

УДК 515.162.8

П. А. Филиппова

Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графами пересечений хордовых диаграмм

Теорема Чмутова–Ландо утверждает, что значение весовой системы (функции на хордовых диаграммах, удовлетворяющей 4-членным соотношениям Васильева), отвечающей алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , зависит лишь от графа пересечений хордовой диаграммы.

В настоящей статье мы вычисляем значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах нескольких бесконечных серий, представляющих собой соединение графа с малым числом вершин с дискретным. В частности, мы вычисляем эти значения для серии, в которой исходный граф является циклом на 5 вершинах; все графы этой серии за исключением начального не являются графами пересечений.

Мы также выводим формулу для проекций производящих функций графов, представляющих собой соединение произвольного графа с дискретным, на подпространство примитивных элементов в алгебре Хопфа графов. Воспользовавшись полученной формулой, мы вычисляем значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях графов указанных серий на подпространство примитивных. Наши вычисления подтверждают гипотезу С. К. Ландо о значениях \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях на подпространство примитивных.

Библиография: 17 названий

Ключевые слова: хордовая диаграмма, \mathfrak{sl}_2 -весовая система, граф пересечений, соединение графов, алгебра Хопфа

§ 1. Введение

При изучении инвариантов узлов важную роль играют весовые системы — функции на хордовых диаграммах, удовлетворяющие так называемым 4-членным соотношениям. Инварианты конечного порядка, или инварианты Васильева, введенные В.А. Васильевым [17] около 1990-го года, могут быть выражены в терминах весовых систем. С другой стороны, как доказал М. Концевич [9], над

полем характеристики нуль всякая весовая система соответствует какому-то инварианту конечного порядка.

Около 1995 года Д. Бар-Натан [1] и М. Концевич [9] предложили способ построения весовой системы по всякой конечномерной алгебре Ли, наделенной невырожденной инвариантной билинейной формой. Простейший случай этой конструкции — весовая система, отвечающая алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , или \mathfrak{sl}_2 -весовая система. Инвариант узлов, которому соответствует эта весовая система, — крашенный многочлен Джонса. Значения этой весовой системы лежат в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 , то есть представляют собой многочлены от одной переменной s (элемента Казимира) со старшим коэффициентом равным единице.

Несмотря на простоту определения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы, она весьма сложна для вычислений в связи с необходимостью проводить вычисления в некоммутативной алгебре. Рекуррентные соотношения Чмутова—Варченко [6] существенно упрощают задачу, однако и их применение достаточно трудоемко, и явные значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы известны лишь для хордовых диаграмм малых порядков и небольшого числа простых серий хордовых диаграмм (в том числе, для хордовых диаграмм, граф пересечений которых является полным двудольным, причем размер одной из долей не превосходит 3, см. [7]). В частности, для случая хордовых диаграмм с полным графом пересечений имеется гипотеза (С.К. Ландо) о форме соответствующих многочленов, однако она доказана лишь для их линейных членов [2].

Согласно теореме Чмутова—Ландо [5], значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на диаграммах с изоморфными графами пересечений совпадают, то есть, значение этой весовой системы на хордовой диаграмме определяется ее графом пересечений. Это позволяет говорить о значениях \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах пересечений и вызывает естественный вопрос (С.К. Ландо) о том, существует ли продолжение весовой системы до полиномиального инварианта графов, удовлетворяющего 4-членным соотношениям для графов [11]. Как показал Е. Красильников, для всех графов не более чем с 8 вершинами такое продолжение существует и единственно. Однако значений продолженной весовой системы для графов с большим числом вершин, в частности, для бесконечных серий графов, не являющихся графами пересечений, до настоящего времени не было известно. Предполагая, что продолжение существует, мы вычисляем его значения на бесконечной серии графов, представляющих собой соединение цикла длины 5 и дискретного графа на n вершинах. В случае $n = 1, 2, 3$ наши результаты совпадают с результатами Е. Красильникова. Начиная с $n = 1$ графы этой серии не являются графами пересечений, так что в нашей работе впервые вычислены значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на бесконечном семействе графов, не являющихся графами пересечений.

Далее мы обозначаем через (G, n) соединение графа G и дискретного графа на n вершинах, т.е. граф, полученный добавлением к данному графу G всех ребер, соединяющих его вершины с данными n вершинами, никакие две из которых не соединены ребром.

Один из возможных подходов к поиску продолжения весовой системы до полиномиального инварианта произвольных графов состоит в том, чтобы определить некоторый полиномиальный инвариант произвольных графов, удовлетво-

ряющий 4-членным соотношениям для графов и совпадающий с весовой системой на графах пересечений. Для его реализации необходимо иметь достаточное количество примеров значений весовой системы на различных семействах графов. Мы вычисляем эти значения для всех графов вида (G, n) , где G — граф не более чем с 4 вершинами, а $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Как векторное пространство хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, так и векторное пространство графов наделяются структурой связанной градуированной коммутативной кокоммутативной алгебры Хопфа. В свою очередь, графы вида (G, n) порождают подалгебру Хопфа в алгебре Хопфа графов, а эта подалгебра Хопфа содержит подалгебры Хопфа, порожденные графами вида (G, n) , где все графы G — подграфы заданного графа. Из теоремы Милнора—Мура [15] вытекает, что каждая из этих алгебр Хопфа порождена своими примитивными элементами и является полиномиальной алгеброй Хопфа от этих элементов. Из этого следует, что в каждой такой алгебре Хопфа определена проекция на подпространства примитивных элементов вдоль подпространства разложимых. Эта проекция позволяет построить примитивный элемент по произвольному элементу алгебры Хопфа. Существует универсальная формула для этой проекции, представляющая ее как логарифм тождественного гомоморфизма [12, 16], однако вычисления с ее помощью в общем случае оказываются трудоемкими. Мы выводим формулу, выражающую производящую функцию для проекций графов серии (G, n) на примитивные через производящие функции для графов серий (H, n) , где H — подграфы графа G , включая сам граф G . Вместе с полученными нами явными формулами для упомянутых производящих функций это позволяет вычислить производящие функции для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях на примитивные графов серий (G, n) в случаях, когда G представляет собой граф не более чем с 4 вершинами либо цикл на 5 вершинах. Из вида получившихся производящих функций следует, что значение весовой системы на проекциях таких графов (G, n) представляет собой многочлен от s степени не выше числа вершин в G . Это подтверждает еще одну гипотезу С.К.Ландо: значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции на примитивные хордовой диаграммы, окружение (т.е. длина наибольшего простого цикла, в англоязычной терминологии «circumference»; используется также термин «окружность графа») графа пересечений которой не превосходит 2ℓ , $\ell \geq 1$, является многочленом степени не выше ℓ .

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим определение алгебр Хопфа графов и хордовых диаграмм, а также подалгебр Хопфа графов вида (G, n) , и обсуждаем проекции на пространство примитивных элементов в этих алгебрах Хопфа. Основной новый результат здесь — формула, выражающая производящие функции для проекций на примитивные графов серии (G, n) через производящие функции для подграфов (включая производящую функцию для самих графов (G, n)). В разделе 3 мы воспроизводим определение и некоторые свойства \mathfrak{sl}_2 -весовой системы. Наше изложение в разделах 2 и 3 следует подходу [4]. В разделе 4 мы используем соотношения Чмутова—Варченко [6] и некоторые наши результаты (см. [7]), чтобы вычислить значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах (G, n) для всех графов G не более чем с 4 вершинами. Воспользовавшись полученными результатами, мы вычис-

ляем в разделе 5 значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах вида (C_5, n) , где C_5 — цикл на 5 вершинах. В разделе 6 мы приводим формулы для производящих функций для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на рассмотренных в статье графах и их проекциях.

