Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6)

Научная статья
УДК 517.938.5
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

Топологическая сопряжённость n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

И. В. Голикова[1]✉, *С. Х. Зинина*[2]

[1]Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
[2]Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия
E-mail: ✉ivgolikova@edu.hse.ru, suddenbee@gmail.com,
Поступила в редакцию 28.05.2021, принята к публикации 25.07.2021,
опубликована 30.11.2021

Аннотация. Из результатов работы А. Г. Майера 1939 года известно, что грубые преобразования окружности исчерпываются диффеоморфизмами Морса – Смейла. Класс топологической сопряжённости сохраняющего ориентацию диффеоморфизма полностью определяется его числом вращения и числом его периодических орбит, в то время как для меняющего ориентацию диффеоморфизма топологическим инвариантом будет лишь число периодических орбит. Таким образом, *цель* настоящего исследования – найти топологические инварианты n-кратных декартовых произведений диффеоморфизмов окружности. *Методы.* В данной работе исследуются грубые диффеоморфизмы Морса – Смейла на поверхности n-тора. Для доказательства основного результата использовались дополнительные построения и конструкция подмножеств рассматриваемых множеств. *Результаты.* В настоящей работе введён числовой топологический инвариант для n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности. *Заключение.* Сформулирован критерий топологической сопряжённости n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса – Смейла, грубые преобразования окружности, число вращения, периодические орбиты, топологические инварианты.

Благодарности. Исследование динамики декартовых произведений поддержано Программой «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг. (№ 21-04-004). Классификационные результаты получены при поддержке РФФИ (проект 20-31-90069). Также авторы благодарят О. В. Починку за постановку задачи и за полезные обсуждения в течение всего исследования и Е. Я. Гуревич за конструктивные замечания и обсуждения.

Для цитирования: *Голикова И. В., Зинина С. Х.* Топологическая сопряжённость n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 851–862.
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

Article
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

Topological conjugacy of n-multiple Cartesian products of circle rough transformations

I. V. Golikova[1]✉, *S. K. Zinina*[2]

[1]National Research University
"Higher School of Economics", Nizhny Novgorod, Russia
[2]Mordovia State University, Saransk, Russia
E-mail: ✉ivgolikova@edu.hse.ru, suddenbee@gmail.com
Received 28.05.2021, accepted 25.07.2021, published 30.11.2021

Abstract. It is known from the 1939 work of A. G. Mayer that rough transformations of the circle are limited to the diffeomorphisms of Morse – Smale. A topological conjugacy class of orientation-preserving diffeomorphism is entirely determined by its rotation number and the number of its periodic orbits, while for orientation-changing diffeomorphism the topological invariant will be only the number of periodic orbits. Thus, the *purpose* of this study is to find topological invariants of n-fold Cartesian products of diffeomorphisms of a circle. *Methods.* This paper explores the rough Morse – Smale diffeomorphisms on the n-torus surface. To prove the main result, additional constructions and formation of subsets of considered sets were used. *Results.* In this paper, a numerical topological invariant is introduced for n-fold Cartesian products of rough circle transformations. *Conclusion*.The criterion of topological conjugacy of n-fold Cartesian products of rough transformations of a circle is formulated.

Keywords: Morse – Smale diffeomorphisms, circle rough transformations, rotation number, periodic orbits, topological invariants.

Acknowledgements. The study of the dynamics of Cartesian products is supported by the Program "Scientific Foundation of the National Research University Higher School of Economics (HSE)" in 2021–2022 (No. 21-04-004). The classification results were obtained with the support of the RFBR (project 20-31-90069). Also, the authors thank O. V. Pochinka for posing the problem and for useful discussions and E. Y. Gurevich for constructive comments and discussions.

For citation: Golikova IV, Zinina SK. Topological conjugacy of n-multiple Cartesian products of circle rough transformations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6):851–862. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

1. Введение и формулировка результата

Грубые преобразования окружности были описаны и классифицированы А. Г. Майером в [1]. В настоящей работе рассматривается класс G^n n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности $\phi = \phi_1 \times \dots \times \phi_n$. Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Диффеоморфизмы* $\phi = \phi_1 \times \dots \times \phi_n,\ \phi' = \phi'_1 \times \dots \times \phi'_n \in G^n$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует подстановка* $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$ *индексов из множества* $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$, $\xi(i) = \xi_i$, *такая что диффеоморфизмы* ϕ_i *и* ϕ'_{ξ_i} *топологически сопряжены для* $i = 1, \dots, n$.[1]

[1]Для $n = 2$ результат следует из работы [2].

2. Классификация грубых преобразований окружности

В данном разделе рассматривается класс G грубых преобразований окружности. Разобьем множество G на два подкласса G_+ и G_-, состоящих из сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно. Для рассмотренных диффеоморфизмов приводится полная топологическая классификация, следуя работе [1].

