ из области определения $\operatorname{arctg} x$. Поэтому

$$\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{\operatorname{tg} y'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Покажем, что для любого альфа $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Имеем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Тогда

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{(\alpha \ln x)}\right)' \overset{\substack{\text{Сложная}\\ \text{функция}}}{=} e^{\alpha \ln x}\left(\alpha \ln x\right)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак, приведем основные производные, через которые вычисляются остальные:

$$x^{\alpha'} = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$a^{x'} = \ln a \cdot a^x;$$

$$\log_a x' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\sin x' = \cos x;$$

$$\cos x' = -\sin x;$$

$$\operatorname{tg} x' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.3. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ (ТЕОРЕМА ФЕРМА). СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ НА ИНТЕРВАЛЕ (ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ)

Определение 4.6 (точки экстремума). Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0:

а) x_0 называется точкой максимума функции, если значение функции в этой точке не менее значений ее в некоторой проколотой окрестности точки. Максимум называется строгим, если функция в точке строго больше ее значений в некоторой проколотой окрестности этой точки;

б) x_0 называется точкой минимума функции, если значение функции в этой точке не превосходит ее значений в некоторой проколотой окрестности точки. Минимум называется строгим, если функция в точке строго меньше ее значений в некоторой проколотой окрестности точки.

Точки максимума и точки минимума функции называются точками экстремума.

Примеры

1. $y = x^2$. $x = 0$ — точка экстремума (строгого минимума).
2. $y = |x|$. $x = 0$ — точка экстремума (строгого минимума).
3. $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n (целое) — точки экстремума. Причем $\frac{\pi}{2} + \pi(2n+1)$, n (целое) — точки минимума; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n (целое) — точки максимума (рис. 4.5).

Заметим, что на первом и последнем рисунках все касательные в точках экстремума горизонтальны, а на втором рисунке касательная в точке экстремума не существует. Это будет верно и в общем случае, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10 (теорема Ферма, необходимое условие экстремума). Пусть x_0 — точка экстремума для функции $f(x)$. Тогда либо производная этой функции в x_0 не существует, либо она равна нулю.

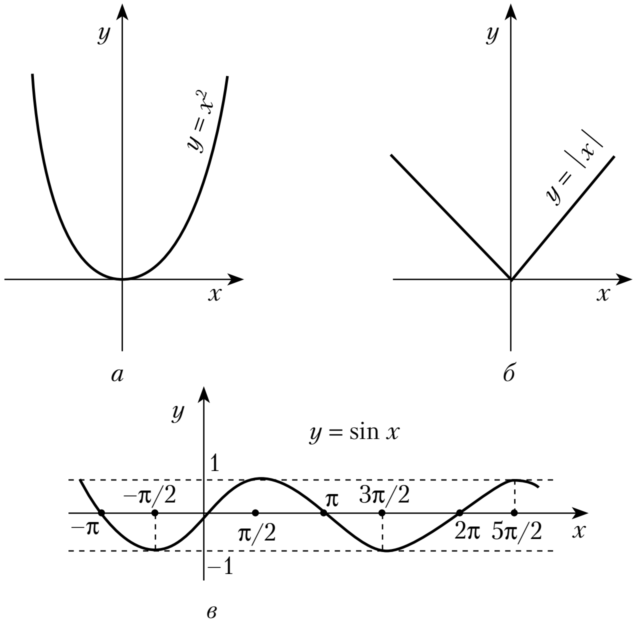


Рис. 4.5

Доказательство. Пусть производная в точке экстремума существует. Тогда она равна

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\substack{\text{Связь двустороннего}\\ \text{предела}\\ \text{с односторонними}}}{=} \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть для определенности x_0 — точка минимума (в точке максимума все аналогично). Тогда всегда $f(x) - f(x_0)$ неотрицательно. $x - x_0$ имеет разные знаки справа и слева от x_0. Поэтому выражение под знаком предела $x \to x_0 -$ неположительно, а под знаком предела $x \to x_0 +$ неотрицательно. По теореме о переходе к пределу в неравенствах сам предел при $x \to x_0 -$ будет неположителен, а при $x \to x_0 +$ неотрицателен. Но эти пределы совпадают, поэтому оба должны быть равны нулю, что и требовалось доказать.

Далее доказано несколько теорем для дифференцируемых на интервале и непрерывных на отрезке функций.

Теорема 4.11 (Ролля). Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(x)$ принимает одинаковые значения в концах отрезка: $f(a) = f(b)$. Тогда внутри интервала есть точка c, где $f'(c) = 0$.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке, по второй теореме Вейерштрасса на отрезке есть точки, где $f(x)$ принимает максимальное и минимальное значения. Если максимальное значение совпадает с минимальным, то функция постоянна на отрезке и ее производная равна нулю во всех точках интервала и все доказано.

Если минимальное значение строго меньше максимального, то хотя бы одно из них принимается не в концах отрезка, так как там значения совпадают. Пусть это точка $c \in (a, b)$. Там максимум либо минимум на всем отрезке, а значит и локальный экстремум. В этой точке интервала существует производная по условию теоремы. Но по теореме Ферма (теорема 4.10) эта производная равна нулю: $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. По определению производной касательная в точке, где$f'(c) = 0$ горизонтальна, параллельна оси OX и прямой, соединяющей граничные точки графика (рис. 4.6).

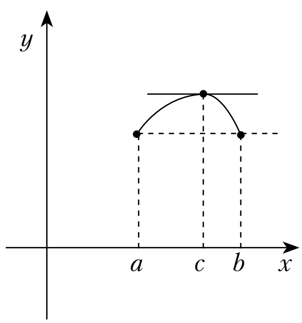
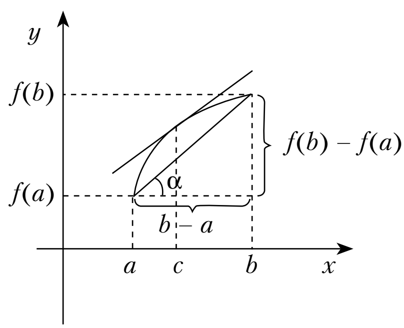


Рис. 4.6

Аналогичная ситуация имеет место и в случае несовпадающих значений на концах.

Теорема 4.12 (Лагранжа). Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда внутри интервала есть точка c, где касательная параллельна прямой, соединяющей граничные точки графика, т.е. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. На рис. 4.7 видно, что угловой коэффициент прямой, соединяющей граничные точки графика, есть $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Поэтому достаточно найти точку с таким значением производной для $f(x)$. Заметим, что по угловому коэффициенту и начальной точке уравнение прямой, соединяющей концы графика, будет $y = \varphi(x) = f(a) + (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Причем эта функция дифференцируема во всех точках и производная ее равна угловому коэффициенту. Ее значения на концах отрезка совпадают со значениями $f(x)$. Поэтому разность $f(x) - \varphi(x)$ дифференцируема на интервале, непрерывна на отрезке и принимает равные значения на концах. Значит, по теореме 4.11 существует точка, в которой производная разности равна нулю. Это значит, что в ней производные $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. Поскольку производная линейной функции всегда равна угловому коэффициенту графика, также $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (угловому коэффициенту прямой), что и требовалось доказать.



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Рис. 4.7

Теорема 4.13 (Коши). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $g(x)$ строго монотонна и ее производная не обращается в ноль на интервале. Тогда внутри интервала есть точка c, где $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Доказательство. По условию строгой монотонности существует $h(x)$ — обратная к $g(x)$ на отрезке. По теореме о непрерывности обратной функции она непрерывна на отрезке, по теореме о дифференцируемости обратной она дифференцируема на интервале, причем если $g(c) = x$, то $h'(x) = \dfrac{1}{g'(c)}$. При этом $h(x)$ определена на отрезке с концами $g(a)$, $g(b)$ и имеет областью значений $[a, b]$, причем $h(g(a)) = a$, $h(g(b)) = b$. Поэтому можно рассмотреть сложную функцию $f(h(x))$, определенную на отрезке с концами $g(a)$, $g(b)$ и с $f(h(g(a))) = f(a)$, $f(h(g(b)) = f(b)$. Она непрерывна на отрезке с концами $g(a)$, $g(b)$, дифференцируема на соответствующем интервале. Поэтому по теореме Лагранжа существует x:

$$f'\big(h(x)\big) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{4.3}$$

При этом по теореме о производной сложной функции $(f(h(x)))' = f'(h(x))h'(x)$. Если $h(x) = c$, то по теореме о производной обратной функции $h'(x) = \dfrac{1}{g'(c)}$. Тогда выражение (4.3) перепишется как

$$f'(c)\frac{1}{g'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

что и требовалось доказать.

4.4. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ: ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМА ЧЕРЕЗ ПЕРВУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

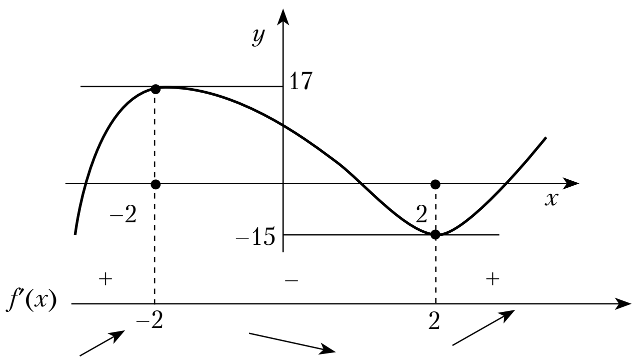
Перейдем к применению производной к исследованию функций.

Теорема 4.14 (достаточные условия монотонности). Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем ее производная сохраняет знак на интервале. Тогда $f(x)$ строго монотонна на отрезке. Причем если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ строго возрастает, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ строго убывает.

Доказательство. Пусть $a \le x_1 < x_2 \le b$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Поскольку $x_2 > x_1$, разность $f(x_2) - f(x_1)$ имеет знак производной, т.е. положительна при положительной $f'(c)$ и отрицательна при отрицательной производной. В первом случае имеем строгое возрастание, во втором — строгое убывание, т.е. всегда функция строго монотонна.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Для этого вычисляем ее производную $f'(x) = 3x^2 - 12$ и находим ее интервалы знакопостоянства, приравнивая ее к нулю: $3x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. Далее наносим нули производной на ось и определяем знаки на интервалах между нулями по поведению квадратного трехчлена, либо просто беря пробные точки. Результат можно представить в виде схемы (рис. 4.8). На этой схеме видно, что функция имеет локальный максимум в -2, локальный минимум в 2, до -2 возрастает, после 2 также возрастает. Посчитав значения в -2, $+2$ и пределы на $\pm\infty$, можно приблизительно набросать график: $f(-2) = 17$; $f(2) = -15$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 - 12x + 1 \overset{\text{Берем главное слагаемое}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty.$$



x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y	$-\infty$	17	-15	$+\infty$

Рис. 4.8

Табличка с этими результатами и график приведены на рис. 4.8. Для уточнения можно вычислить еще $f(0) = 1$. Найти пересечение графика с осью OX, т.е. решить уравнение 3-й степени $x^3 - 12x + 1 = 0$ известными вам методами здесь не удается.

В примере видно, что между интервалами монотонности производной разных знаков находятся локальные экстремумы. Этот факт доказывается далее. Предварительно дадим следующее определение.

Определение 4.7. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Говорят, что функция $f(x)$ меняет знак в точке x_0, если существует окрестность точки $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ такая, что в правой $(x_0, x_0 + \delta)$ и левой $(x_0 - \delta, x_0)$ ее полуокрестностях функция имеет постоянные, но разные знаки.

Пример. $f(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ меняет знаки в $x = -2$ с «+» на «–», в $x = +2$ с «–» на «+». $f(x) = 1/x$ меняет знак в 0 с «–» на «+», хотя в 0 не определена!

Теорема 4.15 (достаточные условия экстремума через 1-ю производную). Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет там производную, которая равна 0 в точке x_0 и меняет в ней знак. Тогда x_0 — точка экстремума для $f(x)$. Причем если знак производной меняется в x_0 с «+» на «–», то x_0 — точка максимума, если с «–» на «+», то x_0 — точка минимума.

Доказательство. Разберем случай, когда знак производной меняется с «–» на «+», в противном случае доказательство аналогично. В этом случае $f'(x)$ отрицательна на некоторой левой полуокрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ точки x_0 и положительна в $(x_0, x_0 + \delta)$. Поэтому по теореме 4.14 $f(x)$ строго убывает в $(x_0 - \delta, x_0]$ и строго возрастает в $[x_0, x_0 + \delta)$. Значит, во всей проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ функция строго больше $f(x_0)$ (рис. 4.9), а это определение строгого минимума в точке x_0.

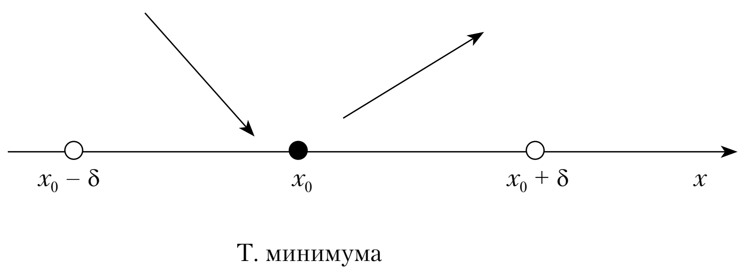


Рис. 4.9

Замечание. Теорема верна, если функция определена и непрерывна в окрестности точки x_0, а производная сущесвует только в проколотой окрестности точки x_0 и меняет в ней знак. Тогда x_0 — точка экстремума для $f(x)$. Доказательство не меняется, так как в достаточном условии монотонности на отрезке требуется дифференцируемость только на интервале. Примером может служить функция $y = |x|$ в нуле.

4.5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК ВОГНУТОСТИ, ВЫПУКЛОСТИ И ПЕРЕГИБА. ВЫВОД ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ВОГНУТОСТИ, ВЫПУКЛОСТИ И ПЕРЕГИБА

Для исследования функций используются также производные высших порядков, в основном второго. Определим эти понятия.

Определение 4.8 (производные порядка n). Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда второй производной $f''(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x называется производная от ее производной: $f''(x_0) = (f'(x))'\big|_{x=x_0}$. Аналогично, если определена производная порядка n в некоторой окрестности точки, то $(n+1)$-й производной от $f(x)$ в точке x_0 называется производная от ее n-й производной в этой точке: $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)}(x))'\big|_{x=x_0}$.

Пример

$$\left(\ln(x)\right)'' = \left(\left(\ln x\right)'\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\sin x''' = \left(\left(\sin x'\right)'\right)' = \left(\left(\cos x\right)'\right)' = \left(-\sin x\right)' = -\cos x.$$

Теорема 4.16 (достаточные условия экстремума через 2-ю производную). Пусть $f(x)$ имеет в окрестности x_0 вторую производную, которая там сохраняет знак, причем $f'(x_0) = 0$. Тогда x_0 — точка экстремума, максимума, если $f''(x_0) < 0$, и минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x)$ сохраняет знак в $O_\delta(x_0)$ и пусть этот знак «+» (случай знака «–» аналогичен). Поскольку вторая производная есть производная от первой, по теореме 4.14 $f'(x)$ строго возрастает в этой окрестности. Она равна нулю в x_0, поэтому в левой полуокрестности она меньше нуля, а в правой — больше нуля, т.е. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» в точке x_0. Тогда по теореме 4.15 x_0 — точка минимума.

Следствие. Вторая производная будет сохранять знак в окрестности точки x_0, если она непрерывна в некоторой ее окрестности и $f''(x_0) \neq 0$ (знак непрерывной функции сохраняется в окрестности точки). Поэтому теорема выполнена в этом случае, если $f'(x_0) = 0$.

Пример: $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'(0) = 0$, $y''(x) = 2 > 0$ и непрерывна всюду, в частности в окрестности 0. Поэтому 0 — точка минимума по следствию теоремы 4.16.

Через вторую производную можно также определить характер выпуклости графика.

Определение 4.9 (выпуклость, вогнутость). Пусть $f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда график функции называется ***вогнутым в точке x_0***, если в некоторой окрестности точки он лежит выше касательной к графику в точке x_0. График называется ***выпуклым в точке x_0***, если в некоторой окрестности точки он лежит ниже касательной к графику в точке x_0. Аналогично определяется вогнутость и выпуклость графика слева и справа, если рассматривать одностороннюю касательную и одностороннюю окрестность.

График функции называется ***вогнутым (выпуклым) на отрезке***, если он вогнутый (выпуклый) в каждой точке этого отрезка (на концах с одной стороны).

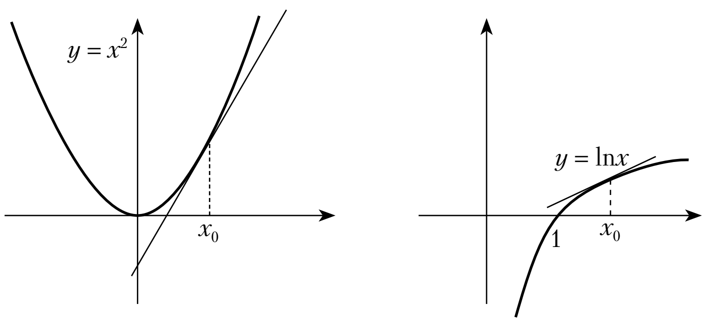


Рис. 4.10

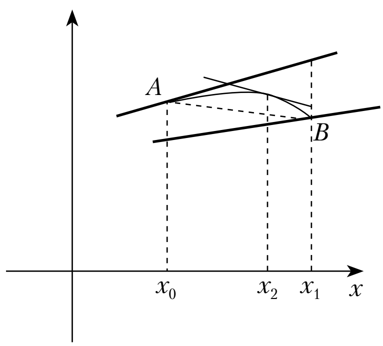
Пример (рис. 4.10): $y = x^2$ вогнута в любой точке; $y = \ln x$ выпукла в любой точке.

Заметим, что $(x^2)'' = 2 > 0$, $(\ln x)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ в области определения натурального логарифма. Эту закономерность доказывает следующая теорема.

Теорема 4.17 (достаточные условия вогнутости и выпуклости). Пусть функция дифференцируема на отрезке $x_0 \in [a, b]$, а ее вторая производная существует и сохраняет знак на интервале (a, b). Тогда если это знак «+», то график функции вогнут на этом отрезке, если это знак «–», то график там выпуклый (в точке a справа, в точке b слева).

Доказательство. Пусть знак второй производной $f(x)$ на (a, b) будет «+» (для знака «–» рассуждаем аналогично). Пусть $x_0 \in [a, b]$. Поскольку вторая производная есть производная от первой, то по теореме 4.14 первая производная строго возрастает на отрезке при положительной второй на интервале. Значит, возрастает и коэффициент наклона касательной к графику.

Рассмотрим касательную к графику в точке x_0. Пусть x_1 из интервала лежит справа от x_0 и график в этой точке ниже касательной в x_0; тогда наклон хорды AB графика между x_0 и x_1 меньше наклона касательной в x_0. Но по теореме Лагранжа между x_0 и x_1 также справа от x_0 найдется x_2 с наклоном касательной в ней, равным наклону хорды и меньшему, чем наклон касательной в x_0. Это противоречит возрастанию наклона касательной на интервале, т.е. справа от x_0 график лежит над касательной в x_0. Доказана вогнутость графика в x_0 справа. Аналогично слева от x_0 график также не может лежать под этой касательной (рис. 4.11), и показывается вогнутость слева в этой точке.



$x \in (x_0, x_1) \Rightarrow f'(x_0) < f'(x) < f'(x_1)$; если $\exists\, x_2 \in (x_0, x_1)$:
угл. коэффиц. $AB = f'(x_2) < f'(x_0)$, но $f'(x_2) > f'(x_0)$ — противоречие

Рис. 4.11

Поэтому всюду на интервале (a, b) график лежит над касательной в x_0 и, значит, является вогнутым в x_0. Поскольку x_0 — любая точка интервала, график будет вогнутым на этом интервале. В концах отрезка все аналогично при рассмотрении только односторонней касательной.

Пример: $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Производная всегда положительна. Значит, по теореме 4.14 функция строго возрастает на оси. Поэтому локальных экстремумов нет, хотя производная обращается в ноль в точке $x = 0$. Но знак она в этой точке не меняет, и экстремума там нет. Вторая производная равна нулю в точке $x = 0$. Она отрицательна слева от нуля и положительна справа от нуля. По достаточным условиям вогнутости и выпуклости (теорема 4.17) в 0 график выпуклый слева, так как он выпуклый на $(-\infty, 0]$ (вторая производная там $2x$ — меньше 0 на интервале), аналогично график, вогнутый справа в нуле и на $[0, +\infty)$ (вторая производная там $2x$ — больше 0 на интервале). В нуле выпуклость меняется на вогнутость, график в ней имеет характерный «изгиб» (рис. 4.12). Это должно быть изображено на графике.Такие точки называются «точками перегиба». Дадим им точное определение.

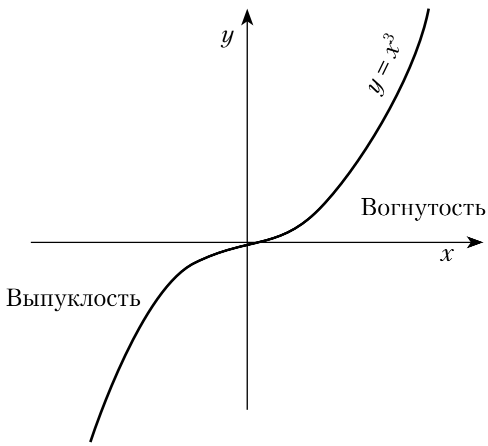


Рис. 4.12

Определение 4.10 (точка перегиба). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке, причем ее график имеет разный характер выпуклости в точке x_0 слева и справа. Тогда точка x_0 называется точкой ***перегиба*** графика функции $f(x)$.

Пример точки перегиба приведен перед этим определением. Приведем достаточные условия точки перегиба, используя достаточные условия выпуклости-вогнутости.

Теорема 4.18 (достаточные условия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности вторую производную, которая обращается в 0 и меняет знак в точке x_0 (см. определение 4.7). Тогда x_0 — точка перегиба графика функции $f(x)$.

Доказательство. Поскольку вторая производная меняет знак в x_0, то в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ вторая производная имеет разные знаки в левой и правой ее полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. Тогда по теореме 4.17 в этих уже непроколотых полуокрестностях будет разный характер выпуклости-вогнутости, т.е. x_0 — точка перегиба.

Замечание 1. На самом деле достаточно, чтобы функция $f(x)$ была определена и дифференцируема в окрестности точки x_0, причем имела в проколотой окрестности вторую производную, которая меняет знак в точке x_0 (см. определение 4.7). Тогда x_0 — точка перегиба графика функции $f(x)$.

Замечание 2. Если вторая производная непрерывна в x_0, то в условиях замечания 1 теоремы она равна там нулю. Но это не обязательно, что покажет следующий пример.

Пример: $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{\frac{-1}{3}}$, $y''(x)$ определена всюду, кроме $x = 0$. Производная положительна в ее области определения, и непрерывная функция возрастает на всей прямой по теореме 4.14. Вторая производная меняет знак в нуле (хотя и не существует в нуле!). Поэтому по замечанию 1 к теореме 4.18 $x = 0$ — точка перегиба графика функции.

4.6. АСИМПТОТЫ К ГРАФИКУ И ИХ ВИДЫ

Пример: $y = \dfrac{1}{x}$. Функция не определена в нуле и $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x} = +\infty$. Это выражается на графике в том, что он и слева и справа бесконечно приближается к вертикальной прямой $x = 0$. Это нужно отмечать на графике (рис. 4.13).

Прямая $x = 0$ называется вертикальной асимптотой к графику функции.

Определение 4.11 (вертикальной асимптоты к графику). Пусть функция $f(x)$ определена в правой (или левой) полуокрестности точки x_0 и предел функции при $x \to x_0 +$ (или при $x \to x_0 -$) равен $\pm\infty$. Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой к графику $f(x)$.

В примере перед определением прямая $x = 0$ является двусторонней асимптотой. Приведем пример односторонней асимптоты.

Пример: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Функция определена только справа от $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Прямая $x = 0$ — односторонняя вертикальная асимптота (рис. 4.14).

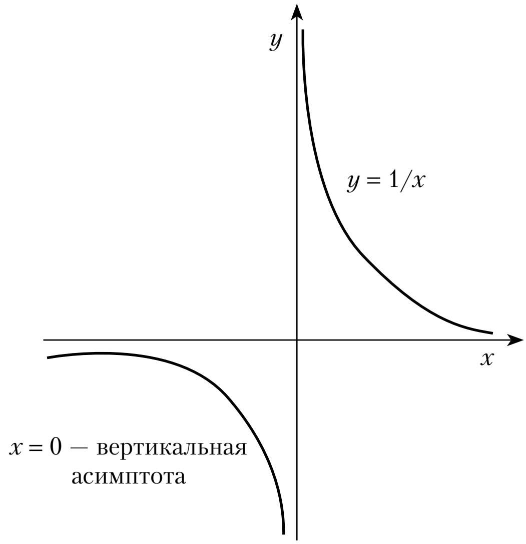


Рис. 4.13

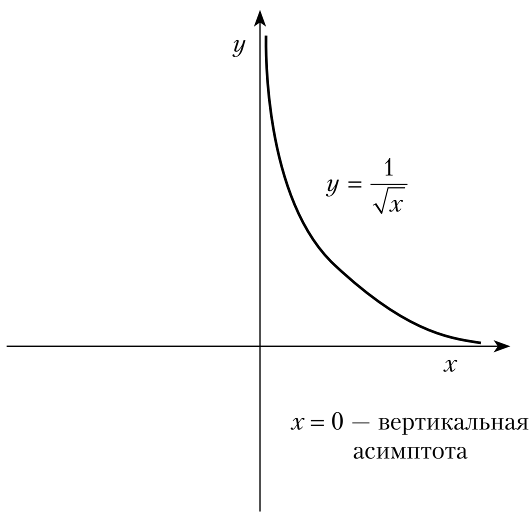


Рис. 4.14

Пример: $y = \operatorname{arctg} x$. Имеем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$. На графике это выражается тем, что он бесконечно приближается к горизонтальной прямой $y = \frac{\pi}{2}$ на $+\infty$ и к горизонтальной прямой $y = -\frac{\pi}{2}$ на $-\infty$ (рис. 4.15). Эти прямые называются горизонтальными асимптотами и должны быть видны на графике.

Определение 4.12 (горизонтальной асимптоты к графику). Если функция $f(x)$ определена в окрестности $+\infty$ (или в окрестности $-\infty$) и имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$), то прямая $y = a$ называется горизонтальной асимптотой к графику $f(x)$ на $+\infty$ (или на $-\infty$).

В предыдущем примере имеем две разные асимптоты на $+\infty$ и на $-\infty$. Бывает только одна асимптота, так, $y = e^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ на $-\infty$ (рис. 4.16).

Бывают общие асимптоты на $+\infty$ и на $-\infty$, как у $y = \operatorname{arctg}|x|$ (рис. 4.17), общая горизонтальная асимптота на $+\infty$ и на $-\infty$: $y = \frac{\pi}{2}$.

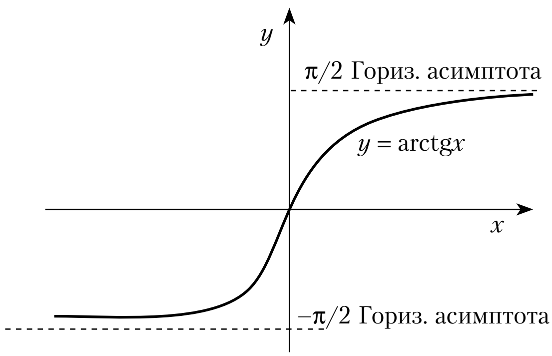


Рис. 4.15

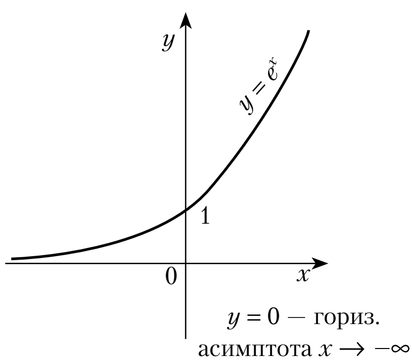


Рис. 4.16

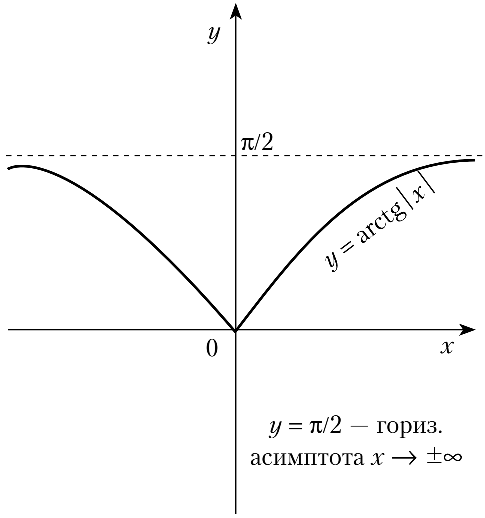


Рис. 4.17

Замечание. По свойствам конечных пределов при наличии горизонтальной асимптоты $y = a$ на $\pm\infty$ при $x \to \pm\infty$ имеем $f(x) = a + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая при $x \to \pm\infty$.

График функции может приближаться не только к вертикальным или горизонтальным прямым, но и к наклонным. Это может быть только на $\pm\infty$ и по аналогии с горизонтальными асимптотами выражается следующим определением.

Определение 4.13 (наклонной асимптоты к графику). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $+\infty$ (или в окрестности $-\infty$) и приближается на $+\infty$ (или на $-\infty$) к прямой $y = kx + b$, $k \neq 0$, что выражается следующим равенством:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Тогда прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$).

Пример: $y = \sqrt{x^2 + 1} = |x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$. Поскольку $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2x^2}$ при $x \to \pm\infty$ (см. соотношение эквивалентности $(1 + x)^\alpha - 1 \sim$ $\sim \alpha x$, $\alpha \neq 0$ $x \to 0$, к определению 3.7), следовательно, $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 1 =$ $= \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$ или $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$. Отсюда

$$y = |x|\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right) = |x| + \frac{|x|}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \pm x \pm \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x \to \pm\infty$.

Поскольку $\pm\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \pm\infty$, получим $y = \sqrt{x^2+1} = \pm x + \alpha(x)$, и по определению прямые $y \to \pm x$ будут наклонными асимптотами к графику на $\pm\infty$. График этой функции будет построен позже (рис. 4.18, *а*, *б*).

Далее мы получим формулы для вычисления наклонных асимптот, которые позволяют получить их проще.

Замечание. Если $y = kx + b$ — наклонная асимптота к графику $f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Поскольку $k \neq 0$, следовательно,

$$\alpha(x) = (kx+b)\frac{\alpha(x)}{kx+b} = (kx+b)\beta(x) = o(kx+b).$$

Поэтому:

1) $f(x) \sim kx + b \sim kx$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{kx} = 1$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{kx} = 1$). Это при $k \neq 0$ эквивалентно $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$;

3) $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$). Это по основному свойству конечных пределов означает $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = b$.

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 4.19. Прямая $y = kx + b$, $k \neq 0$ является наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$;

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = b$.

Например, для $y = \ln x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ (по шкале бесконечности). Наклонных асимптот нет, но могут быть горизонтальные. Проверяем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. Горизонтальных асимптот тоже нет.

Поскольку элементарные функции непрерывны в области определения, для них вертикальные асимптоты могут быть только на границах области определения. Граница области определения $\ln x$ есть $x = 0$. $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$, $x = 0$ — вертикальная асимптота.

4.7. СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОСТРОЕНИЕМ ГРАФИКА

Мы разобрали все моменты построения графика, которые можем объединить в общую схему. Для полного исследования функции нужно последовательно найти следующее:

1) область определения функции;
2) четность, нечетность, периодичность;
3) пересечения с осями координат (нули, значение в нуле), интервалы знакопостоянства функции;
4) пределы на границах области определения (в частности, на $\pm\infty$) (здесь определяются вертикальные и горизонтальные асимптоты);
5) нули, интервалы знакопостоянства производной (здесь определяются интервалы монотонности и экстремумы самой функции);
6) нули, интервалы знакопостоянства второй производной (здесь определяются интервалы выпуклости-вогнутости, точки перегиба самой функции);
7) вычислить наклонные асимптоты.

Далее приступаем к построению графика. Вначале необходимо составить табличку значений функции по возрастанию x:

x	0	вычисл.	вычисл.	вычисл.	границы $D(f)$
y	вычисл.	0	вычисл.	вычисл.	вычисл.
y'	знак	знак	0	знак	знак
y''	знак	знак	знак	0	знак

Замечание. Здесь не считаются пределы в точках разрыва, потому что точки разрыва элементарной функции могут быть только на границах области определения $D(f)$. (Под значениями функции на бесконечностях и на границах области определения понимаются соответствующие пределы.)

Можно, конечно, вычислять значения производной во всех этих точках, что даст направление касательной к графику в точках, но это имеет смысл только при одинаковом масштабе по осям и при точном соблюдении масштаба на чертеже. Например, это может делать компьютерная программа.

Переходим к построению графика.

Сначала стоит нарисовать пунктиром все асимптоты.

Затем наносим все полученные точки. На бесконечностях и границах области определения значением y является соответствующий предел. Знаки производных показываются маленькими дужками, изогнутыми соответственно знаку y'', наклоненными вверх или вниз соответственно знаку y'. На бесконечностях и границах области определения надо при этом показывать приближение к асимптотам.

Затем полученные дужки соединяются слева направо гладкими кривыми линиями с соблюдением направления роста графика с учетом знака первой производной и характера выпуклости по знаку 2-й производной и учитывая приближение к нарисованным асимптотам.

В случае четной или нечетной функции можно строить график на полуоси, потом продолжить симметрично. В случае периодической функции нужно сделать это на одном периоде и еще хотя бы один кусок графика нарисовать со сдвигом на период.

Пример. $y = \sqrt{x^2+1}$:

1) область определения — вся прямая;

2) функция четная;

3) $y(0) = 1$, нулей нет, значит, график не пересекает ось OX. Знак всегда «+»;

4) $\lim\limits_{x\pm\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$. Горизонтальных и вертикальных асимптот нет;

5) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Производная положительна на $(0, +\infty)$, отрицательна на $(-\infty, 0)$. Соответственно, функция убывает на $(-\infty, 0]$, возрастает на $[0, +\infty)$; 0 — точка локального минимума;

6) $y'' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Вторая производная не обращается в ноль и всегда положительна, поэтому график везде вогнутый;

7) наклонные асимптоты для этой функции были найдены в примере к определению 4.13. Там они найдены были непосредственно без использования формул теоремы 4.19. Сейчас

мы найдем их по этим формулам. Результат должен быть тем же самым. Найдем пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\begin{Bmatrix}\text{Заменяем}\\ \text{на экв.}\end{Bmatrix}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}=\pm1=k;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+1}\mp x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\pm x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\pm x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2|x|}=0=b.$$

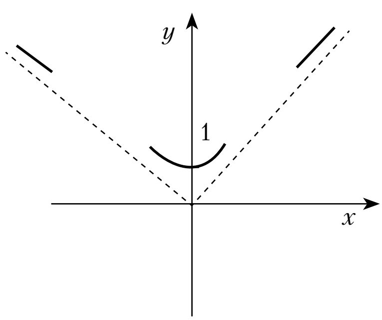
Итак, оба предела конечны, поэтому получили наклонные асимптоты на $\pm\infty$, $y=\pm x$.

Строим табличку значений функции:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$

Здесь получилась одна конечная точка.

Порядок нанесения графика показан на рис. 4.18, *а*, *б*.



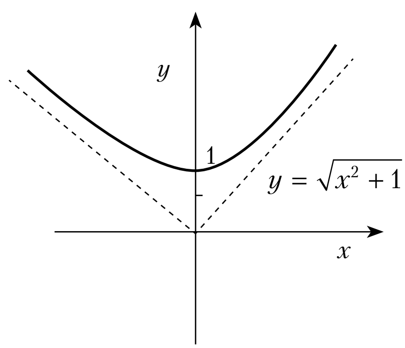


Рис. 4.18

4.8. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. СТАНДАРТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ МАКЛОРЕНА

Ранее мы могли по значению функции и ее производной в точке написать формулу линеаризации — приближенное значение функции в окрестности точки. Возникает вопрос: можно ли получить лучшее приближение функции в окрестности точки, используя значения ее производных высших порядков.

Что касается многочлена степени n, то оказывается, что его можно полностью восссстановить по значениям функции и n ее производных в какой-то точке. Это доказывает следующая теорема.

Теорема 4.20 (восстановление многочлена степени n по n производным). Пусть дан многочлен n-й степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Тогда для его коэффициентов верна формула

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}, \; k = 0, \ldots, n.$$

Доказательство. Имеем:

$$a_k x^{k'} = a_k \cdot k x^{k-1},$$

$$a_k x^{k''} = a_k \cdot k(k-1) x^{k-2},$$

....

$$a_k x^{k^{(s)}} = a_k \cdot k(k-1)\ldots(k-s+1)x^{k-s},$$

....

$$a_k x^{k^{(k)}} = a_k \cdot k(k-1)\ldots(k-k+1)x^0 = a_k \cdot k!.$$

Все остальные производные равны нулю. Причем в точке $x = 0$ все производные равны нулю, кроме k-й, которая равна

$$a_k x^{k^{(k)}}\Big|_{x=0} = a_k k!;$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Поэтому $P_n^{(k)}(0) = a_k k! \Rightarrow a_k = \dfrac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$.

Следствие 1. Любой многочлен степени n равен

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (4.4)$$

Следствие 2. В силу следствия 1 многочлен степени n восстанавливается по значению в нуле его самого и его n производных.

Заметим, что многочлен в правой части (4.4) мы можем записать для любой функции, имеющей в точке 0 n производных. Этот многочлен имеет специальное название.

Определение 4.14 (многочлена Тейлора). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производные до порядка n.

Тогда многочлен

$$T_n(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$
$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n в точке x_0 для функции $f(x)$.

Следствие 1 к теореме 4.20 можно теперь переформулировать так: «Многочлен порядка n равен своему многочлену Тейлора порядка n для точки $x_0 = 0$ (на самом деле, в любой точке x_0)».

Конечно, функция, которая не является многочленом, не может совпадать со своим многочленом Тейлора любого порядка, но можно предполагать, что функция хорошо приближается своим многочленом Тейлора высокого порядка в окрестности точки x_0, и это предположение оправдывается. Действительно, формула линеаризации, которой мы уже пользовались для приближения функции в окрестности точки, является ничем иным, как многочленом Тейлора порядка 1 в этой точке. Правда при использовании этой формулы для приближения не была дана оценка погрешности этого приближения. Для приближения функции многочленом Тейлора оценка погрешности приближения будет указана в следующей теореме. Для ее доказательства нам понадобится лемма.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производные до порядка n. Тогда значения в точке $x = x_0$ многочлена Тейлора порядка n и всех его n производных совпадают с соответствующими значениями функции $f(x)$ и ее n производных.

Доказательство. Даем для случая $x_0 = 0$. Для других точек это получается заменой $x - x_0 = y$ (проверьте!).

Применим теорему 4.20 к многочлену Тейлора:

$$T_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \ldots + \frac{f'(0)}{1!} x + f(0).$$

Здесь будет $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

По теореме 4.20 $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k = \dfrac{T_n^{(k)}(0)}{k!}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $f^{(k)}(0) = T_n^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.21 (формула Тейлора для $x_0 = 0$ в форме Пеано). Пусть $f(x)$ имеет в окрестности точки 0 производную порядка n, непрерывную в этой точке. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула, называемая формулой Тейлора — Пеано: $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$ при $x \to 0$, где $T_n(x)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$ порядка n в точке 0.

Доказательство. Достаточно доказать, что $h(x) = f(x) - T_n(x) = o(x^n)$, или, что то же самое, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{x^n} = 0$.

Из условия и арифметических свойств производных $h(x)$ имеет в окрестности точки 0 все производные до порядка n, из которых сама функция и $n - 1$ производная непрерывны в этой окрестности, а n-я производная непрерывна в 0. Функция x^n обладает теми же свойствами. Поэтому к $h(x)$ и x^n, равно как и к $n - 1$ их производной, применима теорема Коши (теорема 4.13). Сделаем это, воспользовавшись тем, что по лемме значение функции $h(x)$ и ее n производных в точке 0 равны нулю. То же самое верно для $n - 1$ производной x^n, а $(x^n)^{(n)} = n!$.