Работа выполнена при поддержке Международной лаборатории кластерной геометрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор № 075-15-2021-608 от 08.06.2021

§ 2. Алгебры Хопфа графов и хордовых диаграмм

Пусть G — простой граф; обозначим через $V(G)$ множество его вершин, а через $E(G)$ — множество его ребер. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ будем обозначать через (G, n) граф, являющийся соединением графа G и дискретного графа на n вершинах. (Соединением двух простых графов G и H называется граф, получаемый добавлением к несвязному объединению $G \sqcup H$ этих графов всех ребер, соединяющих вершины графа G с вершинами графа H .) Так, если G — дискретный граф на m вершинах, то (G, n) представляет собой полный двудольный граф $K_{m,n}$, а если G — полный граф на m вершинах, то (G, n) — расщепимый граф $S_{m,n}$.

В этом параграфе мы описываем алгебру Хопфа графов и алгебру Хопфа хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, а также подалгебры Хопфа в алгебре Хопфа графов, порожденные графами вида (G, n) . Пользуясь универсальной формулой проекции на подпространство примитивных элементов, мы выводим формулу проекции на подпространство примитивных в алгебрах Хопфа графов вида (G, n) .

Коассоциативной **коалгеброй** с коединицей над полем \mathbb{K} называется векторное пространство C над полем \mathbb{K} с отображениями

$$\begin{aligned}\mu: C &\rightarrow C \otimes C \\ \varepsilon: C &\rightarrow \mathbb{K},\end{aligned}$$

удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned}(id_C \otimes \mu) \circ \mu &= (\mu \otimes id_C) \circ \mu, \\ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \mu &= id_C = (\varepsilon \otimes id_C) \circ \mu.\end{aligned}$$

Биалгеброй над полем \mathbb{K} называется векторное пространство B над \mathbb{K} , являющееся одновременно ассоциативной алгеброй с умножением m и единицей η и коассоциативной коалгеброй с коумножением μ и коединицей ε , для которых выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}\mu \circ m &= (m \otimes \mu) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\mu \otimes \mu), \\ \varepsilon \otimes \varepsilon &= \varepsilon \circ m, \\ \eta \otimes \eta &= \mu \circ \eta, \\ id &= \varepsilon \circ \nu.\end{aligned}$$

Здесь через $\tau: B \otimes B \rightarrow B \otimes B$ обозначено отображение, меняющее сомножители местами.

Алгебра Хопфа над полем \mathbb{K} — ассоциативная и коассоциативная биалгебра H с единицей, коединицей и *антиподом* — таким \mathbb{K} -линейным отображением $S: H \rightarrow H$, что (в прежних обозначениях) выполняется соотношение

$$m \circ (S \otimes id) \circ \mu = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \mu.$$

Всюду ниже мы предполагаем, что характеристика основного поля \mathbb{K} равна нулю.

2.1. Алгебры Хопфа графов и хордовых диаграмм. Под графом мы понимаем класс изоморфизма простых (т.е. не имеющих кратных ребер и петель) конечных графов. Формальные линейные комбинации графов образуют векторное пространство, градуированное количеством вершин графа.

Произведение графов G_1 и G_2 — это их несвязное объединение: $G_1 G_2 := G_1 \sqcup G_2$. Такое умножение продолжается на пространство графов по линейности. Оно согласовано с градуировкой и задает на пространстве графов структуру градуированной алгебры.

Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G . Действие **коумножения** μ на графе G определено так:

$$\mu(G) := \sum_{U \subset V(G)} G|_U \otimes G|_{V(G) \setminus U}.$$

Здесь через $G|_U$ обозначен подграф в G , индуцированный подмножеством $U \subset V(G)$ множества его вершин. Здесь и ниже под термином «подграф» мы будем понимать подграф, индуцированный заданным подмножеством вершин. Как и умножение, коумножение продолжается на линейные комбинации графов по линейности и согласовано с градуировкой, т.е. мы ввели на пространстве графов структуру градуированной коалгебры. Более того, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. // *Введенные выше умножение и коумножение, вместе с естественно определяемыми единицей, коединицей и антиподом, задают на пространстве графов структуру градуированной коммутативной и кокоммутативной алгебры Хопфа.*

Эта структура алгебры Хопфа на пространстве графов введена в [8]. Обозначим через \mathcal{G} алгебру Хопфа графов, а через \mathcal{G}_n — однородное векторное подпространство в ней, натянутое на графы с n вершинами, $n = 0, 1, 2, \dots$, так что

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots$$

4-членным элементом в пространстве графов называется линейная комбинация вида

$$G - G'_{AB} - \tilde{G}_{AB} + \tilde{G}'_{AB},$$

где A, B — какие-то две вершины графа, G'_{AB} — граф G , в котором инцидентность вершин A и B изменена на противоположную; \tilde{G}_{AB} — граф G , в котором для каждой вершины, соединенной с B , ее инцидентность с вершиной A изменена на противоположную. Все графы, входящие в 4-членный элемент, имеют одинаковое число вершин. Ниже (см. рис. 6) будет приведен пример 4-членного элемента для графов.

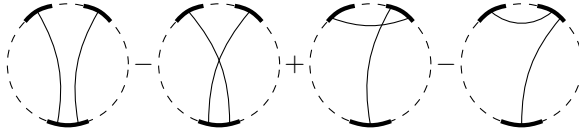


Рис. 1. 4-членный элемент в пространстве хордовых диаграмм

Обозначим через \mathcal{F}_n фактор-пространство векторного пространства \mathcal{G}_n по векторному подпространству, натянутому на 4-членные элементы с n -вершинными графами. Пространство

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \dots$$

наделено индуцированной из \mathcal{G} структурой градуированной алгебры Хопфа, см. [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. // *Хордовая диаграмма порядка n — ориентированная окружность с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на n непересекающихся пар, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ее ориентацию.*

Для наглядности на рисунках точки, образующие одну пару, мы соединяем отрезком прямой или кривой, который и называем хордой.

Векторное пространство, образованное линейными комбинациями хордовых диаграмм, градуировано. Каждая компонента градуировки — векторное пространство, порожденное хордовыми диаграммами одного порядка.

4-членным элементом в пространстве хордовых диаграмм называется линейная комбинация диаграмм, приведенная на рис. 1. В этой линейной комбинации все четыре диаграммы содержат одинаковый набор хорд, отличных от двух изображенных, причем концы хорд этого набора могут лежать только на участках окружности, изображенных пунктирной линией.

Приравнивая нулю 4-членные элементы в пространствах графов и хордовых диаграмм соответственно, мы получаем **4-членные соотношения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. // *Дуговая диаграмма порядка n — ориентированная прямая с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на n пар, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию.*

Каждая из этих n пар точек изображается дугой в верхней полуплоскости, соединяющей точки. Эта дуга не имеет с окружностью общих точек, кроме концов.

Если выбрать на хордовой диаграмме точку, отличную от концов хорд, и «разрезать» хордовую диаграмму в этой точке, получится **представление хордовой диаграммы в виде дуговой диаграммы** (см. пример на рис. 2). У хордовой диаграммы порядка n может быть до $2n$ различных представлений в виде дуговой диаграммы. Напротив, дуговая диаграмма однозначно определяет соответствующую хордовую диаграмму.

Произведение хордовых диаграмм C_1 и C_2 — это хордовая диаграмма, соответствующая дуговой диаграмме, полученной последовательным соединением двух произвольных дуговых представлений диаграмм C_1 и C_2 (см. рис.