1. Для каждого диффеоморфизма $f \in G_+$ множество $Per(f)$ состоит из $2m,\ m \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k. Перенумеруем периодические точки множества $Per(f)$: $p_0, p_1, \ldots, p_{2mk-1}, p_{2mk} = p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2ml}$, $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ для $k > 1$ и числа $k,\ l$ являются взаимно простыми, причём l не зависит от выбора точки p_0.
   Для каждого диффеоморфизма $f \in G_-$ множество $Per(f)$ состоит из $2q,\ q \in \mathbb{N}$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2. Положим $\nu = -1;\ \nu = 0; \nu = +1$, если его неподвижные точки являются источниками; стоком и источником; стоками, соответственно. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечётное, и $\nu = \pm 1$, если q чётное.
2. Диффеоморфизмы $f; f' \in G_+$ с параметрами $m, k, l; m', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $m = m',\ k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:
   - $l = l'$ (при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),
   - $l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).

   Диффеоморфизмы $f; f' \in G_-$ с параметрами $q, \nu; q', \nu'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$.

3. Модельные преобразования окружности

В этом разделе мы введем класс $MG \subset G$ модельных структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности, которые в дальнейшем будем использовать в качестве представителей в каждом классе топологической сопряжённости.

Для любой тройки целых чисел m, k, l такой, что $m, k \in \mathbb{N}$, $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ и является взаимно простым с k для $k > 1$, определим *модельный диффеоморфизм* $\phi_{m,k,l} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ композицией диффеоморфизма $\psi_{m,k}$ с неподвижными точками и поворота $\psi_{k,l}$ на рациональное число l/k:

$$\begin{aligned}
&\phi_{m,k,l} = \psi_{m,k}\psi_{k,l},\\
&\psi_{m,k} = \pi\Psi_{m,k}\pi^{-1} :\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\\
&\psi_{k,l} = \pi\Psi_{k,l}\pi^{-1} :\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее π – универсальное накрытие окружности прямой:

$$\pi(x) = e^{2\pi i x} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,$$

$$\Psi_{m,k}(x) = x + \frac{1}{4\pi m k}\sin(2\pi m k x) :\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

$$\Psi_{k,l}(x) = x + \frac{l}{k} :\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

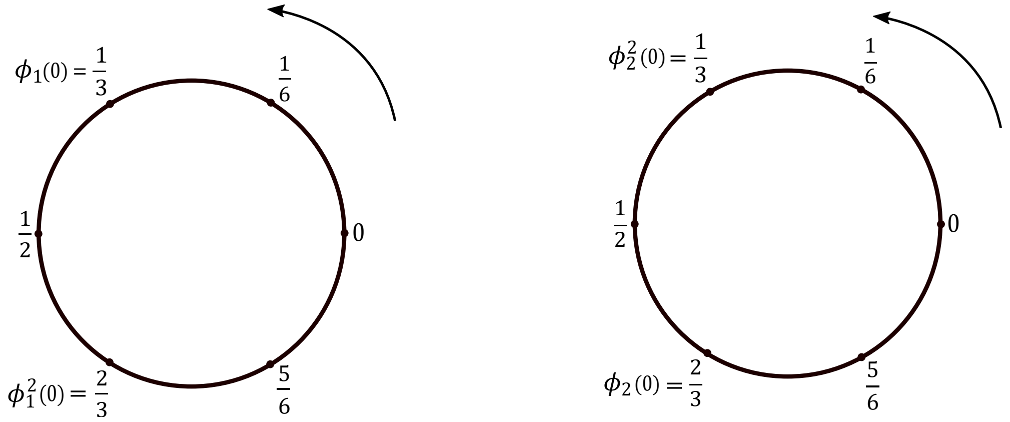

Рис. 1. Диффеоморфизмы $\phi_{1,3,1}$ и $\phi_{1,3,2}$

Fig. 1. Diffeomorphisms $\phi_{1,3,1}$ and $\phi_{1,3,2}$

Тогда $\phi_{m,k,l} = \pi\Psi_{m,k}\Psi_{k,l}\pi^{-1} = \pi\Phi_{m,k,l}\pi^{-1}$, то есть

$$\Phi_{m,k,l}(x) = x + \frac{1}{4\pi mk}\sin(2\pi mkx) + \frac{l}{k} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1. \tag{4}$$

На рис. 1 изображены модельные диффеоморфизмы $\phi_{1,3,1}$ и $\phi_{1,3,2}$, имеющие по две периодические орбиты, каждая из которых имеет период три.