Пусть x принадлежит окрестности, где определена $(n - 1)$-я производная функции $h(x)$. Имеем существование точки x_1 между 0 и x, x_2 между 0 и x_1 и т.д.:

$$\frac{h(x)}{x^n} = \frac{h(x) - h(0)}{x^n - 0^n} = \frac{h'(x_1)}{n x_1^{n-1}} = \frac{h'(x_1) - h'(0)}{n x^{n-1} - n 0^{n-1}} =$$

$$= \frac{h''(x_2)}{n(n-1) x_2^{n-2}} = \frac{h''(x_2) - h''(0)}{n(n-1) x_2^{n-2} - n(n-1) 0^{n-2}} =$$

$$= \ldots = \frac{h^{(n)}(x_n)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)x_n^{n-n}} = \frac{h^{(n)}(x_n)}{n!} \to 0$$

$$\text{при } x \to 0,\ |x_n| < |x| \to 0,$$

так как $h^{(n)}(x)$ непрерывна и равна нулю в нуле, x_n лежит между 0 и x, которое стремится к нулю. Поэтому x_n также стремится к нулю. Как следствие, заменой переменной $t = x - x_0$ отсюда получается формула Тейлора для любого x_0.

Теорема 4.21а (формула Тейлора для любого x_0 в форме Пеано). Пусть $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную порядка n, непрерывную в этой точке. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула, называемая формулой Тейлора: $f(x) = T_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $T_n(x)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$ порядка n в точке x_0.

Доказательство. Сделаем замену $x - x_0 = t$. Тогда $f(x) = f(t + x_0)$. Причем как производная сложной функции $f_t'(t + x_0) = f_x'(x)(t + x_0)_t' = f_x'(x)$, ..., $f_t^{(n)}(t + x_0) = f_x^{(n)}(x)$ и $f(t + x_0)$ имеет производную порядка n в окрестности 0, непрерывную в $t = 0$. Поэтому для нее верна формула Тейлора: $f(t + x_0) = T_n(t) + o((t)^n)$.

Вернемся обратно к x, положив $t = x - x_0$: $f(x) = T_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$, что и требовалось доказать.

Эта формула оценивает порядок погрешности при замене исходной функции многочленом Тейлора. Существует другая форма формулы Тейлора, которая позволяет оценить эту погрешность численно.

Теорема 4.22 (формула Тейлора для $x_0 = 0$ в форме Лагранжа). Пусть $f(x)$ имеет в окрестности точки 0 производную порядка $n + 1$. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула, называемая формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где x_{n+1} между 0 и x, а $T_n(x)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$ порядка n в точке 0.

Доказательство. Проводится аналогично теореме 4.21. Формула Коши применяется к $\dfrac{f(x) - T_n(x)}{x^{n+1}}$ $(n + 1)$ раз с получением так же обозначенных точек x_k, монотонно по k приближающихся от x к 0 при $k = 1, 2, \ldots, n + 1$. На последнем шаге получим

$\dfrac{f(x)-T_n(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$, $0 < x_{n+1} < x$, что совпадает с формулой Тейлора в форме Лагранжа.

Аналогично существует формула Тейлора в форме Лагранжа для любого x_0.

Теорема 4.22а (формула Тейлора для любого x_0 в форме Лагранжа). Пусть $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную порядка $n + 1$. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула, называемая формулой Тейлора в форме Лагранжа: $f(x)=T_n(x-x_0)+\dfrac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где x_{n+1} между x_0 и x, а $T_n(x - x_0)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$ порядка n в точке x_0.

Доказательство. Аналогично теореме 4.21а получается из теоремы 4.22 заменой $t = x - x_0$.

Пример. Применим формулу Тейлора в форме Лагранжа для оценки погрешности формулы линеаризации для $x_0 = 0$, $x = 0{,}1$, $f(x) = e^x$. По формуле Тейлора в форме Лагранжа порядка 2 имеем: $e^{0{,}1}=e^0+e^0\cdot 0{,}1+\dfrac{e^{x_2}}{2}\cdot 0{,}1^2$, при этом формула линеаризации $e^{0{,}1}\cong 1+ +0{,}1=1{,}1$ имеет погрешность $\dfrac{e^{x_2}}{2}\cdot 0{,}1^2\le\dfrac{e^{0{,}1}}{2}\cdot 0{,}01<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01<0{,}01$, что является очень грубой оценкой.

Заметим, что формула Тейлора при $x_0 = 0$ применяется чаще и имеет специальное название.

Определение 4.15 (формулы Маклорена). Формулой Маклорена называется формула Тейлора для $x_0 = 0$.

Приведем примеры стандартных разложений по формуле Маклорена в форме Пеано. Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^a$ имеют любое количество производных в какой-то окрестности 0.

Напомним, что многочлен Тейлора для $x_0 = 0$ порядка n имеет вид

$$T_n(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots+\frac{f'(0)}{1!}x+f(0),$$

а формула Маклорена в форме Пеано будет $f(x)=T_n(x)+o(x^n)$ при $x\to 0$, и нужно только посчитать производные указанных функций в нуле. Сделаем это.

1. $f(x) = e^x$: $f(0) = 1$; $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$ для всех n. Формула Маклорена в форме Пеано $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

2. $f(x) = \sin x$: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$; $f(0) = 0$; $f^{(2n)}(0) = 0$; $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$; $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ для всех n. Формула Маклорена порядка $2n + 1$ и $2n + 2$ будет одинаковой, так как $(2n + 2)$-я производная в нуле равна нулю. Поэтому приведем последнюю:

$$\sin x = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

3. $f(x) = \cos x$: $f(0) = 1$; $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$; $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$; $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$; $f^{(2n+1)}(0) = 0$ для всех n. Формула Маклорена порядка $2n$ и $2n + 1$ будет одинаковой, так как $(2n + 1)$-я производная в нуле равна нулю:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

4. $f(x) = \ln(1 + x)$: $f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$; $f''(0) = -1$; $f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}$; $f'''(0) = 2!$; $f^{(4)}(x) = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$; $f^{(4)}(0) = -3!$; $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \times (n-1)!, \ldots$ Формула Маклорена в форме Пеано будет:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2!x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!x^n}{n!} + o\left(\left(x^n\right)\right).$$

Сделав сокращения, получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o\left(\left(x^n\right)\right).$$

5. $f(x) = (1 + x)^a$: $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$; $f(0) = 1$; $f'(0) = a$; $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$; $f''(0) = a(a-1)$; $f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$; $f'''(0) = a(a-1)(a-2)$; $f^{(4)}(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4}$; $f^{(4)}(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)$; ..., $f^{(k)}(x) = a(a-1)(a-2) \times \ldots \times (a-k+1)(1+x)^{a-k}$; $f^{(k)}(0) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)$; ...; $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$; $f^{(n)}(0) = a(a-1) \times (a-2)\ldots(a-n+1)$.

Тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_1^n \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)x^k}{k!} + o\left(x^n\right).$$

4.9. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Сформулируем общую теорему.

Теорема 4.23 (правило Лопиталя). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки θ (любой из $b+$, $b-$, b, $\pm\infty$). $g(x), g'(x)$ не обращаются в этой окрестности в ноль. Кроме того, $\lim\limits_{x\to\theta}\frac{f(x)}{g(x)} = «\frac{0}{0}»$ либо $\lim\limits_{x\to\theta}\frac{f(x)}{g(x)} = «\frac{\infty}{\infty}»$ — неопределенности, но существует $\lim\limits_{x\to\theta}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \omega$ (любой из всевозможных пределов). Тогда существует $\lim\limits_{x\to\theta}\frac{f(x)}{g(x)} = \omega$.

Докажем теорему в простейшем случае: θ — точка b; $f(x)$, $g(x)$ обращаются в b в ноль.

Тогда по формуле Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{f(b)=g(b)=0}{=} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \overset{\text{Формула Коши}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c между b и x и стремится к b вместе с x.

Поэтому $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{c\to b}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \omega$, что доказывает теорему.

Примеры. Вычислим пределы уже встречавшихся неопределенностей:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$. Применимо правило Лопиталя: $\ln x' = \frac{1}{x}$, $x' = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot 1} = 0$. По правилу Лопиталя существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}$. Опять применимо правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

3. И еще раз по правилу Лопиталя для $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{«0»}{0}$ при $x\to 0$, $\frac{(1-\cos x)'}{x^2} = \frac{\sin x}{2x} = \frac{«0»}{0}$, $\frac{\sin x'}{2x'} = \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}$ при $x\to 0$. Поэтому последовательно по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы

1. Определите касательную к графику функции в точке.
2. Что такое дифференцируемая функция?
3. Что такое производная функции в точке? Что такое дифференциал?
4. Сформулируйте теорему Ролля.
5. Что такое точки локального экстремума? Сформулируйте необходимое условие локального экстремума.
6. Сформулируйте теорему Лагранжа.
7. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума через 1-ю производную.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. С помощью табличного дифференцирования вычислите производные от функций:

$$y = \sqrt[3]{\sin 2x} + \frac{1 - e^{-x}}{\ln(3x - 1)};\ y = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2x + 5}} - 6x^3\right);\ y = (1 - 7x)e^{-\operatorname{arctg}(4x - 1)}.$$

2. Проверьте, что при любом C функция $y = Cx\sqrt[3]{x} + \sin 3x$ является решением дифференциального уравнения $3xy' = 4y + \begin{vmatrix} x & \sin 3x \\ 4 & 9\cos 3x \end{vmatrix}$.

3. Вычислите через предел производную от функции $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$.

4. Определите, под каким углом пересекаются линии $y = x^2 + 3x + 5$, $y = x^2 + 5x + 3$. Изобразите эти линии и искомый угол.

5. Определите, при каких значениях A и B функция $y = e^{2x}\sin 3x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + Ay' + By = 0$.

6. А. Напишите асимптотическую формулу линеаризации (АФЛ) для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ в точке $x_0 = 5$. Б. Получите из АФЛ уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0. В. Получите из АФЛ приближенную формулу линеаризации. Г. Вычислите с помощью этой приближенной формулы значение $f(5{,}027)$.

7. А. Дайте определение дифференциала функции. Б. Вычислите (с указанием погрешности) значение функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3}$ в приближенной точке $x = 2 \pm 0{,}001$. При вычислении погрешности следует приращение функции (погрешность) заменить дифференциалом.

8. Записав асимптотическую формулу линеаризации для числителя и для знаменателя, вычислите предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(1 - \sqrt[3]{x})}{\arcsin(3x^2 - 2x - 1)}$.

9. Используя формулу линеаризации и формулы эквивалентностей, вычислите пределы:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(3x^2 - 2\sqrt{x}\right)}{x^3 + x^5 - 2\sqrt{x}};\ \lim_{x \to +\infty} \ln\left(2^x + e^x\right)\sin\left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\right).$$

10. Вычислите по правилу Лопиталя предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 1)}{x^4 - 6\sqrt[3]{x^2} + 5}$.

11. С помощью разложений Тейлора найдите асимптотику (чему эквивалентна функция) при $x \to 0$ для функции $f(x) = \sqrt{1+x} - \cos(x/2) - \sin(x/2)$.

12. Определите асимптотики (каким простым функциям эквивалентна данная) в особых точках, найдите наклонную асимптоту и постройте по этим данным эскиз графика функции $y = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2(x+1)}$.

13. Найдите точную оценку функции $y = \dfrac{e^{0,5x}}{x^2 + 3}$ на отрезке [0,5; 5].

14. Определите размеры кругового цилиндра так, чтобы при данном объеме V он имел минимальную полную поверхность.

15. Проведите полное исследование и постройте график функции $y = x^3 - \dfrac{x^4}{4}$.

16. Определите: а) интервалы монотонности и экстремумы; б) интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба; в) асимптоты. Постройте графики:

$$y = x^3 - \frac{x^4}{4};\ y = \frac{2x}{x^2+1};\ y = xe^{0,5x};\ y = \ln\left(x^2 - 3x + 3\right);$$

$$y = \frac{1}{\left(x-1\right)^2} + \frac{1}{x-1} - x.$$

Тесты

1. Приведите формулу для вычисления производной функции в точке

1) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; 2) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$; 3) $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

2. Приведите формулу для дифференциала:

1) $df(x) = f'(x)$; 2) $df(x) = f'\left(x\right)dx$; 3) $df(x) = \Delta f(x)$.

3. Приведите формулу линеаризации:

1) $f(x+\Delta x) \approx f'(x)\Delta x$; 2) $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$; 3) $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x+\Delta x)\Delta x$.

4. Приведите достаточное условие нахождения интервалов монотонности функции через 1-ю производную:

1) внутри интервала монотонности производная меняет знак; 2) внутри интервала монотонности производная сохраняет знак; 3) внутри интервала монотонности производная не существует.

5. Чему эквивалентна на $+\infty$ или $-\infty$ функция, если ее график имеет там наклонную асимптоту?

1) $f(x) \sim x$; 2) $f(x) \sim kx,\ k \neq 0$; 3) $f(x) \sim x^2$.

6. Имеет ли $\ln x$ наклонную асимптоту на $+\infty$?

1) имеет; 2) не имеет.

Раздел 2
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 5
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЕ ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОСТИ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПОДСТАНОВКИ. ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Не менее важную роль, чем дифференциальное исчисление, в математическом анализе играет интегральное исчисление. Оно широко используется в физике и других естественных науках, а также является аппаратом для многих математических дисциплин, таких как дифференциальные уравнения, интегральные уравнения и др.

Начнем с определения первообразной, нахождение которой обратно по отношению к взятию производной, что следует из следующего определения.

Определение 5.1. Пусть $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале (a, b) и там выполнено равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на этом интервале.

Замечание. Видим, что нахождение первообразной обратно по отношению к нахождению производной.

Примеры

1. Первообразной для $1/x$ на $(0, +\infty)$ является по определению функция $\ln(x)$.

2. Первообразной для $y = 0$ является по определению $y = \mathrm{const}$ для любой константы.

Согласно примеру 2) первообразных может быть много и они отличаются друг от друга на константу. О том, что это общая ситуация, говорит следующая теорема.

Теорема 5.1. Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$ на (a, b), то все ее первообразные на этом интервале имеют вид $F(x) + C$ для некоторой константы C.

Доказательство. Имеем по условию $F'(x) = f(x)$. Тогда $(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$. Значит, $F(x) + C$ — первообразная для $f(x)$ для любой константы C.

Покажем, что любая ее первообразная имеет такой вид.

Действительно, пусть $G(x)$ — другая первообразная. Тогда на интервале $(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Если для некоторой функции производная есть тождественный ноль, то она константа, так как по теореме Лагранжа ее любое приращение есть приращение икса, умноженное на производную в некоторой промежуточной точке, т.е. равно нулю вместе с производной. $G(x) - F(x) = \mathrm{const}$, т.е. $G(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать.

На этом свойстве будет далее основана формула для неопределенного интеграла.

Определение 5.2. Неопределенным интегралом для $f(x)$ на (a, b) называется множество всех первообразных этой функции на этом интервале. Неопределенный интеграл обозначается как $\int f(x)dx$.

По предыдущей теореме $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна первообразная, а C — любая константа.

Пример. Дифференцированием правой части можно проверить, что $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + C$.

Замечание. Неопределенный интеграл, как и первообразная, существует не для любой функции. Далее мы убедимся, что непрерывная на интервале функция всегда имеет первообразную. Поэтому во многих теоремах о неопределенных интегралах будет требоваться непрерывность интегрируемых функций.

Свойства линейности неопределенных интегралов дает следующая теорема.

Теорема 5.2 (линейность первообразных и неопределенных интегралов). Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int g(x)dx = G(x) + C$, a, b — числа. Тогда

$$\int af(x) + bg(x)dx = aF(x) + bG(x) + C \tag{5.1}$$

и

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

Доказательство (5.1) легко получается дифференцированием правой части с использованием линейности производных. Получим отсюда линейность неопределенных интегралов. Имеем по доказанному (5.1) и по условию:

$$\int af(x)+bg(x)dx = aF(x)+bG(x)+C = a\left(\int f(x)dx - C_1\right)+$$
$$+b\left(\int g(x)dx - C_2\right)+C = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx - aC_1 -$$
$$-bC_2 + C = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

Поскольку произвольные константы содержатся во всех неопределенных интегралах, мы опускаем отдельные константы, заменив их нулем.

Замечание. Во второй формуле справа стоит сложение двух множеств функций. Это нужно понимать как множество всех возможных функций, получающихся сложением одной функции из первого множества с одной функцией из второго.

Прежде чем перейти к таблице неопределенных интегралов, докажем одну полезную теорему.

Теорема 5.3 (о линейной подстановке). Пусть $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тогда $\int f(\alpha x+\beta)dx = \dfrac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C\ \forall\ \alpha \neq 0,\ \alpha$ и $\beta \in R$.

Доказательство. По определению $F'(x) = f(x)$. Тогда $\left(\dfrac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}\right)' = \dfrac{\alpha f(\alpha x+\beta)}{\alpha} = f(\alpha x+\beta)$, что и требовалось доказать.

Примеры

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Значит, по определению $\int \alpha x^{\alpha-1}dx = x^\alpha + C$. Тогда по линейности при $\alpha \neq 0$

$$\int x^{\alpha-1}dx = \frac{x^\alpha}{\alpha}+C.$$

Заменяя $\alpha - 1$ на α, получим при $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, как мы убедились в приведенном после определения 5.2 примере. Тогда

$$\int \sin x dx = \int \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \overset{\substack{\text{Теорема}\\ \text{о линейной}\\ \text{подстановке}}}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C = -\cos(x)+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\overset{\substack{\text{Теорема}\\ \text{о линейной}\\ \text{подстановке}}}{=}\frac{1}{a^2\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Аналогично этим примерам, переписывая таблицу производных, получим таблицу неопределенных интегралов:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \text{ при } \alpha\neq-1;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \text{ при } \alpha=-1;$$

$$\int\cos x dx=\sin x+C;$$

$$\int\sin x dx=-\cos(x)+C;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}(x)+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}(x)+C;$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+h}\right|+C.$$

Последние два равенства не содержатся в таблице производных и проверяются непосредственным дифференцированием (проверьте!).

5.2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ПОДВЕДЕНИЕ ПОД ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Для интегрирования более сложных выражений помимо приведенной таблицы применяются определенные методы. К рассмотрению самых необходимых из них мы и переходим.

Теорема 5.4 (метод подведения под знак дифференциала). Пусть известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$ и существует непрерывная производная для функции $g(x)$ на (a, b).

Тогда $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$.

Доказательство. Проверяем непосредственным дифференцированием:

$$F\big(g(x)\big)' \overset{\substack{\text{Дифференцирование}\\ \text{сложной}\\ \text{функции}}}{=} F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \overset{F'(x)=f(x)\,\forall\, x}{=} f\big(g(x)\big)\cdot g'(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Этот метод называют подведением под знак дифференциала, потому что

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f\big(g(x)\big)d\big(g(x)\big) = F\big(g(x)\big) + C.$$

Здесь мы «подвели функцию $g(x)$ под дифференциал» по известной формуле $d(g(x)) = g'(x)dx$, а затем воспользовались условием теоремы для $g(x)$ вместо x.

Примеры. Чаще всего этот метод применяется при условии $\int f(x)dx = F(x) + C$, например, в случаях:

а) $\int f(x^2)xdx = \int f(x^2)d(x^2)\ /\ 2 = \frac{1}{2}F(x^2) + C$;

б) $\int f(\sin x)\cos(x)dx = \int f(\sin x)d(\sin x) = F(\sin x) + C$;

в) $\int f(\cos x)\sin(x)dx = \int f(\cos x)(-d(\cos x)) = -F(\cos x) + C$;

г) $\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d(\ln x) = F(\ln x) + C$;

д) $\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)d(e^x) = F(e^x) + C$.

Здесь использована еще и линейность неопределенного интеграла, а именно для выражений: $xdx = d(x^2)/2$; $\sin x dx = -d(\cos x)$.

Приведем теперь конкретные примеры.

1. $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = \int \sin(\ln x)\frac{dx}{x} \overset{\text{Случай г) и } \int \sin x dx = -\cos x + C}{=} -\cos(\ln x) + C.$

2. $\int \frac{x}{x^2+h}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+h} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+h)}{x^2+h} \overset{\substack{\text{Поскольку } dh=0,\\ \text{по формуле}\\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C}}{=} \frac{\ln\left|x^2+h\right|}{2} + C.$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{\pm x^2+h}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{\pm x^2+h}} \overset{\substack{\text{Подводим } \pm x^2+h\\ \text{под дифферен-}\\ \text{циал}}}{=} \frac{\pm 1}{2}\int \frac{d(\pm x^2+h)}{(\pm x^2+h)^{\frac{1}{2}}} \overset{\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + C}{=}$

$= \pm(\pm x^2+h)^{\frac{1}{2}} + C$ (здесь выражение $\pm x^2 + h$ должно быть неотрицательно, так как оно стоит под квадратным корнем).

4. Пусть $n \neq 1$.

$$\int \frac{x}{\left(x^2+h\right)^n}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\left(x^2+h\right)^n} \overset{\substack{\text{Подводим } x^2+h\\ \text{под дифференциал}}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+h\right)}{\left(x^2+h\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}\left(x^2+h\right)^{1-n} + C.$$

Заметим, что при подведении под дифференциал мы фактически обосновали следующую замену переменной:

$$\int f\big(g(x)\big)dg(x) \overset{y=g(x),\ dy=d(g(x))}{=} \int f(y)dy = F(y) + C = F\big(g(x)\big) + C.$$

Докажем теперь более общую теорему о замене переменной.

Теорема 5.5 (замена переменной). Пусть имеем обратимую замену переменной $x = x(y)$, $y = y(x)$ и $\int f(x(y))x'(y)dy = F(y) + C$. Тогда $\int f(x)dx = F(y(x)) + C$.

Доказательство. Имеем по условию $F_y'(y) = f(x(y))x'(y)\ \forall\, y$. Тогда

$$F_x'\big(y(x)\big) = F_y' y'(x) \overset{\text{Условие}}{=} f\Big(x\big(y(x)\big)\Big)x_y'\big(y(x)\big)y'(x) \overset{\substack{x(y(x))=x\\ \text{и } x'(y)y'(x)=x_x'=1}}{=} f(x),$$

т.е.

$$\int f(x)dx \overset{x=x(y),\, dx=x'(y)dy}{=} \int f\big(x(y)\big)x'(y)dy = F\big(y(x)\big)+C,$$

что и требовалось доказать.

Примеры

1. Метод выделения полного квадрата.

А. При $c \neq 0$

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx \overset{\text{Линейность}}{=} \frac{1}{c}\int \frac{ax+b}{x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}}dx \overset{\frac{d}{c}=d_1,\,\frac{e}{c}=e_1}{=} \frac{1}{c}\int \frac{ax+b}{x^2+d_1x+e_1}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \text{выделим полный квадрат в знаменателе:} \\ x^2+d_1x+e_1 = \left(x+\frac{d_1}{2}\right)^2 - \frac{d_1^2}{4}+e_1 \\ \text{сделаем замену } x+\frac{d_1}{2}=y,\ x=y-\frac{d_1}{2},\ dx=dy \end{array}\right. =$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{ay+b_1}{y^2+h}dy = \frac{a}{c}\int \frac{y}{y^2+h}dy + \frac{b_1}{c}\int \frac{dy}{y^2+h}.$$

Здесь обозначено $b_1 = b - \frac{ad_1}{2}$, $h = -\frac{d_1^2}{4}+e_1$. Видим, что в сумме второй интеграл табличный, первый мы брали в примере к теореме о подведении под дифференциал. Ответ получим, заменив y на x по теореме о замене переменной.

Б. Совершенно аналогично с помощью выделения полного квадрата в знаменателе под корнем в тех же обозначениях преобразуем при $c \neq 0$

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}} = \int \frac{ax+b}{\sqrt{c\left(\left(x+\frac{d_1}{2}\right)^2+h\right)}} = \frac{a}{\sqrt{|c|}}\int \frac{y}{\sqrt{\pm y^2 \pm h}} +$$

$$+ \frac{b_1}{\sqrt{|c|}}\int \frac{dy}{\sqrt{\pm y^2 \pm h}}.$$

Здесь опять первый интеграл мы вычисляли в примерах к подведению под дифференциал, второй — табличный. Далее применяется теорема о замене переменной, по которой нужно заменить y на $x + d_1/2$.

Замечание. Аналогичным выделением полного квадрата преобразуем

$$\int \frac{ax+b}{\left(x^2+dx+e\right)^n}dx = a\int \frac{y}{\left(y^2+h\right)^n}dy + b_1\int \frac{dy}{\left(y^2+h\right)^n}.$$

Поскольку первый интеграл вычислен в примерах к подведению под дифференциал, необходимо научиться брать второй, что будет сделано далее.

5.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Часто при интегрировании применяется также метод интегрирования по частям, обоснование которого дает следующая теорема.

Теорема 5.6 (интегрирование по частям). Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие непрерывные первые производные на интервале (a, b). Тогда

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{5.2}$$

Доказательство. Возьмем производную от левой части равенства имеем, используя определение неопределенного интеграла, (5.2):

$$\left(\int \left(u(x)dv(x)\right)\right)' = \left(\int u(x)v'(x)dx\right)' = u(x)v'(x) =$$

$$= \left(u(x)v(x)\right)' - u'(x)v(x).$$

Здесь используется формула

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Итак,

$$\left(\int u(x)dv(x)\right)' = \left(u(x)v(x)\right)' - u'(x)v(x).$$

Справа стоит производная от правой части равенства (5.2). Поэтому неопределенные интегралы также совпадают как наборы первообразных от одинаковых функций.

Примеры. Метод интегрирования по частям применяется для интегрирования произведений функций, одна из которых сильно упрощается при дифференцировании, а другая не сильно усложняется при интегрировании. Мы знаем, в частности, следующие функции, у которых производная «проще» их самих: $\ln x' = \frac{1}{x}$, $x' = 1$, $\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{x^2+1}$. Отсюда возникают примеры для интегрирования по частям.

1 . $$\int \ln x dx = \begin{cases} u(x) = \ln x, \ du(x) = \frac{dx}{x} \\ dv(x) = dx, \ v(x) = x \end{cases} = x\ln x - \int \frac{xdx}{x} = x\ln x -$$
$$-\int dx = x\ln x - x + C.$$

2. Самостоятельно аналогично вычислите интегралы $\int xe^x dx$, $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

5.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Определение 5.3 (рациональной дроби). Выражение вида $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, называется ***рациональной дробью***. Дробь называется ***правильной***, если $n < m$. При $n \geq m$ дробь называется ***неправильной***.

Замечание. Неправильную дробь с помощью деления «в столбик» можно представить в виде $R(x) = T_{n-m}(x) + \frac{W_k(x)}{Q_m(x)}$, где многочлен $T_{n-m}(x)$ — частное, а $W_k(x)$, $k < m$ — остаток от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$. Тогда дробь $\frac{W_k(x)}{Q_m(x)}$ уже правильная. Значит, для того чтобы интегрировать рациональные дроби, нужно научиться интегрировать правильные дроби (многочлены мы интегрировать умеем).

Для правильных дробей также есть способы их сведения к более простым.

Определение 5.4. Дроби вида $\frac{1}{(x-a)^n}$ и $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$, $n \geq 1$, где квадратный трехчлен в знаменателе не имеет корней, называются ***простейшими дробями первого и второго рода*** соответственно.

Дроби первого рода просто интегрируются с помощью теоремы о линейной подстановке. Дроби второго рода при выделении полного квадрата мы свели к интегрированию дробей вида $\frac{1}{(x^2+h^2)^n}$. При $n = 1$ это табличный интеграл. Получим формулу, связывающую значения этих интегралов для двух последовательных значений n и $n+1$.

Теорема 5.7. Обозначим $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+h^2)^n}$. Тогда при $n > 0$ $I_{n+1} = \frac{x}{2nh^2(x^2+h^2)^n} + \frac{2n-1}{2nh^2} I_n$.

Доказательство. Запишем:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^n} = \int \frac{x^2+h^2}{\left(x^2+h^2\right)^{n+1}} dx = \int \frac{x}{\left(x^2+h^2\right)^{n+1}} x dx + h^2 I_{n+1} =$$

$$= \begin{cases} \text{по частям } u = x,\ du = dx \\ dv = \dfrac{x}{\left(x^2+h^2\right)^{n+1}} dx \\ v = \displaystyle\int \frac{xdx}{\left(x^2+h^2\right)^{n+1}} = -\frac{1}{2n\left(x^2+h^2\right)^n} \end{cases} =$$

$$= -\frac{x}{2n\left(x^2+h^2\right)^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^n} + h^2 I_{n+1} =$$

$$= -\frac{x}{2n\left(x^2+h^2\right)^n} + \frac{1}{2n} I_n + h^2 I_{n+1}.$$

Таким образом, получаем

$$I_n = -\frac{x}{2n\left(x^2+h^2\right)^n} + \frac{1}{2n} I_n + h^2 I_{n+1}.$$

Отсюда

$$I_{n+1} = \frac{x}{2h^2 n\left(x^2+h^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2h^2 n} I_n.$$

Примеры:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{h}\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^2} = I_2 = \frac{x}{2h^2\left(x^2+h^2\right)} + \frac{1}{2h^2} I_1 =$$

$$= \frac{x}{2h^2\left(x^2+h^2\right)} + \frac{1}{2h^3} arctg\left(\frac{x}{h}\right) + C.$$

Таким образом, мы научились интегрировать простейшие дроби.

Приведем теоремы из алгебры, связывающие правильные дроби с простейшими.

Теорема 5.8. Любой многочлен с действительными коэффициентами допускает разложение на линейные множители вида $(x-a)^n$ и неразложимые квадратичные множители вида $(x^2+px+q)^k$ с натуральными степенями, а также числовой множитель.

Доказательство не приводим.

Теорема 5.9. Пусть дробь $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильная. Согласно теореме 5.8 многочлен Q_m имеет разложение на линейные множители $(x-a)^n$ и неразложимые квадратичные множители $(x^2+px+q)^k$ в натуральных степенях и числовой множитель. Тогда рациональная дробь имеет разложение на простейшие дроби, в котором каждому линейному множителю $(x-a)^n$ отвечает часть суммы вида $\dfrac{A_1}{(x-a)}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\dfrac{A_n}{(x-a)^n}$, а каждому неразложимому квадратичному множителю $(x^2+px+q)^k$ отвечает часть суммы $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\dfrac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$. (Здесь все A_l, B_m, C_t, $l=1,\ldots,n$; $m,t=1,2,\ldots,k$ — константы.)

Доказательство не приводим.

В силу этой теоремы возможность интегрировать простейшие дроби дает возможность интегрировать правильные рациональные дроби. Нужно только найти коэффициенты разложения, которые стоит искать методом неопределенных коэффициентов.

Пример: $\displaystyle\int\frac{x}{(x-1)(x^3-1)}dx$. Разложим сначала знаменатель. Он равен $(x-1)^2(x^2+x+1)$. Согласно теореме 5.9

$$\frac{x}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\equiv$$

$$\equiv\frac{A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}.$$

Приравнивая друг к другу числители равных дробей при равных знаменателях[1], получим: $x\equiv A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+$ $+(Cx+D)(x-1)^2$.

[1] На самом деле равенство числителей мы получаем сначала во всех точках, кроме корней знаменателя, которых конечное число. Но многочлены, равные друг другу везде, кроме конечного числа точек, будут равны и в этих точках в силу непрерывности этих многочленов.

Здесь для поиска коэффициентов есть две возможности:

1) подставлять в тождество можно любые значения x. Выгодно подставить корни знаменателя, например $x = 1$. Получим $1 = 3B$, $B = 1/3$. Больше корней знаменателя нет. Удобно также подставить $x = 0$. Тогда $0 = -A + B + D$. Нам необходимы еще два уравнения;

2) можно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях икса в левой и правой частях тождества. Легче это сделать при самой большой (3) и самой маленькой степени (1), даже не раскрывая полностью все скобки. При x^3: $0 = A + C$. При x: $1 = B + C - 2D$.

Теперь решаем получившуюся систему уравнений: $B = 1/3$, $C = -A$, $D = A - 1/3$, $2/3 = -A - 2A + 2/3$, $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$, $D = -1/3$.

Получили $\dfrac{x}{(x-1)(x^3-1)} \equiv \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$. Подставим эту формулу в подынтегральное выражение:

$$\int \frac{x}{(x-1)\left(x^3-1\right)}dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right) + C\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}\right) + C\right).$$

К интегрированию рациональных дробей сводится интегрирование определенного вида иррациональных выражений и рациональных выражений от показательной функции. Предварительно скажем, что многочленом от двух переменных называется выражение, содержащее эти переменные и операции умножения, сложения и вычитания. Рациональной функцией $R(x, y)$ от двух переменных называется отношение многочленов.

Теорема 5.10 (интегрирование иррациональных выражений). Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция от двух переменных. $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где a и c не равны нулю одновременно. Тогда

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ заменой $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ сводится к интегрированию рациональной дроби от y.

Доказательство. Нужно лишь проделать указанную замену:

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ y^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dy^n - b}{a - cy^n},$$

$$dx = \frac{ndy^{n-1}(a - cy^n) + cny^{n-1}(dy^n - b)}{(a - cy^n)^2}dy = \frac{ny^{n-1}(ad - bc)}{(a - cy^n)^2}dy.$$

При этом получим:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dy^n - b}{a - cy^n}, y\right)\cdot\frac{ny^{n-1}(ad - bc)}{\left(a - cy^n\right)^2}dy =$$
$$= \int R_1(y)dy,$$

где $R_1(y)$ — рациональная функция уже одного переменного y. Этот интеграл берется в силу изложенного выше.

Пример:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+x}dx = \begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ x = y^2 + 1 \\ dx = 2ydy \end{cases} = \int\frac{y^2+2}{y+y^2+1}2ydy =$$

$$= 2\int\frac{y^3+1-1+2y}{y^2+y+1}dy = 2\int y - 1dy + 2\int\frac{2y+1}{y^2+y+1}dy =$$

$$= y^2 - 2y + 2\int\frac{d\left(y^2+y+1\right)}{y^2+y+1} = y^2 - 2y + 2\ln\left(y^2+y+1\right) + C =$$

$$= x - 2\sqrt{x-1} + 2\ln\left(x + \sqrt{x-1}\right) + C.$$

Теорема 5.11 (интегрирование рациональной функции от e^x). Пусть $R(y)$ — рациональная дробь. Тогда $\int R(e^x)dx$ заменой $y = e^x$ сводится к интегрированию рациональной функции.

Доказательство. Заменим $y = e^x$, $x = \ln y$, $dx = dy/y$. Тогда $\int R(e^x)dx = \int R(y)\frac{dy}{y} = \int R_1(y)dy$, где $R_1(y) = R(y)/y$ — рациональная функция от y, что и требовалось доказать.

Пример:

$$\int\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx=\begin{cases}y=e^x\\x=\ln y\\dx=\dfrac{dy}{y}\end{cases}=\int\frac{y^2+1}{(y+1)y}dy=\int\frac{y^2+y-(y+1)+2}{(y+1)y}dy=$$

$$=\int 1-\frac{1}{y}+2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy=y-\ln|y|+2\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|+C=$$

$$=e^x-x+2\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C.$$

5.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных. Займемся теперь интегрированием выражений $R(\sin x, \cos x)$. Для дальнейшей работы нам понадобятся следующие результаты из алгебры. Во-первых, установим вид рациональной функции $R(x, y) = P_n(x, y) / Q_m(x, y)$ от двух переменных, нечетной по одному из них.

Теорема 5.12. Пусть несократимая рациональная функция от двух переменных удовлетворяет условию

$$R(x,y)=-R(-x,y). \tag{5.3}$$

Тогда

$$R(x,y)=x\overline{R}(x^2,y),$$

где $\overline{R}(x, y)$ — другая рациональная функция

Замечание. Аналогичный результат получается при замене x на y.

Доказательство. Из условия (5.3) $R(0, y) = -R(0, y)$, значит, $R(0, y) = 0$ для любого y.

Другими словами, многочлен числителя $R(x, y)$ рациональной дроби $P_n(0, y) = 0$ для любого y. Значит $P_n(x, y)$ не имеет слагаемых, содержащих x^0, поэтому делится на x при любом y, т.е. $P_n(x, y) = xS_{n-1}(x, y)$, где $S_{n-1}(x, y)$ — тоже многочлен от двух переменных, меньший на единицу степени. Тогда $R(x, y) = xR_1(x, y)$, где $R_1(x, y)$ —

рациональная дробь, также несократимая. Покажем, что $R_1(x, y) = \overline{R}(x^2, y)$. Имеем $R_1(x, y) = S_{n-1}(x, y) \,/ Q_m(x, y)$.

Докажем лемму.

Лемма. Если $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a-b}{c-d}$, то либо $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d}$, либо $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c}$ (здесь d и c не равны нулю одновременно).

Доказательство леммы. Имеем:

$$ac - ad + bc - bd = ac + ad - bc - bd, ad = bc. \tag{5.4}$$

Если $cd \neq 0$, то $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = r, a = cr,\ b = dr, \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{cr+dr}{c+d} = r = \dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$.

Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и из (5.4) $ad = 0$, и так как $d \neq 0$, то $a = 0$. Опять $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d}$.

Если $d = 0$, то аналогично предыдущему случаю получим $b = 0$ и $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c}$.

Доказательство теоремы. Подставив $R(x, y) = xR_1(x, y)$ в (5.3), получим $xR_1(x, y) = -\,(-x)R_1(-x, y)$,

$$R_1(x, y) = R_1(-x, y). \tag{5.5}$$

Имеем $R_1(x, y) = S_{n-1}(x, y) \,/\, Q_m(x, y)$.

Обозначаем сумму всех членов с четными степенями по x в числителе через $a = a\,(x^2, y)$, с нечетными — через

$$b = xb_1\left(x^2, y\right), \tag{5.6}$$

в знаменателе с четными — через $c = c(x^2, y)$, с нечетными — через

$$d = xd_1\left(x^2, y\right). \tag{5.7}$$

В формулах использовано то, что нечетные степени не могут быть меньше единицы, поэтому первую степень x можно вынести за скобку, получив в скобке только четные степени x.

При подстановке $-x$ вместо x члены в числителе и знаменателе нечетной степени по x меняют знак, члены четной степени по x не меняют:

$$-xb_1\left((-x)^2, y\right) = -xb_1\left(x^2, y\right) = -b,\ -xd_1\left((-x)^2, y\right) = -xd_1\left(x^2, y\right) = -d;$$

$$a\left((-x)^2, y\right) = a\left((x)^2, y\right) = a, c\left((-x)^2, y\right) = c\left((x)^2, y\right) = c.$$

Отсюда и из (5.4) получим:

$$R_1(x, y) = \frac{a+b}{c+d} = R_1(-x, y) = \frac{a-b}{c-d},$$

то есть при всех x, y $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a-b}{c-d}$.

Тогда по лемме либо $R_1(x, y) = \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a(x^2, y)}{c(x^2, y)} = R_2(x^2, y)$, либо $R_1(x, y) = \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{xb_1(x^2, y)}{xd_1(x^2, y)} = \dfrac{b_1(x^2, y)}{d_1(x^2, y)} = R_3(x^2, y)$.

Здесь мы использовали формулы (5.6) и (5.7). Теорема доказана.

Похожий результат верен для рациональных функций, четных по обоим аргументам сразу.

Теорема 5.13. Пусть рациональная функция от двух переменных

$$R(x, y) = R(-x, -y). \tag{5.8}$$

Тогда

$$R(x, y) = R_1\left(x^2, y / x\right),$$

где $R_1(x, y)$ — другая рациональная функция.

Доказательство. Имеем $R(x, y) = S_n(x, y) / Q_m(x, y)$. При подстановке $x = -x$, $y = -y$ члены в числителе и знаменателе общей нечетной степени меняют знак, члены общей четной степени на меняют. Обозначим сумму членов, имеющих четную сумму степеней вместе по x и y в числителе через $a = a(x, y)$, нечетную — через $b = b(x, y)$, а в знаменателе четную — через $c = c(x, y)$, нечетную — через $d = d(x, y)$. Получим из (5.8) $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a-b}{c-d}$. Отсюда по лемме либо $R_1(x, y) = \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c}$ (это отношение членов с четной суммой степеней по x и y), либо $R_1(x, y) = \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d}$ (это отношение членов с нечетной суммой степеней по x и y). Иными словами, $R(x, y) = S_n(x, y) / Q_m(x, y)$ и многочлены в числителе и знаменателе содержат только члены с четной суммой степеней по x и y или только с нечетной суммой степеней по x и y. Посчитаем, чему равно отношение двух одночленов с четной или нечетной суммой степеней по x и y:

$$\frac{x^k y^l}{x^m y^n} = \frac{y^{l-n}}{x^{m-k}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{l-n} \cdot \frac{1}{x^{m-k-l+n}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{f} \cdot x^{2s},$$

так как $k + l$ и $m + n$ имеют одинаковую четность; т.е. получилась рациональная функция от y/x и x^2.