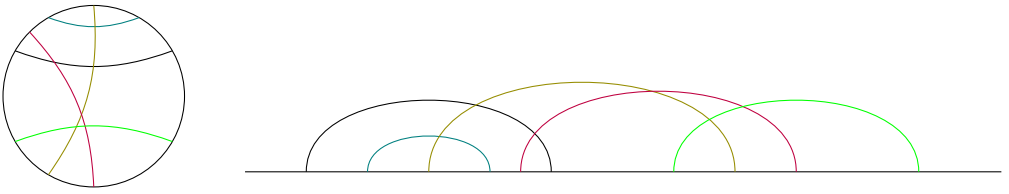


Рис. 2. Пример хордовой диаграммы и соответствующей ей дуговой диаграммы

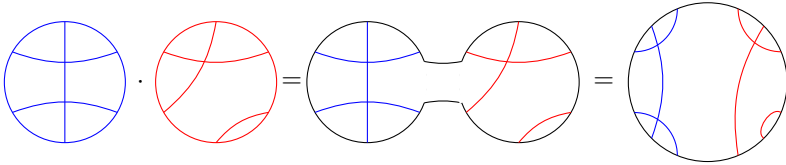


Рис. 3. Умножение хордовых диаграмм

3). Произведение хордовых диаграмм корректно определено (то есть, результат не зависит от выбора точек разрыва) по модулю 4-членных соотношений.

Обозначим через $V(C)$ множество хорд диаграммы C . Коумножение μ хордовых диаграмм определено так:

$$\mu(C) := \sum_{U \subset V(C)} C|_U \otimes C|_{V(C) \setminus U}.$$

Здесь через $C|_U$ обозначена хордовая диаграмма, состоящая из подмножества $U \subset V(C)$ множества хорд хордовой диаграммы C .

Умножение и коумножение продолжаются на линейные комбинации хордовых диаграмм по линейности и согласованы с градуировкой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *[[9]]* Определенные выше операции умножения и коумножения задают на фактор-пространстве пространства хордовых диаграмм по подпространству, порожденному 4-членными элементами, с определенными выше операцией умножения и коумножения структуру алгебры Хопфа.

Обозначим эту алгебру Хопфа через \mathcal{C} . Будем называть ее алгеброй Хопфа хордовых диаграмм, подразумевая, что хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до 4-членного соотношения.

Граф пересечений $\gamma(C)$ хордовой диаграммы C — это граф, вершины $V(\gamma(C))$ которого соответствуют хордам $V(C)$ диаграммы C , и вершины v_a и v_b в котором соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие хорды a и b пересекаются (то есть, их концы a_1, a_2, b_1, b_2 расположены вдоль окружности в следующем порядке: a_1, b_1, a_2, b_2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *[[11]]* *Отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме ее граф пересечений, продолжается до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$. Этот гомоморфизм опускается до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$.*

Существуют графы, не являющиеся графами пересечений никакой хордовой диаграммы. Немного подробнее о таких графах будет сказано в разделе 5.1. Кроме этого, отметим, что у двух разных хордовых диаграмм может быть один и тот же граф пересечений.

2.2. Подалгебры Хопфа порожденные графами (G, n) , в алгебре Хопфа \mathcal{G} . Пусть G — простой граф; обозначим через $V(G)$ множество его вершин, а через $E(G)$ — множество его ребер. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ будем обозначать через (G, n) граф, являющийся соединением графа G и дискретного графа на n вершинах.

Любой подграф графа (G, n) имеет вид (H, k) , где H — некоторый подграф в G , $k \leq n$. Через \mathcal{A}_G обозначим подалгебру Хопфа в алгебре Хопфа \mathcal{G} , порожденную графами вида (H, n) , где H — подграф графа G , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если G_0, G_1, G_2, \dots — последовательность графов, в которой каждый граф является подграфом следующего за ним, то соответствующие подалгебры Хопфа образуют цепочку по включению:

$$\mathcal{A}_{G_0} \subset \mathcal{A}_{G_1} \subset \mathcal{A}_{G_2} \subset \dots \subset \mathcal{G}.$$

К примеру, алгебра Хопфа $\mathcal{A}_{\bullet \dots \bullet}$ порождена графами вида (\bullet, n) (так называемые графы-звезды $K_{1,n}$ с n лучами), $(\bullet \bullet, n)$ (полные двудольные графы $K_{2,n}$), $(\bullet \bullet \bullet, n)$ (расщепимые графы $S_{2,n}$) и $(\uparrow \bullet, n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.3. Примитивные элементы в алгебре Хопфа графов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. //Элемент p биалгебры называется примитивным, если $\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$.

Как нетрудно видеть, примитивные элементы образуют векторное подпространство в биалгебре. Поскольку всякая однородная составляющая примитивного элемента примитивна, в градуированной биалгебре это векторное подпространство также градуировано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. [Теорема Милнора–Мура [15]] *Над полем характеристики нуль всякая связная коммутативная и кокоммутативная градуированная биалгебра изоморфна полиномиальной биалгебре, порожденной ее примитивными элементами.*

Условие связности биалгебры состоит в том, что ее нулевая однородная компонента изоморфна самому полю.

Разложимые элементы (т.е. произведения однородных элементов меньшей градуировки) порождают векторное подпространство во всяком однородном пространстве градуированной биалгебры. Из теоремы Милнора–Мура вытекает, что каждое однородное подпространство раскладывается в прямую сумму подпространства, порожденного разложимыми элементами, и подпространства примитивных элементов. Поэтому корректно определена проекция π каждого однородного подпространства на подпространство примитивных элементов вдоль подпространства разложимых.

Следующее утверждение играет для нас одну из центральных ролей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. [[11, 16]] *Проекция $\pi(G)$ произвольного графа G на подпространство примитивных элементов вдоль подпространства разложимых*

элементов в алгебре Хопфа \mathcal{G} имеет вид

$$\pi(G) := G-1! \sum_{V_1 \sqcup V_2 = V(G)} G|_{V_1} \cdot G|_{V_2} + 2! \sum_{V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3 = V(G)} G|_{V_1} \cdot G|_{V_2} \cdot G|_{V_3} - \dots, \quad (2.1)$$

где V_1, V_2, V_3, \dots — непересекающиеся непустые подмножества множества вершин $V(G)$ графа G .

2.4. Производящие функции и проекция на примитивные элементы в алгебре Хопфа графов \mathcal{A}_G . Введем экспоненциальные производящие функции

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_G(x) &:= x^{|V(G)|} \sum_{n=0}^{\infty} (G, n) \frac{x^n}{n!}, \\ \mathcal{P}_G(x) &:= x^{|V(G)|} \sum_{n=0}^{\infty} \pi((G, n)) \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

коэффициентами которых являются элементы алгебры \mathcal{A}_G . Следующая теорема — первый из наших основных результатов. Она обобщает наши результаты из [7], доказанные там для конкретных графов G с небольшим числом вершин.

В дальнейшем будем обозначать граф на одной вершине без рёбер через K_1 (стандартное обозначение для полного графа на одной вершине).

ТЕОРЕМА 1. // *Справедливо равенство*

$$\mathcal{P}_G(x) = \sum_{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k = V(G)} (-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{G}_{G|_{V_1}}(x) \mathcal{G}_{G|_{V_2}}(x) \cdots \mathcal{G}_{G|_{V_k}}(x) (\exp(-K_1 x))^k, \quad (2.2)$$

где суммирование ведется по всем представлениям множества $V(G)$ в виде объединения непересекающихся непустых подмножеств.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее понятие.