Лемма 1. *Диффеоморфизм $\phi_{m,k,l}$ принадлежит классу G_+, имеет $2mk$ периодических точек периода k и число вращения $\frac{l}{k}$. При этом все периодические точки диффеоморфизма $\phi_{m,k,l}$ имеют вид $\pi\left(\frac{\lambda}{2mk}\right)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{2mk}$, и являются стоковыми, если λ – нечётное, и источниковыми в противном случае (рис. 2).*

Доказательство. Поскольку отображение $\Phi_{m,k,l}$ является монотонно возрастающим диффеоморфизмом и $\Phi_{m,k,l}(x+1) = \Phi_{m,k,l}(x) + 1$, то $\phi_{m,k,l}$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности. Число вращения сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\phi_{m,k,l}$ с поднятием $\Phi_{m,k,l}$ вычисляется по формуле (см., например, [3, определение 11.1.2]):

$$\mathrm{rot}\,(\phi_{m,k,l}) = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{\Phi^{\kappa}_{m,k,l}(x) - x}{\kappa}. \tag{5}$$

Подставив (4) в (5), получим $\mathrm{rot}\,(\phi_{m,k,l}) = \frac{l}{k}$. Следовательно (см., например, [3, предложение 11.1.5]), все периодические точки диффеоморфизма $\phi_{m,k,l}$ имеют период k. Из (2) очевидно следует, что

$$\Phi_{m,k,l}(x) = \Psi_{m,k}(x) + \frac{l}{k}, \tag{6}$$

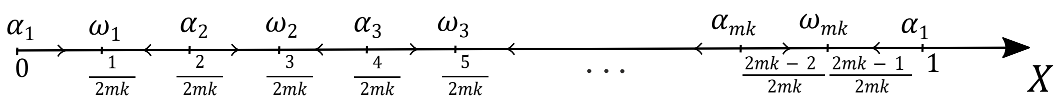

Рис. 2. Периодические точки диффеоморфизма $\phi_{m,k,l} \in G_+$

Fig. 2. Periodic points of diffeomorphism $\phi_{m,k,l} \in G_+$

а также в силу (3) и (6) выполняется $\Phi_{m,k,l} = \Psi_{m,k}\Psi_{k,l}$. Заметим, что $\Psi_{k,l}$ коммутирует с $\Psi_{m,k}$, то есть $\Psi_{m,k}\Psi_{k,l} = \Psi_{k,l}\Psi_{m,k}$. Следовательно,

$$\Phi^{\kappa}_{m,k,l}(x) = \Psi^{\kappa}_{k,l}\Psi^{\kappa}_{m,k}(x) = \Psi^{\kappa}_{m,k} + \kappa\frac{l}{k}. \tag{7}$$

Тогда из (5) и (7) следует, что

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\Psi^{\kappa}_{m,k}(x) - x}{\kappa} \overset{(7)}{=} \lim_{\kappa\to\infty}\frac{(\Phi^{\kappa}_{m,k,l}(x) - x) - \kappa\dfrac{l}{k}}{\kappa} =$$

$$= \lim_{\kappa\to\infty}\frac{\Phi^{\kappa}_{m,k,l}(x) - x}{\kappa} - \frac{l}{k} \overset{(5)}{=} \frac{l}{k} - \frac{l}{k} = 0.$$

Поскольку $\phi_{m,k,l}$ является композицией отображения $\pi\Psi_{m,k}\pi^{-1}$ с поворотом на $\frac{l}{k}$, то все периодические точки отображения $\phi_{m,k,l}$ являются проекцией в силу π неподвижных точек отображения $\Psi_{m,k}$. Решив уравнение $\Psi_{m,k}(x) = x$, получим, что $x = \frac{\lambda}{2mk}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{2mk}$. Поскольку $\Psi'_{m,k}(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi mkx$, то $\Psi'_{m,k}\left(\frac{\lambda}{2mk}\right) > 1$ и являются источниковыми, если λ – чётное, и стоковыми в противном случае. $\square$

Для любой пары целых чисел q, ν такой, что $\nu = 0$, если q нечётное, и $\nu = \pm 1$, если q чётное, определим *модельный диффеоморфизм* $\phi_{q,\nu} \in G_-$ формулой:

$$\phi_{q,\nu} = \pi\Phi_{q,\nu}\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_{q,\nu}(x) = -x - \frac{1}{4\pi q}\sin(2\pi qx), \quad \nu = 0;\ -1; \\ &\Phi_{q,+1}(x) = \Phi^{-1}_{q,-1}\left(x - \frac{1}{2q}\right) + \frac{1}{2q}, \quad q = 2\mu, \quad \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{8}$$

Лемма 2. *Диффеоморфизм $\phi_{q,\nu}$ принадлежит классу G_-, имеет $2q$ периодических точек, две из которых неподвижны (для $\nu = -1$ – источники; $\nu = 0$ – сток и источник; $\nu = +1$ – сток), а остальные имеют период 2. При этом все периодические точки диффеоморфизма $\phi_{q,\nu}$ имеют вид $\pi\left(\frac{\lambda}{2q}\right)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{2q}$ и являются стоковыми, если λ – нечётное, и источниковыми в противном случае (рис. 3).*

Доказательство. Поскольку отображение $\Phi_{q,\nu}$ является монотонно убывающим диффеоморфизмом и $\Phi_{q,\nu}(x+1) = \Phi_{q,\nu}(x) - 1$, то $\phi_{q,\nu}$ – меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности.