Теперь, вынося их старшие члены в числителе и знаменателе, получим отношение старших членов, умноженное на сумму рациональных функций от y/x и x^2, как в числителе, так и в знаменателе. Поскольку вынесенное отношение имеет тот же вид, это же можно сказать обо всей нашей рациональной дроби $R(x, y) = R_1(x^2, y / x)$.

Теорема 5.14. Рассмотрим интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$:

1) если $R(-x, y) = -R(x, y)$, то делаем замену $y = \cos x$;

2) если $R(x, -y) = -R(x, y)$, то делаем замену $y = \sin x$;

3) если $R(-x, -y) = R(x, y)$, то делаем замену $y = \operatorname{tg} x$ или $y = \operatorname{ctg} x$.

Все эти замены сводят интеграл к интегрированию рациональной дроби от y.

Доказательство

1. В этом случае по теореме 5.12 $R(x, y) = xR_1(x^2, y)$, где $R_1(x^2, y)$ — рациональная функция от x^2, y. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x)dx =$$
$$= -\int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)d(\cos x),$$

и при замене $y = \cos x$ все сводится к интегрированию рациональной дроби.

2. Доказывается аналогично п. 1 с переменой местами x и y.

3. Если $R(-x, -y) = R(x, y)$, то по теореме 5.13 $R(x, y) = R_1(x^2, y / x)$. При подстановке $x = \cos x$, $\underline{y} = \sin x$, $y/x = \operatorname{tg} x$, $x^2 = \cos^2 x = 1 / (\operatorname{tg}^2 x + 1), R(\sin x, \cos x) = \overline{R}(\cos x, \sin x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_1(\operatorname{tg} x)$ рационально выражается через $\operatorname{tg} x$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\operatorname{tg} x)dx = \int R_1(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}dx =$$

$$= \int R_1(\operatorname{tg} x)\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)}d\operatorname{tg} x = \{\operatorname{tg} x = y\} = \int R_1(y)\frac{1}{(1+y^2)}dy,$$

а это интеграл от рациональной функции.

Замечание. Для удобства дальнейшего интегрирования можно вместо $\operatorname{tg}x$ использовать $\operatorname{ctg}x$.

Пример: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ при целых n и m. Если n — нечетное, то берется по п. 1 теоремы 5.14 с заменой $y = \cos x$. Если m — нечетное, то берется по п. 2 теоремы 5.14 с заменой $y = \sin x$. Если оба n, m — четные, то берется по п. 3 теоремы 5.14 заменой $y = \operatorname{tg}x$ или $y = \operatorname{ctg}x$.

Рассмотрим конкретный пример:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \begin{cases} n = -1 - \text{нечетное} \\ y = \cos x \end{cases} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C = \ln \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \{n, m - \text{четные, } y = \operatorname{ctg} x\} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)} \right) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int 1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} d \operatorname{ctg} x =$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + C = -\operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2} - x + C_1 = -\operatorname{ctg} x - x + C_2.$$

Если рациональная дробь не удовлетворяет условиям теоремы 5.14, то применяется следующая универсальная замена переменного.

Теорема 5.15 (универсальная тригонометрическая подстановка). Рассмотрим интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Заменой $y = \operatorname{tg}(x/2)$ он сводится к интегрированию рациональной дроби от y.

Доказательство. Действительно, сделаем эту замену: $y = \operatorname{tg}(x/2)$, $x = 2\operatorname{arctg}(y)$, $dx = 2/(1 + y^2)dy$, $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2) \times \cos^2(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2) \cdot 1/(1/\cos^2(x/2)) = 2\operatorname{tg}(x/2) \cdot 1/(\operatorname{tg}^2(x/2) + 1) = 2y/(y^2 + 1)$, $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos^2(x/2)\,(1 - \operatorname{tg}^2(x/2)) = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2)) / (1/\cos^2(x/2)) = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2)) / (1 + \operatorname{tg}^2 \times (x/2)) = (1 - y^2) / (1 + y^2)$. Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2dy}{\left(1+y^2\right)} = \int R_1(y)dy.$$

Замечание. Эта подстановка всегда дает результат, но может сводиться к очень громоздким дробям, поэтому если можно, то лучше обойтись без нее.

Пример: $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x}$. Подстановки теоремы 5.14 здесь неприменимы, поэтому делаем универсальную подстановку. При этом не рекомендуем подставлять полученные формулы замены, а лучше, пользуясь тригонометрией, подвести $\operatorname{tg}(x/2)$ под дифференциал и остальную часть также выразить через $\operatorname{tg}(x/2)$. Тогда замена $y = \operatorname{tg}(x/2)$ осуществляется просто. При подведении следует иметь в виду, что $d(\operatorname{tg}(x/2)) = dx/(2\cos^2(x/2))$.

Итак,

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x} = \int \frac{dx}{\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)} \overset{\substack{\text{Выносим} \\ \text{в знаменатель} \\ \cos^2\frac{x}{2}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Выносим} \\ \text{в знаменатель} \\ \cos^2\frac{x}{2}}}{=} \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\int \frac{dy}{-\left(y^2 - 2y - 1\right)} = 2\int \frac{dy}{-(y-1)^2 + 2} =$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y - 1 + \sqrt{2}}{y - 1 - \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}\right| + C.$$

Последний из рассматриваемых способов интегрирования тригонометрических выражений — интегрирование комбинации функций с разными аргументами. Используем здесь формулы:

$$\sin a \cos b = \left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right) / 2;$$

$$\sin a \sin b = \left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) / 2;$$

$$\cos a \cdot \cos b = (\cos(a+b) + \cos(a-b)) / 2$$

Примеры

$$1. \int \sin x \cos 3x + 3\sin 3x \sin 5x - \cos 2x \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int -\sin 2x + \sin 4x - 3\cos 8x + 3\cos 2x - \cos 6x - \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int -\sin 2x + \sin 4x - 3\cos 8x - \cos 6x + 2\cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{3}{16}\sin 8x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

$$2. \int \cos 5x \sin x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(x+5x) + \sin(x-5x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 6x - \sin 4x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x\right) + C.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое первообразная функции и неопределенный интеграл от нее?
2. Расскажите о методе подведения под дифференциал. Приведите пример.
3. Расскажите о методе замены переменной. Приведите пример.
4. Расскажите о методе интегрирования по частям. Приведите пример.
5. Расскажите об интегрировании рациональных дробей. Приведите пример.
6. Какие методы интегрировании тригонометрических выражений вы знаете?

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2e^{3y}}{5e^{5y} - 4}\left(\sin 3x \sin 5x + \frac{3}{2x^2+7} - \sqrt{\frac{3}{2x^2-7}}\right).$$

2. Вычислите неопределенные интегралы, указав применяемые методы интегрирования:

$$\int \frac{xdx}{\sin^2(3x^2-1)}, \ \int \frac{x+1}{\sqrt{2x+3}}dx, \ \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx, \ \int \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}dx.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\sqrt{y}e^{3y}}{5e^{3y} - 4\sqrt{y}}\left(\sin(3x+1)\cos 5x + \frac{2x-5}{2x^2-5} - \frac{15}{2\cos^2(4x-1)}\right).$$

4. Вычислите неопределенные интегралы, указав применяемые методы интегрирования:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{10\sin^2 x - 11}}, \int \frac{dx}{\sqrt{12x - 10 - 2x^2}} dx,$$
$$\int \operatorname{arctg} 2x dx, \int \frac{5x^4 - 19x^3 - 26x^2 - 13x - 5}{x^3 - 4x^2 - 5x} dx.$$

Тесты

1. Приведите характерные выражения, для интегрирования которых применяется подведение под дифференциал с возможной последующей заменой переменной (выберите пять примеров):

1) $\int f(x^2)xdx$; 2) $\int f(\cos x)xdx$; 3) $\int f(x)xdx$; 4) $\int f(\cos x)\sin xdx$; 5) $\int f(x^2)e^x dx$; 6) $\int f(\ln x)xdx$; 7) $\int f(e^x)e^x dx$; 8) $\int (f(\ln x) / x)dx$; 9) $\int f(\cos x)e^x dx$; 10) $\int f(\sin x)\cos xdx$.

2. Для каких выражений стоит применять интегрирование по частям? Выберите четыре примера:

1) $\int (\ln x)x^2 dx$; 2) $\int x\cos xdx$; 3) $\int \operatorname{tg} x \ln xdx$; 4) $\int xe^x dx$; 5) $\int \operatorname{tg} xe^x dx$; 6) $\int \cos xe^x dx$; 7) $\int \arcsin xe^x dx$.

3. Можно ли раскладывать на простейшие дроби неправильную рациональную дробь?

1) можно; 2) нельзя.

4. Приведите пример понижения степени при интегрировании тригонометрического выражения:

1) $\int \sin 5xdx$; 2) $\int \cos^2 xdx$; 3) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} dx$.

5. Приведите пример использования тригонометрической формулы преобразования произведения в сумму при интегрировании тригонометрического выражения:

1) $\int \cos 5x \sin xdx$; 2) $\int \cos^2 xdx$; 3) $\int \operatorname{tg} xdx$.

Глава 6
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. ПЛОЩАДЬ ПОД ГРАФИКОМ. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЛОЩАДИ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ЛИНЕЙНОСТЬ. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Напомним, что в геометрии площадь прямоугольника определяется как произведение длин его сторон. Площади треугольника и многоугольника вычисляют по известным формулам. Также легко посчитать площадь конечного объединения многоугольников. Любую ограниченную фигуру пытаемся приближать конечными объединениями многоугольников, входящими в него («снизу») и содержащими его («сверху»).

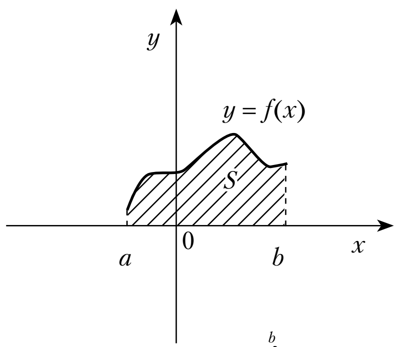
Определение 6.1 (площадь ограниченной фигуры). Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь (квадрируема), если верхняя грань площадей принадлежащих ей конечных объединений прямоугольников с параллельными осям сторонами совпадает с нижней гранью площадей содержащих ее конечных объединений прямоугольников с параллельными осям сторонами. Это общее значение верхней и нижней граней и называется площадью фигуры (иными словами, приближаем фигуру конечными объединениями таких прямоугольников изнутри и снаружи. Если такие приближения дают по площади одинаковый результат, то считается, что он равен площади фигуры; сли нет, то фигура неквадрируема).

Замечание 1. Площадь обладает естественными свойствами: площадь конечного объединения непересекающихся квадрируемых множеств равна сумме их площадей.

Замечание 2. Не всякая ограниченная фигура имеет площадь. Из применения определения 6.1 было получено, что фигура между осью OX и графиком неотрицательной непрерывной на отрезке функции имеет площадь (не доказываем).

Пример. Круг квадрируем, его площадь вычислена с помощью приближения его многоугольниками, которые квадрируемы, сверху и снизу.

Определение 6.2 (определенный интеграл). Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ (рис. 6.1). Тогда определенным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется площадь между отрезком $[a, b]$ и графиком функции, если она существует. Определенный интеграл обозначается как $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если функция $f(x)$ меняет знак на $[a,\ b]$, то $f(x) = f^+(x) - f(x)^-$, где $f^+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$, $f^-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$ (рис. 6.2) и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f^+(x)dx - \int\limits_a^b f^-(x)dx$, если существуют оба интеграла. Это есть разность площади под $f^+(x)$ и над $f^-(x)$ (рис. 6.3). Если для функции существует интеграл по отрезку, то она называется интегрируемой на этом отрезке.



$f(x) \geq 0, \int\limits_a^b f(x)dx = S$

Рис. 6.1

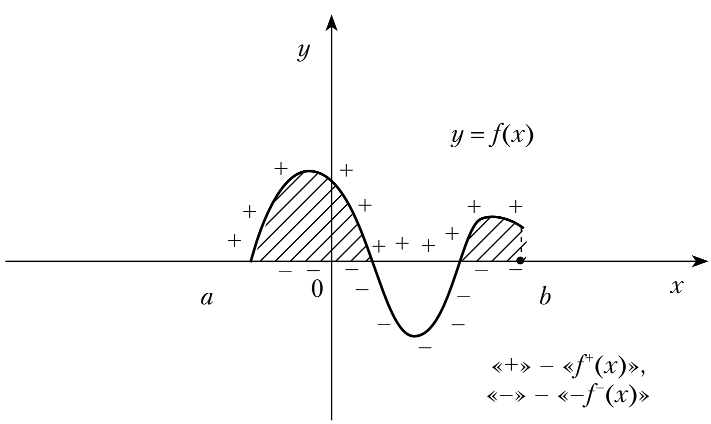
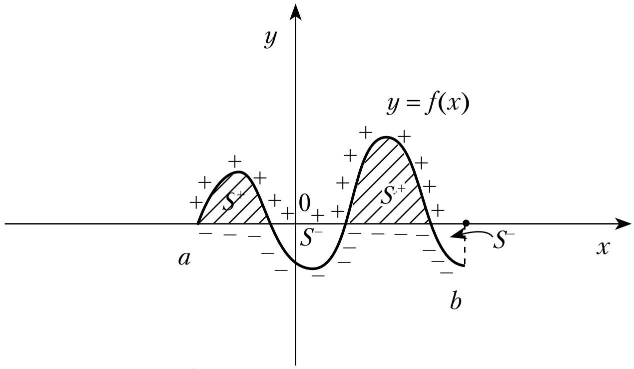


Рис. 6.2



$$\int_a^b f(x)dx = S^+ - S^-$$

Рис. 6.3

Замечание 1. Определенный интеграл существует не для всякой функции, так как не всякая фигура имеет площадь (пример позже будет приведен).

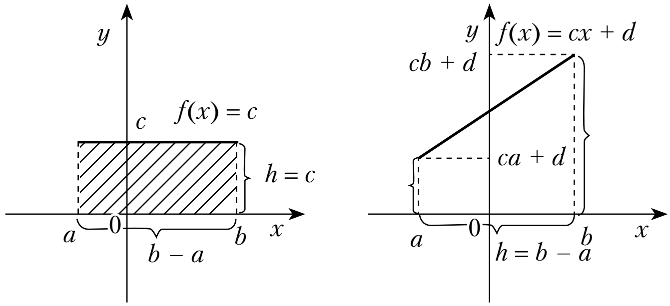
Замечание 2. Если изменить интегрируемую функцию на отрезке в конечном числе точек, то получится интегрируемая функция с тем же значением интеграла. Здесь фигуры под графиками изменятся на конечное число вертикальных отрезков, имеющих площадь 0. Поэтому общая площадь не изменится.

Замечание 3. Если $f(x) \geq 0$, то определенный интеграл равен площади под графиком, которая больше либо равна нулю. Значит, при $b \geq a$ для $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Пример 1 (рис. 6.4). Если $f(x) = C$ — константа, то $\int_a^b f(x)dx = C(b-a)$. Здесь площадь под графиком или над графиком — прямоугольник, и его площадь — произведение основания на высоту.

Пример 2 (см. рис. 6.4) при $cx + d \geq 0$ на $[a, b]$ $\int(cx+d)dx =$ $= (ca + d + cb + d)(b-a) / 2 = d(b-a) + \dfrac{c(b^2 - a^2)}{2}$. Искомая площадь здесь — площадь трапеции.

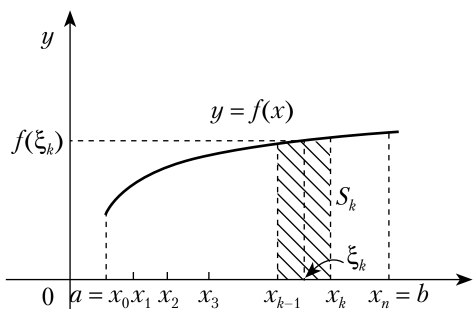
Рассмотрим для примера, как раньше считали площадь под графиком неотрицательной функции (при этом получим формулу для определенного интеграла).



$$S = \int_a^b c\,dx = c(b-a) \qquad S = \frac{ca+d+cb+d}{2}(b-a) = \int_a^b (cx+d)\,dx$$

Рис. 6.4

Пример 3 (вычисление площади под графиком, формула для определенного интеграла). Пусть дана непрерывная $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ (рис. 6.5).



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\text{Точно } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max\limits_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Рис. 6.5

Поскольку функция непрерывна, на очень маленьких отрезках ее можно считать постоянной, и результат будет тем точнее, тем меньше эти отрезки. Поэтому разобьем отрезок $[a, b]$ на n кусочков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

В точках деления проведем вертикальные прямые, делящие площадь под графиком на n частей. Если отрезки разбиения маленькие, то значение функции ни куске $[x_{k-1}, x_k]$ можно считать равным $f(\xi_k)$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — любая точка, $k = 1, 2, \ldots, n$. Площадь кусочка будет примерно равна площади прямоугольника, которая равна $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Общая площадь приблизительно равна их сумме $\sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Эта площадь вычислена тем точнее, чем меньше максимальная длина отрезков разбиения: $\max\limits_{k=1,2,n}(x_k - x_{k-1}) = d$. Поэтому естественно считать, что площадь под графиком равна $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d \to 0} \sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Замечание. Известно, что площадь под графиком непрерывной неотрицательной на отрезке функции всегда существует, а значит, непрерывная неотрицательная функция интегрируема на отрезке.

Для непрерывной знакопеременной функции $f^+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$, $f^-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$ также непрерывны и интегрируемы на отрезке, значит, она тоже интегрируема.

Итак, ***первое достаточное условие интегрируемости*** — это непрерывность функции на отрезке.

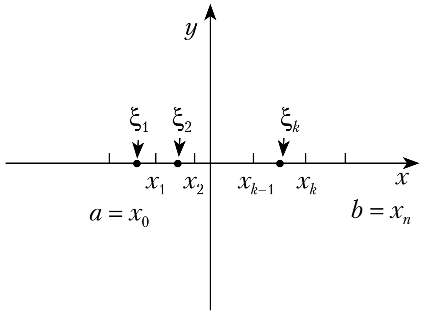
Дадим некоторые определения и приведем формулу для вычисления определенного интеграла.

Определение 6.3 (разбиения отрезка, диаметра разбиения, размеченного разбиения). Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n кусочков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Тогда говорим, что задано ***разбиение T*** отрезка $[a, b]$ T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

При этом число $d(T) = \max\limits_{k=1,2,n}(x_k - x_{k-1})$ называется диаметром разбиения T. Разбиение T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ называется ***размеченным***, если на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выбрана любая точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 6.6).

Определение 6.4 (интегральной суммы). Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — размеченное разбиение отрезка. Тогда сумма $S(f, T) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ называется ***интегральной суммой*** от $f(x)$ по разбиению T.

Теорема 6.1 (формула для определенного интеграла). Определенный интеграл от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ вычисляется как предел интегральных сумм при диаметре разбиения $d(T)$, стремящемся к нулю, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d(T) \to 0} \sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.



Размеченное разбиение отрезка $[a, b]$
$T: x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
$k = 1, 2, ..., n$

Рис. 6.6

Пояснения к доказательству (нестрого). Из определения площади как предела площадей объединений вписанных или описанных прямоугольников с параллельными осям сторонами, если эти пределы совпадают, можно вывести существование этого предела для неотрицательной интегрируемой функции. Кроме того, он будет равен площади под графиком, а значит и определенному интегралу от функции. Следовательно, для интегрируемой функции $f(x)$ будет: $\int\limits_a^b f^+(x)dx = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_1^n f^+(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$; $\int\limits_a^b f^-(x)dx = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_1^n f^-(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

По определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f^+(x)dx - \int\limits_a^b f^-(x)dx \overset{\text{Свойства пределов}}{=}$$

$$\overset{\text{Свойства пределов}}{=} \lim_{d(T)\to 0}\sum_1^n \left(f^+(\xi_k) - f^-(\xi_k)\right)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lim_{d(T)\to 0}\sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Формула получена.

Замечание 1. Понимать приведенный в определении предел надо так, что что существует число $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ такое, что $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall$ размеченного разбиения T при $d(T) < \delta$ будет $|I - S(f,T)| < \varepsilon$ независимо от выбора точек $\xi_k,\ k = 1,\dots,n$.

Замечание 2. В стандартных курсах полученная формула для вычисления определенного интеграла берется за его определение. На самом деле эти определения эквивалентны, но устанавливать это строго мы не будем, хотя будем этим пользоваться. Иными словами, будем считать функцию интегрируемой тогда и только тогда, когда и указанный предел существует.

Приведем свойства определенного интеграла.

Теорема 6.2 (линейность). Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма, а также произведение любой из них на число интегрируемы на этом отрезке, причем $\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx =$ $= \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,\ \int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx.$ Доказательство сводится к применению формулы для вычисления интеграла для суммы и для произведения на число и свойству линейности пределов.

Следствие. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ее модуль там интегрируем. По определению через площадь вместе с $f(x)$ интегрируемы $f^+(x) = \dfrac{f(x) + |f(x)|}{2},\ f^-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Тогда $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ интегрируема как сумма интегрируемых функций.

Теперь мы можем привести пример неинтегрируемой функции.

Пример (неинтегрируемой функции). Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ — рациональное} \\ -1, x \text{ — иррациональное,} \end{cases} \quad x \in [a,b],\ a \neq b.$$

Тогда для любого разбиения отрезка T: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,\dots,n$ для всех рациональных ξ_k будет $f(\xi_k) = 1$, $\sum\limits_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_1^n (x_k - x_{k-1}) = b - a > 0$. Для всех иррациональных ξ_k будет $f(\xi_k) = -1$ $\sum\limits_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_1^n -(x_k - x_{k-1}) =$ $= a - b \neq b - a$.

Поэтому построенная функция не интегрируема. Заметим, что при этом $|f(x)| = 1$ — интегрируем. Значит, из интегрируемости модуля функции не следует ее интегрируемость, хотя обратное верно!

Теорема 6.3 (интегрирование неравенств). Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть $f(x) = 0$, $g(x) \ge 0$. Тогда по замечанию 3 к определению 6.2 интеграла от неотрицательной функции $\int_a^b g(x)dx \ge 0$. Неравенство верно. В силу интегрируемости $g(x) - f(x) \ge 0$, $\int_a^b g(x) - f(x)dx \ge 0$. Отсюда из-за линейности интеграла $0 \le \int_a^b g(x) - f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$. Значит, $\int_a^b f(x)dx \le$ $\le \int_a^b g(x)dx$, что и требовалось доказать.

Следствие 1 (теорема об оценке). Если $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$ и $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le$ $\le M(b-a)$. Действительно, $m \le f(x) \le M$. Интегрируя двойное неравенство, получим $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, что и требовалось доказать.

Следствие 2 (теорема о модульной оценке). Если и $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Действительно, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, $x \in [a, b]$ и $|f(x)|$ — интегрируема.

По теореме об интегрировании неравенств $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le$ $\le \int_a^b |f(x)dx|$, т.е. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 6.4 (о среднем). Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка c на $[a, b]$ такая, что $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса на отрезке имеет место оценка: $m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M \;\; \forall\, x \in [a, b]$, x_1, x_2 — фиксированные точки $[a, b]$.

Тогда областью значений функции на отрезке будет по теореме Коши $f([a,b]) = [m, M]$. Это значит, что любое значение из $[m, M]$ принимается функцией на $[a, b]$. По теореме об оценке интеграла имеем $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда $m \le \dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = C \le M$.

Значение C принадлежит отрезку $[m, M]$ и по сказанному выше принимается функцией на $[a, b]$ в какой-то точке c. Это значит, что

$$f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Замечание. Это можно записать в форме $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ и для неотрицательной функции слева стоит площадь под графиком, справа — площадь прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$ (рис. 6.7).

Теорема говорит, что эти площади равны.

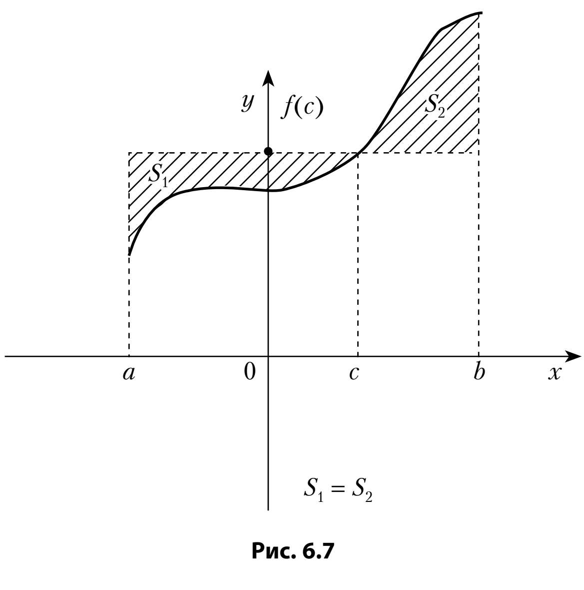


Рис. 6.7

Для не непрерывной функции это не верно! (Придумайте пример.)

Теорема 6.5 (достаточное условие существования определенного интеграла). Для непрерывной на отрезке функции существует интеграл по этому отрезку (без строгого доказательства. Пояснено в примере вычисления площади).

Приведем теперь необходимое условие существования определенного интеграла.

Теорема 6.6 (необходимое условие интегрируемости). Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ не ограничена. Тогда ее модуль не ограничен сверху и интегрируем. Поэтому мы можем предполагать, что функция $f(x)$ не ограничена сверху (вместо нее можно взять ее модуль). Поэтому для любого натурального $n > 0$ существует точка отрезка x_n, в которой $f(x_n) > n$. Поэтому при $n \to \infty$ $f(x_n)$ стремится к $+\infty$ и всякая ее подпоследовательность имеет предел плюс бесконечность. Возьмем любое размеченное разбиение отрезка. Выделим один из его отрезков, содержащий бесконечное число точек последовательности, — подпоследовательность x_{nk}. Тогда, фиксируя разметку всех других отрезков и выбирая в выделенном отрезке в качестве точек разметки лежащие там точки подпоследовательности, можно получить интегральные суммы, стремящиеся к бесконечности. Это противоречит тому, что было взято любое разбиение на отрезки, например такое, на котором суммы отличалась бы от интеграла, если бы он существовал, менее чем на единицу и были бы ограничены. Это доказывает теорему.

Рассмотрим другие свойства определенного интеграла.

6.2. АДДИТИВНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ОТРЕЗКУ [*a*, *b*], *a* > *b*. СОХРАНЕНИЕ АДДИТИВНОСТИ

Теорема 6.7 (аддитивность). Пусть c — точка внутри $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — неотрицательна. Тогда площадь под ее графиком на $[a, b]$ состоит из площадей под ее графиком на $[a, c]$ и на $[c, b]$, которые пересекаются по отрезку с площадью 0. Обе эти площади существуют одновременно с общей площадью, так как получены разбиением общей площади вертикальной прямой, и по свойству площадей их сумма равна площади под графиком $f(x)$ на $[a, b]$ (рис. 6.8). По определению интеграла, это и значит $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

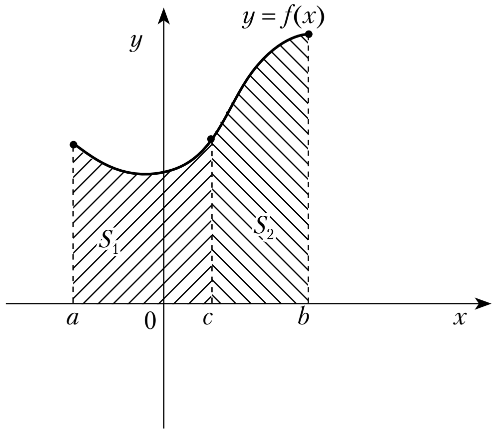
Если $f(x)$ меняет знак, то $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$, каждая из которых неотрицательна. Пользуясь аддитивностью для $f^{+}(x)$ и $f^{-}(x)$ и линейностью, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^{+}(x)dx - \int_a^b f^{-}(x)dx = \int_a^c f^{+}(x)dx + \int_c^b f^{+}(x)dx -$$

$$-\int_a^c f^{-}(x)dx - \int_c^b f^{-}(x)dx = \int_a^c f^{+}(x)dx - \int_a^c f^{-}(x)dx + \int_c^b f^{+}(x)dx -$$

$$-\int_c^b f^{-}(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.



$$\int_a^b f(x)dx = S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Рис. 6.8

Попробуем теперь определить определенный интеграл по «отрезку», у которого левый конец больше правого с сохранением свойства аддитивности. При этом интеграл по «отрезку» с совпадающими концами естественно считать равным нулю (площадь отрезка равна нулю).

Определение 6.5. Положим $\int_a^a f(x)dx = 0$ для любой $f(x)$. Пусть теперь $b < a$, $f(x)$ интегрируема на $[b, a]$. Тогда считаем $f(x)$ интегрируемой на $[a, b]$ и положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Замечание 1. Для обобщенного интеграла тоже верно следствие 2 теоремы 6.3 с заменой интегралов на их модули.

Замечание 2. Для обобщенного интеграла верна теорема 6.4 о среднем в обычной формулировке.

Теорема 6.8. Для такого обобщенного интеграла верна теорема об аддитивности при любом расположении точек a, b, c, если функция интегрируема на самом большом отрезке, т.е. всегда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Если $c = a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^a f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx$, так как $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. Аналогично, если $c = b$. Пусть для определенности $a < b < c$ (остальные случаи рассматриваются аналогично.

По теореме 6.7:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx \overset{\substack{\text{Определение}\\ \text{интеграла}\\ \text{при } b<c}}{=} \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx.$$

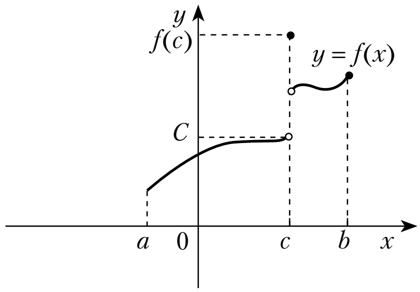
Переносся последнее слагаемое в левую часть и меняя части местами, получим $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

В заключение добавим еще одно достаточное условие интегрируемости, дав предварительное определение.

Определение 6.6 (кусочно-непрерывной функции). Функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она имеет там конечное число точек разрыва 1-го рода.

Теорема 6.9 (достаточное условие интегрируемости). Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Доказательство для одной точки разрыва (для нескольких аналогично) (рис. 6.9). В силу существования односторонних пределов функции в точке разрыва c она будет совпадать, кроме точки c, с непрерывной на $[a, c]$ функцией. Эта непрерывная функция интегрируема, наша функция отличается от нее в одной точке и, в силу замечания 2 к определению 6.2, она также интегрируема на $[a, c]$. Аналогично наша функция интегрируема и на $[c, b]$. В силу аддитивности интеграла функция интегрируема на $[a, b]$.



На $[a, c]$ доопределяем $f(x)$ до непрерывной значением C в точке c

Рис. 6.9

6.3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И ФОРМУЛА ДЛЯ НЕЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА. ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Займемся теперь изучением функций, получающихся с помощью использования определенных интегралов, а именно будем изучать свойства функции $F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)d\xi$, где $f(x)$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция. Как в теореме об аддитивности, получаем, что эта функция определена на $[a, b]$. В следующих теоремах мы изучим свойства этой функции в зависимости от свойств $f(x)$. При этом мы сохраним введенные обозначения в следующих трех теоремах, а переменное x будем интерпретировать как верхний предел в согласии с общепринятым изложением.

Теорема 6.10 (непрерывность определенного интеграла по верхнему пределу). Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция $F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)d\xi$. Тогда $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Функция $f(x)$ интегрируема и, значит, ограничена по необходимому условию интегрируемости (см. теорему 6.6), т.е. $|f(x)| \le M,\ x \in [a,b]$.

Пусть $x_0 \in [a,b]$. Тогда:

$$F(x) - F(x_0) \overset{\text{Определение}}{=} \int\limits_a^x f(x)dx - \int\limits_a^{x_0} f(x)dx \overset{\text{Аддитивность}}{=} \int\limits_{x_0}^x f(x)dx.$$

По теореме об интегрировании неравенств для обобщенного интеграла (см. замечание 1 к определению 6.5) получим:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right| \le M|x - x_0| \to 0 \text{ при } x \to x_0.$$

Иными словами, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, предел вычисляется подстановкой, а это и есть непрерывность $F(x)$ в любой точке отрезка x_0.

Теорема 6.11 (дифференцируемость определенного интеграла по верхнему пределу, существование первообразной для непрерывной функции). Пусть $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$, функция $F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)d\xi$. Тогда $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Замечание. На концах имеется в виду односторонняя дифференцируемость, т.е. существование односторонней касательной и, соответственно, односторонних пределов в формуле для вычисления производной.

Доказательство. Пусть x_0 принадлежит $[a, b]$. Тогда приращение:

$$F(x) - F(x_0) \overset{\text{Определение}}{=} \int_a^x f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx \overset{\text{Аддитивность}}{=} \int_{x_0}^{x} f(x)dx \overset{\substack{\text{Теорема}\\ \text{о среднем}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Теорема}\\ \text{о среднем}}}{=} f(c)(x - x_0),$$

где c принадлежит отрезку с концами x и x_0. Поэтому при x, стремящемся к x_0 точка c стремится к x_0, а $f(c)$ стремится к $f(x_0)$ из-за непрерывности. Отсюда:

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(c)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c) = f(x_0).$$

Следствие. По определению первообразной мы таким образом нашли первообразную $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$. Следствием из этой теоремы будет формула Ньютона — Лейбница.

Теорема 6.12 (формула Ньютона — Лейбница). Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и любой ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке имеет место формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Рассмотрим полученную в теореме 6.11 первообразную для $f(x)$ $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$. Для нее:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^a f(x)dx \overset{\text{Второй интеграл}=0}{=} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Для этой первообразной формула верна. По свойству первообразных для другой первообразной $F(x)$ имеем

$$F(x) = \Phi(x) + C,\ F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Формула тоже верна.

Пример:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Доказанные теоремы помогут нам обосновать следующие методы интегрирования.

Теорема 6.13 (замена переменной в определенном интеграле). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $\varphi(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и имеет там непрерывную производную, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда $f(\varphi(t))$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Сложная функция непрерывна на $[\alpha, \beta]$ как суперпозиция непрерывных и по достаточному условию интегрируема на этом отрезке. В силу непрерывности подынтегральных функций в обоих интегралах они имеют первообразные. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. По теореме о замене переменной в неопределенном интеграле $F(\varphi(t))$ будет первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Отсюда по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\substack{\text{По условию}\\ \text{теоремы}}}{=} F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)) \overset{\substack{\text{Формула}\\ \text{Ньютона —}\\ \text{Лейбница}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Формула}\\ \text{Ньютона —}\\ \text{Лейбница}}}{=} \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\varphi'(t)dt.$$

Теорема доказана.

Пример:

$$\int_{-a/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\{x=a\sin t,-a/2=a\sin(-\pi/6)=$$

$$=x(-\pi/6),a=a\sin(\pi/2)=x(\pi/2),x'(t)=a\cos t\}=$$

$$=\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=\int_{-\pi/6}^{\pi/2}a^2\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/2}1+\cos 2t dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(2\pi/3-1/2\sin(-\pi/3)\right)=\frac{a^2}{2}\left(2\pi/3+\sqrt{3}/4\right)=\frac{a^2}{24}\left(8\pi+3\sqrt{3}\right).$$

Теорема 6.14 (интегрирование по частям). Пусть $u(x)$, $v(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и имеют там непрерывные производные. Тогда верна формула $\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$.

Замечание. Значок подстановки означает $f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$.

Доказательство. Имеем по определению дифференциала и по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=\int_a^b u(x)v'(x)dx=U(x)\Big|_a^b;$$

$$\int_a^b v(x)du(x)=\int_a^b v(x)u'(x)dx=V(x)\Big|_a^b,$$

где $U(x)$, $V(x)$ — соответствующие первообразные, которые существуют из-за непрерывности подынтегральных функций для обоих интегралов и для них также верна формула Ньютона — Лейбница.

Применим теперь формулу интегрирования по частям для неопределенных интегралов:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Для первообразных это значит, что $u(x)v(x)-V(x)$ есть первообразная для $\int udv$ и поэтому отличается от $U(x)$ на константу, т.е. $U(x)=u(x)v(x)-V(x)+C$.

Подставляя в исходную формулу, получим:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = U(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - V(x)\Big|_a^b + C - C =$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Обычно применяют формулу интегрирования по частям к интегралу от произведения в случае, если один множитель существенно упрощается при дифференцировании, а другой не очень усложняется при интегрировании. Функциями, упрощающимися при дифференцировании, являются, например, $\ln(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\arcsin(x)$, x^n при натуральном n.

Пример:

$$\int_1^2 \ln x \cdot x^2 dx = \left\{ \begin{matrix} \text{по частям} \\ u(x) = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv(x) = x^2dx,\ v(x) = x^3\ /\ 3 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \ln x \cdot x^3\ /\ 3\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^3}{x}dx = \ln 2 \cdot 8/3 - \frac{x^3}{9}\Bigg|_1^2 = \frac{8\ln 2}{3} - \frac{7}{9}.$$

6.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ДЛИНА ДУГИ. ПЛОЩАДЬ МЕЖДУ ГРАФИКАМИ. ОБЪЕМ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ

Определенные интегралы имеют огромное количество приложений в физике и других науках. Остановимся здесь на некоторых геометрических приложениях. Напомним одно определение.

Определение 6.7 (параметрически заданная функция). Говорят, что функция задана параметрически, если зависимость $y(x)$ задана двумя соотношениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [a,b], \end{cases}$$

причем $\exists$ обратная функция $t = t(x),\ x \in [c,d]$.

Замечание 1. В силу условия существования обратной функции получаем $y = y(t(x))$, $x \in [c,d]$. Это явная функция $y(x)$ от аргумента x.

Определение 6.8 (виды параметрически заданных функций). Параметрически заданная функция

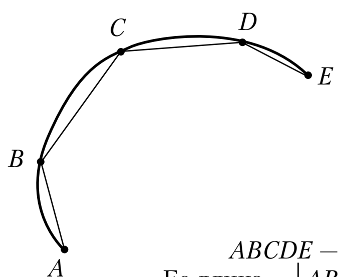
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [a, b] \end{cases}$$

называется ***непрерывной***, если непрерывны $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$, и ***гладкой***, если существуют непрерывные $x'(t) \neq 0$, $y'(t)$ на этом отрезке.

Замечание. По известным теоремам о непрерывности и дифференцируемости сложной функции для непрерывной параметрически заданной функции получим непрерывную на отрезке $[c, d]$ функцию $y(t(x))$, для гладкой — дифференцируемую, причем по теоремам о дифференцируемости обратной и сложной функции $t'(x) = \dfrac{1}{x'(t)}$, $y(t(x))' = y'(t)t'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Наряду с параметрически заданными функциями можно рассматривать параметрически заданные кривые, определяемые теми же формулами, но без условия существования обратной функции для $x(t)$. Аналогично они бывают непрерывные и гладкие.

Определение 6.9. Под длиной дуги кривой мы понимаем предел длин вписанных конечнозвенных ломаных при максимальной длине звеньев, стремящейся к нулю (рис. 6.10).