Числом Стирлинга второго рода называется число разбиений n -элементного множества на m непустых подмножеств. Это число обозначается через $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$, $n, m \geq 0$. Приведем несколько примеров:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0, n \in \mathbb{N}; \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}, n \in \mathbb{N}; \left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 7.$$

ЛЕММА 1. [Доказательство см., например, в [7].] Для любых натуральных чисел a и N справедливо равенство

$$\sum_{m=a}^{N+a} (-1)^{m-1} (m-1)! \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m-a \end{smallmatrix} \right\} = (-1)^{a-1} (a-1)! (-a)^N.$$

Доказательство теоремы 1. 1. Правая часть равенства (2.2) равна

$$\sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \\ =V(G)}} (-1)^{k-1} (k-1)! \left(x^{|V_1|} \sum_{i_1=0}^{\infty} (G|_{V_1}, i_1) \frac{x^{i_1}}{i_1!} \right) \cdots \\ \cdot \left(x^{|V_k|} \sum_{i_k=0}^{\infty} (G|_{V_k}, i_k) \frac{x^{i_k}}{i_k!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k)^j K_1^j x^j}{j!} \right).$$

Коэффициент при $\frac{x^{n+|V(G)|}}{n!}$ в этом выражении равен

$$n! \sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \\ =V(G)}} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k \\ =i}} (G|_{V_1}, i_1) \cdots (G|_{V_k}, i_k) \frac{(-k)^{n-i} K_1^{n-i}}{i_1! \cdots i_k! (n-i)!}.$$

2. С другой стороны, запишем формулу для проекции графа (G, n) на пространство примитивных элементов. Согласно формуле (2.1),

$$\pi((G, n)) = \sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m \\ =V((G, n))}} (-1)^{m-1} (m-1)! (G, n)|_{V_1} \cdots (G, n)|_{V_m},$$

причем суммирование ведется по разбиениям множества $V((G, n))$ на непустые подмножества. Каждое такое разбиение множества $V((G, n))$ индуцирует некоторое разбиение множества $V(G)$ на несколько непустых подмножеств. Запишем для каждого такого разбиения множества $V(G)$ на k подмножеств количество разбиений множества $V((G, n))$, индуцирующих данное разбиение, на $m = k, k+1, \dots, k+n$ частей. Вместе с вершинами каждой части V_p , $p = 1, 2, \dots, k$ разбиения $V(G)$ в каждую часть разбиения $V((G, n))$ входит i_p вершин из независимого подмножества из n вершин. Обозначим их сумму через i : $i := i_1 + i_2 + \dots + i_k$. Оставшиеся $n-i$ вершин разбиваются на $m-k$ непустых подмножеств. Поскольку между этими вершинами нет ребер, ограничение графа (G, n) на это подмножество вершин представляет собой дискретный граф на $n-i$ вершинах, т.е., K_1^{n-i} , вне зависимости от выбора такого разбиения.

Число способов разбить множество из n вершин на $k+1$ частей из $i_1, i_2, \dots, i_k, n-i$ вершин равно мультиномиальному коэффициенту $\binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k, n-i}$. Оставшиеся $n-i$ вершин можно разбить на $m-k$ непустых подмножеств $\{m-k\}$ способами. Поэтому формула для проекции графа (G, n) приобретает вид

$$\pi((G, n)) = \sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \\ =V((G))}} \sum_{m=k}^{k+n} (-1)^{m-1} (m-1)! \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{m-k} K_1^{n-i} \\ \cdot \left(\sum_{i_1 + \dots + i_k = i} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k, n-i} \prod_{p=1}^k (G|_{V_p}, i_p) \right).$$

3. Переставим знаки суммирования:

$$\pi((G, n)) = \sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \\ = V((G))}} \sum_{i=0}^n \sum_{m=k}^{k+n} (-1)^{m-1} (m-1)! \binom{n-i}{m-k} K_1^{n-i} \cdot \left(\sum_{i_1 + \dots + i_k = i} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k, n-i} \prod_{p=1}^k (G|_{V_p}, i_p) \right).$$

4. При $m > k + n - i$ число $\binom{n-i}{m-k}$ равно нулю, поэтому выражение не изменится, если заменить верхний предел суммирования в третьей сумме, равный $k + n$, на $k + n - i$. Применив лемму 1 к последнему выражению, получим

$$\pi((G, n)) = \sum_{\substack{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \\ = V((G))}} \sum_{i=0}^n (-1)^{k-1} (k-1)! (-k)^{n-i} K_1^{n-i} \cdot \left(\sum_{i_1 + \dots + i_k = i} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k, n-i} \prod_{p=1}^k (G|_{V_p}, i_p) \right). \quad (2.3)$$

5. Поскольку $\binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k, n-i} = \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k! (n-i)!}$, выражение (2.3) равно (2.2), что и требовалось. \square

§ 3. Весовая система $w_{\mathfrak{sl}_2}$

В этом разделе мы напоминаем необходимые сведения о весовой системе, связанной с алгеброй Ли \mathfrak{sl}_2 .

3.1. Определение весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$. Пусть R — некоторое кольцо, A — некоторая алгебра над R . Линейная функция $w: \mathcal{C} \rightarrow A$ называется **весовой системой** на \mathcal{C} . Другими словами, весовая система — функция на хордовых диаграммах, равная нулю на всяком 4-членном элементе. Весовая система называется *мультипликативной*, если ее значение на произведении любых двух хордовых диаграмм равно произведению ее значений на сомножителях, т.е. если она является гомоморфизмом алгебр. Мы рассматриваем только случай $R = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[c]$ — кольцо многочленов от одной переменной.

Пусть \mathfrak{g} — конечномерная комплексная алгебра Ли с невырожденной билинейной инвариантной формой (\cdot, \cdot) . Инвариантность означает, что для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство $([x, y], z) = (x, [y, z])$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — ортонормированный базис в \mathfrak{g} . Обозначим через $U(\mathfrak{g})$ универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим отображение $w_{\mathfrak{g}}: \mathcal{C} \rightarrow U(\mathfrak{g})$, которое строится следующим образом.

Пусть C — хордовая диаграмма, A — какое-то ее представление в виде дуговой диаграммы, $V(A)$ — множество дуг этой дуговой диаграммы, $\nu: V(A) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ некоторая расстановка индексов от 1 до m на дугах диаграммы.

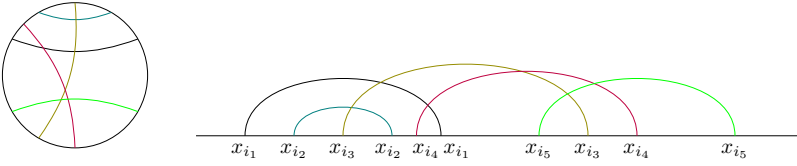


Рис. 4. Вычисление значения весовой системы, отвечающей алгебре Ли с ортонормированным базисом x_1, \dots, x_m , на дуговой диаграмме, соответствующей хордовой диаграмме.

Поставим в соответствие диаграмме A и разметке ν элемент $w_X(A, \nu) \in U(\mathfrak{g})$ следующим образом: для каждой дуги $v \in V(A)$ напишем на обоих ее концах элемент $x_{\nu(v)} \in X$ и обозначим через $w_X(A, \nu)$ результат перемножения этих элементов слева направо. Обозначим через $w_X(A)$ сумму по всем возможным разметкам:

$$w_X(A) := \sum_{\nu: V(A) \rightarrow \{1, \dots, m\}} w_X(A, \nu). \quad (3.1)$$

Так, значение весовой системы, отвечающей алгебре Ли с ортонормированным базисом x_1, \dots, x_m , на дуговой диаграмме с рис. 4 равно

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \sum_{i_3=1}^m \sum_{i_4=1}^m \sum_{i_5=1}^m x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_2} x_{i_4} x_{i_1} x_{i_5} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. [9]

1. Для любого элемента $C \in \mathfrak{C}$ результат такой операции определен однозначно и не зависит от выбора представления хордовой диаграммы C в виде дуговой диаграммы.
2. Для любой дуговой диаграммы A элемент $w_X(A)$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры: $w_X(A) \in Z(U(\mathfrak{g}))$.
3. Значение $w_X(A)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса.
4. Полученное таким образом отображение хордовых диаграмм в $Z(U(\mathfrak{g}))$ удовлетворяет 4-членным соотношениям и продолжается, тем самым, до гомоморфизма коммутативных алгебр.