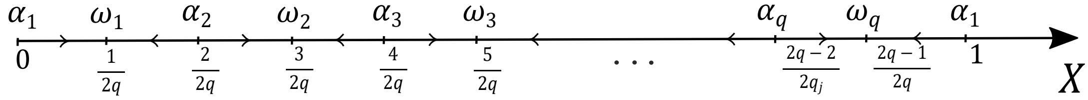

Рис. 3. Периодические точки диффеоморфизма $\phi_{q,\nu} \in G_-$

Fig. 3. Periodic points of diffeomorphism $\phi_{q,\nu} \in G_-$

Рассмотрим квадрат отображения $\phi_{q,\nu}$. Это сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, имеющий накрывающее отображение $\Phi^2_{q,\nu}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что отображение $\Phi^2_{q,\nu}$ для $\Phi_{q,\nu} = -x - \frac{1}{4\pi q}\sin(2\pi q x)$ имеет следующие неподвижные точки:

$$\Phi^2_{q,\nu}(x) = -\left(-x - \frac{\sin(2\pi q x)}{4\pi q}\right) - \frac{\sin\left(2\pi q\left(-x - \frac{\sin(2\pi q x)}{4\pi q}\right)\right)}{4\pi q} = x,$$

$$x + \frac{\sin(2\pi q x)}{4\pi q} - \frac{\sin\left(-2\pi q x - \frac{\sin(2\pi q x)}{2}\right)}{4\pi q} = x,$$

$$\sin(2\pi q x) + \sin\left(2\pi q x + \frac{\sin(2\pi q x)}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\sin(2\pi q x)}{2} = (2c+1)\pi, \quad c \in \mathbb{Z},$$

$$\sin(2\pi q x) = 2c'\pi, \quad c' \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow c' = 0,$$

$$2\pi q x = \pi\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\lambda}{2q}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все периодические точки отображения $\phi^2_{q,\nu}$ являются неподвижными и имеют вид $\pi\left(\frac{\lambda}{2q}\right)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{2q}$. Непосредственное вычисление производных в этих точках показывает, что они являются стоковыми, если λ – нечётное, и источниковыми в противном случае.

Для того чтобы найти неподвижные точки среди найденных периодических, подставим вместо координаты x в выражение (8) для периодических точек $\frac{\lambda}{2q}$:

$$\Phi_{q,\nu}\left(\frac{\lambda}{2q}\right) = -\frac{\lambda}{2q} - \frac{\sin\left(2\pi q\frac{\lambda}{2q}\right)}{4\pi q} = -\frac{\lambda}{2q} - \frac{\sin(\pi\lambda)}{4\pi q} = -\frac{\lambda}{2q}.$$

Для того чтобы точка $-\frac{\lambda}{2q}$ была неподвижной, необходимо, чтобы

$$\Phi_{q,\nu}\left(-\frac{\lambda}{2q}\right) = -\frac{\lambda}{2q} \pmod 1.$$

Это условие при $\lambda \in \mathbb{Z}_{2q}$ выполняется только, когда $\lambda = 0$ или $\lambda = q$. Таким образом, одна из неподвижных точек – это $x = 0$. Второй неподвижной точкой является $x = \frac{1}{2}$. Поскольку отображение $\Phi_{q,+1}$ с точностью до параллельного переноса совпадает с обратным к отображению $\Phi_{q,-1}$, то лемма доказана. □

4. Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

В настоящем разделе мы рассмотрим класс G^n диффеоморфизмов, являющихся n-кратными декартовыми произведениями грубых преобразований окружности. Из сопряжённости любого грубого преобразования окружности модельному следует, что любой диффеоморфизм $\phi \in G^n$ топологически сопряжён декартовому произведению модельных преобразований окружности. Поэтому, не уменьшая общности, везде далее мы будем полагать, что

$$\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_n, \quad \phi_i = \phi_{m_i,k_i,l_i}, \quad i \in \{1, \ldots, r\},$$

$$\phi_i = \phi_{q_i,\nu_i}, \quad i \in \{r+1, \ldots, n\}$$

и $\Phi = \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – накрывающее отображение для ϕ относительно накрытия $\pi^n = \pi \times \cdots \times \pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$.

Заметим, что если рассматривать n-кратные декартовы произведения поворотов на рациональное число на окружности, заданных формулами (1) и (3), как это было сделано в работе [4], то инвариантом при топологическом сопряжении таких диффеоморфизмов является период их периодических точек (см. Предложение 1). В нашем случае топологическая классификация существенно отличается от результатов, представленных в вышеупомянутой работе.