$ABCDE$ — вписанная ломаная.
Ее длина $= |AB| + |BC| + |CD| + |DE|$.
Максимальная длина звеньев — $|BC|$

Рис. 6.10

Теорема 6.15 (длина дуги кривой). Пусть параметрически задана гладкая кривая

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [a, b]. \end{cases}$$

Тогда ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Доказательство (рис. 6.11). Возьмем любое разбиение T': $a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$, $A_k = (x_k, y_k)$ — точки кривой, $k = 0, \ldots, n$, $A_0A_1 \ldots A_kA_{k+1} \ldots A_n$ — вписанная ломаная. Тогда по теореме Пифагора длина ее звена A_kA_{k+1} в квадрате равна:

$$l_k^2 = \Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 \overset{\substack{\text{Формула} \\ \text{линеаризации}}}{\approx} x'\left(t_k\right)^2 \Delta t_k^2 + y'\left(t_k\right)^2 \Delta t_k^2 = \left(x'\left(t_k\right)^2 + y'\left(t_k\right)^2\right)\Delta t_k^2.$$

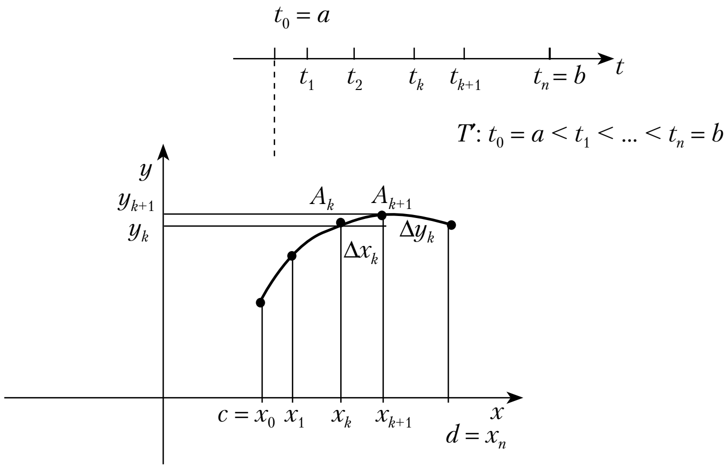
Из-за непрерывности на отрезке на нем $|x'(t)|, |y'(t)| \le M$ — ограничены, отсюда

$$l_k^2 = \Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 \overset{\substack{\text{Формула} \\ \text{линеаризации}}}{\approx} x'\left(t_k\right)^2 \Delta t_k^2 + y'\left(t_k\right)^2 \Delta t_k^2 = \left(x'\left(t_k\right)^2 + y'\left(t_k\right)^2\right)\Delta t_k^2;$$

$$l_k \approx \sqrt{x'\left(t_k\right)^2 + y'\left(t_k\right)^2}\,\Delta t_k \le \sqrt{2} M \Delta t_k \le \sqrt{2} M d\left(T'\right) \to 0 \text{ при } d\left(T'\right) \to 0.$$

Иными словами, максимальная длина звеньев ломаной тоже стремится к нулю при $d(T') \to 0$.

Длина всей ломаной равна $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2}\,\Delta t_k = S(f(t), T')$ — есть интегральная сумма по разбиению T' от непрерывной и интегрируемой функции $f(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Поэтому при стремящемся к нулю $d(T')$ максимальная длина звеньев ломаной стремится к нулю, и ее длина стремится к длине кривой. При этом равная длине ломаной интегральная сумма стремится к интегралу от $f(t)$. Поэтому длина кривой $l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.



$$\begin{cases} x = x(t) & t \in [a,\ b] \\ y = y(t) & t = t(x),\ x \in [c,\ d] \end{cases}$$

$$T\colon\ x_0 = c < x_1 < ... < x_n = d$$

$$y_k = y(t_k),\ x_k = x_k(t_k),\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ ...,\ \ n$$

Рис. 6.11

Следствие. Длина дуги графика дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ равна $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$. Получаем из предыдущего результата, беря естественную параметризацию графика:

$$\begin{cases} \qquad x = x, \\ y = f(x),\ x \in [a, b]. \end{cases}$$

Примеры

1. Окружность радиуса 1 с центром (0, 0) можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

По теореме 6.15 длина окружности единичного радиуса равна $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = 2\pi$.

2. $y = e^x$, $x \in [(\ln 1{,}25)/2,\ (\ln 3)/2]$. По формуле следствия теоремы 6.15:

$$l = \int\limits_{\frac{\ln 1{,}25}{2}}^{\frac{\ln 3}{2}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left\{ \begin{matrix} y = \sqrt{1+e^{2x}},\ y\left(\dfrac{\ln 1{,}25}{2}\right) = 1{,}5,\ y\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = 2, \\ e^{2x} = y^2 - 1,\ dy = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\ln 1{,}25}{2}}^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}} e^{2x}dx = \int\limits_{1{,}5}^{2} \frac{y^2}{y^2-1}dy = \int\limits_{1{,}5}^{2} 1 + \frac{1}{y^2-1}dy =$$

$$= \left(y + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| \right)\Bigg|_{1{,}5}^{2} = 0{,}5 + 0{,}5(-\ln 3 + \ln 5) = 0{,}5\left(1 + \ln\frac{5}{3}\right).$$

Теорема 6.16 (площадь между графиками). Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы, причем $f(x) \le g(x)$ на $[a, b]$. Тогда площадь S между графиками этих функций на отрезке $[a, b]$ равна $S = \int\limits_a^b g(x) - f(x)dx.$

Доказательство. Будучи интегрируемыми на отрезке, обе функции ограничены снизу и можно считать, что одной и той же константой m. Тогда $g(x) - m$ и $f(x) - m$ неотрицательны и площадь между ними тоже будет S (при сдвиге площадь сохраняется). Эта площадь равна разности площади под графиком большей из функций и площади под графиком меньшей из функций (рис. 6.12). Из неотрицательности этих функций следует, что эти площади равны их определенным интегралам. Поэтому

$$S = \int\limits_a^b \big(g(x) - m\big)dx - \int\limits_a^b \big(f(x) - m\big)dx = \int\limits_a^b g(x) - f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найдите площадь между графиками $y = x$, $y = 2x$ и $y = x^2$. Найдем попарные точки пересечения этих кривых. Это (0, 0), (1, 1) и (2, 4). На рис. 6.13 заштрихована площадь, ограниченная всеми тремя кривыми. Она не лежит непосредственно между двумя из них. Поэтому разобьем ее прямой $x = 1$ на две части, которые лежат между x и $2x$ и между x^2 и $2x$. Площадь каждой части посчитаем по формуле теоремы 6.16 и результаты сложим:

$$S = \int_0^1 2x - xdx + \int_1^2 2x - x^2dx = x^2\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x^2\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 =$$

$$= 1 - 1/2 + 4 - 1 - 8/3 + 1/3 = 1\frac{1}{6}.$$

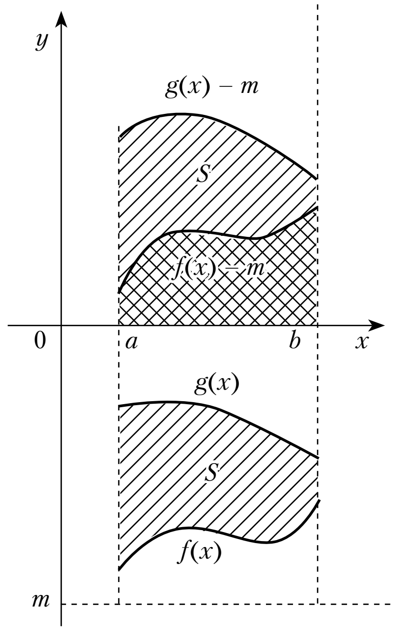


Рис. 6.12

Теорема 6.17 (объем через поперечное сечение). Пусть имеем пространственное тело, имеющее объем, а OX — некоторая прямая (ось) в пространстве, причем наше тело расположено между перпендикулярными OX плоскостями с уравнениями $x = a$ и $x = b$. Пусть сечение нашего тела перпендикулярной OX плоскостью $x = x_0$ имеет площадь $S(x_0)$ и функция $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда объем нашего тела будет $V = \int_a^b S(x)dx.$

Доказательство. Возьмем разбиение отрезка T: $a = x_0 < x_1 < ... < < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$.

Тогда наше тело разобъется перпендикулярными OX плоскостями с уравнениями $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ на n кусков с параллельными основаниями площади $S(x_k)$, перпендикулярными OX (рис. 6.14, *а*). Рассмотрим для k-го куска цилиндрическое тело с образующими, параллельными OX, с равными основаниями площади $S(x_k)$. Это прямой (не круговой) цилиндр с высотой, равной Δx_k и площадью основания $S(x_k)$ (см. рис. 6.14, *б*).

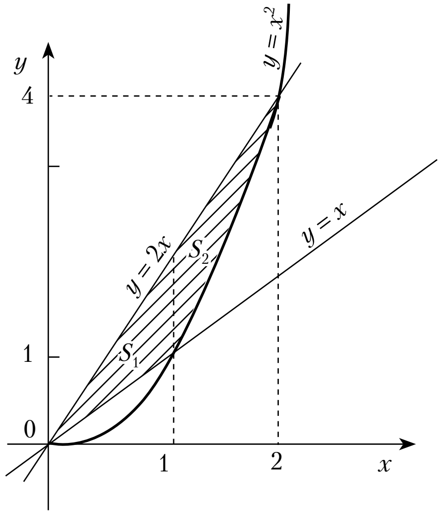


Рис. 6.13

Из геометрии известно, что его объем равен $V_k = S(x_k)\Delta x_k$. Наше тело имеет объем, поэтому объем объединения всех цилиндров будет при измельчении разбиения стремиться к объему всего тела. Но объем объединения есть $\sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} S(x_k)\Delta x_k = S(S(x), T)$, а эта интегральная сумма от $S(x)$ по разбиению T и при $d(T)$, стремящемся к нулю, стремится к интегралу от непрерывной $S(x)$ по отрезку $[a,\ b]$. Поэтому $V = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k = \lim\limits_{d(T)\to 0} S(S(x), T) = \int\limits_a^b S(x)dx$. Формула доказана.

Следствие (объем тела вращения). Пусть пространственное тело получено вращением графика непрерывной функции $y = f(x)$ вокруг оси OX. Известно, что оно имеет объем. Тогда каждое сечение этого тела перпендикулярной оси плоскостью есть круг радиуса $f(x)$ и площадью $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 6.15). Объем тела между плоскостями $x = a$ и $x = b$ есть тогда по полученной формуле $V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

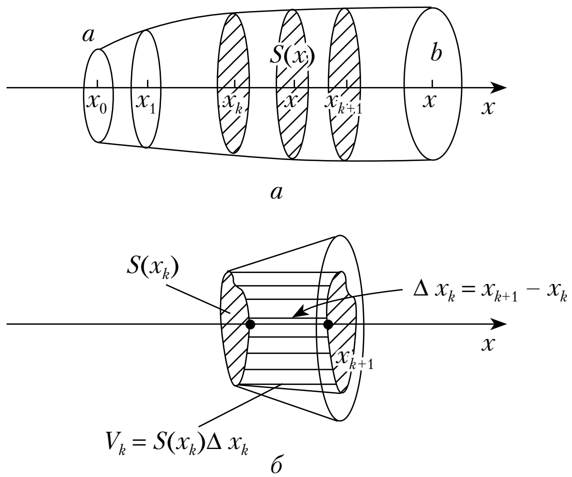


Рис. 6.14

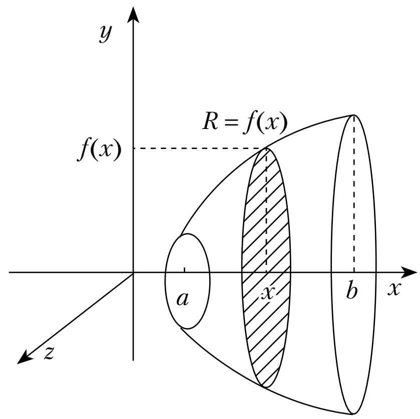


Рис. 6.15

6.5. ПОНЯТИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА ДЛЯ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ОБЛАСТИ

Определение 6.10 (функции двух переменных, графика). Пусть $D \subset R^2$ — множество на плоскости. Говорят, что на множестве D задана функция $f(x, y)$ двух переменных, если каждой ее точке $(x, y) \in D$ однозначно соответствует число $z = f(x, y)$. При этом D называется ***областью определения*** функции.

Графиком этой функции двух переменных называется множество точек в пространстве $\Gamma = \left\{(x, y, f(x, y)),\ \forall\,(x, y) \in D\right\}$.

Замечание. График функции двух переменных зависит от двух координат. Это какая-то «изогнутая плоскость», ее называют поверхностью по аналогии, например, с поверхностью шара, конуса и т.д.

Определение 6.11 (упрощенное, непрерывность функции двух переменных). Если график функции $f(x, y)$ двух переменных на области D представляет собой «неразрывную поверхность без проколов и разрезов», то функция называется непрерывной на области D.

Пример 1 (объем конуса вращения). Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найдем объем конуса $\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$. Этот конус получается вращением графика $y = z$ вокруг оси OZ (рис. 6.16). По следствию из теоремы 6.17 $V = \pi\int\limits_0^1 z^2 dz = \frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

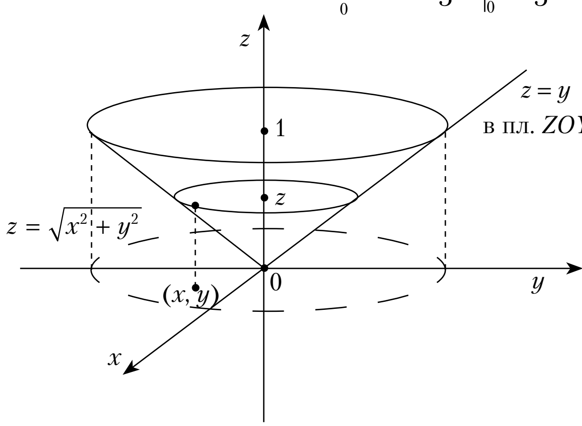


Рис. 6.16

Пример 2. $D = \{(x, y) \in R^2 : \varphi(x) \le y \le \psi(x)\ \ \forall\, x \in [a, b]\}$, где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции.

Пусть $z = f(x, y) \ge 0$ — определенная на D непрерывная функция. Рассмотрим тело в пространстве: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \le z \le f(x, y)\}$ (рис. 6.17). Причем известно, что для непрерывной функции $z = f(x, y)$ тело T всегда имеет объем.

Рассмотрим сечение T плоскостью $x = x_0$ (см. рис. 6.17, 6.18). Это площадь под графиком $z = f(x_0, y)$ над отрезком $[\varphi(x_0), \psi(x_0)]$. Поскольку $f(x_0, y)$ непрерывна вместе с $f(x, y)$ (кривая на неразрывной поверхности не разрывается), эта площадь равна определенному интегралу $S(x_0) = \int\limits_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)dy$. Аналогично $\forall\, x \in [a,b]$ $S(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$. По теореме о вычислении объема по поперечному сечению:

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right).$$

Примечание. При сведении двойного интеграла к повторному для указания порядка интегрирования dx иногда пишется сразу после знака внешнего интеграла перед интегрируемой функцией, как это сделано здесь.

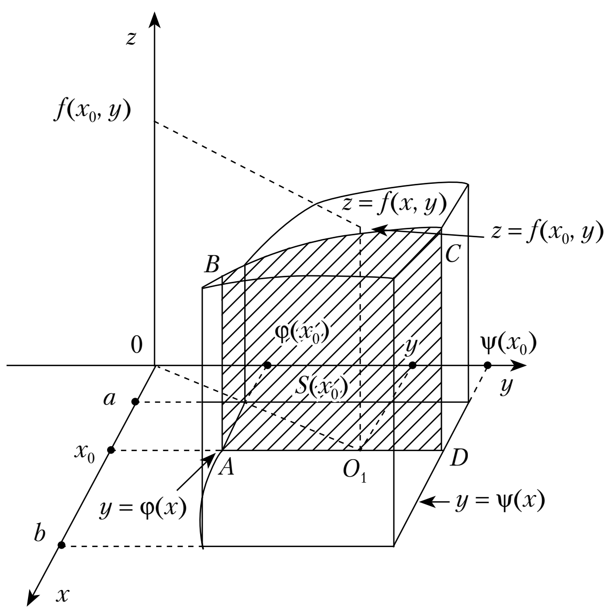
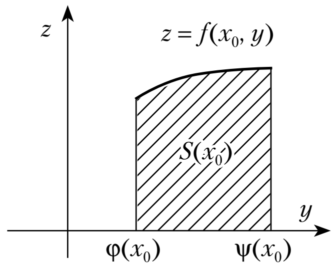


Рис. 6.17

Для ознакомления приведем здесь некоторые общепринятые определения.

Определение 6.12 (двойного интеграла). Пусть $f(x, y) \geq 0$ определена на ограниченном (помещающемся внутри какого-то круга) множестве D, имеющем площадь. Тогда двойным интегралом от $f(x, y) \geq 0$ по D называется объем тела между $D \in XOY$ и графиком

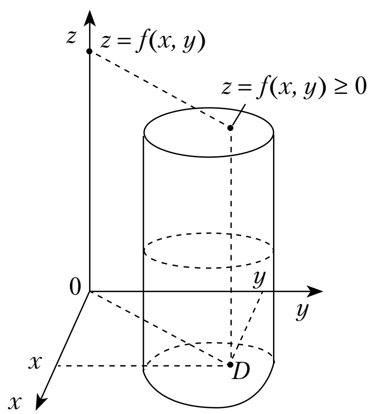
$f(x, y)$: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \le z \le f(x, y)\ \forall\, (x, y) \in D\}$, если этот объем существует. Функция называется тогда интегрируемой.



$$S(x_0) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)dy$$

Рис. 6.18

Двойной интеграл обозначается $\iint\limits_D f(x, y)dxdy =$ объему T (рис. 6.19).



Объем $T = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Рис. 6.19

Для знакопеременной функции аналогично определенному интегралу:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D f^+(x, y)dxdy - \iint\limits_D f^-(x, y)dxdy;$$

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2},\ f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

если оба интеграла в правой части существуют.

Функция $z = f(x, y)$ называется интегрируемой на множестве D, если двойной интеграл от нее по D существует.

Замечание. Аналогично определенному интегралу двойной интеграл обладает линейностью и аддитивностью.

Определение 6.13 (простейшей области). Простейшей областью на плоскости называется множество $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции (рис. 6.20). Примем без доказательства факт, что двойной интеграл по простейшей области от непрерывной на ней функции $f(x, y)$ существует.

Теорема 6.18. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на простейшей области $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции. Тогда

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Доказательство для неотрицательной функции следует из примера 2 к определению 6.11. Для $f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D f^+(x, y)dxdy - \iint_D f^-(x, y)dxdy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^+(x, y)dy \right) dx - \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^-(x,y)dy \right) dx \overset{\substack{\text{Линейность} \\ \text{определенного} \\ \text{интервала}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Линейность} \\ \text{определенного} \\ \text{интервала}}}{=} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^+(x, y)dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^-(x, y)dy \right) dx =$$

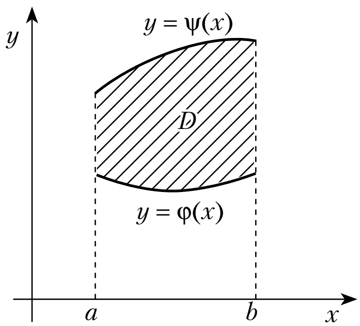
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^+(x, y) - f^-(x, y)dy \right) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Пример. Найдите:

$$\iint\limits_{\left\{\substack{0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1-x}\right\}} 2x^2 y dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_{-1}^{1-x} 2y dy = \int_0^1 x^2 y^2 \Big|_{-1}^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \left((1 - x)^2 - 1 \right) dx = \int_0^1 x^4 - 2x^3 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2-5}{10} = -\frac{3}{10}.$$



Простейшая область

Рис. 6.20

6.6. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 1-ГО РОДА И ЕГО СВОЙСТВА. ИНТЕГРАЛЫ ДИРИХЛЕ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Введем понятие еще одного типа интегралов. Они возникли из попытки вычислять площадь под графиком функции, определенной на полуоси.

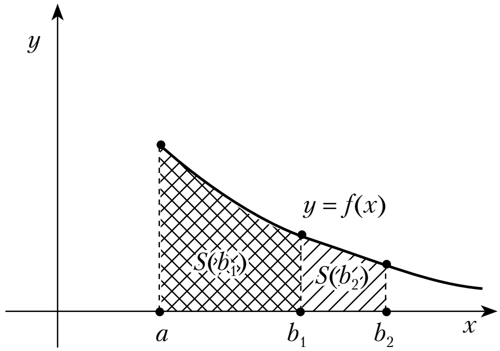
Пример. Пусть $f(x) \geq 0$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ $a < b$. Как вычислить площадь под графиком $f(x)$ на $[a, +\infty)$?

Из определения определенного интеграла площадь под графиком на отрезке $[a, b]$ равна $S(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Из рис. 6.21 следует, что $S(b)$ монотонно возрастает с ростом b. Поэтому всегда существует предел $S = \lim\limits_{b\to+\infty} S(b)$. Только этот предел может быть равен либо $+\infty$, либо неотрицательному числу S.

В любом случае можем считать этот предел площадью под графиком, которая либо неотрицательна, либо бесконечна.

Теперь мы можем определить несобственный интеграл 1-го рода.

Определение 6.14. Пусть $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда несобственным интегралом от $f(x)$ по $[a, +\infty)$ называется $\int\limits_a^{+\infty}(x)dxf = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, если предел существует и конечен. Если этот предел есть число, то говорят, что интеграл сходится; если предел бесконечен или не существует, то говорят, что он расходится.



$S(b_1) < S(b_2)$

Рис. 6.21

Замечание 1 (геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции). Для $f(x) \geq 0$ это определение в силу примера совпадает с определением площади под графиком, и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если площадь между лучом $[a, +\infty)$ и графиком функции конечна, и интеграл расходится, если эта площадь бесконечна.

Замечание 2. Если функция меняет знак, то определение через площадь может давать другой результат, так как при определении через площади аналогично определенному интегралу всегда будет сходиться интеграл от модуля функции, что, как мы увидим впоследствии для несобственных интегралов, определенных через предел, не обязательно. Поэтому здесь мы будем следовать традиционному пути, всегда определяя этот несобственный интеграл через предел.

Примеры (интегралы Дирихле). $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

Действительно, при $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)} x^{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{-\alpha+1}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[b\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[b\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, \text{ при } \alpha > 1 \text{ интеграл сходится,} \\ +\infty, \text{ при } \alpha < 1 \text{ интеграл расходится.} \end{cases}$$

Вычислим теперь предел при $\alpha = 1$: $\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b \to +\infty$ при $b \to +\infty$, и интеграл расходится. Объединяя результаты, получили, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ сходится при $\alpha > 1$, и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

Теорема 6.19 (свойство линейности несобственных интегралов). Если сходятся $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, c — число, то сходятся $\int\limits_a^{+\infty} f(x) + g(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx$, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + {}$ $+ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$; $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство следует из свойств линейности определенных интегралов и пределов (убедитесь сами).

Теорема 6.20 (аддитивность). Если $f(x)$ интегрируема на конечных отрезках $[a, b]$, $b > a$ и $c > a$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + {}$ $+ \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Из аддитивности определенного интеграла $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx$. Переходя к пределу при $b \to +\infty$ и пользуясь тем, что первый из интегралов справа не зависит от b и стремится к самому себе, получим одновременную сходимость несобственных интегралов и равенство $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + {}$ $+ \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$.

Обычно не требуется вычислять значение несобственного интеграла. Это можно сделать с любой степенью точности на компьютере, если известно, что интеграл сходится. Поэтому необходимо уметь исследовать такие интегралы на сходимость. Для неотрицательных функций это помогают сделать простые признаки сходимости.

Теорема 6.21 (непредельный признак сравнения). Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, +\infty)$ и обе функции интегрируемы на конечных отрезках $[a, b]$, $b > a$. Тогда если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Обратимся к геометрическому смыслу интеграла от неотрицательной функции. Это площадь под графиком функции на $[a, +\infty)$. Сходимость интеграла означает конечность этой площади, а расходимость — бесконечность.

На рис. 6.22 видно: в силу неравенства $0 \le f(x) \le g(x), x \in [a, +\infty)$, что площадь под графиком $f(x)$ есть часть площади под графиком $g(x)$. Поэтому из конечности большей площади следует конечность меньшей и из бесконечности меньшей — бесконечность большей.

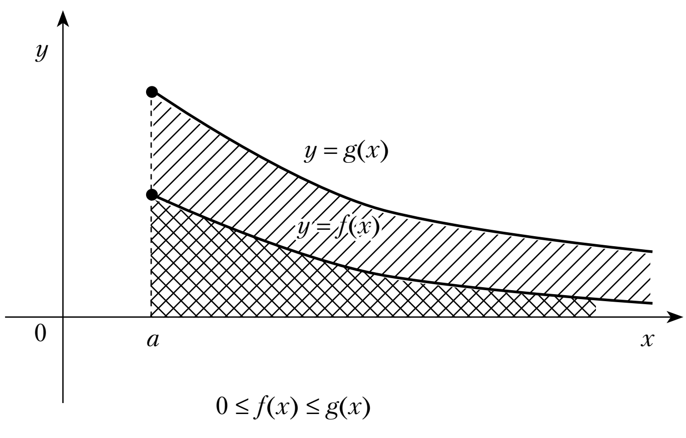


Рис. 6.22

Из равенства площади интегралу получаем: из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, что и требовалось доказать.

Примеры

1. $\alpha \le 0$, тогда $\frac{1}{x^\alpha} \ge \frac{1}{x}$, $x \ge 1$. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится по Дирихле, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ тоже расходится.

2. $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$ на $[1, +\infty)$ и поскольку $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ по Дирихле, то сходится по признаку сравнения и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$. При $\alpha \le 1$ интеграл от большей функции расходится, поэтому признак не применим ни в какой формулировке (интеграл от меньшей функции может как сходиться, так и расходиться).

Теорема 6.22 (предельный признак сравнения). Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $x \in [a, +\infty)$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению эквивалентности при $x > M$ будет $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$, т.е. $|f(x) - g(x)| < \frac{g(x)}{2}$, $-\frac{g(x)}{2} < f(x) - g(x) < \frac{g(x)}{2}$. Таким образом, при $x > M$ будет

$$\frac{g(x)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} g(x). \tag{6.1}$$

По свойству линейности и аддитивности (теорема 6.20) несобственных интегралов $\int\limits_M^{+\infty} \frac{g(x)}{2} dx$ и $\int\limits_M^{+\infty} \frac{3g(x)}{2} dx$ сходятся одновременно с $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ и одновременно с $\int\limits_M^{+\infty} g(x)dx$. Тогда из двойного неравенства (6.1) следует, что при сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\int\limits_M^{+\infty} f(x)dx$, при сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\int\limits_M^{\infty} g(x)dx$. Это дает одновременную сходимость исходных интегралов на $[a, +\infty)$.

Пример. Исследуйте на сходимость $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$. При $x \geq 1$ будет $0 < \frac{1}{x} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$, значит, $\sin(1 / x)$ положителен и $\sin(1 / x) \sim 1 / x$ при стремлении x к бесконечности. Как интеграл Дирихле с показателем $\alpha = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, значит, расходится и $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Перейдем к рассмотрению интегралов от знакопеременных функций. Для них вводится понятие абсолютной сходимости.

Определение 6.15. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если $f(x)$ интегрируема на конечных отрезках и сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Что нам дает абсолютная сходимость, выясняет следующая теорема.

Теорема 6.23 (об абсолютной сходимости). Из абсолютной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует его сходимость.

Доказательство. Рассмотрим функции $f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$, $f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Из свойств определенного интеграла следует сходимость $f^+(x)$, $f^-(x)$ на конечных отрезках $[a, b]$, $b > a$.

Далее имеем $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$. Отсюда и из непредельного признака сравнения (теорема 6.21) из сходимости интеграла от модуля следует сходимость $\int_a^{+\infty} f^+(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f^-(x)dx$. Тогда из свойств линейности сходится $\int_a^{+\infty} f^+(x) - f^-(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Это свойство очень важно, потому что для неотрицательных функций существует много признаков сходимости.

Пример. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно по непредельному признаку сравнения, так как $0 \le \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ и $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится как интеграл Дирихле. Поэтому по теореме об абсолютной сходимости сходится и сам интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое интеграл по отрезку от неотрицательной функции?
2. Как вычислять $\int\limits_a^b f(x)dx$ через разбиения отрезка?
3. Что такое интегрируемая на отрезке функция? Приведите необходимые и достаточные условия интегрируемости.
4. Приведите свойства линейности и аддитивности определенного интеграла.
5. Для каких функций существует первообразная? Как ее выразить через определенный интеграл?

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Сформулируйте теорему об оценке определенного интеграла. Оцените интеграл $\int\limits_{0,5}^{5} \frac{\exp(0,5x)}{x^2+3} dx$.

2. Область ограничена тремя кривыми $y = x$, $y = 64/x$, $y = x^2$. Определите площадь этой области и найдите объем тела, получаемого при вращении этой области вокруг оси X.

3. «Призма», боковые ребра которой параллельны оси Z, ограничена снизу четырехугольником, лежащим на плоскости XOY со сторонами $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = 2x$; сверху «призма» ограничена плоскостью $z = 31,4 - 1,5x + 0,4y$. Изобразите эту призму. Найдите площадь $S(t)$ сечения данной призмы плоскостью $x = t$ (площадь трапеции). Вычислите объем призмы.

4. Начертите дугу $y = \frac{1}{3}(2x-3)^{1,5},\ x \in [3,9]$ и найдите длину этой дуги.

5. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{1,1}^{2,1} \sqrt{\frac{10x-11}{10x-1}} dx$. Для этого обозначьте подынтегральную функцию через t.

Тесты

1. Как определяется $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $a > b$?

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx$; 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. Для каких функций можно посчитать длину дуги графика $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$?

1) для непрерывных; 2) для монотонных; 3) для имеющих непрерывную производную на отрезке.

3. Приведите формулу для длины дуги графика $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2}dx$; 2) $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$; 3) $l = \int\limits_a^b f(x)dx$.

4. Для каких функций можно вычислить площадь между двумя графиками на отрезке $[a, b]$?

1) для непрерывных; 2) для монотонных; 3) для имеющих непрерывную производную на отрезке.

5. Приведите формулу для площади между графиками $f(x) < g(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) $S = \int\limits_a^b g(x) + f(x)dx$; 2) $S = \int\limits_a^b g(x) - f(x)dx$.

Раздел 3
РЯДЫ, ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 7
ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

7.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ, СХОДИМОСТЬ. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ. СВЯЗЬ С НЕСОБСТВЕННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ 1-ГО РОДА. РЯДЫ ДИРИХЛЕ. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ. ТЕОРЕМА ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Теория числовых рядов тесно связана с теорией несобственных интегралов. Дадим соответствующие определения.

Определение 7.1 (числового ряда, частичной суммы, сходимости). Выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — числовая последовательность, называется ***числовым рядом***. ***Частичной суммой*** числового ряда называется конечная сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, \ldots$ Если последовательность частичных сумм имеет ***конечный предел***, то он называется суммой ряда, а сам ряд в этом случае называется ***сходящимся***, $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример (геометрическая прогрессия): $\sum\limits_{1}^{\infty} bq^n$. Частичные суммы, как известно из школьной программы: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} bq^k = b\dfrac{q^{n+1} - q}{q - 1}$ при $q \neq 1$; $S_n = bn$ при $q = 1$; $S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -1 \cdot b, & n = 2k - 1, \end{cases}$ $k \in N$ при $q = -1$.

Исследуем сходимость в разных случаях.

При $q = 1$ предел частичных сумм бесконечен и ряд расходится. При $q = -1$ предел частичных сумм не существует и ряд расходится. При $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} b\frac{q^{n+1}}{q} = \infty$ ряд расходится. При $|q| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b\frac{0-q}{q-1} = \frac{bq}{1-q}$. Предел конечный и ряд сходится. Иными словами, геометрическая прогрессия сходится только при знаменателе, по модулю меньшем единицы.

Теорема 7.1 (необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости). Если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратно, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ либо не существует, то ряд расходится.

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1}$. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ — конечен. Тогда по свойству пределов существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, что и требовалось доказать. Если же этот предел не равен нулю или не существует, то ряд сходиться не может (ибо тогда предел должен быть равен 0!).

Пример. Этот признак позволяет доказать расходимость геометрической прогрессии при $|q| \geq 1$. Здесь предел общего члена либо не существует, либо равен $b \neq 0$, либо равен ∞. Поэтому он расходится по достаточному признаку расходимости.

Далее попытаемся сопоставить числовой ряд с несобственным интегралом. Для этого сопоставим любую последовательность a_n с кусочно-постоянной функцией $a(x)$, график которой является простым продолжением графика последовательности из точки n на полуинтервал $[n, n+1)$ значением a_n (рис. 7.1). Полученная функция будет определена на $[1, \infty)$ и интегрируема на конечных отрезках, являясь там кусочно-постоянной. Поэтому можно рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} a(x)dx$.

Теорема 7.2 (связь рядов и несобственных интегралов).

1. Описанное соответствие $\{a_n\} \Rightarrow a(x)$ сохраняет все арифметические операции, т.е. сумме последовательностей соответствует сумма функций, произведению последовательностей соответствует произведение функций и частному последовательностей соответствует частное функций. Кроме того, нулевой последовательности соответствует нулевая функция, постоянной последовательности — постоянная функция.

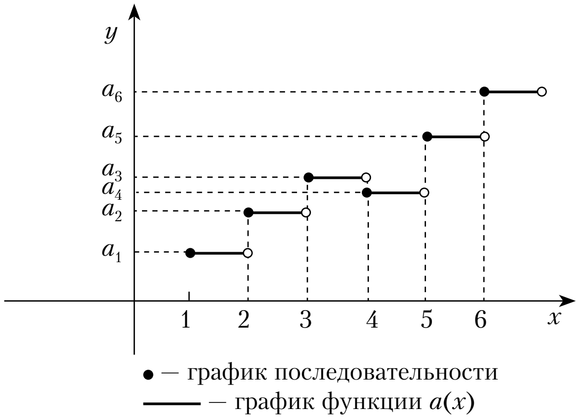


Рис. 7.1

2. Сохраняются неравенства: если $a_n \le b_n \ \forall \ n \in N \{a_n\} \Rightarrow a(x)$, $\{b_n\} \Rightarrow b(x)$, то $a(x) \le b(x) \ \forall \ x \ge 1$. Строгие неравенства также сохраняются.

3. Сохраняются пределы на бесконечности: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\{a_n\} \Rightarrow a(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = A$ (A может быть и бесконечным).

4. Последовательности из модулей соответствует модуль функции $\{|a_n|\} \Rightarrow |a(x)|$. Отсюда и из линейности соответствия последовательностям a_n^+, $-a_n^-$ соответствуют $a^+(x), a^-(x)$.

5. $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится одновременно с $\int\limits_1^\infty a(x)dx$, и их значения совпадают, $\sum\limits_1^\infty a_n = \int\limits_1^{+\infty} a(x)dx$.

6. Числовой ряд сходится одновременно с любым его остатком $\sum\limits_N^\infty a_n$.

Доказательство. Свойства 1–2 следуют из определения соответствия рядов и функций, из этих свойств и этого определения следует п. 4. Поясним п. 3, 5 и 6. Пункт 3 следует из того, что график функции является «растяжением» параллельно OX графика последовательности, и если график последовательности при $n > N$ попадает в горизонтальную полосу либо в полуплоскость, то туда же попадает при $x > N$ и график функции. Это есть графический смысл одного и того же предела на бесконечности у последовательности и у функции (рис. 7.2).

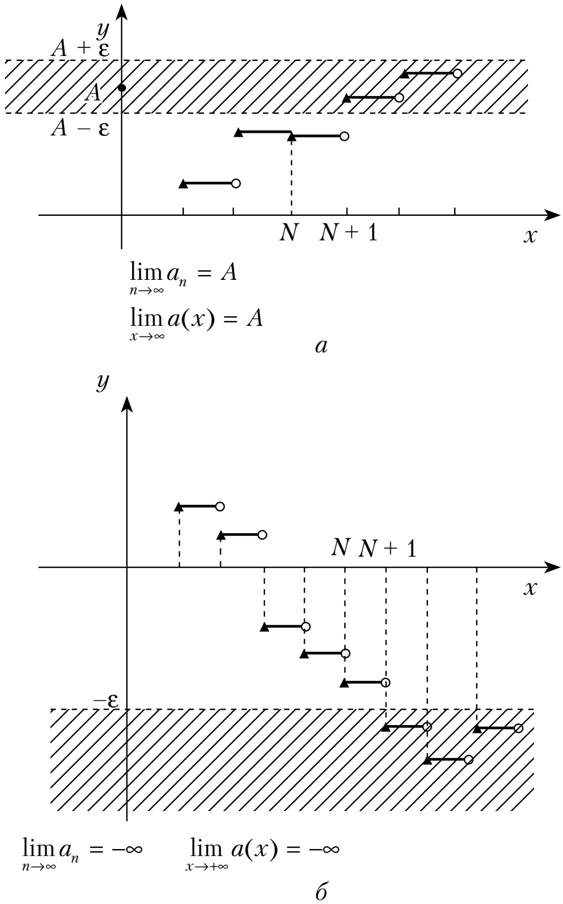


Рис. 7.2

Что касается п. 5, то на рис. 7.1 видно, что

$$a_k = a_k \cdot 1 = \int_k^{k+1} a_k dx = \int_k^{k+1} a(x)dx;$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{1}^{n} \int_k^{k+1} a(x)dx \overset{\text{Аддитивность}}{=} \int_1^n a(x)dx;$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n a(x)dx = \int_1^\infty a(x)dx.$$

Если последний интеграл сходится, то сходится ряд и сумма его равна несобственному интегралу. Если сходится ряд, то сходится последовательность интегралов $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n a(x)dx$. Из-за свойств $a(x)$ (рис. 7.3) $\int\limits_1^b a(x)dx - \int\limits_1^n a(x)dx = a_n(b-n)$, $n=[b]$. $n\to\infty$ при $b\to\infty$. Тогда $|b-n|<1$, $a_n \to 0$ при $n\to\infty$ по необходимому признаку сходимости. Поэтому $\int\limits_1^b a(x)dx - \int\limits_1^n a(x)dx = \alpha(b)$ — бесконечно малая при $b\to\infty$. Поэтому сходится

$$\int\limits_1^\infty a(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b a(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n a(x)dx + \alpha(x) = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_1^\infty a_n.$$

Свойство 6 верно по аналогии со сходимостью несобственного интеграла $\int\limits_1^\infty a(x)dx$, который сходится одновременно с любым интегралом $\int\limits_N^\infty a(x)dx = \sum\limits_N^\infty a_n$, а также с $\sum\limits_1^\infty a_n = \int\limits_1^\infty a(x)dx$. Это завершает доказательство теоремы 7.2.

Теперь на основании свойств, доказанных в теореме 7.2, мы можем для неотрицательных рядов сразу доказать теоремы, аналогичные теоремам для несобственных интегралов.

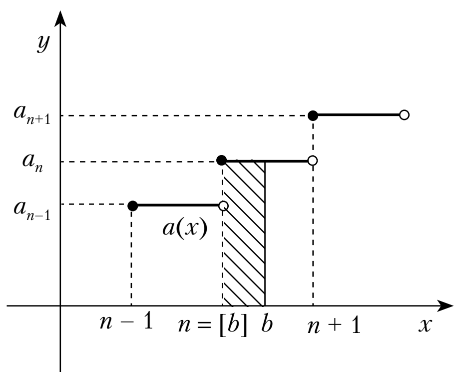
Итак, если сопоставим, как в теореме 7.2, $\{a_n\} \Rightarrow a(x)$, $x\in[1,\infty)$, то по этой теореме 7.2 (п. 5) ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится или расходится одновременно с $\int\limits_1^\infty a(x)dx$. Причем сумма ряда равна значению несобственного интеграла. Отсюда получим из свойств интегралов следующую теорему (аналог теоремы 6.21 интегралов).

Теорема 7.3 (непредельный признак сходимости). Пусть $0\le a_n \le b_n\ \forall\, n\in N$. Тогда если ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$. Если ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$.

Доказательство. Рассматриваем построенное соответствие $\sum\limits_1^\infty a_n \Rightarrow a(x)$, $\sum\limits_1^\infty b_n \Rightarrow b(x)$. Из свойства сохранения неравенств

$0 \le a(x) \le b(x)\ \forall\, x \ge 1$. Тогда по непредельному признаку сходимости для несобственных интегралов из сходимости $\int\limits_1^\infty b(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_1^\infty a(x)dx$. Из расходимости $\int\limits_1^\infty a(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_1^\infty b(x)dx$. Отсюда из эквивалентности сходимости ряда и сопоставленного ему интеграла следует наш признак для рядов: если ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$; если ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$.