Поскольку произведение хордовых диаграмм задается конкатенацией соответствующих дуговых диаграмм, весовая система, отвечающая алгебре Ли, мультипликативна.

Мы рассматриваем эту конструкцию для алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 — простейшей некоммутативной алгебры Ли. Эта алгебра порождается тремя элементами x, y, z , для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [x, y] &= z, \\ [y, z] &= x, \\ [z, x] &= y. \end{aligned}$$

Билинейная форма задается соотношениями

$$\begin{aligned} (x, x) &= (y, y) = (z, z) = 1, \\ (x, y) &= (y, z) = (z, x) = 0. \end{aligned}$$

Центр универсальной обертывающей алгебры этой алгебры Ли $Z(U(\mathfrak{sl}_2))$ изоморфен алгебре $\mathbb{C}[c]$ полиномов от элемента Казимира $c = x^2 + y^2 + z^2$. Поэтому формула (3.1) задает отображение $w_{\mathfrak{sl}_2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[c]$. Оно является гомоморфизмом алгебр и называется **\mathfrak{sl}_2 -весовой системой на \mathbb{C}** .

Из определения сразу вытекает важное для вычислений

СЛЕДСТВИЕ 1. // *Значение весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на диаграмме с одной хордой равно c .*

В [5] доказано следующее нетривиальное утверждение, которое связывает весовую систему $w_{\mathfrak{sl}_2}$ с полиномиальными инвариантами графов. Отметим, что его аналог для более сложных алгебр Ли, например, для \mathfrak{sl}_3 , уже оказывается неверным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. // *Значение весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на хордовой диаграмме зависит только от ее графа пересечений.*

Это утверждение позволяет говорить о значениях весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на графах пересечений.

Для вычисления значений весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ мы будем пользоваться мультипликативностью этой весовой системы и рекуррентными соотношениями Чмутова–Варченко. Для упрощения обозначений при формулировке соотношений мы часто отождествляем значение весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на хордовой диаграмме с самой этой диаграммой или с ее графом пересечений. Как и на рис. 1, диаграммы могут содержать другие хорды, концы которых лежат на участках окружности, изображенных пунктирной линией, причем наборы этих дополнительных хорд одинаковы во всех диаграммах каждого равенства.

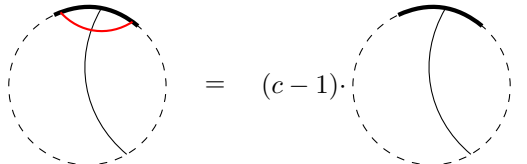
3.2. Соотношения Чмутова–Варченко.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. // *Соотношения Чмутова–Варченко, [6] Предположим, что граф пересечений хордовой диаграммы D связан, т.е. D не представляется в виде произведения двух хордовых диаграмм меньшего порядка. Тогда*

1. *если в диаграмме D есть лист — хорда, пересекающая только одну хорду, то*

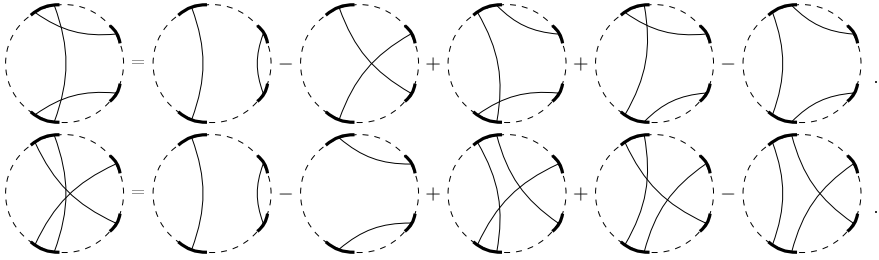
$$w_{\mathfrak{sl}_2}(D) = (c - 1)w_{\mathfrak{sl}_2}(D'), \tag{3.2}$$

где через D' обозначена хордовая диаграмма, полученная из D удалением листа,



2. *Если в хордовой диаграмме нет листа, то в ней есть тройка хорд, расположенных как изображено в левой части одного из двух нижеследующих рисунков.*

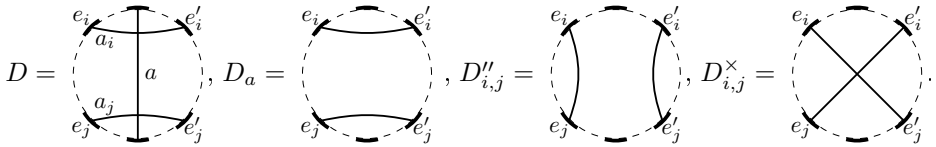
3. Для расположенных таким образом хорд выполняются равенства



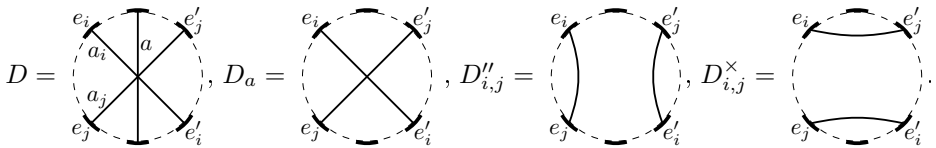
В [6] из этих соотношений выведено следующее утверждение.

Пусть хорду a хордовой диаграммы D пересекает k хорд. Хорда a делит окружность на две половины. Для каждой пары хорд a_i и a_j , пересекающих a , обозначим их концы, лежащие в одной из двух частей, на которые хорда a делит окружность, через e_i и e_j соответственно, а концы, лежащие в другой части — через e'_i и e'_j соответственно. Обозначим через D_a диаграмму D , из которой удалена хорда a , через $D''_{i,j}$ диаграмму D , в которой хорды a_i и a_j заменены на хорды, соединяющие e_i с e_j и e'_i с e'_j , а через $D^{\times}_{i,j}$ диаграмму D , в которой хорды a_i и a_j заменены на хорды, соединяющие e_i с e'_j и e_j с e'_i .

Так, если хорды a_i и a_j не пересекаются, то эти диаграммы выглядят следующим образом (как и на рисунках выше, пунктирные линии могут содержать концы других хорд):



Если же хорды a_i и a_j пересекаются, то эти диаграммы выглядят следующим образом:



УТВЕРЖДЕНИЕ 9. [6] Выполнено соотношение:

$$w_{s_{l_2}}(D) = (c - k)w_{s_{l_2}}(D_a) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (w_{s_{l_2}}(D''_{i,j}) - w_{s_{l_2}}(D^{\times}_{i,j})) \quad (3.3)$$

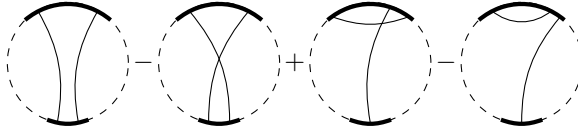
Из соотношения (3.2) сразу следуют

СЛЕДСТВИЕ 2. [] Значение весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на хордовой диаграмме порядка n , граф пересечений которой является деревом, равно $c(c - 1)^{n-1}$.

В частности, $w_{s_{l_2}}(K_{1,n}) = c(c - 1)^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$

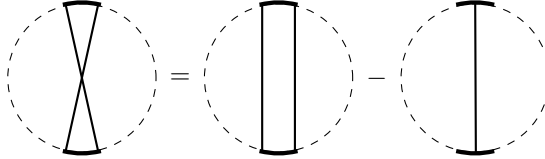
Значение весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на 4-членном элементе (см. рис. 1) равно нулю. Если не приведённые на рисунке хорды (одинаковые во всех четырёх диаграммах) расположены так, что в между концами первой и второй хорды в

первой диаграмме нет концов других хорд, то соотношение принимает следующий вид:



Из соотношения (3.2) следует, что

СЛЕДСТВИЕ 3. *[[Верно следующее 3-членное соотношение для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$:*



(3.4)

§ 4. Значения весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах вида (G, n) для всех графов G не более чем с 4 вершинами

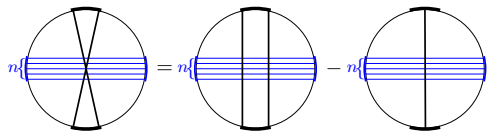
Этот раздел носит вспомогательный характер. Здесь мы вычисляем значения \mathfrak{S}_2 -весовой системы для всех серий (G, n) , в которых граф G имеет не более 4 вершин. В следующем разделе мы воспользуемся этими результатами для вычисления значений продолжения \mathfrak{S}_2 -весовой системы на графы серии (C_5, n) , где C_5 — цикл длины 5.