Предложение 1. *Два периодических гомеоморфизма n-тора $\psi = \psi_{k_1,l_1} \times \cdots \times \psi_{k_n,l_n}$, $\psi' = \psi'_{k'_1,l'_1} \times \cdots \times \psi'_{k'_n,l'_n} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их периодические точки имеют одинаковый период, то есть НОК $(k_1, \ldots, k_n) =$ НОК $(k'_1, \ldots, k'_n)$.*

Обозначим наименьшее общее кратное чисел a, b следующим образом: НОК$(a, b) = [a, b]$. Положим

$$M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_r, \quad K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_r, \quad Q = q_{r+1} \cdot \ldots \cdot q_n,$$

$$v = [k_1, \ldots, k_r], \quad w = [2, v].$$

Также положим

$$\mu_i = 2m_ik_i, \quad i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \mu_i = 2q_i, \quad i \in \{r+1, \ldots, n\}.$$

Следующее Утверждение вытекает непосредственно из Лемм 1, 2.

Утверждение 1. *Диффеоморфизм $\phi \in G^n$ является градиентно-подобным диффеоморфизмом n-мерного тора $\mathbb{T}^n$, и его неблуждающее множество состоит из 2^nMKQ периодических точек, 2^nMK из которых имеют период v, а остальные точки имеют период w. При этом все периодические точки диффеоморфизма ϕ имеют вид*

$$x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \pi^n\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right), \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\mu_i}$$

и индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия), равный числу чётных числителей λ_i.

5. Топологическая классификация декартовых произведений

В этом разделе мы докажем Теорему 1, которая даёт необходимые и достаточные условия топологической сопряжённости диффеоморфизмов ϕ, $\phi' \in G^n$, решая задачу их топологической классификации.

Доказательство. Доказательство достаточности условий теоремы очевидно, покажем их необходимость.

В силу Утверждения 1, все периодические точки диффеоморфизма ϕ имеют вид $x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \pi^n\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\mu_i}$. Рассмотрим периодические точки σ^{n-1} диффеоморфизма ϕ, числитель i-й координаты которых является нечётным числом, а числители остальных координат – чётные числа. Из Утверждения 1 следует, что любая такая точка является седловой и имеет индекс Морса, равный $n-1$. Обозначим через $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ объединение замыканий неустойчивых многообразий всех таких точек с фиксированной координатой $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$. Положим

$$A_i = \bigcup_{\lambda_i} A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

Заметим, что при фиксированном λ_i множество $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ представляет собой тор размерности $(n-1)$ (рис. 4), и множество A_i состоит из попарно не пересекающихся торов, а также гиперплоскости, накрывающие каждый такой тор $\mathbb{T}^{n-1}$, трансверсальны оси X_i (рис. 5). Тогда как любой тор из множества A_i пересекается с любым тором из множества $A_{\tilde{i}}$ для $i \neq \tilde{i}$.

Аналогичным образом выделяются $(n-1)$-мерные торы $A_{i',\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}}$ и их объединения $A_{i'}$.