Докажем аналог теоремы 6.22 для рядов.



$$\int\limits_1^b a(x)dx = \int\limits_1^n a(x)dx + \int\limits_n^b a_n dx;$$

$$a_n(b-n) = \int\limits_n^b a_n dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

$$\text{если } a_n \to 0$$

Рис. 7.3

Теорема 7.4 (предельный признак сходимости). Пусть $0 < a_n$, $0 < b_n\ \forall\, n \in N$ и при $n \to \infty$ $a_n \sim b_n$. Тогда ряды $\sum\limits_1^\infty a_n$ и $\sum\limits_1^\infty b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Опять обратимся к построенному соответствию последовательностей и функций. В силу сохранения при этом соответствии операции деления, а также пределов на бесконечности последовательностей и соответствующих функций следует, что функции $a(x)$ и $b(x)$, соответствующие нашим последовательностям, будут эквивалентны при $x \to \infty$. Они также положительны. По предельному признаку для несобственных интегралов $\int_1^{\infty} a(x)dx$ и $\int_1^{\infty} b(x)dx$ будут сходиться или расходиться одновременно. Из сохранения сходимости при построенном соответствии ряды $\sum_1^{\infty} a_n$ и $\sum_1^{\infty} b_n$ также сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 7.5 (интегральный признак Коши). Пусть $f(x) > 0$ непрерывна на $[1, +\infty)$ и монотонно убывает. Тогда ряд $\sum_1^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть ряд сходится. Сопоставим последовательности $\{f(n)\}$, $n = 1, 2\ldots$ функцию $f_1(x) = f(n)$ на $[n, n + 1)$. Тогда $f_1(x) \geq f(x)$, так как $f(x)$ убывает (рис. 7.4, *а*). Если ряд сходится, то с ним вместе сходится $\int_1^{\infty} f_1(x)dx$. Тогда по непредельному признаку сходится и $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Наоборот, пусть сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Рассмотрим ряд $\sum_2^{\infty} f(n)$. По теореме 7.2 он сходится одновременно с $\sum_1^{\infty} f(n)$.

Сопоставим последовательности $\{f(n)\}$, $n = 2, 3\ldots$ функцию $f_2(x) = f(n + 1)$ на $[n, n + 1)$. Тогда $f_2(x) \leq f(x)$, так как $f(x)$ убывает (рис. 7.4, *б*). Поэтому по непредельному признаку вместе с $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится $\int_1^{\infty} f_2(x)dx$. Одновременно с последним сходится ряд $\sum_2^{\infty} f(n)$, а значит и $\sum_1^{\infty} f(n)$.

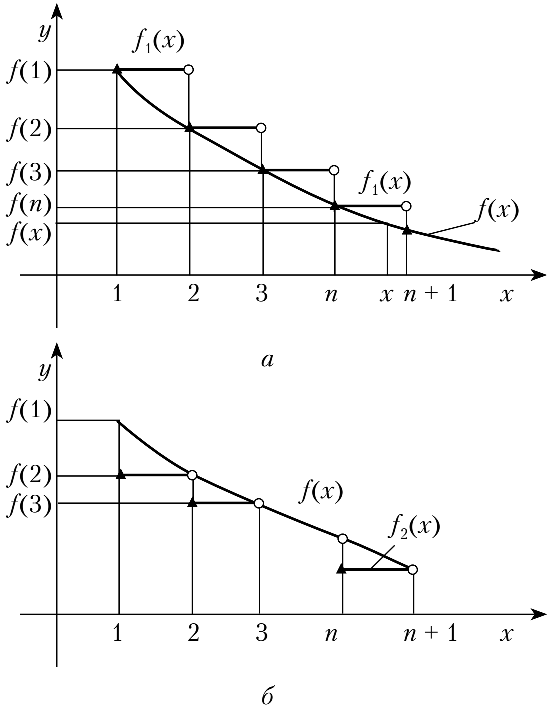


Рис. 7.4

Следствие (ряды Дирихле). $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. Поскольку $\frac{1}{n^\alpha} = \left.\frac{1}{x^\alpha}\right|_{x=n}$ и функции $\frac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяют условию интегрального признака Коши, сходимость или расходимость рядов Дирихле такая же, как у интегралов Дирихле. Иными словами, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$.

Следующие два признака получаются сравнением знакоположительных рядов с геометрической прогрессией.

Теорема 7.6 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_1^\infty a_n$, $a_n \ge 0$, $n \in N$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда при $q < 1$ ряд $\sum_1^\infty a_n$ сходится, при $q > 1$ — расходится (при $q = 1$ ничего сказать нельзя).

Доказательство. Пусть $q < 1$. Возьмем $q < q_1 < 1$ (рис. 7.5).

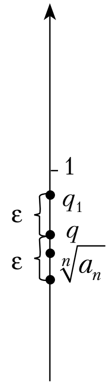


Рис. 7.5

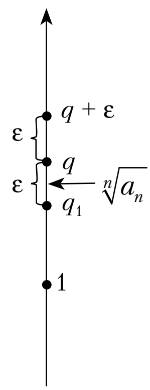


Рис. 7.6

Тогда при $\varepsilon = q_1 - q$ и больших $n > N$ по определению предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$ будет $q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1$, $0 \le a_n < q_1^n < 1$ (см. рис. 7.5). Но $\sum\limits_{N+1}^{\infty} q_1^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы. Тогда из неравенства $0 \le a_n < q_1^n$ при $n > N$ по непредельному признаку сравнения следует сходимость $\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n$, а значит, по теореме 7.2 (п. 6) сходится и $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь предел $q > 1$ — число или ∞. Возьмем q_1 такое, что $q > q_1 > 1$ (рис. 7.6). Если q конечно, то при $\varepsilon = q - q_1 > 0$ и больших

$n > N$ по определению конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$ будет $1 < q_1 = q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$, $a_n > q_1^n > 1$ (см. рис. 7.6).

Если $q = \infty$, то по определению бесконечного предела при $n > N$ будет $a_n > 1$. Поэтому в обоих этих случаях (конечного или бесконечного предела) не может быть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и ряд расходится по достаточному признаку расходимости. Теорема доказана.

Пример. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_1^\infty \frac{n^2}{2^{n^2}}$. Имеем $0 < \sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2^n} < \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = q < 1$. Ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Теорема 7.7 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$, $a_n > 0$, $n \in N$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда при $q < 1$ ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится, при $q > 1$ — расходится (при $q = 1$ теорема ответа не дает).

Доказательство. Пусть $q < 1$. Возьмем $q < q_1 < 1$ (рис. 7.7).

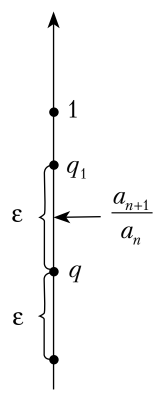


Рис. 7.7

Тогда при $\varepsilon = q_1 - q$ и больших $n > N$ по определению предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ будет $q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1$ (см. рис. 7.7), т.е. $0 < a_{n+1} < q_1 a_n$ при $n > N$. Распишем это подробно:

$$a_{N+2} < q_1 a_{N+1},$$
$$a_{N+3} < q_1 a_{N+2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{N+k} < q_1 a_{N+k-1},\ k > 1.$$

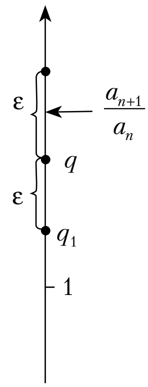


Рис. 7.8

Перемножив все эти $(k - 1)$ положительных неравенств, получим $0 < a_{N+k} < q_1^{k-1} \cdot a_{N+1}, k > 1$. Но $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{N+1} q_1^{k-1}$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем q_1 меньше единицы. Тогда из неравенства $a_{N+k} < q_1^{k-1} \cdot a_{N+1}$ по непредельному признаку сравнения следует сходимость $\sum\limits_{N+2}^{\infty} a_n$, а значит, по теореме 7.2 (п. 6) сходится и $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$.

Пусть $q > 1$. Возьмем $q > q_1 > 1$ (рис. 7.8). Тогда по определению конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ при $\varepsilon = q - q_1$ и больших $n > N$ будет $1 < q_1 = q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, a_{n+1} > q_1 a_n > a_n > 0$ (см. рис. 7.8). Если же $q = \infty$, то по определению предела при $n > N$ будет $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Поэтому в обоих случаях $a_{n+1} > a_n > 0$ при $n > N$. Иными словами, при $n > N$ $a_n \ge a_{N+1} > 0$ и не может быть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Пример. Исследуйте на сходимость $\sum_1^{\infty}\frac{\ln n + 2n^3 + 3n^2 \cdot 2^n}{7 \cdot 3^n - n^{100}}$. Имеем $a_n \sim \frac{3n^2 \cdot 2^n}{7 \cdot 3^n}$. По предельному признаку достаточно исследовать $\frac{3}{7}\sum_1^{\infty}\frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n}$ и по линейности можно рассмотреть $\sum_1^{\infty}\frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n}$. По Даламберу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n}{3^{n+1}n^2 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 \cdot 2}{3n^2} = \frac{2}{3} = q < 1$$

и ряд сходится.

Как видим, для знакоположительных рядов существует довольно много признаков сходимости. Поэтому аналогично несобственным интегралам принято исследовать на сходимость ряд из модулей. Определения будут аналогичные.

Определение 7.2 (абсолютная и условная сходимость). Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно*** сходящимся, если сходится $\sum_1^{\infty}|a_n|$. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ называется ***условно*** сходящимся, если он сходится, а $\sum_1^{\infty}|a_n|$ расходится.

Теорема 7.8 (об абсолютно сходящихся рядах). Если ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. С помощью сопоставления с несобственными интегралами. Пусть последовательности отвечает функция $\{a_n\} \Rightarrow a(x)$. Тогда по свойству сопоставления $\{|a_n|\} \Rightarrow |a(x)|$. При сходимости $\sum_1^{\infty}|a_n|$ сходится $\int_1^{\infty}|a(x)|dx$.

По теореме об абсолютной сходимости несобственных интегралов отсюда следует сходимость $\int_{-1}^{\infty} a(x)dx$, что в силу свойств сопоставления означает сходимость $\sum_1^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Пример. Исследуйте на сходимость $\sum_1^{\infty}\frac{\cos n}{n^{3/2}}$. Имеем

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^{3/2}}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}. \tag{7.1}$$

Ряд $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится как ряд Дирихле с показателем $3/2 > 1$. Отсюда и из неравенства (7.1) следует по непредельному признаку сравнения сходимость $\sum_1^\infty |a_n|$. Это значит, что исходный ряд сходится абсолютно.

Дадим теперь признак условной сходимости для знакочередующихся рядов (рядов Лейбница).

Теорема 7.9 (признак Лейбница). Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_1^\infty (-1)^n a_n$, где $a_n \ge 0$, причем выполнены два условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2) последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum_1^\infty (-1)^n a_n$ сходится и $\left|\sum_1^\infty (-1)^n a_n\right| \le a_1$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим частичные суммы с четными и нечетными номерами и покажем, что они имеют равные пределы. Действительно, $S_{2n} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots - a_{2n-1} + a_{2n} = -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \ge -a_1$. Каждая скобка неотрицательна из-за монотонного убывания последовательности, а $a_{2n} \ge 0$ по условию, т.е. последовательность четных сумм ограничена снизу. Покажем, что она убывает. Имеем $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+2} - a_{2n+1} \le S_{2n}$, $a_{2n+1} \ge a_{2n+2}$ из-за убывания последовательности a_n. Иными словами, по признаку Вайерштрасса у монотонно убывающей и ограниченной снизу последовательности четных сумм существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$. Для нечетных сумм $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - a_{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ по условию}}{=} S - 0 = S.$$

Поскольку четные и нечетные суммы имеют одинаковые пределы, существует равный им $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд сходится. Получим неравенство для суммы ряда:

$$\left|\sum_1^{\infty}(-1)^n a_n\right| = |S| = \left|\lim_{n\to\infty} S_{2n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|S_{2n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(-a_1 + a_2\right) + \ldots + \left(-a_{2n-1} + a_{2n}\right)\right| \overset{\substack{\text{Каждая}\\ \text{скобка} \le 0}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_1 - \left(a_2 - a_3\right) - \left(a_{2n-2} - a_{2n-1}\right) - \left(a_{2n}\right) \overset{\text{Все скобки} \ge 0}{\le} a_1.$$

Теорема доказана.

Следствие. Обозначим $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ остаток исходного ряда Лейбница, получившийся отбрасыванием n-й частичной суммы, который тоже будет с точностью до знака рядом Лейбница. Применив к нему оценку теоремы, получим $\left|R_n\right| \le a_{n+1}$. Это можно сформулировать так: остаток ряда Лейбница по модулю не превосходит модуля первого слагаемого остатка.

Пример. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Из абсолютной сходимости следует сходимость, поэтому лучше сначала исследовать на абсолютную сходимость, т.е. рассмотреть ряд из модулей $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Это ряд Дирихле с показателем 1. Он расходится. Значит, абсолютной сходимости нет. Может быть только условная сходимость. Поскольку ряд знакочередующийся, то применим признак Лейбница.

Последовательность $a_n = 1/n$, монотонно убывая, стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому по признаку Лейбница ряд сходится условно.

7.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ. СХОДИМОСТЬ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ВОЗМОЖНОСТЬ ПОЧЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Кроме числовых рядов можно рассматривать функциональные ряды — ряды из функций.

Определение 7.3 (функционального ряда, области сходимости). Ряд вида $\sum\limits_1^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ — функции, определенные на одном и том же множестве M для любого натурального n, называется функциональным рядом. В каждой точке $x_0 \in M$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x_0)$. Множество D точек x_0 из M, где эти ряды сходятся к $f(x_0)$, называется ***областью сходимости*** функционального ряда, а $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$ — его суммой.

Пример. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ представляет собой на всей числовой прямой геометрическую прогрессию со знаменателем x. Как мы видели ранее, его областью сходимости является интервал $(-1, 1)$. Там его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$.

Кроме рядов, по аналогии с числовыми последовательностями рассматривают последовательности из функций.

Определение 7.4 (функциональной последовательности, области сходимости). Пусть $f_n(x)$ для любого натурального n — функции, определенные на одном и том же множестве M. Тогда последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется функциональной последовательностью. В каждой точке $x_0 \in M$ получаем числовую последовательность $f_n(x_0)$. Множество D точек x_0 из M, где эти последовательности сходятся к $f(x_0)$, называется ***областью сходимости*** функциональной последовательности, а $f(x)$ — ее пределом: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D$.

Пример. Как известно, например, из необходимого признака сходимости геометрической прогрессии на $(-1, 1)$, последовательность x^n сходится на $D = (-1, 1]$ к функции $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ на } (-1,1) \\ 1 \text{ в точке } 1 \end{cases}$ (рис. 7.9).

Для определения понятия равномерной сходимости последовательности функций введем окрестности радиуса ε графика функции $f(x)$ на плоскости.

Определение 7.5 (окрестности графика). Пусть $f(x)$ определена на подмножестве A прямой. Тогда ε-окрестностью ее графика на A называется следующее множество точек плоскости:

$$O_\varepsilon\big(f(x)\big) = \big\{(x, y) : f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon \ \forall\, x \in A\big\}.$$

Замечание. Как видно на рис. 7.10, окрестность радиуса ε графика функции $f(x)$ на плоскости представляет собой «коридорчик» ширины 2ε вокруг графика.

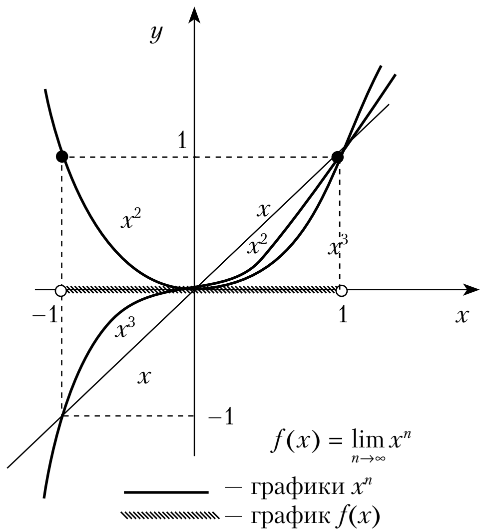


Рис. 7.9

Определение 7.6 (равномерной сходимости последовательности функций). Последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся к $f(x)$ на множестве A, если для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N$ все графики $f_n(x)$ при x из A лежат внутри 2ε-коридорчика $O_\varepsilon(f(x))$.

Следствие. При равномерной сходимости имеем для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N\,\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$, $\forall\, x \in A$. Это следует из определения 2ε-коридорчика

$$O_\varepsilon\big(f(x)\big) = \Big\{(x, y) : f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\ \forall\, x \in A\Big\},$$

где лежат $f_n(x)$ при $n > N$ (рис. 7.10*а*).

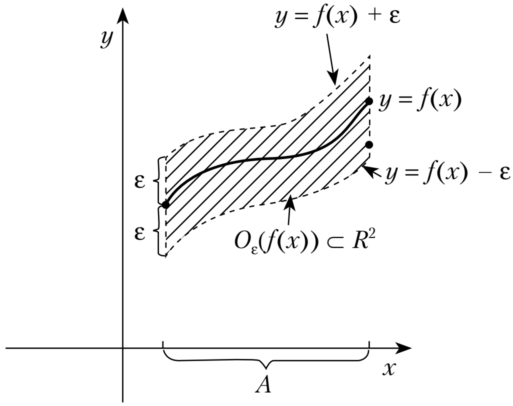
Иными словами, при $n > N$

$$\Big\{f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon\ \ \forall\, x \in A\Big\},$$

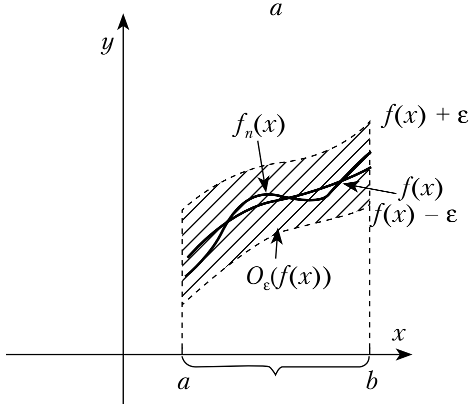
что эквивалентно неравенству $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon\ \forall\, x \in A$.

Пример. Последовательность x^n сходится равномерно к нулю на $(-1 + a, 1 - a)$ при $0 < a < 1$ (рис. 7.11) и не сходится равномерно на всей области сходимости $(-1, 1]$ (рис. 7.12).

Теорема 7.10 (непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Пусть последовательность $f_n(x)$ из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.



а



б

Рис. 7.10

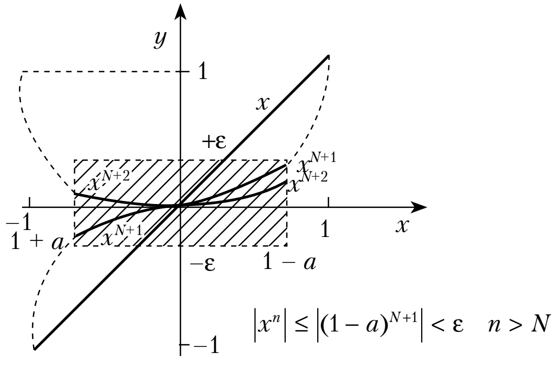
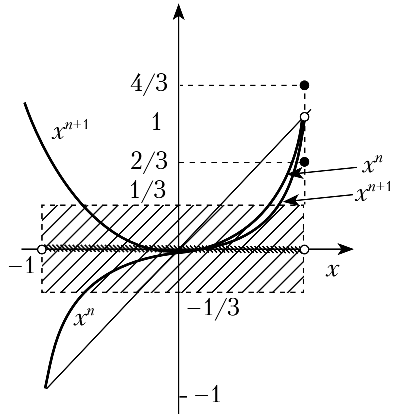


Рис. 7.11



— график $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$, $x \in (-1, 1]$,

$\frac{2}{3}$ — «коридорчик» около графика $f(x)$ разрывается в $x = 1$ вместе с функцией, и все графики непрерывных функций x^n из него выходят. Равномерной сходимости на (1, −1] нет

Рис. 7.12

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из-за равномерной сходимости при $n > N$ все графики $f_n(x)$ на отрезке лежат внутри $2\varepsilon/3$-коридорчика $O_{\varepsilon/3}(f(x))$, а значит, $\left|f_{N+1}(x) - f(x)\right| < \varepsilon/3, \forall\, x \in [a, b]$. Но $f_{N+1}(x)$ непрерывна в x_0, поэтому подстановкой получим $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x) = f_{N+1}(x_0)$. Поэтому при $\left|x - x_0\right| < \delta$ будет $\left|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)\right| < \varepsilon/3$. Рассмотрим теперь для таких x:

$$\left|f(x_0) - f(x)\right| =$$

$$= \left|f(x_0) - f_{N+1}(x_0) + f_{N+1}(x_0) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f(x)\right| \overset{\text{Модуль суммы}}{\le}$$

$$\overset{\text{Модуль суммы}}{\le} \left|f_{N+1}(x_0) - f(x_0)\right| + \left|f_{N+1}(x_0) - f_{N+1}(x)\right| +$$

$$+ \left|f_{N+1}(x) - f(x)\right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \;\; \forall\; \left|x - x_0\right| < \delta$$

(первый и последний модули меньше $\varepsilon/3$ из-за равномерной сходимости, средний — из-за непрерывности функции $f_{N+1}(x)$). Это есть определение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. предел для $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, вычисляется подстановкой, что доказывает ее непрерывность в x_0, в качестве которой была взята любая точка отрезка.

Теорема 7.11 (интегрирование равномерно сходящейся последовательности). Пусть последовательность $f_n(x)$ из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. По теореме 7.10 $f(x)$ непрерывна, $f_n(x)$ непрерывны по условию. Значит, все они интегрируемы на отрезке. По следствию из определения 7.6 равномерной сходимости получаем для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N$ $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall\, x \in [a,b]$. Оценим:

$$\left|\int\limits_a^b f(x) - f_n(x)dx\right| \overset{\text{Оценка интеграла}}{\leq} \int\limits_a^b \left|f(x) - f_n(x)\right|dx \overset{\substack{\text{Неравенство}\\\text{для равномерной}\\\text{сходимости}}}{\leq}$$

$$\overset{\substack{\text{Неравенство}\\\text{для равномерной}\\\text{сходимости}}}{\leq} \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Это и означает $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема 7.12 (связь дифференцируемости с равномерной сходимостью). Пусть $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы и сходятся к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Пусть кроме того последовательность производных $f_n'(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ дифференцируема на отрезке и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. Имеем по формуле Ньютона — Лейбница:

$$f_n(x) = \int\limits_a^x f_n'(t)dt + f_n(a)\ \ \forall\, x \in [a,b]. \tag{7.2}$$

$f_n'(t)$ сходятся равномерно на $[a, x]$ так же, как на $[a, b]$, потому что «коридорчик» ширины 2ε вокруг графика $f(x)$ на $[a, x]$ есть часть «коридорчика» ширины 2ε вокруг ее графика на $[a, b]$ (рис. 7.13).

Поэтому по теореме 7.11 получим $\int\limits_a^x g(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^x f_n'(t)dt$. Кроме того, по условию $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Используя все это, перейдем к пределу в (7.2) при $n \to \infty$. Получим $f(x) = \int\limits_a^x g(t)dt + f(a)$. Поскольку $g(x)$ непрерывна по теореме 7.10, то по теореме о существовании первообразной непрерывной функции, ее первообразная будет равна $\int\limits_a^x g(t)dt$. Вместе с ней также отличающаяся на константу $f(x)$ будет первообразной для $g(x)$ и поэтому $f'(x) = g(x)$.

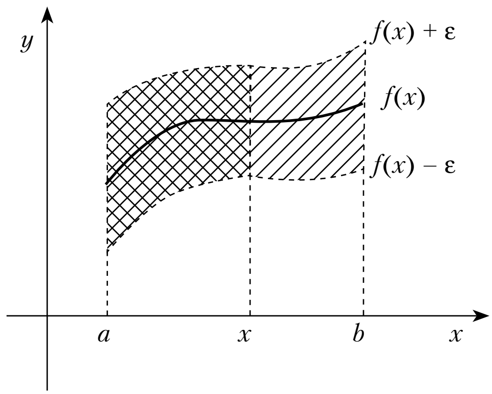


Рис. 7.13

Примеры

1. На $[0, 1 - a]$ при $0 < a < 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Функции непрерывны и сходимость равномерная на $[0, 1 - a]$ (см. рис. 7.12). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{1-a} x^n dx = \int\limits_0^{1-a} 0dx = 0$ по теореме 7.11. Проверим это непосредственно:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{1-a} x^n dx = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^{1-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{0}{\infty} = 0,$$

как и следовало ожидать.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$ на $[0, 1 - a]$. $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)' = nx^{n-1} / n = x^{n-1}$ — непрерывны и сходятся равномерно к нулю на $[0, 1 - a]$ (см. рис. 7.12). Поэтому по теореме 7.12 имеем $0' = 0$. Ничего необычного!

Сформулируем теперь понятие равномерной сходимости и аналогичные теоремы для рядов.

Определение 7.7 (равномерная сходимость функционального ряда). Функциональный ряд $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве, если на этом множестве равномерно сходится последовательность его частичных сумм $S_N(x) = \sum_{1}^{N} f_n(x)$.

Теорема 7.13 (интегрирование равномерно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций равномерно сходится к $f(x)$, которая непрерывна по теореме 7.10, на этом отрезке. Тогда $\sum_{1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Частичные суммы ряда непрерывны на отрезке вместе с членами ряда и равномерно по определению сходятся к $f(x)$. Поэтому по теореме 7.11 об интегрировании равномерно сходящейся последовательности получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{1}^{N} f_n(x)dx \overset{\substack{\text{Линейность}\\ \text{интеграла}}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} \int_a^b f_n(x)dx \overset{\substack{\text{Определение}\\ \text{суммы ряда}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Определение}\\ \text{суммы ряда}}}{=} \sum_{1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 7.14 (связь дифференцируемости суммы ряда с равномерной сходимостью). Пусть ряд $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ из непрерывно дифференцируемых функций сходится к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Пусть, кроме того, ряд из производных $\sum_{1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ дифференцируема на отрезке и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. Частичные суммы ряда непрерывны на отрезке вместе с членами ряда и по определению сходятся к $f(x)$. Кроме того, частичные суммы ряда из производных, являющиеся производными частичных сумм членов ряда, непрерывны вместе с производными членов ряда и по условию сходятся к $g(x)$ равномерно. Поэтому по теореме 7.12 о дифференцировании такой последовательности получим:

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{1}^{N} f_n(x) \right)' \overset{\substack{\text{Линейность}\\ \text{производной}}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} f_n'(x) \overset{\substack{\text{Определение}\\ \text{суммы ряда}}}{=} \sum_{1}^{\infty} f_n'(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 7.15 (достаточное условие равномерной сходимости последовательности). Пусть $\left|f(x)-f_n(x)\right| \le M_n\ \forall\, x \in A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на A.

Доказательство. Поскольку M_n — бесконечно малая, $\forall\, \varepsilon > 0$ при $n > N$ будет $0 \le M_n < \varepsilon$. Тогда $\left|f(x)-f_n(x)\right| \le M_n < \varepsilon\ \forall\, x \in A$ и $n > N$. Это значит, что при $n > N$ все графики находятся внутри 2ε-«коридорчика» $\left\{(x,y) : x \in A,\ \left|y-f(x)\right| < \varepsilon\right\}$. Это и есть равномерная сходимость.

Теорема 7.16 (достаточное условие равномерной сходимости ряда). Пусть $\left|f_n(x)\right| \le c_n\ \forall\, x \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_1^\infty c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_1^\infty f_n(x)$ равномерно сходится на A.

Доказательство. Для фиксированного x_0 по непредельному признаку сравнения сходится $\sum\limits_1^\infty \left|f_n(x_0)\right|$. Значит, $\sum\limits_1^\infty f_n(x_0) = f(x_0)$ сходится абсолютно для любого x_0 из A.

Далее, поскольку ряд $\sum\limits_1^\infty c_n = c$ сходится, его «остаток»

$R_N = \sum\limits_{N+1}^\infty c_n = \sum\limits_1^\infty c_n - \sum\limits_1^N c_n \xrightarrow[N\to\infty]{\sum_1^N c_n \to c} c - c = 0$ — бесконечно малая.

Рассмотрим теперь частичные суммы $S_N(x) = \sum\limits_1^N f_n(x)$. Тогда

$$\left|f(x)-S_N(x)\right| = \left|\sum_1^\infty f_n(x) - \sum_1^N f_n(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{N+1}^\infty f_n(x)\right| \le \sum_{N+1}^\infty \left|f_n(x)\right| \overset{|f_n(x)|\le c_n}{\le} \sum_{N+1}^\infty c_n = R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Это значит, что по теореме 7.15 частичные суммы функционального ряда сходятся равномерно и сам ряд равномерно сходится на A по определению.

Пример. Ряд $\sum\limits_1^\infty \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится равномерно на всей прямой по достаточному условию равномерной сходимости, так как $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}\ \forall\, x$ и ряд $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле с показателем 2, большим единицы.

7.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РАДИУС СХОДИМОСТИ, ФОРМУЛА ДЛЯ НЕГО. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Определение 7.8 (степенного ряда). Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ называется степенным рядом с ***центром*** x_0 и ***коэффициентами*** a_n.

Замечание. Степенной ряд с центром x_0 заменой $y = x - x_0$ сводится к степенному ряду $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n y^n$ с центром 0. При этом сходимость в соответствующих точках сохраняется, а область сходимости и равномерной сходимости сдвигаются на $|x_0|$ вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$.

В силу этого замечания далее достаточно изучать ряды с центром 0. Найдем сначала область сходимости степенного ряда.

Теорема 7.17 (лемма Абеля). Если ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке b, то этот ряд, а также ряд из его производных и ряд из его интегралов $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ сходятся абсолютно во всех точках $|x| < |b|$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n b^n$ сходится, поэтому по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n||b|^n = 0$ и существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|a_n||b|^n < 1$, т.е. при $n > N$ будет $|a_n| < \frac{1}{|b^n|}$

Пусть $|x| < |b|$. Тогда по полученному неравенству $|a_n||x^n| < \frac{|x^n|}{|b^n|} = \left|\frac{x}{b}\right|^n$.

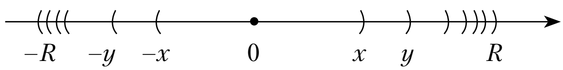
Но $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$ по условию, следовательно, $\sum\limits_{0}^{\infty} \left|\frac{x}{b}\right|^n$ сходится как геометрическая прогрессия. Поэтому по непредельному признаку сравнения $\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно, а с ним сходится абсолютно и отличающийся на N слагаемых ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x| < |b|$.

Для ряда из производных имеем оценку члена при $n > N$ $n|a_n||x|^{n-1} < n\frac{|x^{n-1}|}{|b^n|} = n\left|\frac{x^{n-1}}{b^n}\right|$, но $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$. Поэтому $\sum\limits_{1}^{\infty} n\left|\frac{x^{n-1}}{b^n}\right|$ сходится по признаку Даламбера, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{n}\left|\dfrac{x}{b}\right| = 1\left|\dfrac{x}{b}\right| = q < 1$. Поэтому по непредельному признаку сравнения $\sum\limits_{N+1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ сходится абсолютно, а с ним сходится и отличающийся на N слагаемых ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ при $|x| < |b|$.

Для ряда из интегралов имеем оценку члена при $n > N$, $\left|\dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1}\left|\dfrac{x^{n+1}}{b^n}\right|$, но $\left|\dfrac{x}{b}\right| < 1$. Поэтому $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\left|\dfrac{x^{n+1}}{b^n}\right|$ аналогично сходится по признаку Даламбера и $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ сходится абсолютно во всех точках $|x| < |b|$.

Следствие 1. Область сходимости степенного ряда с центром 0 есть интервал $(-R, R)$ и, может быть, его концы (R может быть нулем или бесконечностью).

Действительно, область сходимости вместе с каждой своей точкой, по модулю равной x, содержит симметричный относительно нуля интервал $(-x, x)$. Поэтому она есть объединение бесконечного числа таких симметричных относительно нуля интервалов, которое есть тоже симметричный интервал $(-R, R)$ и, может быть, его концы, если они входят в область сходимости (рис. 7.14).



$\bigcup\limits_{x=|z|,\, z\in D}(-x, x) = (-R, R)$, но точки $\pm R$ мы могли не включить в объединение, если они принадлежат области сходимости D

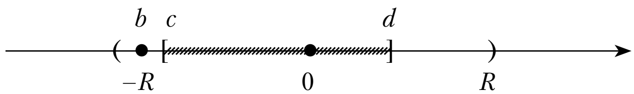
Рис. 7.14

Из результата леммы Абеля для рядов из производных и интегралов следует, что их область сходимости есть тот же интервал $(-R, R)$ и, возможно, другие его концы (точки $\pm R$).

Следствие 2. Пользуясь замечанием к определению степенного ряда с центром x_0 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, область сходимости для него и рядов из его производных и интегралов получается сдвигом на x_0 интервала $(-R, R)$, где R — радиус сходимости для $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Это будет интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ и, может быть, его концы, возможно, разные для самого ряда и ряда из производных или интегралов.

Следствие 3. На любом отрезке $[c, d] \subset (-R, R)$ ряд $\sum\limits_N^\infty a_n x^n$ и ряд из его производных $\sum\limits_N^\infty n a_n x^{n-1}$ сходятся равномерно при некотором N.

Доказательство этого следствия. Возьмем $b : m = \max\{|c|, |d|\} < |b| < R, \dfrac{m}{|b|} < 1$ (рис. 7.15).



$$m = \max\{|c|, |d|\} = |c|$$

$$|b| > m = |c|, \ \frac{m}{|b|} < 1$$

Рис. 7.15

По определению общего радиуса сходимости оба ряда сходятся в b. Поэтому для них верны при $n > N$ оценки из доказательства теоремы: $|a_n||x|^n < \dfrac{|x^n|}{|b^n|} = \left|\dfrac{x}{b}\right|^n < \left|\dfrac{m}{b}\right|^n$; $n|a_n||x|^{n-1} < n\dfrac{|x^{n-1}|}{|b^n|} < n\left|\dfrac{m^{n-1}}{b^n}\right|$. Однако $\left|\dfrac{m}{b}\right| < 1$, поэтому так же по Даламберу показываем сходимость рядов $\sum\limits_0^\infty \left|\dfrac{m}{b}\right|^n$ и $\sum\limits_1^\infty n\left|\dfrac{m^{n-1}}{b^n}\right|$. Из этого и приведенных оценок по достаточному признаку равномерной сходимости рядов получим равномерную сходимость ряда $\sum\limits_N^\infty a_n x^n$ и ряда из его производных $\sum\limits_N^\infty n a_n x^{n-1}$ при некотором N, а значит, и равномерную сходимость всех рядов, так как у них совпадают с указанными рядами остатки, начиная с N.

Определение 7.9. Если область сходимости для ряда $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n (x - x_0)^n$ есть интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ и, может быть, его концы, то R называется ***радиусом сходимости ряда***, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется его ***интервалом сходимости***.

Теорема 7.18 (вычисление радиуса сходимости). Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ — число или бесконечность. Тогда ряд $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ сходится при $|x| < R$, расходится при $|x| > R$, при $x = \pm R$ могут быть любые варианты, требуется отдельное исследование.

Доказательство. Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_0^\infty |a_n||x|^n$. При $x \neq 0$ члены этого ряда положительны. Поэтому при каждом фиксированном x применим признак Даламбера. Он дает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|x|}{R} = q$$

(при $R = +\infty$ будет $q = 0$).

По Даламберу ряд сходится при $q < 1$, т.е. при $\dfrac{|x|}{R} < 1$ или $|x| < R$ (при $R = +\infty$ сходимость на всей прямой). Аналогично ряд расходится при $q > 1$, т.е. при $\dfrac{|x|}{R} > 1$ или $|x| > R$ (при $R = 0$ ряд сходится только в нуле). Теорема доказана. Здесь область сходимости интервал $(-R, R)$ и, может быть, его концы.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ не существует, то область сходимости, как мы уже видели, имеет тот же вид: интервал $(-R, R)$ и, может быть, его концы, только R находится по-другому.

Теорема 7.19 (о дифференцировании и интегрировании суммы степенного ряда внутри интервала сходимости). Пусть ряд $\sum\limits_0^\infty a_n x^n = S(x)$ сходится при $|x| < R$. Тогда для любого отрезка $[c, d] \subset (-R, R)$ имеем $\int\limits_c^d S(x)dx = \sum\limits_0^\infty a_n \int\limits_c^d x^n dx = \sum\limits_0^\infty \dfrac{a_n}{n+1}(d^{n+1} - c^{n+1})$ и для любого x из интервала сходимости $S'(x) = \sum\limits_1^\infty a_n n x^{n-1}$.

Доказательство. Заметим, что любую точку x с $|x| < R$ можно поместить в некоторый отрезок, целиком лежащий в интервале сходимости. Тогда по следствиям 1 и 3 теоремы 7.17 следует равномерная сходимость самого ряда и ряда из производных, начиная с некоторого номера N, на любом отрезке из интервала сходимости. Отсюда по теоремам 7.13, 7.14 из линейности и равномерной сходимости получим:

$$\int_c^d S(x)dx = \int_c^d \sum_0^N a_n x^n + \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_0^{\infty} a_n \int_c^d x^n dx;$$

$$S'(x) = \left(\sum_0^N a_n x^n + \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_1^N a_n n x^{n-1} + \sum_{N+1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Следствие. Сумма степенного ряда имеет в интервале сходимости производные любого порядка, получающиеся почленным дифференцированием ряда. Действительно, первая производная суммы получается почленным дифференцированием и представляет собой степенной ряд с тем же интервалом сходимости. Аналогично эта первая производная имеет производную, получающуюся ее почленным дифференцированием и, значит, двукратным почленным дифференцированием исходного ряда с тем же интервалом сходимости и т.д. до бесконечности.

Иными словами, n-я производная суммы степенного ряда существует внутри интервала сходимости и получается n-кратным почленным дифференцированием исходного ряда.

Пример 1. Найти область сходимости, производную и первообразную суммы ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x-1)^n$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n(n+1)}{n\ln(n+1)} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot n}{n \ln n} = 1$. Интервал сходимости (0, 2).

Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала. При $x =$ $= 0$ получаем $\sum\limits_1^{\infty} \frac{\ln n}{n}(-1)^n$ — это ряд Лейбница, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, $\left(\frac{\ln n}{n}\right)' =$ $= \frac{1-\ln n}{n^2} < 0$ при $n \ge 3$. Значит, с $n = 3$ ряд сходится по признаку Лейбница, а следовательно, и весь сходится по теореме 7.2 (п. 6).

При $x = 2$ получаем $\sum\limits_1^{\infty} \frac{\ln n}{n}(1)^n$. Это знакоположительный ряд, $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ при $n > 2$.

$\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как ряд Дирихле с показателем 1. Следовательно, исходный ряд расходится по непредельному признаку сравнения при $n > 2$, а значит, по теореме 7.2 (п. 6) расходится и весь.

Итак, область сходимости [0, 2). Найдем теперь производную и первообразную почленным дифференцированием и интегрированием внутри интервала сходимости:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\left((x-1)^n\right)'=\sum_{1}^{\infty}\ln n(x-1)^{n-1};$$

$$\int_1^x S(t)dx=\int_1^x\sum_1^{\infty}\frac{\ln n}{n}(t-1)^n\,dt=\sum_1^{\infty}\frac{\ln n}{n(n+1)}(x-1)^{n+1}.$$

Пример 2. Руководствуясь правилом вычисления n-й производной суммы степенного ряда $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, выведенным в следствии к теореме 7.19, получим ряд для n-й производной:

$$S^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(x^k\right)^{(n)}=\sum_{k=n}^{\infty}a_kk(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)x^{k-n}=$$
$$=a_n(n)!+a_{n+1}(n+1)!x+a_{n+2}(n+2)(n+1)\ldots3x^2+\ldots$$

Подставив $x=0$, получим:

$$S^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(x^k\right)^{(n)}\Big|_{x=0}=a_n(n)!\ \forall\, n=1,2,\ldots$$

Отсюда $a_n=\dfrac{S^n(0)}{(n)!}$. Мы видим, что коэффициенты степенного ряда находятся по значениям в нуле производных его суммы.

7.4. РЯДЫ ТЕЙЛОРА. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ. СТАНДАРТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МАКЛОРЕНА

Зададимся теперь обратной задачей. Пусть $S(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R, R)$. Тогда можно вычислить последовательность чисел $a_n=\dfrac{S^n(0)}{(n)!}$.