4.1. Значения весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах (G, n) для всех графов G с 2 вершинами. В статье [7] с помощью 6-членных соотношений Чмута–Варченко вычислены значения \mathfrak{S}_2 -весовой системы на полных двудольных графах $K_{2,n}$ и $K_{3,n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

ТЕОРЕМА 2. *[[Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}
 w_{\mathfrak{S}_2}((\bullet \bullet, n)) &= \frac{1}{6}c(2c^{n+1} + 3(c-1)^n + (4c-3)(c-3)^n), \\
 w_{\mathfrak{S}_2}((\bullet \bullet \bullet, n)) &= \frac{1}{6}c(2c^{n+1} - 3(c-1)^n + (4c-3)(c-3)^n).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Доказательство. Первое утверждение приведено в [7] в указанном виде. Второе соотношение получается из 3-членного соотношения (3.4) и вытекающего из него соотношения для ее значений на графах пересечений.



$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet, n) - c(c-1)^n.$$

Отсюда сразу следует формула (4.1) для значения $w_{s_{l_2}}((\bullet \leftarrow \bullet), n)$. □

4.2. Значения весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на графах (G, n) для всех графов G с 3 вершинами.

ТЕОРЕМА 3. *|| Справедливы равенства*

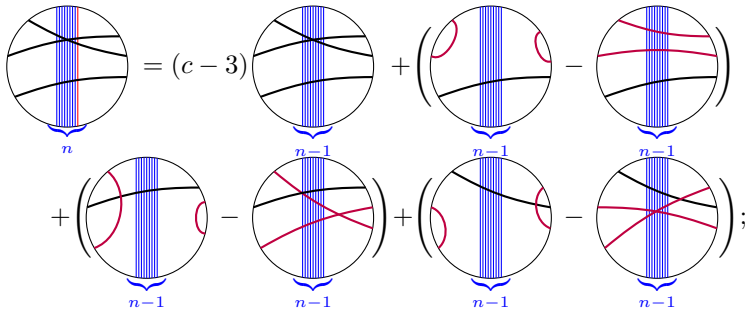
$$w_{s_{l_2}}((\bullet \rightarrow \bullet), n) = \frac{1}{30}c(5c^{n+1} + (18c^2 - 12c + 12)(c - 1)^n + (40c - 30)(c - 3)^n + (12c^2 - 33c + 18)(c - 6)^n) \quad (4.2)$$

$$w_{s_{l_2}}((\bullet \rightarrow \bullet), n) = \frac{1}{30}c(-5c^{n+1} + (18c^2 - 12c - 3)(c - 1)^n + (20c - 15)(c - 3)^n + (12c^2 - 33c + 18)(c - 6)^n) \quad (4.3)$$

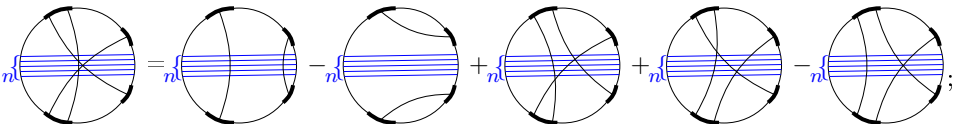
$$w_{s_{l_2}}((\bullet \leftarrow \bullet), n) = \frac{1}{30}c(5c^{n+1} + (18c^2 - 12c - 3)(c - 1)^n - (20c - 15)(c - 3)^n + (12c^2 - 33c + 18)(c - 6)^n) \quad (4.4)$$

$$w_{s_{l_2}}((\bullet \leftarrow \bullet), n) = \frac{1}{30}c(-5c^{n+1} + (18c^2 - 12c + 12)(c - 1)^n - (40c - 30)(c - 3)^n + (12c^2 - 33c + 18)(c - 6)^n) \quad (4.5)$$

Доказательство. Значение (4.2) весовой системы на графе $(\bullet \rightarrow \bullet, n)$ найдено в [7]. Запишем рекуррентное соотношение (3.3) для диаграммы с графом пересечений $(\bullet \rightarrow \bullet, n)$.



Аналогично записываются рекуррентные соотношения для диаграмм с графами пересечений $(\bullet \leftarrow \bullet, n)$ и $(\bullet \rightarrow \bullet, n)$. Запишем, кроме этого, второе соотношение Чмутова–Варченко для диаграммы с графом пересечений $(\bullet \rightarrow \bullet, n)$:



В терминах графов пересечений эти соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{N}, n) &= (c-3)(\mathfrak{N}, n-1) + 2(c^3(c-1)^{n-1} - (\mathfrak{I}, n-1)) + c(c-1)^{n+1} - (\mathfrak{O}, n-1); \\ (\mathfrak{I}, n) &= (c-3)(\mathfrak{I}, n-1) + (c^3(c-1)^{n-1} - (\mathfrak{N}, n-1)) + 2(c^2(c-1)^n - (\mathfrak{O}, n-1)); \\ (\mathfrak{O}, n) &= (c-3)(\mathfrak{O}, n-1) + (c^3(c-1)^{n-1} - (\mathfrak{O}, n-1)) + 2(c^2(c-1)^n - (\mathfrak{I}, n-1)); \\ (\mathfrak{A}, n) &= (\mathfrak{A}, n) - c^{n+2} + 2(\mathfrak{I}, n) - (\mathfrak{O}, n). \end{aligned}$$

Запишем эти соотношения для n и $n-1$, а последнее соотношение — и для $n-2$. Мы получили систему из 9 линейных уравнений с 9 неизвестными: $(\mathfrak{N}, n), (\mathfrak{N}, n-1), (\mathfrak{N}, n-2), (\mathfrak{I}, n), (\mathfrak{I}, n-1), (\mathfrak{I}, n-2), (\mathfrak{O}, n), (\mathfrak{O}, n-1), (\mathfrak{O}, n-2)$. Вычисления показывают, что система невырождена. Определитель системы равен -8 , и решения представляют собой полиномы от c . Решая систему, получаем искомые общие формулы (4.3), (4.4) и (4.5). \square

4.3. Значения весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах (G, n) для всех графов G с 4 вершинами.