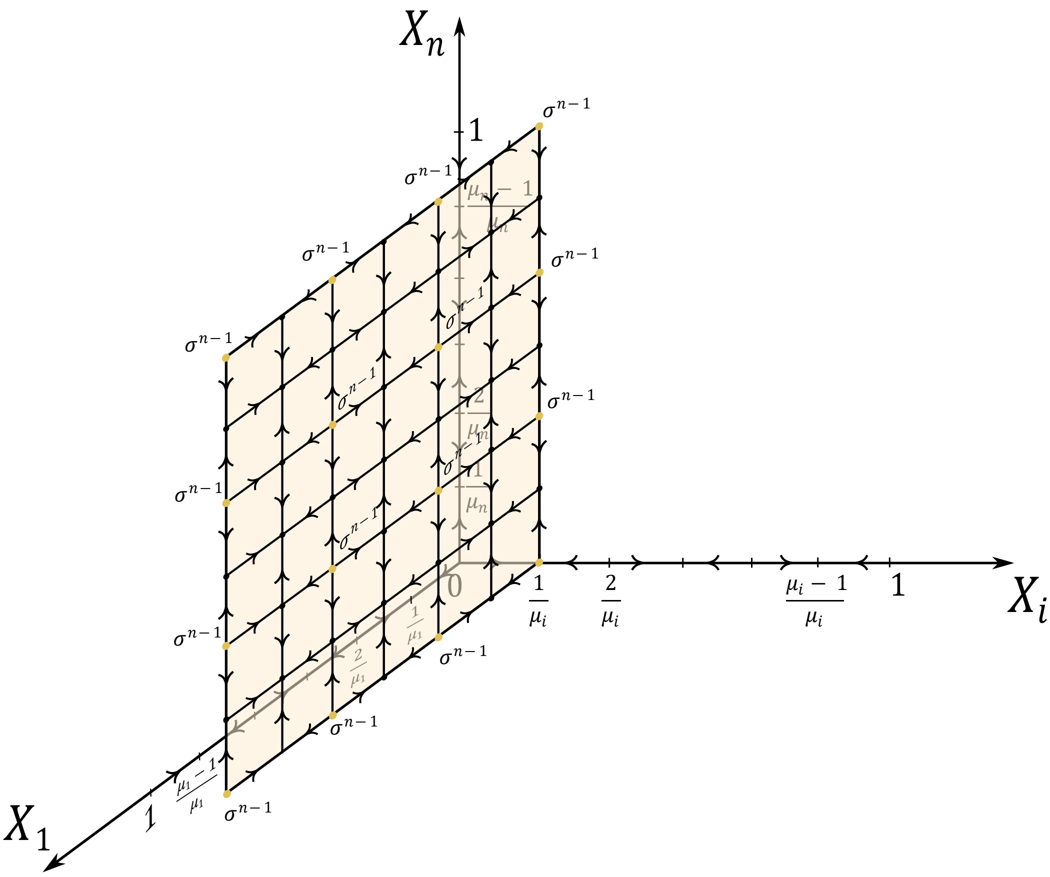

Рис. 4. Фундаментальная область гиперплоскости, накрывающей $(n-1)$-мерный тор $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$

Fig. 4. Fundamental domain of a hyperplane covering $(n-1)$-dimensional torus $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$

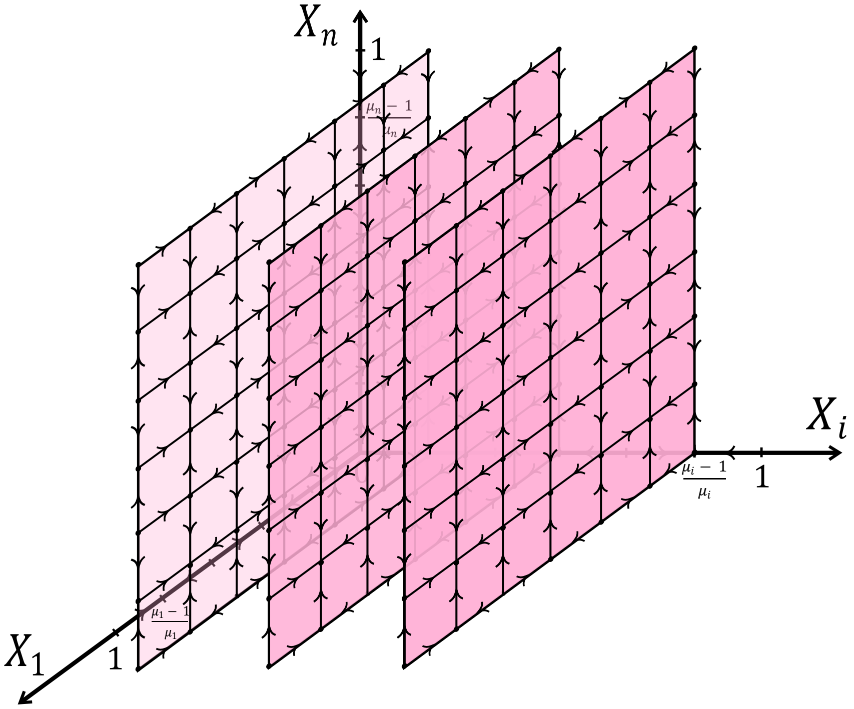

Рис. 5. Семейство фундаментальных областей гиперплоскостей, накрывающих торы $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ из семейства A_i в количестве $\frac{\mu_i}{2}$ штук

Fig. 5. A family of fundamental domains hyperplanes covering tori $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ from the family A_i in the amount of $\frac{\mu_i}{2}$ pieces

Так как диффеоморфизмы ϕ, ϕ' топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h, который в свою очередь имеет свойство сохранять инвариантные многообразия периодических точек диффеморфизма, то $h(A_i){=}A_{i'}$. Таким образом определена подстановка индексов: $\xi(i){=}i'$, а также число $(n-1)$-мерных торов, входящих в множество A_i, сохраняется, то есть $\frac{\mu_i}{2} = \frac{\mu'_{i'}}{2}$.

Теперь покажем, что компоненты ϕ_i и $\phi'_{i'}$ декартовых произведений ϕ и ϕ', соответственно, топологически сопряжены. Для этого необходимо показать равенства $k_i = k'_{i'}$, $l_i = l'_{i'}$ (или $l_i = k'_{i'} - l'_{i'}$) в ориентируемом случае, и $\nu_i = \nu'_{i'}$ в неориентируемом.