Определение 7.10. Пусть $S(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R, R)$. Тогда ряд $\sum_0^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называется рядом Маклорена для $S(x)$ в точке $x_0=0$.

Найдем условие сходимости ряда Маклорена к $S(x)$ в некотором интервале $(-\delta, +\delta)$.

Дадим аналогичное определение ряда Тейлора.

Определение 7.11. Пусть $S(x)$ бесконечно дифференцируема на $(x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда ряд $\sum\limits_0^\infty \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется рядом Тейлора для $S(x)$ в точке x_0.

Теорема 7.20. Пусть $S(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-\delta, +\delta)$ и $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$ и $\forall$ натурального n имеем $\left|S^{(n)}(x)\right| \le M$ для одного и того же M. Тогда ряд Маклорена в $x_0 = 0$ сходится к $S(x)$ на $(-\delta,\ +\delta)$.

Доказательство. В теореме 4.21 была рассмотрена формула Маклорена для $S(x)$, n раз дифференцируемой на $(-\delta,\ +\delta)$: $S(x) = T_n(x) + R_n(x)$, $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$. Здесь многочлен Маклорена $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{S^{(k)}(0)}{(k)!}x^k$. Эта формула для каждого x является частичной суммой ряда Маклорена. Поэтому условием сходимости ряда Маклорена к $S(x)$ на $(-\delta,\ +\delta)$ является стремление к нулю в этих точках остатка в формуле Маклорена $S(x) - T_n(x) = R_n(x)$, $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$.

Проверим это при наших условиях. Для этого запишем остаток в форме Лагранжа (теорема 4.21) и оценим его модуль (точка θ лежит между 0 и x):

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{S^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \overset{\substack{\text{Условие}\\ \text{на производные}}}{\le} \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left\{|x| < \delta\right\} \le \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,\ n \to \infty$$

как член сходящегося ряда $\sum\limits_0^\infty \frac{M\delta^n}{(n)!}$.

В сходимости этого ряда можно убедиться по признаку Даламбера. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\delta^{n+1}(n)!}{(n+1)!\,M\delta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta}{(n+1)} = 0 = q < 1.$$

Итак, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S(x) - T_n(x) = 0$ на $(-\delta,\ +\delta)$. Поскольку $T_n(x)$ являются частичными суммами ряда Маклорена, по определению этот ряд сходится к $S(x)$ на $(-\delta,\ +\delta)$.

Замечание. Аналогично, заменой $x - x_0 = y$ сводя ряд Тейлора к ряду Маклорена, получаем, что ограниченность одной константой всех производных бесконечно дифференцируемой функции на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ является достаточным условием разложимости этой функции на этом интервале в ряд Тейлора.

Примеры (стандартные разложения Маклорена).

1. $S(x) = \sin x$ имеет ограниченные производные на всей прямой:

$$S(0) = \sin 0 = 0;$$
$$S'(x) = \cos x,\ S'(0) = 1;$$
$$S''(x) = -\sin x,\ S''(0) = 0;$$
$$S'''(x) = -\cos x,\ S'''(0) = -1.$$

Далее все производные и значения в нуле повторяются. Заметим, что все четные производные в нуле равны нулю. Поэтому в ряде Маклорена присутствуют только нечетные степени икса. Причем нечетные производные в нуле поочередно равны +1 и –1.

Получим разложение с бесконечным радиусом сходимости по теореме 7.20:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

2. Аналогично для $S(x) = \cos x$:

$$S(0) = \cos 0 = 1;$$
$$S'(x) = -\sin x,\ S'(0) = 0;$$
$$S''(x) = -\cos x,\ S''(0) = -1;$$
$$S'''(x) = \sin x,\ S'''(0) = 0.$$

Далее все производные и значения в нуле повторяются. Имеем, что все нечетные производные в нуле равны нулю. Поэтому в ряде Маклорена присутствуют только четные степени икса. Причем четные производные в нуле поочередно равны +1 и –1. Получим разложение с бесконечным радиусом сходимости:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!}.$$

3. $S(x) = e^x$. Все производные $S^{(n)}(x) = e^x$, $S^{(n)}(0) = 1$. На любом интервале $(-R, R)$ производные ограничены по модулю одним

и тем же числом $M = e^R$. Поэтому ряд Маклорена сходится к e^x на любом интервале $(-R, R)$, а потому также имеет бесконечный радиус сходимости, и получаем в любой точке:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n)!}.$$

4. $S(x) = \ln(1 + x)$, $|x| < 1$. Воспользуемся здесь возможностью интегрирования степенного ряда: $\ln(1 + x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t} dt.$

По формуле для суммы геометрической прогрессии при знаменателе t с $|t| < 1$ имеем $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_0^\infty (-1)^n t^n$. Радиус сходимости этого ряда 1, и там его можно почленно интегрировать: $\ln(1+t)\Big|_0^x = \sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum\limits_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (здесь мы заменили в последней сумме $n + 1$ на n).

Окончательно:

$$\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Радиус сходимости проинтегрированного ряда тот же $R = 1$.

5. $S(x) = (1 + x)^a$. Имеем $S'(x) = a(1 + x)^{a-1}$, и выполнено соотношение $S'(x)(1 + x) = a(1 + x)^a = aS(x)$. При этом верна следующая лемма.

Лемма 7.1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$f'(x)(1 + x) = af(x) \tag{7.3}$$

и $f(x) \neq 0, |x| < 1$, то $f(x) = (1 + x)^a C = S(x)C$.

Доказательство. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{1+x}$, $(\ln(f(x)))' = (\ln((1 + x)^a))'$. В силу свойств первообразных $\ln(f(x)) = \ln(1 + x)^a + \ln C$, $f(x) = C(1 + x)^a$. Лемма доказана.

Напишем ряд Маклорена для $S(x)$ и назовем его $f(x)$. Имеем $S(0) = 1$,

$$S'(x) = a(1+x)^{a-1} \text{ и } S'(0) = a;$$

$$S''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \text{ и } S''(0) = a(a-1);$$

$$S'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \text{ и } S'''(0) = a(a-1)(a-2);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

$$\text{и } S^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n+1);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Положим $f(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n)!} x^n$.

Осталось показать, что $f(x) = S(x)$ на общем интервале сходимости. Заметим сначала, что $S(x)$ определена при $x \geq -1$. Максимальный симметричный относительно нуля интервал, принадлежащий этой области, есть $(-1,\ 1)$. Покажем, что это будет интервал сходимости для $f(x)$, т.е. радиус сходимости соответствующего ряда равен единице.

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(n+1)!}{(n)!a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|a-n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1.$$

Покажем теперь, что наша $f(x)$ удовлетворяет соотношению (7.3) в интервале сходимости $(-1,\ 1)$. Найдем для этого ее производную по правилу дифференцирования рядов и подставим в левую часть соотношения:

$$f(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n)!} x^n;$$

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)n}{(n)!} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Далее, левая часть (7.3) равна

$$f'(x)(1+x) = \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^{n-1}}{(n-1)!}\right)(1+x) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)x^{n}}{(n)!} + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^{n}}{(n-1)!} =$$

$$= a + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^{n}}{(n-1)!}\left(\frac{a-n}{n}+1\right) =$$

$$= a + a\sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^{n}}{(n-1)!n} = af(x).$$

Итак, $f'(x)(1+x) = af(x)$. Следовательно, по лемме 7.1 $f(x) = C(1+x)^a$. Найдем C: $f(0) = C(1+0)^a = C$. При этом

$$f(0) = f(x)\Big|_{x=0} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n)!}x^n\Bigg|_{x=0} = 1+0 = 1.$$

Значит, $C = 1$ и $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n)!}x^n$ при $|x| < 1$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое числовой ряд, его частичные суммы? Что такое сходящийся числовой ряд?
2. Приведите непредельный признак сходимости неотрицательных числовых рядов.
3. Приведите предельный признак сходимости положительных числовых рядов.
4. Приведите признаки Коши и Даламбера сходимости положительных числовых рядов.
5. Приведите интегральный признак сходимости числовых рядов.
6. Что такое абсолютная и условная сходимость числовых рядов? Приведите признак Лейбница для условной сходимости.
7. Определите степенной ряд и опишите его область сходимости.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Сформулируйте необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости и примените их к исследованию на сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+1}};\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{1}{3n+10};\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n^2+3}{3n^2-1}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0{,}01}.$$

2. Применяя предельный признак сравнения, упростите ряды. К упрощенным рядам примените признак Даламбера и радикальный признак Коши:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-\sqrt{2n^2+3\ln n}}{3n+\sqrt{2n^2+n}}\right)^{2n-\sqrt{n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2n+\ln n+2^n}{n^3+m\pi^n+2^n}.$$

3. Используя предельный признак сравнения, упростить ряды. К упрощенным рядам применить условие сходимости ряда Дирихле или интегральный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln\left(n+e^n\right)}}{\sqrt{3n^2+n^4+\ln n}};\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left((2n+3)\ln n\right)^2}.$$

4. Исследовать на абсолютную сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{3n+23};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{2^n}+\ln n}.$$

К ряду, не сходящемуся абсолютно, применить признак Лейбница. Для каждого из рядов определить число слагаемых, которое нужно взять для вычисления сумм данных рядов с пятью верными знаками после запятой.

5. Найдите область определения функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2x+1)^n}{4^n\sqrt{n^4+1}}$.

6. Воспользовавшись стандартными разложениями, найдите три ненулевых слагаемых разложения функции $f(x)=\dfrac{4\cos x+\sin x}{\sqrt[3]{1+3x}}$ в ряд Маклорена. Проверьте первые два слагаемых прямым разложением в ряд.

7. Найдите область определения функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5-2x)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

8. Воспользовавшись стандартными разложениями, найдите три ненулевых слагаемых разложения функции $f(x)=\dfrac{2+\ln(1-2x)}{(1+x)^2}$ в ряд Маклорена. Проверьте первые два слагаемых прямым разложением в ряд.

9. Для функции $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n(-1)^n}{(n+1)2^n}$ найдите область определения и нарисуйте эскиз графика этой функции в малой окрестности точки $x=3$.

10. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\exp(-x^2)dx$, взяв четыре ненулевых слагаемых стандартного разложения. Оцените погрешность результата.

11. Для функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$ напишите три слагаемых разложения Тейлора в точке $x = 1$. Вычислите точное и приближенное значения функции при $x = 1{,}1$.

Тесты

1. А. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$. Б. Приведите пример его выполнения.

А. 1) если ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится.

Б. 1) $\sum\limits_{1}^{\infty} 2^n$; 2) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

2. Приведите пример расходящегося ряда, для которого не выполняется необходимый признак сходимости (из указанных ниже):

1) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} 2^{-n}$; 2) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n$.

3. Из указанных ниже рядов выберите пример того, что необходимый признак не является достаточным для сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} 2^{-n}$; 2) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n$.

4. Для каких приведенных ниже рядов имеет смысл пользоваться признаками Коши и Даламбера?

1) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} 2^{-n}$; 2) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n$.

5. Приведите признаки сходимости рядов Дирихле $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$:

1) сходятся при всех $\alpha > 0$; 2) сходятся при $1 > \alpha > 0$; 3) расходятся при $\alpha \geq 1$; 4) сходятся при $\alpha > 1$, расходятся при $0 < \alpha \leq 1$.

6. Что и почему будет с рядами Дирихле $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \leq 0$?

1) сходятся при всех $\alpha \leq 0$; 2) сходятся при $-1 > \alpha$; 3) расходятся при $\alpha \geq -1$; 4) расходятся при $0 \geq \alpha$.

7. Как связаны интервалы сходимости для рядов $\sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$, $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$?

1) совпадают; 2) убывают слева направо; 3) возрастают слева направо.

Глава 8
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. R^n, РАССТОЯНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА. ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЛИНИИ УРОВНЯ. ГРАФИК И КООРДИНАТНЫЕ ЛИНИИ

Прежде чем приступить к изложению материала, напомним некоторые понятия, известные из алгебры.

Пространством R^n называется множество упорядоченных наборов из n чисел, с покоординатными операциями сложения и умножения на число:

$$R_n = \left\{\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),\ x_i \in R,\ i = 1, \ldots, n\right\};$$

$$\overline{x} + \overline{y} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\right);$$

$$a\overline{x} = a \cdot \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n\right).$$

Эти операции обладают многими естественными свойствами, среди которых, например, коммутативность и ассоциативность сложения, разные правила раскрытия скобок, наличие нулевого элемента $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$; $\vec{0} + \overline{x} = \overline{x} + \vec{0} = \overline{x}$; обратного элемента $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$; $-\overline{x} + \overline{x} = \overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$.

Тогда расстоянием между точками называется $d(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Свойства расстояния следующие:

1) $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0,\ d(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$;

2) $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$;

3) $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$.

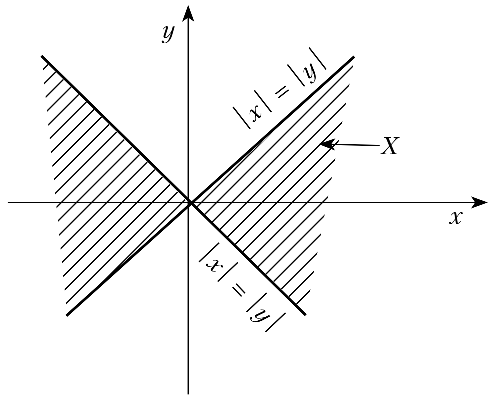
Последнее неравенство называется неравенством треугольника.

После введения перейдем к предмету этой главы.

Определение 8.1 (функции многих переменных). Пусть X — какое-то подмножество R^n. Тогда говорят, что задана функция n переменных с областью определения $X \subset R^n$, если для любой точки $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ единственным образом определено число

$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$. При этом X называется областью определения функции $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример: $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. Область определения $x^2 - y^2 \geq 0$, $|x| \geq |y|$ (рис. 8.1).



Обл. опред. $X : |x| \geq |y|$

Рис. 8.1

Определение 8.2 (поверхности уровня). Пусть $f(\bar{x})$ — функция n переменных, определенная на множестве $X \subset R^n$. Тогда поверхность, принадлежащая X, на которой $f(\bar{x}) = C$, называется поверхностью уровня C для $f(\bar{x})$.

Замечание. Для размерности 2 поверхности уровня являются линиями и они называются ***линиями*** уровня.

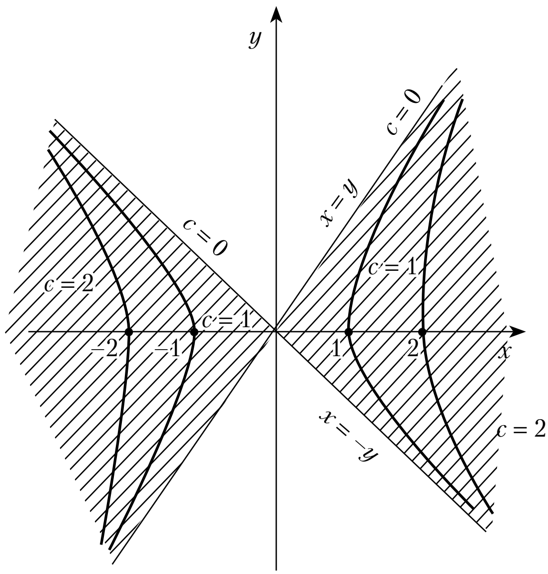
Пример. Нарисовать линии уровня 0, 1, 2 для $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. Имеем на линии уровня $f(x, y) = C$, $x^2 - y^2 = C^2$. При $C = 0$ имеем $x^2 - y^2 = 0$, $|x| = |y|$. Это две прямые $y = \pm x$. При $C \neq 0$ $x^2 / C^2 - y^2 / C^2 = 1$ — гипербола. Для C = 1,2 это изображено на рис. 8.2.

Определение 8.3 (график). Пусть $f(\bar{x})$ — функция n переменных, определенная на множестве $X \subset R^n$. Тогда поверхность $(n + 1)$-мерного пространства

$$\Gamma = \left\{ \bar{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) : \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in X,\ x_{n+1} = f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \right\}$$

называется графиком функции $f(\bar{x})$.

Пример. График функции двух переменных — поверхность в трехмерном пространстве. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$. График будет параболоидом вращения (рис. 8.3). Здесь линия уровня $f(x, y) = x^2 + y^2 = C$ при $C = 0$ будет точкой (0, 0), а при C, большем нуля, — окружностью радиуса $\sqrt{C}$, являющуюся проекцией окружности на графике, расположенной на высоте C (на «уровне» C) над плоскостью XOY.



$$c = 0 : |x| = |y|$$
$$c = 1 \quad x^2 - y^2 = 1$$
$$c = 2 \quad x^2 - y^2 = 4$$

Рис. 8.2

Определение 8.4 (координатные линии). Пусть $f(\overline{x})$ — функция n переменных, определена на множестве $X \subset R^n$:

$\Gamma = \left\{\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) : \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in X,\ x_{n+1} = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right\}$ — график функции $f(\overline{x})$. Тогда координатной x_k-линией на графике функции называется линия на графике, проходящая через точку $(\overline{x}_0, f(\overline{x}_0))$ проекция которой на R^n находится на k-й координатной линии пространства: $\overline{x} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, x_n^0) \subset R^n$, которая проходит через начальную точку $\overline{x}_0$ и параллельна k-й координатной оси.

Пример. На графике $f(x, y) = x^2 + y^2$ координатными x-линиями будут параболы $z = x^2 + y_0^2$ в вертикальной плоскости $y = y_0$, координатными y-линиями будут параболы $z = x_0^2 + y^2$ в вертикальной плоскости $x = x_0$ (рис. 8.4).

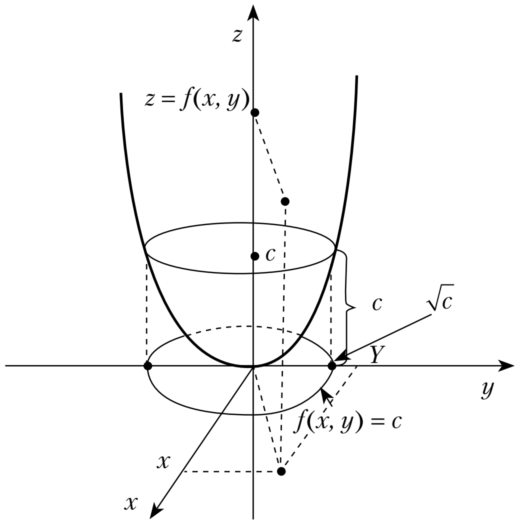
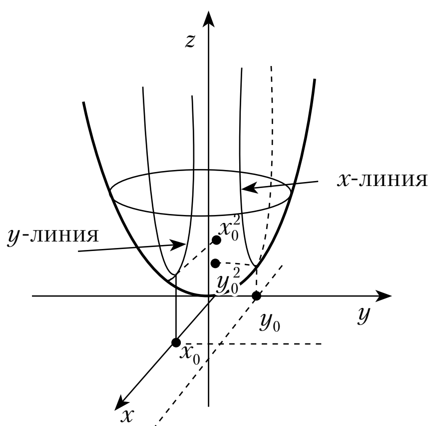


График $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
Показана на XOY линия уровня $f(x, y) = c$

Рис. 8.3



x-линия: $z = x^2 + y_0^2$
y-линия: $z = x_0^2 + y^2$

Рис. 8.4

8.2. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК. ВНУТРЕННИЕ, ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА, ОБЛАСТИ. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

Для перехода к определению пределов функций нужно определить окрестности точек в R^n.

Определение 8.5 (окрестность точки). ε-окрестностью точки $\bar{x}_0$ называется множество точек, удаленных от $\bar{x}_0$ менее чем на ε: $O_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in R^n : d(\bar{x}, \bar{x}_0) < \varepsilon\}$.

Примеры. На плоскости $O_\varepsilon(\bar{x}_0)$ — круг радиуса ε с центром $\bar{x}_0$ без окружности (рис. 8.5, *а*). В трехмерном пространстве это шар радиуса ε с центром $\bar{x}_0$ без граничной сферы (рис. 8.5, *б*).

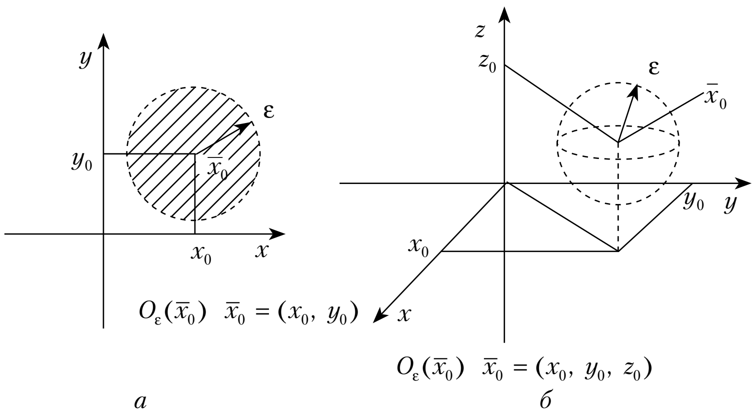


Рис. 8.5

Замечание. Аналогично тому, как это делалось для окрестностей точек прямой, проколотые окрестности точек получаются выбрасыванием из ранее определенных окрестностей их центра. Обозначение для этих окрестностей $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(\bar{x}_0)$ сохраняется.

Определение 8.6 (ограниченного множества). Множество $A \in R^n$ называется ограниченным, если оно целиком содержится в какой-либо окрестности точки.

Пример. Окрестность любой точки ограничена (содержится в себе самой). Треугольник на плоскости ограничен. Пирамида в пространстве ограничена (рис. 8.6).

Определение 8.7 (внутренней точки множества). Пусть дано множество $A \in R^n$. Точка $\bar{x}_0$ называется внутренней точкой множества A, если какая-то окрестность $\overline{x}_0$ целиком входит в множество A, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ будет $O_\varepsilon(\overline{x}_0) \subset A$.

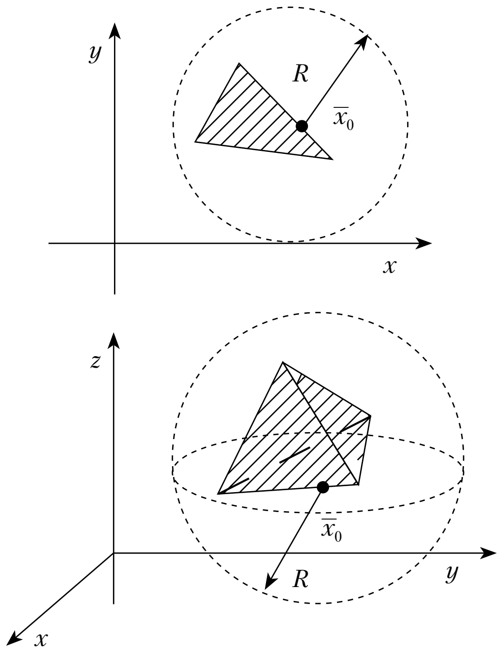


Рис. 8.6

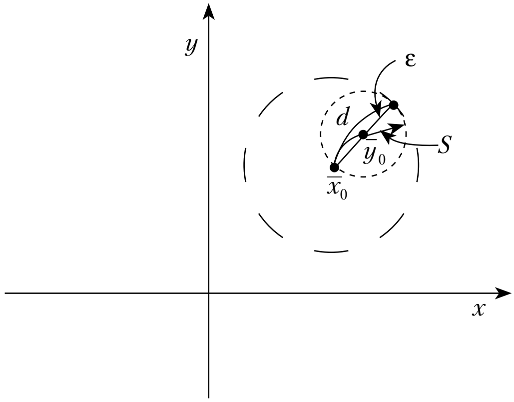
Определение 8.8 (открытого множества). Множество $A \subset R^n$ называется открытым, если все его точки внутренние.

Пример. Окрестность точки — открытое множество, так как все ее точки — внутренние (рис. 8.7).

Определение 8.9 (граничной точки множества). Пусть дано множество $A \in R^n$. Точка $\overline{x}_0$ называется граничной точкой множества A, если в любой окрестности $\overline{x}_0$ есть как точки, входящие в множество A, так и точки, в него не входящие (эта точка как бы находится «между множеством и не-множеством»).

Примеры

1. Круг на плоскости. Граничные точки — точки окружности. Действительно, для всякой точки A окружности и любой ε-окрестности точки A часть окрестности входит в круг (заштрихована), а часть — не входит (не заштрихована). Точки окружности граничные, а для точки круга B, не лежащей на окружности, есть δ-окрестность этой точки, вся лежащая в круге. Эти точки не граничные (рис. 8.8, *а*).



$$d = d(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \quad S = \varepsilon - d$$
$$O_S(\bar{y}_0) \subset O_\varepsilon(\bar{x}_0)$$

Рис. 8.7

2. Шар в пространстве. Граничные точки — точки сферы. Действительно, для всякой точки A сферы и любой ее ε-окрестности часть окрестности входит в шар (заштрихована), а часть окрестности — не входит (не заштрихована). Точки сферы граничные, но для точки B шара, лежащей вне сферы, есть δ-окрестность, вся лежащая в шаре. Поэтому эти точки не граничные (см. рис. 8.8, *б*).

3. Из приведенных примеров ясно, что окрестность $O_R(\bar{x}) \subset R^n$ имеет те же граничные точки, что и замкнутый шар с центром в $\bar{x}$ радиуса R.

Определение 8.10 (замкнутого множества). Множество $A \subset R^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Примеры. Замкнутый шар — замкнутое множество, так как содержит свою границу — сферу. Окрестность точки — незамкнутое множество, так как не содержит свою границу — сферу (см. рис. 8.8).

Определение 8.11 (области). Множество $A \subset R^n$ называется областью, если оно открыто и ограничено.

Пример. Окрестность точки — область (см. примеры к определениям 8.6 и 8.8). Перейдем теперь к определению пределов функций многих переменных.

На плоскости может встретиться последовательность точек $\bar{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, приближающаяся к какой-то точке $\bar{a}$ (рис. 8.9). Это можно выразить через расстояние: $d(\bar{x}_n, \bar{a}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Иллюстрируем это на плоскости.

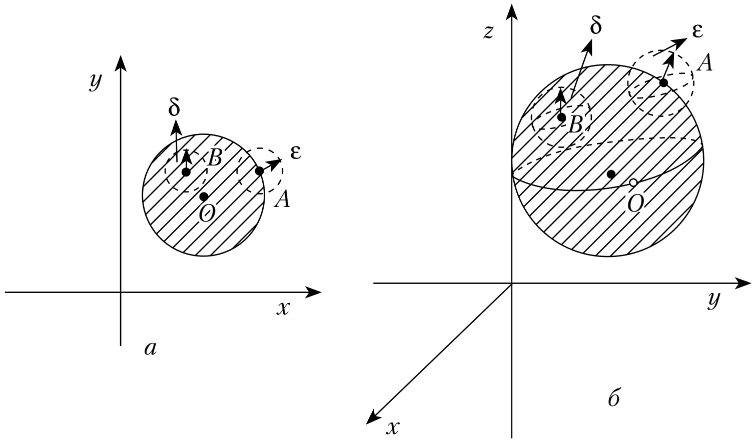


Рис. 8.8

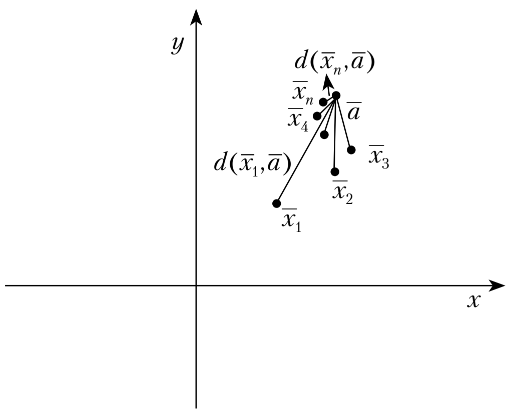


Рис. 8.9

На этом основано следующее оределение предела последовательности точек.

Определение 8.12 (сходимости последовательности точек). Пусть $\overline{x}_n \in R^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \overline{a}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(\overline{x}_n, \overline{a}) = 0$ ($d(\overline{x}_n, \overline{a})$ — числовая последовательность).

Вспомним, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} d(\overline{x}_n, \overline{a}) = 0$. По определению $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N$: при $n > N$ будет $d(\overline{x}_n, \overline{a}) < \varepsilon$. Иными словами, если последовательность точек $\overline{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ бесконечно приближается к какой-то точке $\overline{a}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} d(\overline{x}_n, \overline{a}) = 0$. Заменяя последовательность любыми точками, будем понимать, что $\overline{x} \to \overline{a}$ означает $d(\overline{x}, \overline{a}) \to 0$, т.е. это расстояние $d(\overline{x},\overline{a})$ становится меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и точка $\overline{x}$ будет при этом входить в окрестность точки $\overline{a}$ радиуса ε. Значит, $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b$ мы заменяем пределом $\lim\limits_{d(x,\overline{a})\to 0} f(\overline{x}) = b$. Это аналогично пределу функции одного числового переменного $d(\overline{x},\overline{a})$ (хотя $f(\overline{x})$ не обязательно есть функция $d(\overline{x},\overline{a})$!). Для функции одного переменного это означало, что $f(\overline{x})$ становится сколь угодно близкой к b (т.е. $\forall\ \varepsilon > 0$ будет $\left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon$), если $d(\overline{x},\overline{a})$ достаточно близко к нулю (т.е. при $0 < \left|d(\overline{x},\overline{a})\right| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$). Поэтому получаем следующее общепринятое определение.

Определение 8.13 (предела функции многих переменных в терминах $\varepsilon - \delta$). Пусть функция $f(\overline{x})$ определена в некоторой окрестности $\overset{o}{O}_\eta(\overline{a}) \subset R^n$. Говорят, что $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b$, т.е. $\lim\limits_{d(\overline{x},\overline{a})\to 0} f(\overline{x}) = b$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: при $0 < d(\overline{x},\overline{a}) < \delta$ будет $\left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon$.

Замечание 1. Поскольку

$$\left|x_i - a_i\right| \le d\left(\overline{x},\overline{a}\right) = \sqrt{\left(x_1 - a_1\right)^2 + \ldots + \left(x_n - a_n\right)^2} \le$$
$$\le \sqrt{n}\max\nolimits_{i=1,\ldots,n}\left|x_i - a_i\right|,\ i - 1,\ldots,n,$$

следовательно, $d(\overline{x},\overline{a}) \to 0 \Leftrightarrow \left|\overline{x}_i - \overline{a}_i\right| \to 0\ \ \forall\, i = 1,\ldots,n$, т.е. расстояние между точками бесконечно мало тогда и только тогда, когда имеет место покоординатная сходимость точек и $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b = \lim\limits_{d(\vec{x},\vec{a})\to 0} f(\vec{x}) = \lim\limits_{\substack{x_i\to a_i \\ i=1_i,\ldots,n}} f(\overline{x})$.

Замечание 2. Для функций многих переменных не рассматриваем бесконечные пределы или пределы на бесконечности.

Пример. Найти $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} x$. Имеем $f(x,y) = x$ и по замечанию к определению 8.13

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} x \overset{\substack{\text{Покоординатная} \\ \text{сходимость}}}{=} \lim_{x\to 1,\, y\to -2} x = 1.$$

Теорема 8.1 (свойства пределов). Пусть $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b\ \lim\limits_{x\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(\overline{x}) + g(\overline{x}) = b + c$, $\lim\limits_{x\to\overline{a}} df(\overline{x}) = db,\ d \in R$; $\lim\limits_{x\to a} f(\overline{x})g(\overline{x}) ==$ bc; $\lim\limits_{x\to\overline{a}} \dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \dfrac{b}{c}$ при $c \ne 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(\overline{x}) = \lim\limits_{d(\overline{x},\overline{a})\to 0} f(\overline{x})$, доказательство не отличается от доказательтва для функций одного переменного (теорема 5.5). Мы доказательств не приводим (приведите их сами).

Пример. Найти

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} xy + x / (y-2) = \lim_{x\to 1,\, y\to -2} x \lim_{x\to 1,\, y\to -2} y +$$
$$+\frac{\lim\limits_{x\to 1,\, y\to -2} x}{\lim\limits_{x\to 1,\, y\to -2} y - \lim\limits_{x\to 1,\, y\to -2} 2} = 1(-2) + \frac{1}{-2-2} = -2{,}25.$$

Замечание. Пусть функция двух переменных определена на множестве A, имеющем точку $\overline{a}$ граничной и, следовательно, не содержащем никакой ее окрестности. Тогда аналогично можно определить предел в этой точке по множеству A.

Определение 8.14 (предела функции многих переменных по множеству). Пусть функция $f(\overline{x})$ определена на множестве A и точка $\overline{a}$ является внутренней или граничной точкой этого множества.

Говорят, что предел функции по множеству A

$$\lim_{\begin{cases}\overline{x}\to\overline{a}\\ \overline{x}\in A\end{cases}} f(\overline{x}) = \lim_{\begin{cases}d(\overline{x},\overline{a})\to 0\\ \overline{x}\in A,\, \overline{x}\neq\overline{a}\end{cases}} f(\overline{x}) = b,$$

если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$; при $\begin{cases} 0 < d(\overline{x},\overline{a}) < \delta \\ \overline{x} \in A \end{cases}$ будет $|f(\overline{x}) - b| < \varepsilon$.

Замечание. Для пределов по множеству выполнены все свойства пределов функций.

Пример:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ x^2+y^2\le 1}} \sqrt{1-x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1,\, y\to 0\\ x^2+y^2\le 1}} \sqrt{1-x^2-y^2} = \lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ x^2+y^2\le 1}} \sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

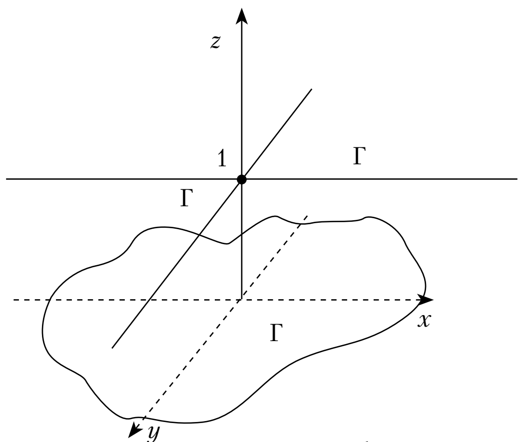
8.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТОЧКЕ. ИХ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СУПЕРПОЗИЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ НА МНОЖЕСТВЕ. ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА

Определение 8.15 (непрерывность функции в точке). Пусть функция $f(\overline{x})$ n переменных определена в $O_\eta(\overline{a})$. Она называется непрерывной в $\overline{a}$, если $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.

Замечание. Если $f(\overline{x})$ непрерывна в $\overline{a}$, то ее график (поверхность) не «разрывается» в этой точке. Например, если $(x, y) \to (a, b)$, то $(x, y, f(x, y)) \xrightarrow[\text{сходимость}]{\text{Покоординатная}} (a, b, f(a, b))$ — точка графика. Другими словами, если двигаться по графику непрерывной функции в направлении (a, b), то попадаешь в точку графика $(a, b, f(a, b))$.

Пример: $f(x, y) = \begin{cases} 1, x \cdot y = 0, \\ 0, x \cdot y \neq 0. \end{cases}$

Ее график — плоскость XOY с вырезанным «крестом» из координатных осей, поднятым на уровень $z = 1$ так, что график получается разрезанным по координатным осям в плоскости XOY. Поэтому в точках этих осей нет непрерывности функции. В точках (x, y), $xy \neq 0$ будет непрерывность, что видно по графику (рис. 8.10).



Г — график $f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$

Рис. 8.10

Теорема 8.2 (арифметические свойства непрерывных функций). Пусть функции n переменных $f(\overline{x})$, $g(\overline{x})$ непрерывны в $\overline{a}$. Тогда $f(\overline{x}) + g(\overline{x}), df(\overline{x}), d \in R, f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}), \dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})}$ при $g(\overline{a}) \neq 0$ тоже непрерывны в $\overline{a}$.

Доказательство следует из свойств пределов и не приводится.

Теорема 8.3 (непрерывность функции, зависящей от одного переменного). Пусть $f(x)$ непрерывна, как функция одного переменного в точке a. Тогда функция n переменных $F(\overline{x}) = f(x_i)$, для фиксированного i: $1 \le i \le n$ непрерывна в любой точке $\overline{b} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Доказательство: $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{b}} F(\overline{x}) = \lim\limits_{x_k \to b_k,\, k=1,2,\dots,n} f(x_i) = \lim\limits_{\substack{x_k \to a_k,\, k \ne i, \\ k=1,2,\dots n,\, x_i \to a}} f(x_i) = f(a) = F(\overline{b})$. Непрерывность доказана.

Мы здесь воспользовались непрерывностью $f(x_i)$ в точке a.

Теорема 8.4 (непрерывность суперпозиции для функции двух переменных). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в (x_0, y_0); $x(u, v)$, $y(u, v)$ непрерывны в (u_0, v_0), причем $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$. Тогда $f(x(u, v), y(u, v))$ непрерывна в (u_0, v_0).

Доказательство. По определению непрерывности $x(u, v)$, $y(u, v)$ в (u_0, v_0), а затем непрерывности $f(x, y)$ в (x_0, y_0) получим:

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = \lim_{\substack{(u,v)\to(u_0,v_0)\Rightarrow \\ x(u,v)\to x(u_0,v_0)=x_0 \\ y(u,v)\to y(u_0,v_0)=y_0}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) =$$

$$= f(x_0, y_0) = f\big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big),$$

что и означает непрерывность сложной функции.

Определение 8.16 (непрерывность функции в точке по множеству). Пусть функция $f(\overline{x})$ n переменных определена на множестве A, содержащем $\overline{a}$. Она называется непрерывной в $\overline{a}$ по множеству A, если предел по этому множеству:

$$\lim_{\begin{cases} \overline{x}\to\overline{a} \\ \overline{x}\in A \end{cases}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}).$$

Определение 8.17 (непрерывность функции на множестве). Функция $f(\overline{x})$ n переменных, определенная на множестве A, называется непрерывной на нем, если она непрерывна по этому множеству в каждой его точке.

Аналогично функциям одного переменного для функций многих переменных верны теоремы Вейерштрасса, которые приводятся без доказательства.

Теорема 8.5 (1-я теорема Вейерштрасса, ограниченность непрерывной функции). Пусть функция $f(\overline{x})$ n переменных определена на замкнутом и ограниченном множестве A и непрерывна на нем. Тогда эта функция ограничена на множестве A.

Теорема 8.6 (2-я теорема Вейерштрасса, достижение непрерывной функцией максимума и минимума). Пусть функция $f(\overline{x})$ n переменных определена на замкнутом и ограниченном множестве A

и непрерывна на нем. Тогда эта функция достигает на множестве A своего максимального и минимального значения.

Пример. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена и непрерывна на круге $x^2 + y^2 \le 1$. Круг замкнут и ограничен. Там функция ограничена: $0 \le f(x, y) \le 1$ и достигает минимума (0) в (1, 0) и максимума (1) — в (0, 0).

8.4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ГРАФИКУ, ЕЕ УРАВНЕНИЕ. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ФОРМУЛА ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Изложение этого параграфа приводим для функций двух переменных. Это легко переносится на случай функций большего числа переменных.

Функция двух переменных $f(x, y)$ превращается в функцию одного переменного, если фиксировать другое переменное, а у функций одного переменного определена производная. На основании этого определим частные производные функции двух переменных.

Определение 8.18 (частных производных). Частной производной от функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной x называется производная от функции одной переменной $f(x, y_0)$ в точке x_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Аналогично частной производной от функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной y называется производная от функции одной переменной $f(x_0, y)$ в точке y_0:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0}.$$

Примеры:

$$\frac{\partial \sin(x + 2xy + y^2)}{\partial x} = \cos(x + 2xy + y^2)(1 + 2y);$$

$$\frac{\partial \sin\left(x+2xy+y^2\right)}{\partial y}=\cos\left(x+2xy+y^2\right)\left(2x+2y\right).$$

Замечание. Аналогично частной производной функции n переменных в начальной точке по переменной с номером i называется производная функции, полученной из данной фиксированием всех переменных кроме i-й, взятая в начальной точке для i-й переменной.

Рассмотрим теперь геометрический смысл частных производных (для двух переменных). Если изучить график функции $z = f(x, y)$, точку графика $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и координатные линии на графике в этой точке $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$, то последние являются графиками функций $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$ в плоскостях $y = y_0$, $x = x_0$ соответственно. Если первая функция имеет производную по x в x_0, вторая — производную по y в y_0, то эти производные будут равны тангенсам углов наклона касательных к соответствующим координатным линиям в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. По определению значения этих производных равны значениям соответствующих частных производных. Поэтому *геометрический смысл частных производных* $z=f(x, y)$ *в* (x_0, y_0) *— это тангенсы наклона касательных к соответствующим координатным линиям в точке* (x_0, y_0).