ТЕОРЕМА 4. \parallel

1. *Выполнено рекуррентное соотношение*

$$30(c-6)(c-3)(c-1)w_{\mathfrak{S}_2}((\mathfrak{N}, n)) = \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &(30c^4 - 600c^3 + 3810c^2 - 8640c + 5400)(\mathfrak{N}, n-1) \\ &+ (60c^6 - 640c^5 + 2060c^4 - 2560c^3 + 1800c^2 - 720c)c^n \\ &+ (-108c^5 + 1134c^4 - 3429c^3 + 3159c^2 - 486c)(c-1)^n \\ &+ (120c^6 - 1130c^5 + 2680c^4 - 1085c^3 - 1575c^2 + 990c)(c-3)^n \\ &+ (48c^5 - 324c^4 + 744c^3 - 684c^2 + 216c)(c-6)^n, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

$$w_{\mathfrak{S}_2}((\mathfrak{N}, 0)) = c(c^3 - 3c^2 + 2c), \tag{4.9}$$

2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} w_{\mathfrak{S}_2}((\mathfrak{O}, n)) &= \frac{1}{210}((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (210c^2 - 210c + 105))(c-1)^n \\ &+ (120c^3 - 290c^2 + 770c - 465)(c-3)^n + (420c^2 - 1155c + 630)(c-6)^n \\ &+ (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\mathfrak{S}_2}((\mathfrak{I}, n)) &= \frac{1}{210}((42c^3 - 28c^2 - 7c)c^n + (84c^2 - 126c + 21)(c-1)^n \\ &+ (120c^3 - 290c^2 + 490c - 255)(c-3)^n + (336c^2 - 924c + 504)(c-6)^n \\ &+ (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\mathfrak{S}_2}((\mathfrak{I}, n)) &= \frac{1}{210}((42c^3 - 28c^2 - 7c)c^n + (42c^2 + 42c - 42)(c-1)^n \\ &+ (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)(c-3)^n + (168c^2 - 462c + 252)(c-6)^n \\ &+ (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n \end{aligned}$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (-42c^2 - 42c + 42)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 + 350c - 150)(c-3)^n + (252c^2 - 693c + 378)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 - 7c)c^n + (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)(c-3)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (-84c^2 + 126c - 21)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 - 70c + 165)(c-3)^n + (84c^2 - 231c + 126)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (84c^2 - 126c + 21)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 - 70c + 165)(c-3)^n + (-84c^2 + 231c - 126)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 - 7c)c^n + (-42c^2 - 42c + 42)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)(c-3)^n + (-168c^2 + 462c - 252)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (42c^2 + 42c - 42)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 + 350c - 150)(c-3)^n + (-252c^2 + 693c - 378)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

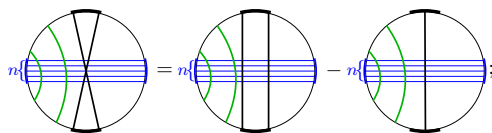
$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 - 7c)c^n + (-84c^2 + 126c - 21)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 + 490c - 255)(c-3)^n + (-336c^2 + 924c - 504)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

$$w_{s_{l_2}}(\langle \text{---} \rangle, n) = \frac{1}{210} ((42c^3 - 28c^2 + 28c)c^n + (-210c^2 + 210c - 105)(c-1)^n + (120c^3 - 290c^2 + 770c - 465)(c-3)^n + (-420c^2 + 1155c - 630)(c-6)^n + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)(c-10)^n)$$

Доказательство. Основной шаг в доказательстве теоремы 4 — нижеследующие соотношения для значений весовой системы $w_{s_{l_2}}$. Мы приводим их для значений весовой системы на хордовых диаграммах и, после упрощения, на графах пересечений.

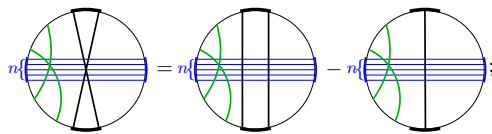
Сначала выразим через значения весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на $\langle \text{---} \rangle, n$ её значения на остальных десяти графах на 4 вершинах. Для этого запишем 10 линейных уравнений с 10 неизвестными — значениями на этих 10 графах, используя

4-членное соотношение, соотношения Чмутова–Варченко и 3-членное соотношение (3.4)



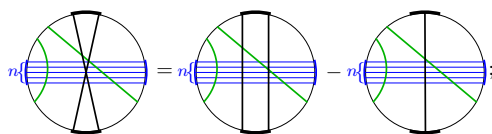
$$(4.10)$$

$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet \bullet, n) - (\bullet \bullet \bullet, n); \quad (4.11)$$



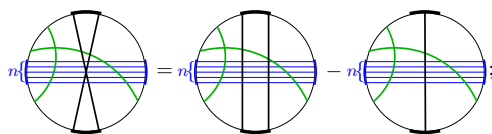
$$(4.12)$$

$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet \bullet, n) - (\bullet \bullet \bullet, n); \quad (4.13)$$



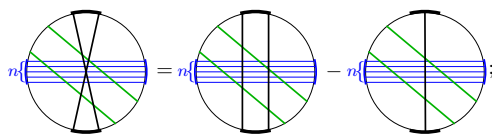
$$(4.14)$$

$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet \bullet, n) - (\bullet \bullet \bullet, n); \quad (4.15)$$



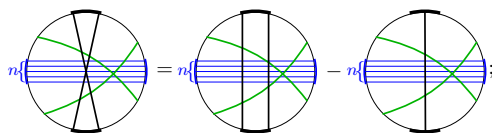
$$(4.16)$$

$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet \bullet, n) - (\bullet \bullet \bullet, n); \quad (4.17)$$



$$(4.18)$$

$$(\bullet \bullet \bullet, n) = (\bullet \bullet \bullet, n) - (\bullet \bullet \bullet, n); \quad (4.19)$$



$$(4.20)$$

$$(\text{⊠}, n) = (\text{⊞}, n) - (\text{⊡}, n); \quad (4.21)$$

Значение весовой системы на третьем члене каждого из нижеследующих 4-членных соотношений выражается через уже известные значения применением рекуррентного соотношения Чмутова–Варченко (3.3), соотношения удаления листа (3.2) и свойства мультипликативности. Для первого из 4-членных соотношений (4.22) записано это рекуррентное соотношение (4.23). Значение на четвертом члене каждого из этих 4-членных соотношений сводится к уже известному удалением листа, т.е., применением соотношения (3.2).

$$n \left(\text{⊠} \right) - n \left(\text{⊞} \right) + n \left(\text{⊡} \right) - n \left(\text{⊣} \right) = 0; \quad (4.22)$$

Из рекуррентного соотношения 3.3 следует, что третий член этого 4-членного соотношения равен

$$n \left(\text{⊡} \right) = (c-2)n \left(\text{⊞} \right) + n \left(\text{⊢} \right) - n \left(\text{⊣} \right); \quad (4.23)$$

С учетом этого, в терминах графов пересечений равенство записывается следующим образом:

$$(\text{⊞}; n) = (\text{⊡}; n) + (\text{⊢}; n) + (\text{⊣}; n) - c^3(c-1)^n; \quad (4.24)$$

$$n \left(\text{⊡} \right) - n \left(\text{⊞} \right) + n \left(\text{⊢} \right) - n \left(\text{⊣} \right) = 0; \quad (4.25)$$

$$(\text{⊡}; n) = (\text{⊞}; n) - (\text{⊢}; n+1) + (c-2)(\text{⊢}; n) - (\text{⊣}; n) + c^2(c-1)^{n+1}; \quad (4.26)$$

$$n \left(\text{⊢} \right) - n \left(\text{⊞} \right) + n \left(\text{⊡} \right) - n \left(\text{⊣} \right) = 0; \quad (4.27)$$

$$(\text{⊢}; n) = (\text{⊞}; n) - (\text{⊣}; n+1) + (c-2)(\text{⊣}; n) - (\text{⊡}; n) + c^2(c-1)^{n+1}; \quad (4.28)$$

$$n \left(\text{⊣} \right) - n \left(\text{⊞} \right) + n \left(\text{⊡} \right) - n \left(\text{⊢} \right) = 0; \quad (4.29)$$

$$(\bullet\bullet; n) = (\bullet\bullet; n) - (\bullet\bullet; n+1) + (c-2)(\bullet\bullet; n) - (\bullet\bullet; n) + c^3(c-1)^n; \quad (4.30)$$

Получившаяся система невырождена, ее определитель равен -1 .