Начнём с параметров k и ν. Заметим, что диффеоморфизмы ϕ, ϕ' переводят рассматриваемые $(n-1)$-мерные торы в торы из того же семейства, то есть выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \phi(A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}) &= A_{i,\phi_i\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)}, \\ \phi(A_{i',\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}}) &= A_{i',\phi'_{i'}\left(\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}\right)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, число $(n-1)$-мерных торов в орбитах $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ и $A_{i',\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}}$ равно числу периодических точек в орбитах точек $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ и $\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}$ диффеоморфизмов-компонент ϕ_i и $\phi'_{i'}$ соответственно, и количество таких торов может быть равным либо k_i ($k'_{i'}$ для орбиты $A_{i',\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}}$), либо 1, либо 2 – в зависимости от типа периодической точки $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ $\left(\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}\right)$ диффеоморфизма ϕ_i ($\phi'_{i'}$) и от типа самого диффеоморфизма-компоненты. Таким образом, из вышесказанного и из свойств сопрягающего гомеоморфизма h сохранять инвариантные многообразия периодических точек следует, что для сохраняющего ориентацию диффеоморфизма ϕ_i ($i \in \{1, \ldots, p\}$) выполняется равенство $k_i = k'_{i'}$, а для меняющего ориентацию ϕ_i ($i \in \{p+1, \ldots, n\}$) верно равенство $\nu_i = \nu'_{i'}$.

Для сохраняющих ориентацию ϕ_i и $\phi'_{i'}$ покажем равенство их чисел вращения. Для этого рассмотрим два $(n-1)$-мерных тора из семейства A_i, входящих в границу одной из компонент связности множества, полученного делением n-тора орбитой $(n-1)$-мерного тора $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$ на k_i частей. Найдём такую степень γ_i отображения ϕ, при которой ϕ^{γ_i} переведёт один из торов с границы выбранной компоненты связности в другой тор с этой же границы. Такая степень γ_i называется порядковым числом диффеоморфизма-компоненты ϕ_i, так как выполняется равенство $\phi^{\gamma_i}\left(A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\right) = A_{i,\phi_i^{\gamma_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)}$ (рис. 6). Для $(n-1)$-мерных торов из орбиты $A_{i',\frac{\lambda'_{i'}}{\mu'_{i'}}}$ с границы компоненты связности множества, полученного таким же образом, как и для диффеоморфизма ϕ, применим аналогичные рассуждения, получив порядковое число $\gamma'_{i'}$ диффеоморфизма-компоненты $\phi'_{i'}$. Так как сопрягающий гомеоморфизм h переводит компоненту связности множества, полученного для диффеоморфизма ϕ в компоненту связности множества для ϕ', то порядковые числа γ_i и $\gamma'_{i'}$ совпадают. Известно, что порядковые числа γ_i и $\gamma'_{i'}$ соотносятся с параметрами l_i и $l'_{i'}$, соответственно, следующим образом: $\gamma_i l_i \equiv 1(k_i)$, $\gamma'_{i'} l'_{i'} \equiv 1(k'_{i'})$ или $\gamma'_{i'}(k'_{i'} - l'_{i'}) \equiv 1(k'_{i'})$. Второе равенство выполняется, когда сопрягающий гомеоморфизм h меняет ориентацию на образе выбранной компоненты связности. Из равенств следует, что $l_i = l'_{i'}$ или $l_i = k'_{i'} - l'_{i'}$.

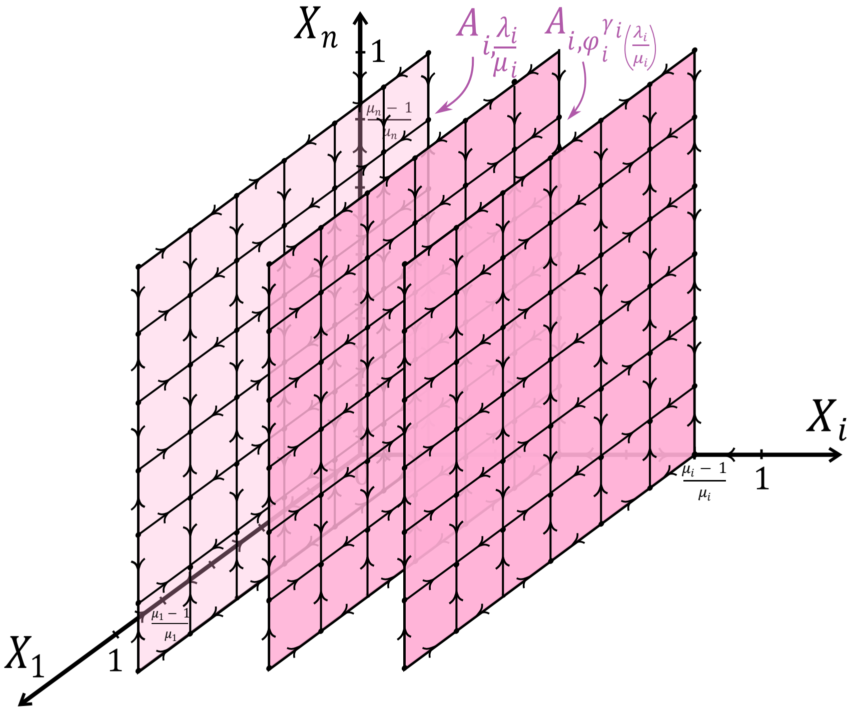

Рис. 6. Действие отображения ϕ^{γ_i} на тор $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$