Выведем общепринятые формулы для частных производных.

Теорема 8.7 (формулы для частных производных). Функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет частные производные тогда и только тогда, когда существуют равные этим производным конечные пределы:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{x-x_0};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x, y)-f\left(x_0, y_0\right)}{y-y_0}.$$

Доказательство. Эти формулы легко вытекают из расписывания определения, например:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)=\left.\frac{df\left(x, y_0\right)}{dx}\right|_{x=x_0}\overset{\substack{\text{Формула}\\ \text{производной}\\ \text{по 1 переменной}}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{x-x_0},$$

что и требовалось локазать. Для производной по y все аналогично.

Для дальнейшего изучения напишем по этим частным производным уравнения касательных прямых к координатным линиям в точке (x_0, y_0). В плоскости $x = x_0$ начальная точка $z_0 = f(x_0, y_0)$, тангенс наклона касательной к координатной y-линии $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0}$. Поэтому уравнение этой касательной прямой:

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \\ x = x_0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Аналогично в плоскости $y = y_0$ начальная точка $z_0 = f(x_0, y_0)$, тангенс наклона касательной к координатной x-линии $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Поэтому уравнение этой касательной прямой:

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0), \\ y = y_0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Все эти касательные l_y и l_x изображены на рис. 8.11, *а*, *б* в вертикальных плоскостях и на рис. 8.11, *в* — в трехмерном пространстве.

Заметим, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость. Сравнивая уравнения этих прямых (8.1) и (8.2), можно сразу написать уравнение этой плоскости: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Эта плоскость, как легко проверить, содержит обе касательные прямые к координатным линиям на графике, а значит, вместе с этими касательными она — самая близкая к координатным линиям плоскость, проходящая через $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, отличающаяся на $o(x - x_0)$ от x-линии и на $o\,(y - y_0)$ — от y-линии, так что можно в обоих случаях писать как $o(x - x_0) = o(\rho)$ и $o(y - y_0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (заметим, что $|x - x_0| \le \rho$ и $|y - y_0| \le \rho$ и равенства достигаются на координатных линиях через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Иными словами, эта плоскость отличается от графика $f(x, y)$ на $o(\rho)$ на координатных прямых $y = y_0$ и $x = x_0$ в области опеределения. В силу единственности касательных прямых к координатным линиям это значит, что, если плоскость, проходящая через $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, отличается от графика на $o(\rho)$ всюду в области определения при приближении к (x_0, y_0), то она совпадает с найденной плоскостью! Для любого графика это может быть не выполнено (см. рис. 8.10 в $(0, 0)$).

Определим теперь понятие касательной плоскости к графику.

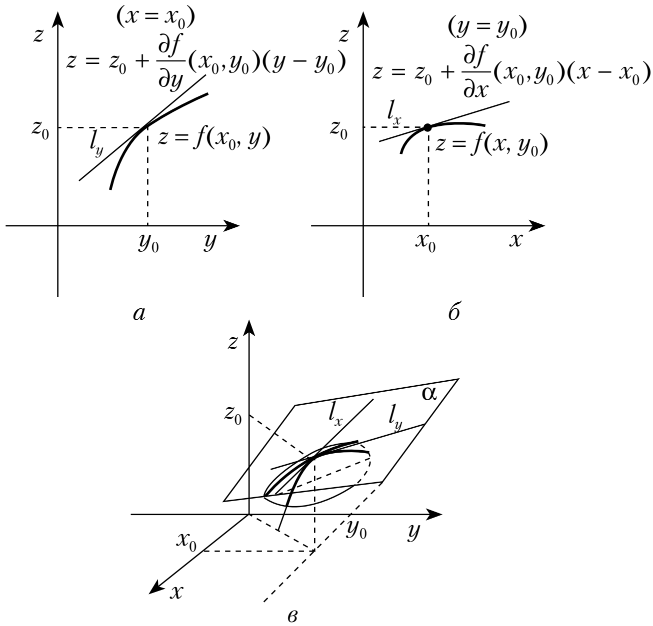


Рис. 8.11

Определение 8.19 (касательная плоскость). Пусть $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда плоскостью, касательной к графику в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, называется плоскость $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$, все более приближающаяся к графику $z = f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, что записывается как

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Замечание. В силу проведенных перед определением касательной плоскости рассуждений получаем, что если функция имеет обе частные производные в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость должна иметь уравнение

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Сейчас покажем обратное.

Теорема 8.8 (формула для касательной плоскости). Если график $z = f(x, y)$ имеет касательную плоскость $z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ в точке (x_0, y_0), то эта функция имеет частные производные в этой точке и

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\ B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно доказать для одного коэффициента, для другого все аналогично.

Будем действовать по формуле для частных производных, подставляя определение касательной плоскости и расстояния между точками:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{y=y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2}\right) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{A(x - x_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} A + \frac{o(x - x_0)}{(x - x_0)} = A + 0$$

по определению $o(x - x_0)$.

Определение 8.20 (дифференцируемость). Функция $z = f(x, y)$, определенная в окрестности точки (x_0, y_0), называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если у графика функции в этой точке существует касательная плоскость.

Замечание 1. Это перефразированное определение существования касательной плоскости удобно тем, что называет существование касательной плоскости одним словом, что упрощает изложение.

Замечание 2. Другими словами, из определения дифференцируемости для $f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ следует асимптотическое равенство $f(x,y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, что совпадает с общепринятым определением дифференцируемости.

В силу формулы для касательной плоскости имеем для дифференцируемой в точке функции

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\ B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Отсюда следует теорема 8.9.

Теорема 8.9. Формула для приращения дифференцируемой в (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ имеет вид

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Замечание. Из этой формулы при $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 \neq 0$ следует равенство $\Delta f(x_0, y_0) \sim \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, т.е. приращение дифференцируемой функции имеет в этом случае главную линейную часть. Эта линейная часть имеет свое название.

Определение 8.21 (дифференциал). Дифференциалом дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ называется $df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Замечание 1. При $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 \neq 0$ из равенства $\Delta f(x_0, y_0) \sim \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ следует, что при этом ***дифференциал есть главная линейная часть приращения***. В некоторых учебниках приводится такое определение дифференциала.

Замечание 2 (геометрический смысл дифференциала). Запишем уравнение касательной плоскости в несколько ином виде:

$$\Delta z_{\text{кас}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \overset{\text{По определению}}{=} df(x_0, y_0).$$

Итак, получили, что ***дифференциал есть приращение аппликаты касательной плоскости*** (рис. 8.12).

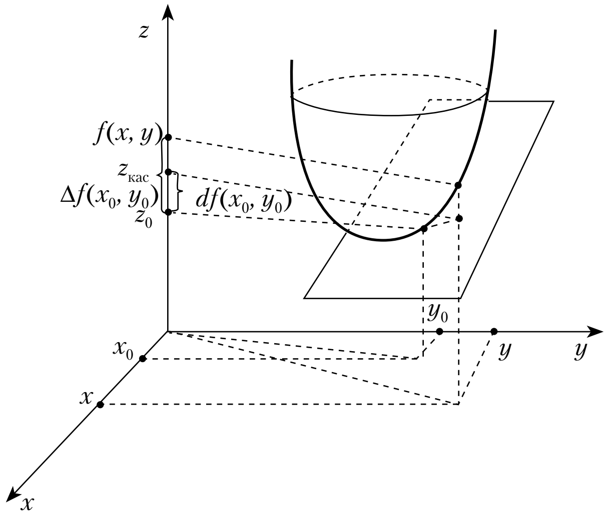


Рис. 8.12

Поскольку график дифференцируемой функции приближается к графику касательной плоскости при приближении к точке, естественно получить линейное приближение для дифференцируемой функции, заменяя ее касательной плоскостью вблизи точки.

Определение 8.22 (формула линеаризации). Формулой линеаризации (ФЛ) для дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ называется приближенная формула

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Замечание. Эта формула используется для приближенных вычислений. Однако для этого нужно уметь проверять, будет ли функция дифференцируемой.

Приведем достаточное условие дифференцируемости.

Теорема 8.10. Если функция $f(x, y)$ имеет в окрестности (x_0, y_0) обе частные производные, непрерывные в (x_0, y_0), то она дифференцируема в (x_0, y_0).

Доказательство. Используя формулу Лагранжа по одной переменной при фиксированной другой, получаем

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\big(x_0+\theta_1(x-x_0),y\big)(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x_0,y_0+\theta_2(y-y_0)\big)(y-y_0)\overset{\substack{\text{Непрерывность}\\\text{производной}}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{Непрерывность}\\\text{производной}}}{=}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\alpha(x,y)\right)(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\beta(x,y)\right)(y-y_0)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+o(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(y-y_0)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),$$

где $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — бесконечно малые при $\rho\to 0$, здесь $0\le\theta_i\le 1,\ i=1,2.$

При выводе формулы мы использовали также то, что

$$|x-x_0|\le\rho,\ |y-y_0|\le\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$x-x_0=\rho\cdot\frac{x-x_0}{\rho},\ y-y_0=\rho\cdot\frac{y-y_0}{\rho}.$$

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{(3{,}023)^2+(3{,}934)^2}$. Для этого введем в рассмотрение функцию двух переменных $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Ее частные производные будут $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Они непрерывны всюду, кроме (0, 0). Следовательно, всюду, кроме этой точки, функция дифференцируема. В частности, она дифференцируема в точке $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Тогда $z_0 = f(x_0, y_0) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Применим формулу линеаризации для $(x, y) = (3{,}023;\ 3{,}934)$. Тогда $x-x_0 = 0{,}023$; $y-y_0 = -0{,}066$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(3,4)}=\frac{3}{5}=0{,}6;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(3,4)}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Подставим это в ФЛ:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Получим

$$\sqrt{(3{,}023)^2 - (3{,}934)^2} \approx 5 + 0{,}6 \cdot 0{,}023 - 0{,}8 \cdot 0{,}066 = 4{,}961.$$

8.5. ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Теорема 8.11. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы в $t = t_0$, причем $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Тогда сложная функция $f(x(t), y(t))$ дифференцируема в $t = t_0$, причем $\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx}(t_0)$.

Доказательство. В силу дифференцируемости $f(x, y)$ в (x_0, y_0) имеем

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ + \alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Подставляя $(x(t), y(t))$ и деля на $t - t_0$, получим

$$\frac{f(x(t),y(t)) - f(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{x(t)-x(t_0)}{(t-t_0)} + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + \\ + \alpha(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{x(t)-x_0}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y_0}{t-t_0}\right)^2}, \tag{8.3}$$

где $\alpha(x(t), y(t))$ — бесконечно малая при $x(t) \Rightarrow x_0 = x(t_0)$, $y(t) \Rightarrow y_0 = y(t_0)$ и, значит, из-за непрерывности $x(t)$ и $y(t)$

$\alpha(x(t), y(t))$ — бесконечно малая при $t \Rightarrow t_0$. Тогда $\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{dx}{dt}(t_0)$, $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}(t_0)$. Переходя к пределу в (8.3) при $t \Rightarrow t_0$, получим:

$$\frac{df\left(x(t_0), y(t_0)\right)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx}(t_0).$$

Существование производной для функции одного переменного эквивалентно дифференцируемости. Поэтому последняя формула доказывает теорему.

Пример 1. Получим для примера, используя этот результат, формулу для дифференцирования частного двух функций $u = u(x)$, $v = v(x)$. Пусть $f(u, v) = \dfrac{u}{v}$ дифференцируема при $v \neq 0$, $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемы в x_0, причем $v(x_0) \neq 0$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{v}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = -\dfrac{u}{v^2}$. Поэтому по теореме 8.11

$$\frac{d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{v} - \frac{u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{\dfrac{du}{dx}v - \dfrac{dv}{dx}u}{v^2}.$$

Это известная формула.

Назовем функцию непрерывно дифференцируемой в точке, если она имеет там непрерывные производные. Тогда она будет дифференцируемой в этой точке.

Теорема 8.12. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в точке (x_0, y_0); $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в (u_0, v_0), причем $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$. Тогда сложная функция $f(x\,(u, v), y(u, v))$ дифференцируема в (u_0, v_0), причем

$$\frac{\partial f\left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\right)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0);$$

$$\frac{\partial f\left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\right)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Доказательство. Частная производная от функции по u считается при фиксированном v. При этом $x(u, v)$, $y(u, v)$ тоже превращаются в функции одного переменного u, а частные производные есть производные от функций одного u. Таким образом, первая формула — это формула предыдущей теоремы. Вторая формула получается аналогично при фиксировании u. По свойствам непрерывных функций полученные производные также будут непрерывны в начальной точке (u_0, v_0). Поэтому сложная функция будет там дифференцируема.

Аналогичная теорема имеет место для сложной функции вида $f(t(u, v))$ для непрерывно дифференцируемой в (u_0, v_0) функции $t(u, v)$, $t(u_0, v_0) = t_0$ и непрерывно дифференцируемой в t_0 функции $f(t)$:

$$\frac{\partial f\left(t\left(u_0, v_0\right)\right)}{\partial u} = \frac{df}{dt}\left(t_0\right)\frac{\partial t}{\partial u}\left(u_0, v_0\right);$$

$$\frac{\partial f\left(t\left(u_0, v_0\right)\right)}{\partial v} = \frac{df}{dt}\left(t_0\right)\frac{\partial t}{\partial v}\left(u_0, v_0\right).$$

Выведите это самостоятельно из теоремы 8.11.

Пример. Найти частные производные $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4 + \sin^3(x + y))$.

Можно рассмотреть вспомогательные функции $u(x, y) = x^2 + y^4$, $v(x, y) = \sin^3(x + y)$. Здесь внешняя функция $\ln(u + v)$. Ее производные:

$$\frac{\partial \ln\left(u + v\right)}{\partial u} = \frac{1}{u + v},\ \frac{\partial \ln\left(u + v\right)}{\partial v} = \frac{1}{u + v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 3\sin^2\left(x + y\right)\cos\left(x + y\right) = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) = \frac{1}{x^2 + y^4 + \sin^3\left(x + y\right)}\left(2x + 3\sin^2\left(x + y\right)\cos\left(x + y\right)\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) = \frac{1}{x^2 + y^4 + \sin^3\left(x + y\right)}\left(4y^3 + 3\sin^2\left(x + y\right)\cos\left(x + y\right)\right).$$

(Переходя здесь к вспомогательным переменным (u, v), мы делаем вычисления менее громоздкими. Конечно, мы можем производные считать непосредственно по (x, y). Результаты будут одинаковы.)

Перейдем к рассмотрению производной в точке по заданному направлению.

Определение 8.23 (производной по направлению). Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). $\vec{e} = (a, b)$ — единичный вектор, приложенный в этой точке. Тогда прямая $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ имеет часть, лежащую в этой окрестности, на которой будет определена функция. На этой прямой она будет функцией одной переменной t, записываемой $f(at + x_0, bt + y_0)$ и имеющей в $t = 0$ значение $f(x_0, y_0)$. Если эта функция дифференцируема в $t = 0$ при $t > 0$, то эта ее правосторонняя производная называется производной от $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению $\vec{e} = (a, b)$. Это записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(at + x_0, bt + y_0)\Big|_{t=0,\, t\geq 0} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(at + x_0, bt + y_0) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Замечание 1. Поскольку на нашей прямой расстояние

$$\rho = d\big((x(t), y(t)), (x_0, y_0)\big) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = |(a, b)| \cdot |t| = |t|.$$

на луче, сонаправленном с направляющим вектором при $t > 0$, будет $t = \rho$. Это значит, что ***расстояние между точками прямой и началом можно измерять по параметру t***, если направляющий вектор имеет длину 1. ***Геометрический смысл производной по направлению*** — это производная функции по расстоянию от начала луча, характеризующая ***скорость изменения функции в данном направлении в зависимости от удаления от начала***.

Замечание 2. Функция $f(at + x_0, bt + y_0)$ может здесь не иметь двусторонней производной в $t = 0$! (если $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial f}{\partial(-e)} f(x_0, y_0)$).

Теорема 8.13 (формула для производной по направлению). Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). $\vec{e} = (a, b)$ — единичный вектор, приложенный в этой точке. Тогда производная функции по направлению этого вектора будет:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Доказательство следует из применения к определению производной по направлению формулы теоремы 8.11 (проведите это!).

Дадим теперь следующее определение.

Определение 8.24 (градиента). Если функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) обе производные, то составленный из них вектор называется градиентом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Он обозначается

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Следствие 1 теоремы 8.13. С учетом этого определения формулу для производной по направлению можно переписать через скалярное произведение вектора направления и градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left((a, b), \operatorname{grad} f(x_0, y_0)\right).$$

Следствие 2 теоремы 8.13. Вектор градиент задает направление наибольшего возрастания функции в точке его приложения. Достаточно доказать, что производная по направлению градиента максимальна.

Действительно, применяя неравенство Коши — Буняковского для скалярного произведения $|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$, получим:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0)\right| = \left|\left((a, b), \operatorname{grad} f(x_0, y_0)\right)\right| \overset{\substack{\text{Неравенство} \\ \text{Коши — Бунаковского}}}{\leq}$$

$$\overset{\substack{\text{Неравенство} \\ \text{Коши — Бунаковского}}}{\leq} |(a, b)|\left|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\right| \overset{(a,b)\text{ — единичный}}{=} \left|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\right|.$$

Если (a, b) сонаправлен градиенту, то $(a, b) = \dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left((a, b), \operatorname{grad} f\right) = \frac{|\operatorname{grad} f|^2}{|\operatorname{grad} f|} = |\operatorname{grad} f| > 0$$

достигает максимального значения. При этом производная больше нуля, значит, в направлении градиента функция всегда возрастает.

Пример 1. Найти направления максимального изменения $\ln(x + y^2)$ в точке (1, 0) и скорость изменения функции по этому направлению. Убывает или возрастает функция в направлении градиента

$$\operatorname{grad} f(1,0) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2} \right) \Bigg|_{(1,0)} = (1,0).$$

Единичный вектор по этому направлению будет $\vec{e} = (1,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left((1,0), \operatorname{grad} f\right) = \left((1,0),(1,0)\right) = 1 > 0.$$

Производная по направлению градиента положительна, поэтому функция по этому направлению возрастает. Скорость изменения функции в направлении градиента есть производная по его направлению, т.е. 1.

8.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ТЕОРЕМА ШВАРЦА. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Аналогично производным функции одного переменного определяются производные высших порядков для функции многих переменных. Причем производные каждого следующего порядка есть производные от производных предыдущего порядка. Определим подробнее производные 2-го порядка функции двух переменных.

Определение 8.25 (производных 2-го порядка). Если производные 1-го порядка для некоторой функции сами имеют производные в какой-то точке, то эти производные называются производными 2-го порядка от данной функции в этой точке. При этом в зависимости от порядка дифференцирования они обозначаются как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Последние две производные называются смешанными. Причем понимание связи записи для них с порядком дифференцирования условное, может меняться в разных учебниках. Можно читать запись $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ как дифференцирование сначала по y, а затем по x, а можно в обратном порядке (мы во всех случаях используем первый вариант).

Теорема 8.14. Если все производные функции 1-го и 2-го порядка непрерывны в точке, то смешанные производные 2-го порядка в ней равны.

Доказательство. Для начала вспомним формулу Тейлора в форме Лагранжа 2-го порядка для функции одного переменного $f(x)$. Если $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную 2-го порядка, то в этой окрестности справедлива формула

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0 + \theta\Delta x)\frac{(\Delta x)^2}{2}, \qquad (8.4)$$

где $0 < \theta < 1$.

Вернемся к нашей функции двух переменных. Применим (8.4) к $f(x, y_0)$ при фиксированном y_0:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x_0, y_0) + f'_x(x, y_0)\Big|_{x=x_0} \Delta x +$$
$$+ f''_{xx}(x, y_0)\Big|_{x_0+\theta\Delta x} \frac{(\Delta x)^2}{2},\ 0 < \theta < 1.$$

Однако по определению частных производных

$$f'_x(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \ f''_{xx}(x, y_0)\Big|_{x=x_0+\theta\Delta x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0).$$

Поэтому окончательно имеем формулу

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0)\frac{(\Delta x)^2}{2},\ \ 0 < \theta < 1. \end{gathered} \qquad (8.5)$$

Если производные 2-го порядка непрерывны в начальной точке, то это можно упростить:

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \\ + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right)\frac{\Delta x^2}{2}, \end{gathered} \qquad (8.6)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малая при $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

Понятно, что то же самое можно написать с заменой x на y. Применим эти формулы для доказательства теоремы. Имеем:

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - \\ - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + \\ + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{8.7}$$

Из условий дифференцируемости функции формула Тейлора 2-го порядка в форме Лагранжа для частных приращений функции в виде (8.6) из-за непрерывности вторых частных производных дает:

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0 + \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2}; \end{gathered} \tag{8.8}$$

$$\begin{gathered} f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta y^2}{2} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2}; \end{gathered} \tag{8.9}$$

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \Delta x, y_0)\frac{\Delta y^2}{2} + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2} = \\ = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta y^2}{2} + \gamma(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2}; \end{gathered} \tag{8.10}$$

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \delta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2}. \end{gathered} \tag{8.11}$$

Здесь $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$, $\gamma(\Delta x, \Delta y)$, $\delta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

Перепишем выражение (8.7):

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \end{gathered}$$

Заменив здесь каждую разность соответствующей ей правой частью из формул (8.8)–(8.11), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta y^2}{2} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0)\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta y^2}{2} + \gamma(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \delta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Сокращая равные слагаемые, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y)\Delta x + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0)\Delta y + \gamma(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \delta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Или, перенося слагаемые и объединяя бесконечно малые, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \delta_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2}.$$

В силу теоремы Лагранжа для первых производных это будет:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y\Delta x + \delta_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x^2}{2} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_2\Delta x, y_0)\Delta x\Delta y + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y^2}{2}.$$

Положим $\Delta x = \Delta y$ и поделим на Δy^2. Получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0+\theta_1\Delta y) + \delta_1(\Delta y, \Delta y)\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_2\Delta y, y_0) + \beta_1(\Delta y, \Delta y)\frac{1}{2}, 0 < \theta_i < 1, i = 1, 2.$$

Перейдем к пределу при $(\Delta y, \Delta y) \to 0$. Здесь все производные непрерывны, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$. Поэтому получим $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) =$ $= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Продемонстрируем это на примере:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Смешанные производные равны.

Пример 2. Пусть $f(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные в $O_\delta(x_0, y_0)$, $\vec{e} = (a, b)$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ — параметрические уравнения прямой. Тогда по теоремам 8.11 и 8.14

$$\frac{df}{dt}\big(x(t), y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) =$$

$$= a\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + b\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big);$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}\big(x(t), y(t)\big) = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x(t), y(t)\big)a + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(x(t), y(t)\big)b\right) +$$

$$+ b\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x(t), y(t)\big)a + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x(t), y(t)\big)b\right) =$$

$$= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x(t), y(t)\big) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x(t), y(t)\big) +$$

$$+ b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x(t), y(t)\big).$$

Замечание. $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0) \Leftrightarrow |t| < \delta$. Действительно,

$$d((x, y),(x, y) = \sqrt{(x(t) - x(0))^2 + (y(t) - y(0))^2} =$$

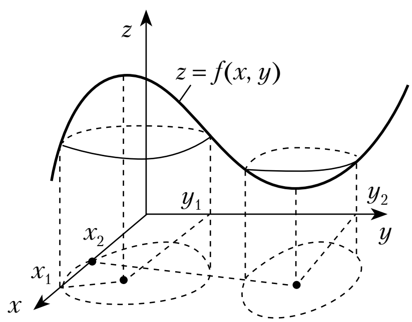
$$= \sqrt{(at + x_0 - a \cdot 0 - x_0)^2 + (bt + y_0 - b \cdot 0 - y_0)^2} = (\sqrt{a^2 + b^2})|t| = |t|,$$

так как $\vec{e}$ — единичный вектор, т.е. $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \Leftrightarrow |t| < \delta$.

Далее будем изучать локальные экстремумы функции двух переменных.

Определение 8.26. Пусть $f(x, y)$ определена в окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$. Если в этой окрестности $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, то говорят, что (x_0, y_0) — точка ***локального минимума*** для $f(x, y)$; если в этой окрестности $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, то говорят, что (x_0, y_0) — точка ***локального максимума***. Точка (x_0, y_0) называется точкой ***локального экстремума***, если она является точкой локального максимума или локального минимума.

Замечание. В точке локального максимума график образует «горку», в точке локального минимума — «ямку» (рис. 8.13).



в т. (x_1, y_1) — «горка» лок. максимум
в т. (x_2, y_2) — «ямка» лок. минимум

Рис. 8.13

Теорема 8.15 (необходимые условия экстремума). Если (x_0, y_0) — точка ***локального экстремума*** для $f(x, y)$ и существует какая-либо частная производная в этой точке, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть для определенности существует частная производная по x. Тогда по определению

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

График функции $f(x, y_0)$ является координатной x-линией на графике $f(x, y)$ и одновременно с ним имеет в $x = x_0$ «горку» или «ямку», т.е. локальный экстремум (рис. 8.14). Поскольку функция $f(x, y_0)$ дифференцируема в $x = x_0$, ее производная равна нулю, а вместе с ней равна нулю в $x = x_0$ и равная ей частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0.$$

Замечание. Если существуют обе частные производные, то они обе равны нулю в точке локального экстремума. На этом основании разыскиваются точки, в которых может быть локальный экстремум. В силу этого замечания для разыскания локального экстремума полезны «критические точки», которые вводятся следующим определением.

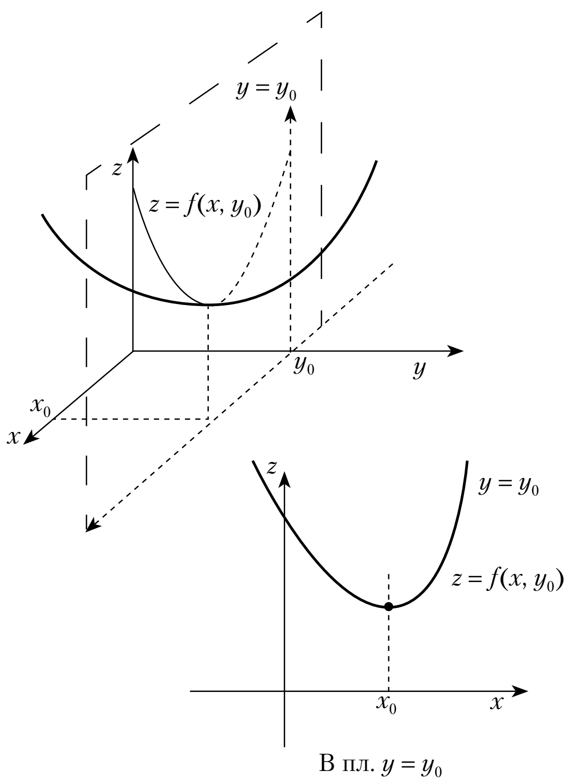


Рис. 8.14

Определение 8.27. Точка $(x_0,\ y_0)$ называется критической точкой для $f(x, y)$, если обе ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Теорема 8.16 (достаточные условия экстремума). Пусть $f(x, y)$ определена в окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$ и имеет в ней непрерывные первые и вторые производные. В точке (x_0, y_0) выполнены необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Обозначим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда если $\Delta > 0$, то в точке (x_0, y_0) будет локальный экстремум: максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$; если $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) локального экстремума нет; если $\Delta = 0$, то ничего сказать нельзя.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \overline{A(x, y)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \overline{B(x, y)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \overline{C(x, y)}.$$

В точке (x_0, y_0) они совпадают с A, B, C соответственно. Все эти функции вместе с вторыми производными непрерывны в окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$. Поэтому

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = A + \alpha_1(\rho), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = B + \alpha_2(\rho), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = C + \alpha_3(\rho), \end{gathered} \tag{8.12}$$

где ρ — расстояние от (x, y) до (x_0, y_0), $\alpha_i(\rho)$, $i = 1, 2, 3$, $\rho \to 0$ — бесконечно малые.

Рассмотрим единичный вектор $\vec{e} = (a, b)$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Возьмем прямую $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$, заданную параметрически. В силу примера 2 к теореме 8.14

$$\frac{df}{dt}\big(x(t), y(t)\big) = a\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + b\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big),$$

тогда

$$\frac{df}{dt}\big(x(0), y(0)\big) = 0 \qquad (8.13)$$

из-за выполнения необходимых условий экстремума:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}\big(x(t), y(t)\big) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x(t), y(t)\big) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(x(t), y(t)\big) +$$

$$+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x(t), y(t)\big) \overset{\substack{\text{По введенным}\\ \text{обозначениям}}}{=} a^2\overline{A}\big(x(t), y(t)\big) + 2ab\overline{B}\big(x(t), y(t)\big) +$$

$$+ b^2\overline{C}\big(x(t), y(t)\big).$$

В силу непрерывности всех производных в (x_0, y_0) это выражение (см. (8.12)) равно

$$\frac{d^2 f}{dt^2}\big(x(t), y(t)\big) = a^2\big(A + \alpha_1(\rho)\big) + 2ab\big(B + \alpha_2(\rho)\big) + \\ + b^2\big(C + \alpha_3(\rho)\big), \qquad (8.14)$$

где $\alpha_i(\rho)$ — бесконечно малые при $\rho \to 0$, $i = 1, 2, 3$, ρ — расстояние от $(x(t), y(t))$ до (x_0, y_0). Согласно замечанию 1 к определению 8.23 расстояние от $(x(t), y(t))$ до (x_0, y_0)

$$\rho = t. \qquad (8.15)$$

Поскольку длина (a, b) равна единице, $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Поэтому в силу свойств бесконечно малых $\left|a^2\alpha_1(\rho) + 2ab\alpha_2(\rho) + b^2\alpha_3(\rho)\right| \le$ $\le |\alpha_1(\rho)| + 2|\alpha_2(\rho)| + |\alpha_3(\rho)| = \beta(\rho)$ — тоже ***положительная*** бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Поэтому из (8.13) окончательно

$$\left|\frac{d^2 f}{dt^2}\big(x(t), y(t)\big) - \left(a^2 A + 2abB + b^2 C\right)\right| \le \beta(\rho),\ \beta(\rho) \to 0 \tag{8.16}$$

$$\text{при } \rho \to 0.$$

Здесь ρ — расстояние от $(x(t), y(t))$ до (x_0, y_0).

Обозначим

$$R(a,b) = a^2 A + 2abB + b^2 C. \tag{8.17}$$

Лемма 8.1:

1) при $\Delta > 0$ $R(a, b)$ имеет знак A при всех допустимых a, b. Причем $|R(a,b)| \ge d > 0\ \ \forall\, a, b$;

2) при $\Delta < 0$ $R(a, b)$ имеет разные знаки при разных парах a, b.

Доказательство.

1. Пусть $\Delta > 0$, тогда $A \ne 0$, $C \ne 0$ имеют одинаковые знаки. Для единичного направляющего вектора прямой координаты a и b не равны 0 одновременно. Пусть для определенности $b \ne 0$. При $a \ne 0$ аналогично. Тогда из (8.17):

$$R(a,b) = b^2\left(A\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b}B + C\right), \tag{8.18}$$

$b^2 > 0$. В скобке стоит квадратный трехчлен относительно $\frac{a}{b}$. Он не меняет знак при $\frac{D}{4} = -AC + B^2 = -\Delta < 0$ по предположению. Иными словами, $R(a, b)$ и $|R(a,b)|$ не обращаются в ноль.

Далее точки (a, b) лежат на окружности единичного радиуса — замкнутом и ограниченном множестве, и по теореме Вейерштрасса непрерывное $|R(a,b)|$ достигает на окружности положительного минимума, т.е. при всех (a, b) длины 1

$$|R(a,b)| \ge d > 0. \tag{8.19}$$

Тогда из (8.17) непрерывное $R(a, b)$ сохраняет знак A при всех (a, b) длины 1.

2. При $\Delta < 0$ для квадратного трехчлена относительно $\frac{a}{b}$ в (8.18) будет $\frac{D}{4} = -AC + B^2 = -\Delta > 0$ и он меняет знак при разных парах a, b.

Докажем еще утверждение.

Лемма 8.2. При $\Delta > 0$ выражение $\dfrac{d^2 f}{dt^2}(x(t), y(t))$ сохраняет знак A при $|t| = \rho < \delta_1 < \delta$ (см. (8.15)) вне зависимости от единичного вектора (a, b). Здесь ρ — расстояние от $(x(t), y(t))$ до (x_0, y_0).

Доказательство. Если при $\rho < \delta_1 < \delta$, то в формуле (8.16) положительная бесконечно малая $\beta(\rho) < \dfrac{d}{2}$ и выражение $\left|\dfrac{d^2 f}{dt^2}(x(t), y(t)) - \right.$ $\left. - R(a, b)\right| < \beta(\rho) < \dfrac{d}{2}$ (см. формулы (8.16), (8.17), (8.19)). Другими словами,

$$R(a,b) - \frac{d}{2} < \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\big(x(t), y(t)\big) < R(a,b) + \frac{d}{2}.$$

Поскольку по формуле (8.19) $|R(a,b)| \geq d$, здесь обе крайние части имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком $R(a, b)$. Поэтому на множестве $\begin{cases} 0 \leq |t| = \rho < \delta_1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ функция $\dfrac{d^2 f}{dt^2}(x(t), y(t))$ тоже сохраняет знак и это будет знак $R(a, b)$, а значит знак A (лемма 8.1).

Докажем теперь, что в (x_0, y_0) при $\Delta > 0$ будет локальный экстремум. Возьмем при выбранном в лемме 8.2 $\delta_1 > 0$ $(x, y) \in O_{\delta_1}(x_0, y_0)$. Тогда $(x, y) = (x(t), y(t))$ лежит на некоторой прямой $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$, для какого-то единичного вектора $\vec{e} = (a, b)$, сонаправленного с вектором из (x_0, y_0) в (x, y). Тогда $t > 0$ равно расстоянию между этими точками, значит, $0 < t < \delta_1$.

Запишем для функции $f(x(t), y(t))$ формулу Тейлора 1-го порядка в форме Лагранжа в точке $t = 0$:

$$\begin{gathered} f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Big(f\big(x(t), y(t)\big) - f(x_0, y_0)\Big) \overset{0<\theta<1}{=} \\ \overset{0<\theta<1}{=} \frac{df}{dt}\big(x(0), y(0)\big)t + \frac{d^2(f)}{dt^2}\big(x(\theta t), y(\theta t)\big)\frac{t^2}{2} \overset{\text{Формула (8.13)}}{=} \\ \overset{\text{Формула (8.13)}}{=} \frac{d^2 f}{dt^2}\big(x(\theta t), y(\theta t)\big)\frac{t^2}{2}. \end{gathered} \tag{8.20}$$

Тогда для $\rho < \delta_1$ будет $t = \rho < \delta_1$, $0 < \theta < 1 \Rightarrow \theta t < \delta_1$. По лемме 8.2 в $(x, y) = (x(t), y(t))$ знак правой части (8.20) совпадает со знаком A, так как $t^2 > 0$. То же самое верно для левой части. Поскольку $(x, y) \in O_{\delta_1}(x_0, y_0)$ — любая точка этой окрестности, при $A > 0$ там минимум, при $A < 0$ — максимум.

Если $\Delta < 0$, то по (8.14) $\frac{d^2 f}{dt^2}(x(0), y(0)) = a^2 A + 2abB + Cb^2 = R(a, b)$. Это выражение по лемме 8.1 меняет знак при разных (a, b), т.е. на двух разных прямых $x(t) = x_0 + a_i t$, $y(t) = y_0 + b_i t$, $i = 1, 2$ имеем в $t = 0$ выполнение необходимых и достаточных условий строгих экстремумов, на одной для максимума (2-я производная в нуле меньше нуля), для другой для минимума (2-я производная в нуле больше нуля), т.е. общего экстремума во всей окрестности нет, что и требовалось доказать.

8.7. ТЕОРЕМА ЮНГА ДЛЯ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВО ГРАДИЕНТА

Разберем теоремы о неявных функциях. Для примера рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = 4$ или $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Первое из них является уравнением окружности на плоскости, второе — уравнением сферы в пространстве. Возникает вопрос, являются ли эти множества или их части графиками функций, первое — функции одного переменного, второе — функции двух переменных? Первое уравнение можно разрешить относительно y, второе — относительно z. Получим $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Причем единственное решение получается в первом случае в окрестности точек окружности, для которых $y \neq 0$; во втором — в окрестности точек сферы, для которых $z \neq 0$. В случаях $y = 0$ или $z = 0$ получим в качестве решения по две функции разных знаков в любой окрестности соответствующей точки. Можно заметить, что в точках окружности где $y = 0$, $\frac{\partial(x^2 + y^2 - 4)}{\partial y}(x, 0) = 2y = 0$, а в точках сферы, где $z = 0$, $\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial z}(x, y, 0) = 2z = 0$. Похожие условия разрешимости таких уравнений дает следующая теорема.

Теорема 8.17. Пусть имеем уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{8.21}$$

Оно определяет кривую на плоскости, (x_0, y_0) принадлежит этой кривой. Пусть $F(x, y)$ непрерывна и имеет в некоторой окрестности каждой точки кривой непрерывные в этой точке частные производные.

Пусть $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует функция $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$, являющаяся решением уравнения (8.21), определенная и единственная в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0. При этом $y = y(x)$ дифференцируема в x_0 и

$$y'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим любую окрестность $O_{\delta_1}(x_0, y_0)$, где $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ и сохраняет знак (существует из непрерывности производных и условия теоремы $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$). Предположим для определенности, что эта производная там больше нуля. Уменьшив окрестность до размера $O_{\delta_2}(x_0, y_0)$, можно считать, что это выполнено вплоть до ее границы, поэтому без ограничения общности считаем, что $\delta_2 = \delta_1$.

(1, 2 - нижние индексы). Тогда $F(x_0, y)$ строго возрастает в пределах этой окрестности по y и $F(x_0, y_0) = 0$. Поэтому на границе той же окрестности существуют точки (x_0, y_1), (x_0, y_2) $(y_1 < y_0 < y_2)$, где $F(x_0, y_1) < 0 = F(x_0, y_0) < F(x_0, y_2)$ (рис. 8.15). В силу непрерывности $F(x, y)$ найдется $O_\delta(x_0)$, где для всех x и в точках (x, y_1'), (x, y_2') на нижней и верхней границах окрестности будет $F(x, y_1') < 0 < F(x, y_2')$. Но $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ в $O_{\delta_1}(x_0, y_0)$, которая содержит свои хорды, соединяющие (x, y_1') с (x, y_2'). Поэтому на каждой хорде функция $F(x, y)$ при фиксированном x строго возрастает по y от отрицательного значения до положительного и в силу непрерывности ровно один раз принимает значение 0, т.е. $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $\exists$ единственное $y_1' < y(x) < y_2'$, такое, что $F(x, y(x)) = 0$.

Итак, решение уравнения найдено. Это будет непрерывная функция по x. Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0$ при уменьшении указанной δ_2-окрестности до радиуса $\delta(\varepsilon) < \min(\varepsilon, \delta) < \delta$, где δ то, которое мы построили ранее, тем же способом мы получим решение при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) < \min(\varepsilon, \delta) < \delta$, которое в его области определения будет совпадать с построенным в силу единственности последнего (рис. 8.16, *а*). Кроме того, $\forall\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, точки $(x, y(x)) \in O_{\delta(\varepsilon)}(x_0, y_0) \subset O_\varepsilon(x_0, y_0)$ и $|y(x) - y_0| < \delta(\varepsilon) < \min(\varepsilon, \delta) \leq \varepsilon$ (рис. 8.16, *б*). Это есть непрерывность $y(x)$ в x_0. Все другие точки графика $y(x)$ при $|x - x_0| < \delta$ ничем не отличаются от (x_0, y_0), т.е. в них функция тоже непрерывна. Значит, она непрерывна во всей области своего определения.