Fig. 6. Effect of mapping ϕ^{γ_i} on torus $A_{i,\frac{\lambda_i}{\mu_i}}$

□

Заключение

В заключение стоит отметить, что класс топологической сопряжённости диффеоморфизма $\phi = \phi_1 \times \phi_2 \times \cdots \times \phi_n$ определяется числом периодических точек данного диффеоморфизма, их периодом, а также числами вращения диффеоморфизмов-компонент n-кратного декартового произведения ϕ. Начиная со случая, когда компоненты декартового произведения ϕ представляют собой сохраняющие ориентацию грубые диффеоморфизмы окружности, отмечается, что число периодических точек диффеоморфизма ϕ равно $2^n \prod_{i=1}^{n} m_i k_i$, а их период равен $q =$НОК$(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. В случае, когда в n-кратное декартово произведение входит хотя бы один меняющий ориентацию грубый диффеоморфизм окружности, число периодических точек зависит не только от параметров m и k, но и от параметра q: у такого диффеоморфизма всего $2^n \prod_{i=1}^{p} m_i k_i \prod_{j=p+1}^{n} q_j$ периодических точек, $2^n \prod_{i=1}^{p} m_i k_i$ из которых имеют период $r =$НОК$(k_1, \ldots, k_p)$, а остальные точки, среди координат которых есть неподвижные точки меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности, – период НОК$(2, r)$. Таким образом, для топологической сопряжённости диффеоморфизмов ϕ, ϕ' из класса G^n необходимо, чтобы для каждой компоненты декартова произведения $\phi = \phi_1 \times \phi_2 \times \cdots \times \phi_n$ существовал диффеоморфизм, входящий в n-кратное декартово произведение $\phi' = \phi'_1 \times \phi'_2 \times \cdots \times \phi'_n$, топологически сопряжённый с ней. Теорема 1 полностью обосновывает данный факт как необходимое условие, а также как и достаточное.

Список литературы

1. *Майер А. Г.* Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. 1939. Т. 12. С. 215–229.
2. *Гуревич Е. Я., Зинина С. Х.* О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями // Журнал СВМО. 2015. Т. 17, № 1. С. 37–47.
3. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
4. *Kurenkov E. D., Ryazanova K. A.* On periodic translations on n-torus // Динамические системы. 2017. Т. 7(36), № 2. С. 113–118.
5. *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Vol. 46 of Developments in Mathematics. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. 295 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3.
6. *Peixoto M. M.* On structural stability // Annals of Mathematics. 1959. Vol. 69, no. 1. P. 199–222. DOI: 10.2307/1970100.

References

1. Mayer AG. A rough transformation of circle into a circle. Scientific Notes of the GSU. 1939;12: 215–229 (in Russian).
2. Gurevich EY, Zinina SK. On topological classification of gradient-like systems on surfaces, which are locally direct product. Middle Volga Mathematical Society Journal. 2015;17(1):37–45 (in Russian).
3. Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Vol. 54 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press; 1995. 822 p. DOI: 10.1017/CBO9780511809187.
4. Kurenkov ED, Ryazanova KA. On periodic translations on n-torus. Dynamical Systems. 2017; 7(2):113–118.
5. Grines VZ, Medvedev TV, Pochinka OV. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Vol. 46

of Developments in Mathematics. Switzerland: Springer International Publishing; 2016. 295 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3.
6. Peixoto MM. On structural stability. Annals of Mathematics. 1959;69(1):199–222. DOI: 10.2307/1970100.

Голикова Иулиана Викторовна – родилась в Нижегородской области (1999). Является студенткой 4 курса факультета информатики, математики и компьютерных наук по направлению «Фундаментальная математика» в НИУ «Высшая школа экономики» (2021). С 2020 года работает в международной лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород) в должности стажёра-исследователя. Научные интересы – качественная теория динамических систем.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, 25/12
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: ivgolikova@edu.hse.ru

Зинина Светлана Халиловна – родилась в Саранске (1991). Окончила Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева (2015). В настоящее время аспирант этого университета. Научные интересы – качественная теория динамических систем, исследование топологии многообразий.

Россия, Саранск 430005, ул. Большевистская, 68
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва
E-mail: suddenbee@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3002-281X
AuthorID: 734650