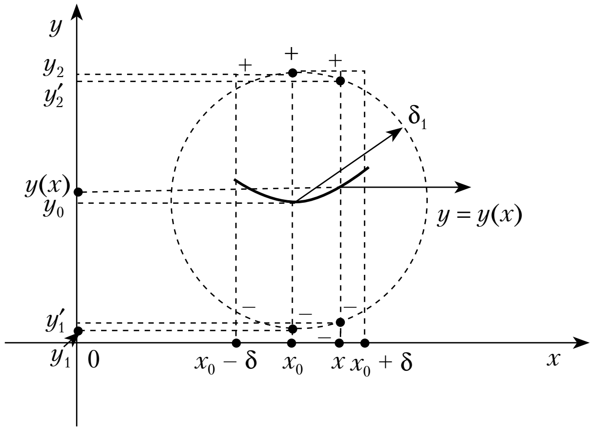
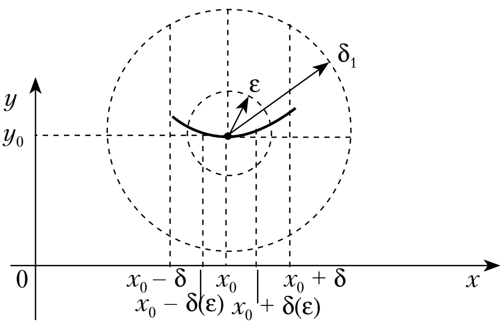
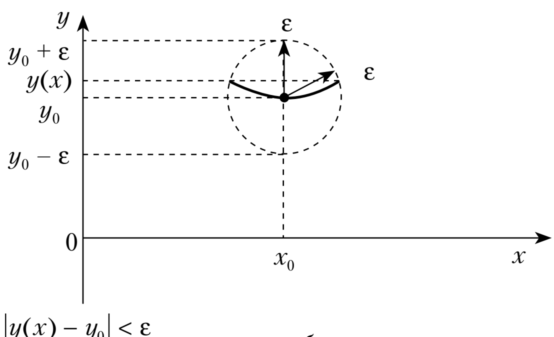


Рис. 8.15



а



б

Рис. 8.16

Далее по свойству дифференцируемости

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho).$$

Поскольку $F(x_0, y_0) = 0$ и $F(x, y) = 0$, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho) = 0.$$

Подставив найденное решение, получим тождество. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Поэтому

$$y(x) \equiv y(x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0) + \\ + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y(x)-y_0)^2}\right). \tag{8.22}$$

Поскольку $y(x)$ непрерывна в x_0, при $x \to x_0 \Rightarrow y(x) \to y_0$ и

$$o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y(x)-y_0)^2}\right) = \\ = (x-x_0)\cdot\alpha(x, y(x))\left(\sqrt{1+\left(\frac{y(x)-y_0}{x-x_0}\right)^2}\right),$$

где $\alpha(x, y(x)) = \alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Делим обе части (8.22) на $x - x_0$, затем на $\sqrt{1+\left(\frac{y(x)-y_0}{x-x_0}\right)^2}$. Получим:

$$\frac{\frac{y(x)-y_0}{x-x_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{y(x)-y_0}{x-x_0}\right)^2}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\sqrt{1+\left(\frac{y(x)-y_0}{x-x_0}\right)^2}} + \alpha(x). \tag{8.23}$$

Обозначим здесь $\frac{y(x)-y_0}{x-x_0} = \varphi(x)$. Тогда из (8.23) получим

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+(\varphi(x))^2}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\sqrt{1+(\varphi(x))^2}} + \alpha(x). \qquad (8.24)$$

Если для $x_n \to x_0$, $n \to \infty$ будет $|\varphi(x_n)| \to +\infty$, то модуль левой части при этом стремится к единице, а модуль правой части стремится к нулю. Поэтому $\varphi(x)$ ограничена в некоторой окрестностях 0. Значит, $\alpha(x)\sqrt{1+\varphi(x)^2} = \beta(x)$ тоже бесконечно малая при $x \to x_0$. Поэтому при умножении (8.23) на $\sqrt{1+\varphi^2(x)}$ получим:

$$\varphi(x) = \frac{y(x) - y_0}{x - x_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} + \beta(x).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем:

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Теорема 8.18. Пусть имеем уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (8.25)$$

Оно определяет поверхность в пространстве. Точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит этой поверхности. Пусть $F(x, y, z)$ непрерывна и имеет в некоторой окрестности каждой точки поверхности непрерывные в этой точке частные производные. Пусть при этом $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда существует функция $z = z(x, y)$ с $z(x_0, y_0) = z_0$, определенная и единственная в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$, являющаяся решением 8.25. При этом $z = z(x, y)$ дифференцируема в (x_0, y_0). Кроме того,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.17, его не приводим.

Пример. Дано уравнение $xy^2 + 5y^6x^3 - 6 = 0$. Точка (1, 1) ему удовлетворяет:

1) разрешимо ли оно относительно y в окрестности $x = 1$?

2) существует ли у решения вторая производная? Чему равна первая производная решения в $x = 1$?

По теореме 8.17 имеем $F(x, y) = xy^2 + 5y^6x^3 - 6$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 15y^6x^2\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 16;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 30y^5x^3\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 32 \neq 0.$$

Поэтому уравнение имеет решение, определенное в $O_\delta(x_0)$. Оно имеет в этой окрестности производную, равную

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, y(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x)\big)}.$$

Она тоже непрерывна в указанной окрестности и вместе с $y(x)$ и частными производными $F(x, y)$ и имеет там производную по x, являющуюся для $y(x)$ второй производной.

В точке 1 значение первой производной будет

$$y'(1) = -\frac{16}{32} = -0{,}5.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Определите окрестности точек в R^2 и R^3. Что такое внутренние, граничные точки множества? Определите замкнутые и открытые множества.
2. Что такое функция n переменных, ее область определения, график?
3. Что такое конечный предел функции двух переменных в точке? Приведите примеры.
4. Что такое непрерывная в точке функция двух переменных? Приведите примеры.
5. Определите частные производные функции двух переменных в точке.
6. Что такое касательная плоскость к графику функции двух переменных?

7. Что такое точка локального экстремума функции двух переменных?
8. Приведите необходимое и достаточное условия локального экстремума функции двух переменных.

Расчетные задания для самостоятельного решения

1. Для функции $z = \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} 2y} + e^{xy}$ проверьте справедливость теоремы Шварца.

2. В уравнении $3\dfrac{\partial z}{\partial x} - 5\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ сделайте замену переменных $\begin{cases} u = 7x + 4y \\ v = 2x + y. \end{cases}$

3. Для функции $z = \dfrac{3x - 5y}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)$ проверьте справедливость теоремы Шварца. Проверьте также, что данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

4. Функция $y(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $3x^4y^5 + 6x + x^6y^6 - 7y + 8 = 0$. Найти $y'(x)$ и написать уравнение касательной к графику этой функции в точке его пересечения с осью Y.

5. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x - y}}$ в точке (3, 2). Вычислив дифференциал функции, найдите ее приближенное значение в точке (2,98; 2,04).

6. Найдите область определения функции $z = \sqrt{\dfrac{2x + y}{x - y}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Является ли эта область определения ограниченной? Является ли эта область определения замкнутой?

7. Для функции $z = \dfrac{2x - y - 1}{x + y - 2}$ изобразить линии уровня $z = -1;\ 1;\ 2$. Могут ли линии разного уровня пересекаться?

8. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса. Построив семейство линий уровня функции $z = x^2 + y^2$, определите ее наибольшее и наименьшее значения в области треугольника $A(-1, 7)$, $B(7, 1)$, $C(5, 12)$.

9. Дайте определение дифференциала функции двух переменных на данном отрезке. Заменив приращение функции ее дифференциалом, вычислите приближенное значение функции $z = \ln(1 + \sqrt[3]{x} - \sqrt{y})$ в точке (27,027; 8,994).

10. Исследуйте на экстремум функцию $z = 3x^2y - 2xy^2 + 18xy$. Изобразите на плоскости линию уровня $z = 0$, области знакопостоянства функции и ее критические точки.

11. Проверьте, что функциональное уравнение $x^2 - x^3y + 2\ln y = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Юнга в окрестности точки (1, 1). Для проходящего через указанную точку решения $y = y(x)$ этого уравнения найти первые три слагаемых формулы Тейлора — Пеано.

12. Проверьте, что функциональное уравнение $\frac{8\sqrt{x}}{y^2} - \frac{2\sqrt{y}}{z^2} - \frac{6\sqrt{z}}{x^2} = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Юнга в окрестности точки (1, 1, 1). При помощи линеаризации найти приближенное выражение для проходящего через указанную точку решения $z = z(x, y)$ этого уравнения.

Тесты

1. Что такое линии уровня функции двух переменных:

1) линии области определения, где функция постоянна; 2) линии, где функция положительна; 3) линии, где функция отрицательна?

2. Что такое координатная x-линия для функции двух переменных:

1) это линия графика функции, где постоянна координата x; 2) это линия графика, где постоянна y?

3. Что такое дифференцируемая в точке функция двух переменных:

1) это функция, непрерывная в точке; 2) это функция, имеющая в точке частные производные; 3) это функция, график которой имеет в точке касательную плоскость?

4. Что такое дифференциал для дифференцируемой функции двух переменных:

1) $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$; 2) $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$?

5. Сколько частных производных 2-го порядка у функции двух переменных:

1) одна; 2) две; 3) три; 4) четыре?

Глава 9
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЕ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ, ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВАЯ

Мы уже встречались с дифференциальными уравнениями при нахождении неопределенного интеграла. Действительно, нам было задано соотношение $y' = f(x)$. Нужно было найти все функции, для которых это равенство верно. Было получено, что если $f(x)$ непрерывна, то у нее существуют первообразные, и все они задаются формулой $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C — любая константа. На самом деле $y = F(x) + C$ является здесь общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

Дадим строгое определение дифференциального уравнения (ДУ) 1-го порядка и его решения.

Определение 9.1 (ДУ 1-го порядка, решение, общее решение). Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется соотношение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{9.1}$$

где $F(x, y, y')$ — функция трех переменных.

Дифференциальным уравнением 1-го порядка, ***разрешенным*** относительно производной, называется соотношение

$$y' = f(x, y), \tag{9.2}$$

где $f(x, y)$ — функция двух переменных.

Функция $y(x)$, имеющая производную на интервале (a, b), называется ***решением ДУ*** (9.1) или (9.2), если при подстановке ее и ее производной в это уравнение получаем тождество на (a, b):

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) \equiv 0 \text{ (решение для 1)}$$

или

$$y'(x) \equiv f\big(x, y(x)\big) \text{ (решение для 2)}.$$

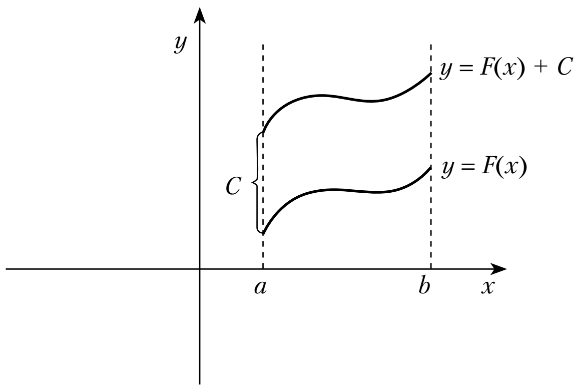
Функция $y(x, C)$, где C — произвольная константа, имеющая производную по x на интервале (a, b), называется ***общим решением***

ДУ (9.2), если $\forall$ фиксированного C эта функция является решением и любое решение этого ДУ получается из данной формулы при некотором C.

Замечание. Для уравнения, не разрешенного относительно производной (9.1), общее решение может не записываться в таком виде. Например, $y'^2 = f(x)$. Тогда $y' = \pm\sqrt{f(x)}$, $y(x) = \pm F(x) + C$. Здесь $F(x)$ — первообразная для $\sqrt{f(x)}$. Здесь при одном C получается два разных решения уравнения!

Пример. $y' = f(x)$. Любая первообразная $y(x) = F(x)$ для $f(x)$ будет решением этого уравнения, а общее его решение — множество всех первообразных, т.е. $y(x) = F(x) + C$, $C \in R$.

Изобразим на рисунке графики всех решений этого уравнения (рис. 9.1).



$$y' = f(x),\ C + F(x) = \int f(x)dx$$

Общее решение $y(x) = F(x) + C$

Рис. 9.1

Из вида общего решения этого уравнения следует, что достаточно нарисовать график одного решения, все остальные получаются сдвигом этого графика параллельно оси OY на расстояние C в каждой точке.

Из рассмотрения графика решения и исходного уравнения получим, что в любой точке $(x, y(x))$ плоскости, где определено решение, график имеет касательную с коэффициентом наклона $y'(x) = f(x)$. Заметим, что тангенс угла наклона касательной известен из уравнения ранее, чем мы его решили. Иными словами, множество касательных к решениям мы можем нарисовать, как только задано уравнение, и так будет для любого уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Дадим соответствующее определение.

Определение 9.2. Пусть дано ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$. Пусть правая часть определена в области плоскости D. Тогда ***полем направлений*** для этого уравнения в области D называется множество прямых, каждая из которых проведена через точку (x, y) с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$. (Можно заметить, что эти прямые есть касательные в каждой точке к будущим решениям.)

Определим теперь интегральную кривую, как ***кривую***, ***касательная в каждой точке к которой совпадает с прямой***, ***соответствующей этой точке в поле направлений***.

Пример. Для $y' = f(x)$ поле направлений будут образовывать все касательные к некоторой первообразной $y(x) = F(x)$ и их параллельные сдвиги вдоль оси OY (рис. 9.2).

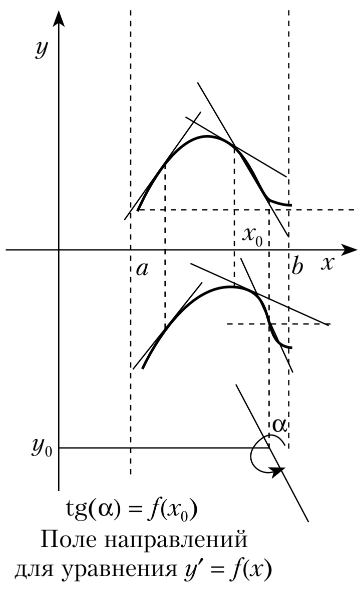


Рис. 9.2

Замечание. Для уравнения, не разрешенного относительно производной, поле направлений для каждой точки может не быть однозначно определено. Например, $y'^2 = f(x)$. Тогда $y' = \pm\sqrt{f(x)}$. Если $f(x) \neq 0$, то через точку (x, y) проходит две разных касательных к решениям.

9.2. ЗАДАЧА КОШИ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Обычно интересуются не только нахождением всех решений ДУ, но также нахождением решения, график которого проходит через заданную точку области, где определено уравнение. Для уравнения, разрешенного относительно производной, эта задача может быть однозначно разрешена. Для неразрешенного относительно производной уравнения это неверно, например для $y'^2 = f(x)$. Тогда $y(x) = \pm F(x) + C$.

Через каждую точку, где $f(x) \neq 0$, проходит два разных решения с угловыми коэффициентами касательной $\pm\sqrt{f(x)}$.

Приведем соответствующие определения.

Определение 9.3. Пусть дано ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, $y' = f(x, y)$. Пусть правая часть определена в области плоскости D. ***Задачей Коши*** для этого уравнения называется задача нахождения решения уравнения $y(x)$, такого, что $y(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$.

Часто эту задачу записывают кратко:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 9.1 (теорема Коши существования и единственности). Пусть дано ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$, причем $f(x, y)$ непрерывна по двум переменным и имеет непрерывную по двум переменным производную по y в открытом и ограниченном множестве D. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

определенное и единственное в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$.

Примеры. Рассмотрим уравнение $y' = f(x)$, где $x \in (a, b)$, $f(x)$ — непрерывная на интервале функция. Тогда общее решение уравнения будет $y(x) = F(x) + C$.

Пусть $x_0 \in (a, b)$, y_0 — любое. Подставим значения в общее решение: $y_0 = F(x_0) + C_0$. Значит, $C_0 = y_0 - F(x_0)$ и решение задачи Коши $y = F(x) + C_0$ найдено единственным образом. Теорема Коши выполнена. Пример, в котором не выполнена теорема Коши, мы приведем позже.

9.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Определение 9.4. Уравнение $y' = f(x)g(y)$ при непрерывных $f(x)$ и $g(y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения. Пусть $y(x)$ — решение. Тогда по определению решения имеем $y'(x) \equiv f(x)g(y(x))$. Подставим выражение производной через дифференциалы:

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x)g(y).$$

Пусть $g(y_0) = 0$ в одной точке. Положим $y = y_0$. Тогда $y' = 0$, правая часть тоже равна нулю. Уравнение выполняется, т.е. мы нашли решение $y = y_0$.

Если $g(y) \neq 0$, то на $g(y)$ можно поделить. Получим:

$$\frac{dy(x)}{g(y(x))} \equiv f(x)dx,$$

тождество можно проинтегрировать:

$$\int \frac{dy(x)}{g(y(x))} \equiv \int f(x)dx.$$

Пусть непрерывная $\dfrac{1}{g(y)}$ имеет первообразную $G(y)$, непрерывная $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда по теореме о замене переменной

$$\int \frac{dy(x)}{g(y(x))} \equiv G(y(x)) \equiv \int f(x)dx \equiv F(x) + C.$$

Окончательно $G(y(x)) = F(x) + C$ — общее решение уравнения в неявном виде, к которому нужно добавить $y = y_0$.

Если $g(y) = 0$ в нескольких точках, то к полученному интегрированием решению придется добавить несколько постоянных решений.

Пример. $y' = x\sqrt{y}$, ДУ с разделяющимися переменными. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$, $y = 0$ — решение. При $y \neq 0$ $\dfrac{dy}{y^{1/2}} = xdx$, $2y^{1/2} = \dfrac{x^2}{2} + C$,

$y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{x^2 + 2C}{4}$ и $y = 0$ — общее решение (здесь мы вместо $2C$ могли бы написать произвольную константу C).

Теперь для любого x_0 и $y_0 \geq 0$ попробуем решить задачу Коши. Найдем C_0 из $y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{x_0^2 + 2C_0}{4}$, $C_0 = 2\sqrt{y_0} - x_0^2 / 2$, оно определяется отсюда единственным образом. Но при $y_0 = 0$ через любую точку $(x_0, 0)$ проходит еще решение $y = 0$, т.е. единственности при $y_0 = 0$ нет.

Действительно, там не выполнены условия теоремы Коши, так как нет частной производной правой части по y в этих точках.

Задание. Нарисуйте поле направлений и интегральные кривые для этого уравнения.

Определение 9.5. Уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ с непрерывной функцией $f(u)$ называется уравнением с однородной правой частью.

Метод решения. Пусть $y(x)$ — решение. Делаем замену зависимой переменной $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Тогда $y(x) = u(x)x$, $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Подставим в уравнение. Получим $u'(x)x + u(x) = f(u(x))$. Отсюда $u'x = f(u) - u$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая, получим $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$, если $f(u) - u \neq 0$ и $F(u) + C = \displaystyle\int \dfrac{du}{f(u) - u}$. Тогда $\ln|x| = F(u) + C, x = Ce^{F(u)}$, $\begin{cases} x = Ce^{F(u)} \\ y = Cue^{F(u)} \end{cases}$ — параметрическое задание решения через параметр u.

При $f(u_0) - u_0 = 0$ имеем решение $u = u_0$ или $y = u_0x$. Графиком этого решения является проходящая через начало координат прямая. Поэтому она во всех своих точках совпадает с полем направлений. Это объясняет то, что она называется для этого уравнения ***инвариантным*** лучом.

Следствие. Все интегральные кривые уравнения с однородной правой частью подобны. Действительно, решения, соответствующие инвариантным лучам, подобны сами себе с любым коэффициентом подобия. Пусть $\begin{cases} x_1 = C_1e^{F(u)} \\ y_1 = C_1ue^{F(u)} \end{cases}$, $\begin{cases} x = Ce^{F(u)} \\ y = Cue^{F(u)} \end{cases}$ — два других решения. Найдем отсюда при одинаковых u $\dfrac{x_1}{x} = \dfrac{C_1}{C} = \dfrac{y_1}{y}$. Это и дает подобие двух любых решений.

Пример. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$, уравнение с однородной правой частью. Делаем замену $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Тогда $y(x) = u(x)x, y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Подставим в уравнение. Получим $u'x = u + e^u - u, u'x = e^u, \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}$, $-e^{-u} = \ln|x| + C, x = Ce^{-e^{-\frac{y}{x}}}$ — общее решение. Поскольку e^u не равно нулю, инвариантных лучей нет.

9.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ

Определение 9.6. Уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ с непрерывными на (a, b) $p(x)$ и $q(x)$ называется ***линейным уравнением***. Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$ тождественно, то уравнение называется ***неоднородным***.

Ниже приведен *метод решения*.

Теорема 9.2. Пусть $y_{\text{частн}}(x)$ — частное решение уравнения $y' + p(x)y = q(x)$. $y_{\text{одн}}(x, C)$ — общее решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Тогда общее решение неоднородного уравнения будет $y_{\text{неодн}}(x, C) = y_{\text{одн}}(x, C) + y_{\text{частн}}(x)$.

Доказательство.

А. Подставим $y_{\text{неодн}}(x, C) = y_{\text{одн}}(x, C) + y_{\text{частн}}(x)$ в уравнение. Получим в силу предположения:

$$y'_{\text{одн}} + y'_{\text{частн}} + p(x)(y_{\text{одн}} + y_{\text{частн}}) =$$
$$= y'_{\text{частн}} + p(x)y_{\text{частн}} + y'_{\text{одн}} + p(x)y_{\text{одн}} = q(x) + 0 = q(x).$$

Иными словами, формула дает решение неоднородного уравнения.

Б. Докажем, что приведенная формула дает любое решение неоднородного уравнения, т.е. является общим решением.

Действительно, взяв любое решение неоднородного уравнения $y(x)$, подставим в левую часть $y(x) - y_{\text{частн}}(x)$. Получим:

$$y'(x) - y'_{\text{частн}}(x) + p(x)(y(x) - y_{\text{частн}}(x)) = -y'_{\text{частн}}(x) - p(x)y_{\text{частн}}(x) +$$
$$+ y'(x) + p(x)y(x) = -q(x) + q(x) = 0,$$

т.е. $y_0 = y - y_{\text{частн}}$ — решение однородного уравнения и $y = y_0 + y_{\text{частн}}$ имеет требуемый вид.

Другими словами, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, нужно отыскать общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного.

Теперь мы можем изложить ***метод решения линейного*** уравнения 1-го порядка.

1. Решаем однородное уравнение:

$$y' + p(x)y = 0,\ y' = -p(x)y.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,\ \ln|y| = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt + C,\ y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

(потерянное при делении решение $y = 0$ получается при $C = 0$), т.е. $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$ — общее решение однородного уравнения.

Замечание 1. Из этой формулы получаем, что множество решений линейного однородного уравнения первого порядка есть линейное пространство размерности 1 (все решения получаются из одного умножением на произвольную константу).

2. Ищем теперь решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.

Поскольку здесь мы делаем изменяемой произвольную постоянную, этот метод называется методом вариации (изменения) произвольной постоянной. Подставим это выражение в уравнение:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = q(x).$$

Произведя сокращение, получим $C'(x) = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$. Справа стоит непрерывная функция, поэтому у нее существует первообразная $P(x) : C(x) = P(x)$. Тогда решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y_{\text{частн}} = P(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.

3. Согласно теореме 9.2 общее решение неоднородного уравнения получается сложением этого решения неоднородного уравнения и общего решения однородного:

$$y = \left(P(x) + C\right) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}, \ C \in R.$$

Пример. $y' - 2xy = xe^{x^2}$.

1. Решаем однородное уравнение $y' - 2xy = 0$:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx, \ \ln|y| = x^2 + C, \ y = Ce^{x^2}.$$

2. Ищем методом вариации частное решение неоднородного уравнения:

$$y = C(x)e^{x^2}, \ y' = C'(x)e^{x^2} + 2C(x)xe^{x^2}.$$

Подставив в исходное уравнение, получим:

$$C'(x)e^{x^2} = xe^{x^2}, \ C'(x) = x, \ C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Частное решение:

$$y(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Ce^{x^2} + \frac{x^2}{2}e^{x^2}.$$

9.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЕ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ. ЗАДАЧА КОШИ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Определение 9.7 (ДУ 2-го порядка, решение, общее решение). ***Дифференциальным уравнением 2-го порядка*** называется соотношение

$$F\left(x, y, y', y''\right)=0, \tag{9.3}$$

где $F(x, y, y', y'')$ — функция четырех переменных.

Дифференциальным уравнением 2-го порядка, ***разрешенным*** относительно производной, называется соотношение

$$y''=f\left(x, y, y'\right), \tag{9.4}$$

где $f(x, y, y')$ — функция трех переменных.

Функция $y(x)$, имеющая производную 2-го порядка на интервале (a, b), называется *решением ДУ* (9.3) или (9.4), если при подстановке ее и ее производных в это уравнение получаем тождество на (a, b): $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) \equiv 0$ или $y''(x) \equiv f(x, y(x), y'(x))$ для любого x из (a, b).

Функция $y(x, C_1, C_2)$, где C_1, C_2 — произвольные константы, имеющая две производные по x на интервале (a, b), называется ***общим решением ДУ*** (9.4), если $\forall$ фиксированных C_1, C_2 эта функция является решением этого уравнения и любое решение ДУ получается при некоторых C_1, C_2.

Замечание. Для уравнения, не разрешенного относительно производной, общее решение может не записываться в таком виде.

Пример. Для $y''=f(x)$, где $f(x)$ непрерывна на (a, b), тогда

$$y'=F\left(x\right)+C_1, \tag{9.5}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, непрерывная на (a, b). Далее, решая уравнение (9.5), получим общее решение $y(x)=\Phi(x)+C_1x+$ $+C_2$, где $\Phi(x)$ — первообразная для непрерывной $F(x)$, $C_1, C_2 \in R$.

Определение 9.8 (задачи Коши). Пусть дано ДУ 2-го порядка, разрешенное относительно производной, $y''=f(x, y, y')$.

Пусть правая часть определена в области пространства D. Задачей Коши для этого уравнения называется задача нахождения решения уравнения $y(x)$ такого, что $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, где $(x_0, y_0, y_1) \in D$. Часто эту задачу записывают кратко:

$$\begin{cases} y''=f\left(x, y, y'\right), \\ y\left(x_0\right)=y_0,\ y'\left(x_0\right)=y_1. \end{cases}$$

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 9.3 (теорема Коши существования и единственности). Пусть дано ДУ 2-го порядка, разрешенное относительно производной $y''=f(x, y, y')$, причем $f(x, y, z)$ непрерывна по трем переменным и имеет непрерывные частные производные по y и z в открытом и ограниченном множестве D. Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_1) \in D$ существует решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

определенное и единственное в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$.

Пример. Для $y'' = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, имеем найденное в примере перед определением 9.8 общее решение $y(x) = \Phi(x) + C_1 x + C_2$, где $\Phi(x)$ — первообразная для $F(x)$, которая является первообразной для $f(x)$, $C_1, C_2 \in R$. Подставив начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} y_0 = \Phi(x_0) + C_1 x_0 + C_2, \\ y_1 = F(x_0) + C_1. \end{cases}$$

Отсюда всегда однозначно

$$\begin{cases} C_2 = -\Phi(x_0) + y_0 - x_0\left(-F(x_0) + y_1\right), \\ C_1 = -F(x_0) + y_1, \end{cases}$$

т.е. решение существует и единственно.

Нам будут интересны линейные уравнений 2-го порядка.

Определение 9.9. Уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{9.6}$$

где $p(x)$ и $q(x)$, $r(x)$ — непрерывные на (a, b) функции, называется линейным уравнением 2-го порядка. Если $r(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $r(x) \neq 0$ тождественно, то уравнение называется неоднородным.

Замечание. В условиях этого определения задача Коши (теорема (9.3)) для линейного уравнения (9.6) будет иметь *единственное решение на всем* (a, b).

Решение линейных уравнений 2-го порядка аналогично решению линейных уравнений 1-го порядка, а именно, верна следующая теорема.

Теорема 9.4. Пусть $y_{\text{частн}}(x)$ — частное решение линейного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$; $y_{\text{одн}}(x, C_1, C_2)$ — общее решение однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Тогда общее решение неоднородного уравнения будет $y_{\text{неодн}}(x, C_1, C_2) = y_{\text{одн}}(x, C_1, C_2) + y_{\text{частн}}(x)$. Кроме того, если $y_i(x)$ — частные решения

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_i(x)$, $i = 1, 2$, и $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$, то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ — частное решение уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

Доказательство первой части полностью аналогично доказательству для уравнений 1-го порядка. Доказательство второй части тоже получается подстановкой $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ в $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$. Рекомендуем провести оба доказательства самостоятельно.

Аналогично замечанию 1 к п. 1 теоремы 9.2 (метода решения линейного уравнения первого порядка) верна следующая теорема.

Теорема 9.5 (линейность пространства решений). Множество решений линейного однородного уравнения 2-го порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ является линейным пространством размерности 2, т.е. для двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ общее решение однородного уравнения будет иметь вид $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Эту теорему можно вывести из теоремы существования и единственности решения задачи Коши, которая для линейных уравнений отличается тем, что решение с заданными начальными данными единственно не в окрестности начальной точки, а на всей области определения уравнения. Иными словами, множество решений и множество начальных данных находятся во взаимно однозначном соответствии, сохраняющем линейные операции сложения и умножения на число. Поскольку начальные данные — независимые пары чисел и образуют двумерное векторное пространство, в силу взаимно однозначного соответствия множества решений и множества начальных данных то же верно и для множества решений.

Это рассуждение служит пояснением к доказательству, но при этом оно может быть оформлено в виде строгого доказательства, чего мы не делаем.

Эта теорема дает повод для следующего определения.

Определение 9.10. Любые два линейно независимые решения линейного уравнения 2-го порядка называются ***фундаментальной системой решений*** (ФСР). Действительно, по предыдущей теореме любая ФСР $y_1(x)$ и $y_2(x)$ позволяет записать общее решение однородного уравнения как $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значит, чтобы решить однородное уравнение, нужно найти ФСР.

Эти общие теоремы для линейных уравнений 2-го порядка будут далее использоваться при решении линейных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

9.6. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Определение 9.11. Уравнение $y'' + py' + qy = r(x)$, где p и q — числа, называется линейным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Если $r(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***, если $r(x) \neq 0$, то уравнение называется ***неоднородным***.

1. Займемся решением однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение будем искать в виде $y(x) = e^{\lambda x}$. Тогда имеем $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставив, запишем $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$. Сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Это квадратное уравнение относительно λ, каждому решению λ которого соответствует решение дифференциального уравнения $y(x) = e^{\lambda x}$. Это квадратное уравнение называется ***характеристическим уравнением*** для рассматриваемого ДУ.

Рассмотрим различные случаи для характеристического уравнения.

А. *Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня* λ_1, λ_2. Им соответствуют решения $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Их отношение $y(x) = e^{(\lambda_2 - \lambda)_1 x}$ — не константа, значит, они линейно независимы, следовательно, образуют ФСР и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример. $y'' + 5y' + 6y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$. Корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ — действительные и различные. Поэтому $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$ — ФСР, тогда $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ — общее решение однородного уравнения.

Б. Характеристическое уравнение имеет один кратный действительный корень λ. Ему соответствуют решение $y_1(x) = e^{\lambda x}$. Проверьте, что в этом случае $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ тоже решение! Их отношение есть x, тоже не константа, значит, они линейно независимы, а следовательно, образуют ФСР, и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример. $y'' + 4y' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Корни $\lambda_1 = -2 = \lambda_2 = \lambda$ — кратный корень;

$y_1(x)=e^{-2x},\ y_2(x)=xe^{-2x}$ — ФСР; $y(x)=e^{-2x}(C_1+C_2x)$ — общее решение однородного уравнения.

В. *Характеристическое уравнение имеет два различных комплексных корня* $\lambda_1,\lambda_2=a\pm ib,\ b\neq 0$. Им соответствуют комплексные решения $y_1(x)=e^{ax+ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$, $y_2(x)=e^{ax-ibx}=$ $=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)$. Их отношение $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=e^{2ibx}$ — не константа, значит, они линейно независимы, а следовательно, образуют ФСР, и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}.$$

Плохо только, что эти решения комплексные. Поскольку пространство решений линейно и функции из ФСР комплексно сопряжены, решениями будет действительная и мнимая часть каждого:

$$\operatorname{Re}y_1(x)=\frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}=e^{ax}\cos bx;$$

$$\operatorname{Im}y_1(x)=\frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}=e^{ax}\sin bx.$$

Решения $e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$, непропорциональны, а значит, линейно независимы и образуют ФСР. Они уже действительны. Поэтому общее действительное решение равно

$$y(x)=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx,$$

где C_1, C_2 — действительные константы.

Пример. $y''+4y'+5y=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+5=0$. Корни $\lambda_1=-2+i,\ \lambda_2=-2-i$ — комплексные. $y_1(x)=e^{-2x}(\cos x+i\sin x)$, $y_2(x)=e^{-2x}(\cos x-\sin x)$ — комплексная ФСР. Действительная и мнимая часть первого $e^{-2x}\cos x,\ e^{-2x}\sin x$. Это действительная ФСР. Тогда $y(x)=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ — общее решение однородного уравнения.

9.7. НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Приведем способ нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью вида $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m. Пусть $N=\max(n,m)$, $\lambda=a+ib$, k —

кратность $\lambda = a + ib$ как корня характеристического уравнения, причем $k = 0$, если $\lambda = a + ib$ — не корень характеристического уравнения. Тогда частное решение уравнения найдется в виде

$$y(x) = x^k e^{ax}\left(T_N(x)\cos bx + R_N(x)\sin bx\right),$$

где $T_N(x)$, $R_N(x)$ — многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

Это утверждение дается без доказательства. Подтвердим его примером.

Пример. $y'' + 4y' + 4y = 27xe^x$. $f(x) = 27xe^x$, $a = 1$, $b = 0$, $n = 1$, $m = 0$, $N = 1$, $\lambda = 1$ — не корень характеристического уравнения, поэтому $k = 0$. Ищем решение в виде $y(x) = (Ax + B)e^x$. $y'(x) = (Ax + A + B)e^x$, $y''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$. Подставив, получим $e^x((Ax + 2A + B + 4Ax + 4A + 4B + 4Ax + 4B) = 27xe^x$. Это тождество, поэтому $9A = 27$, $9B + 6A = 0$; $A = 3$, $B = -2$. Частное решение $y(x) = (3x - 2)e^x$.

По теореме 9.4, используя вид общего решения соответствующего однородного уравнения из примера к п. Б параграфа 9.6, получим общее решение уравнения

$$y(x) = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + \left(3x - 2\right)e^x.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое решение, общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка?
2. Что такое задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка? Приведите условия существования и единственности ее решения.
3. Что такое поле направлений для уравнения $y' = f(x, y)$?
4. Что такое дифференциальное уравнение 2-го порядка? Каково его общее решение?
5. Что такое линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка однородное и неоднородное?
6. Как связаны общее решение неоднородного линейного уравнения и общее решение однородного?
7. Как получить частное решение неоднородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ (принцип суперпозиции)?

Расчетные задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Укажите тип дифференциального уравнения и найдите его общее решение:

$$y' = \sqrt{\frac{3-2y}{3x^2-5}};$$

$$y'\sin x = y\cos x + \operatorname{tg}^2 x;\ \left(2x^2+3xy\right)y' = x^2+2xy+3y^2.$$

2. Решите задачу Коши $2y'' - 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

3. Найдите общее решение уравнения $4y'' - 12y' + 9y = e^{2x} + 9x^2 - 15x + 5 - 7\sin 2x - 24\cos 2x$.

4. Укажите вид частного решения ЛНУ $y'' - 2y' + 2y = 3x^2 + e^x \sin x$.

Вариант 2

1. Укажите тип ДУ и найдите его общее решение:

$$y' = \frac{\cos^2 2y}{\sqrt{7-5x^2}};$$

$$y'\cos x + y\sin x = \left(2x+5\right)\cos^2 x;\ 4xyy' = 2x^2+3xy+4y^2.$$

2. Решите задачу Коши $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

3. Найдите общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{2x} + 9x^2 - 3x + 5 + 5\sin 2x - 12\cos 2x$.

4. Укажите вид частного решения ЛНУ $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x + e^{2x}$.

Тесты

1. Каков общий вид ДУ 1-го порядка?

1) $F(x,y,y') = 0$; 2) $y' = f(x,y)$; 3) $F(x,y,C) = 0$.

2. Каков общий вид ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной?

1) $y' = f(x,y)$; 2) $F(x,y,y') = 0$; 3) $y' = f(x)$.

3. Где существует единственное решение задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, если $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной по y в некотором прямоугольнике $\begin{cases} |x - x_0| < a \\ |y - y_0| < b \end{cases}$?

1) на (a, b); 2) на $|x - x_0| < a$; 3) на $|x - x_0| < \delta < a$.

4. Что такое интегральная кривая для уравнения $y' = f(x, y)$?

1) график решения; 2) линия, касающаяся в каждой точке поля направлений.

5. Где существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

при непрерывности $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ на (a, b), $x_0 \in (a, b)$?

1) на (a, b); 2) на $|x - x_0| < a$; 3) на $|x - x_0| < \delta$.

Библиографический список

1. *Агранович М.* Введение в математический анализ [Текст] / М. Агранович, Б. Амосов, Л. Филиппова. — М.: МГИЭМ, 1998.
2. *Бермант А.* Краткий курс математического анализа для втузов [Текст] / А. Бермант, И. Араманович. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971.
3. *Будак Б.М.* Кратные интегралы и ряды [Текст]: учебник / Б.М. Будак, С.В. Фомин. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2002.
4. *Зорич В.А.* Математический анализ [Текст]: в 2 ч. Ч. I / В.А. Зорич. — 10-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2020.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ [Текст]: в 2 ч. Ч. II / В.А. Зорич. — 9-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2019.
6. *Ильин В.* Основы математического анализа [Текст]: в 2 ч. / В. Ильин, Э. Позняк. — М.: Физматлит, 2014.
7. *Киселев А.* Вся высшая математика [Текст] / А. Киселев [и др.]. — М.: Эдиториал УРСС, 2001.
8. *Кудрявцев Л.* Краткий курс математического анализа [Текст]: в 2 т. / Л. Кудрявцев. — М.: Физматлит, 2005; 2015.
9. *Мышкис А.* Лекции по высшей математике [Текст] / А. Мышкис. — 4-е изд. — М.: Наука, 1973.
10. *Очан Ю.С.* Математический анализ [Текст]: учеб. пособие / Ю.С. Очан, В.Е. Шнейдер. — М.: Альянс, 2016.
11. *Фихтенгольц Г.* Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст]: в 3 т. / Г. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2008.
12. *Фихтенгольц Г.* Основы математического анализа [Текст] / Г. Фихтенгольц. — М.: Лань, 2004.

Темы рефератов для более полного изучения всего курса

(содержат разделы, не освещенные либо не полностью освещенные в настоящем курсе)

1. Ряды Фурье.
2. Несобственные интегралы 2-го рода.
3. Двойные интегралы.
4. Тройные интегралы.
5. Криволинейные интегралы 1-го рода и их приложения.
6. Криволинейные интегралы 2-го рода и их приложения.
7. Формула Грина.
8. Теория потенциала.
9. Поверхностные интегралы 1-го рода.
10. Поверхностные интегралы 2-го рода.
11. Формула Остроградского — Гаусса.
12. Формула Стокса.

Ответы на тесты

Глава 1
1: А. 2. Б. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 3.
5. 3.

Глава 2
1. 2.
2. 1.
3. 3.
4. 2.
5. 1.

Глава 3
1. 1.
2. 1.
3. 3.
4. 3.
5. 2.

Глава 4
1. 1.
2. 2.
3. 2.
4. 2.
5. 2.
6. 2.

Глава 5
1. 1, 4, 7, 8, 10.
2. 1, 2, 4, 6.
3. 2.
4. 2.
5. 1.

Глава 6
1. 2.
2. 3.
3. 2.
4. 1.
5. 2.

Глава 7
1: А. 1. Б. 2.
2. 3.
3. 2.
4. 1.
5. 4.
6. 4.
7. 1.
Глава 8
1. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 2.
5. 4.
Глава 9
1. 1.
2. 1.
3. 3.
4. 2.
5. 1.

Оглавление

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)
E-mail: bookware@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Учебное издание

Волкова Татьяна Викторовна

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ ИНЖЕНЕРНЫХ ФАКУЛЬТЕТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Подписано в печать 03.03.2021.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 16,75.
Тираж 500 экз. (I — 50). Заказ № 00000
ТК 673677-1013010-030321

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29