Следующее соотношение получено из рекуррентного соотношения (3.3).

$$\begin{aligned}
 & \text{Graph with } n+1 \text{ blue lines and 2 red arcs} = (c-4) \text{ Graph with } n \text{ blue lines} + \\
 & 2 \left(\text{Graph with } n \text{ blue lines and 1 red arc} - \text{Graph with } n \text{ blue lines and 1 red arc} \right) + \\
 & 2 \left(\text{Graph with } n \text{ blue lines and 2 red arcs} - \text{Graph with } n \text{ blue lines and 2 red arcs} \right); \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bullet\bullet; n) &= (c-4)(\bullet\bullet; n-1) + 2(c^2(\bullet\bullet; n-1) - (\bullet\bullet; n-1)) + 2(c(\bullet\bullet; n) - (\bullet\bullet; n-1)) \\
 &+ ((c-1)^2(\bullet\bullet; n-1) - (\bullet\bullet; n-1)) + ((c-1)^2(\bullet\bullet; n-1) - (\bullet\bullet; n-1));
 \end{aligned}$$

Подставляя решения системы линейных уравнений в эту формулу, мы получаем рекуррентное соотношение (4.8) для $(\bullet\bullet; n)$. Значение (4.9) получается из рекуррентного соотношения (3.3). Решая рекуррентное соотношение, мы получаем общую формулу для $(\bullet\bullet; n)$, сформулированную в п.2 теоремы 4. Подставляя её в уравнения, получаем остальные общие формулы, приведенные в п.2 теоремы 4. \square

§ 5. Значения весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на графах (C_5, n)

Существуют графы, не являющиеся графами пересечений никакой хордовой диаграммы. В частности, легко видеть, что любой граф, содержащий в качестве подграфа один из графов, приведенных в левой части рис. 5, не является графом пересечения никакой хордовой диаграммы. Буше [3] доказал, что, в некотором смысле, эти три графа образуют полный набор препятствий к тому, чтобы граф был графом пересечений.

Более 10 лет назад С.К.Ландо сформулировал задачу о том, можно ли продолжить весовую систему $w_{s_{l_2}}$ до полиномиального инварианта графов, удовлетворяющего 4-членному соотношению для них. Вычисления Е. Красильникова показали, что для графов не более чем с 8 вершинами такое продолжение существует и единственно. В [10] построено продолжение части весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на произвольные графы (это продолжение распространено на бинарные дельта-матроиды в [14]). Однако до настоящего времени не было известно значений продолженной весовой системы $w_{s_{l_2}}$ на бесконечных сериях графов, не являющихся графами пересечений.



Рис. 5. Слева: граф, содержащий хотя бы один из этих графов в качестве подграфа, не является графом пересечений. В центре: цикл на 5 вершинах. Справа: путь на 5 вершинах.

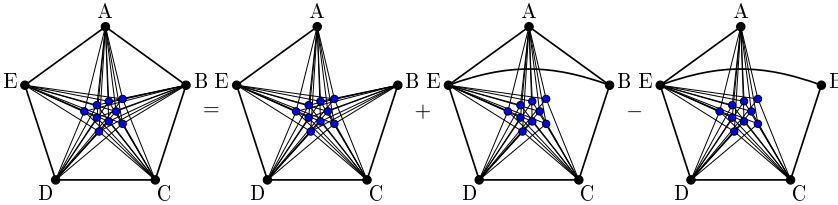


Рис. 6. 4-членное соотношение для графов (C_5, n) . Графы в правой части являются графами пересечений.

В настоящем разделе мы вычисляем значения продолженной весовой системы (в предположении о ее существовании) на бесконечной серии графов (C_5, n) , где C_5 — цикл длины 5 (см. рис. 5). Начиная с $n = 1$, графы этой серии не являются графами пересечений. При этом оказывается, что однократным применением 4-членных соотношений для графов их можно выразить через графы пересечений и, зная значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на последних, вычислить ее значения и на графах интересующей нас серии.

5.1. 4-членное соотношение для графа, не являющегося графом пересечений. Каждый граф (C_5, n) равен линейной комбинации графов пересечений по модулю одного 4-членного соотношения. На рис. 6 приведено равенство, получающееся применением 4-членного соотношения к графу (C_5, n) . В правой части равенства стоит линейная комбинация графов пересечений. На рис. 7 приведена линейная комбинация хордовых диаграмм с соответствующими графами пересечений.

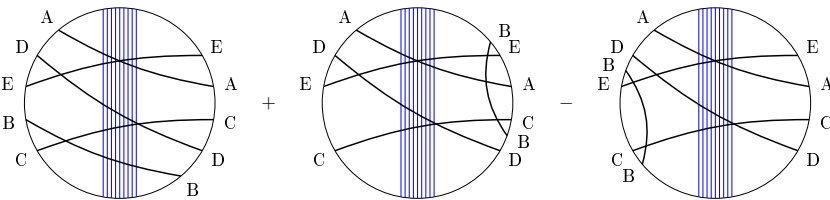


Рис. 7. Линейная комбинация хордовых диаграмм, соответствующая правой части 4-членного соотношения для графов (C_5, n) .

Значение весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ для графа вида (C_5, n) , где C_5 — цикл на 5 вершинах, получено как линейная комбинация значений этой весовой системы на линейной комбинации хордовых диаграмм с графами пересечений, изоморфными графам в правой части 4-членного соотношения (см. рис. 6, 7). Будем обозначать граф-путь на 5 вершинах через P_5 (от слова *path*). Граф пересечений первой из хордовых диаграмм на рис.7 имеет вид (P_5, n) . Обозначим вторую и третью диаграммы через D_1 и D_2 соответственно, тогда значение весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на (C_5, n) равно

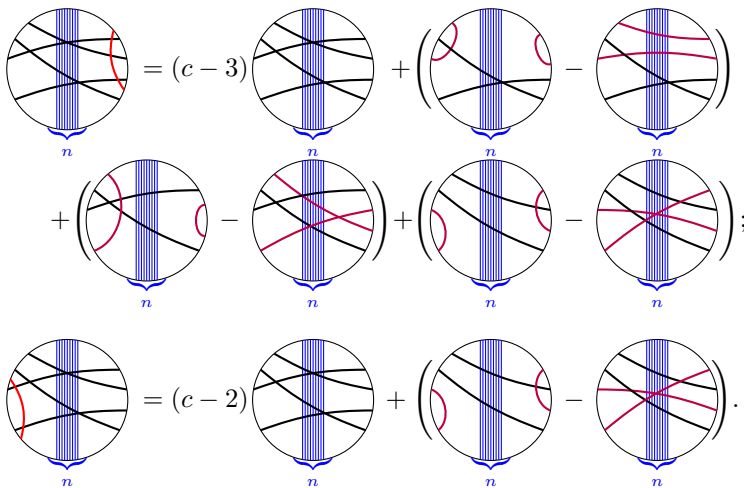
$$w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, n)) = w_{\mathfrak{S}_2}((P_5, n)) + w_{\mathfrak{S}_2}(\gamma(D_1)) - w_{\mathfrak{S}_2}(\gamma(D_2))$$

В диаграммах D_1 и D_2 имеется n непересекающихся хорд, пересеченных 4 хордами, причем несколько из этих четырех хорд пересечены еще одной хордой. Будем называть такую хорду «**лишней**»: без нее граф пересечения хордовой диаграммы имел бы вид (G, n) для какого-то графа G . Записывая рекуррентное соотношение Чмутава–Варченко (3.3) для «лишней» хорды, мы сводим значения на этих хордовых диаграммах к значениям на диаграммах с графами пересечений вида (F, n) , $|V(F)| \leq 4$, которые уже вычислены в предыдущем параграфе.

ЛЕММА 2. //Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma(D_1(n)) &= (c-3)(\text{⦿}, n) + (c(c-1)(\text{⦿}, n) - (\text{⦿}, n)) + \\ &\quad + (c(c-1)(\text{⦿}, n) - (\text{⦿}, n)) + (c(\text{⦿}, n+1) - (\text{⦿}, n)); \\ \gamma(D_2(n)) &= (c-2)(\text{⦿}, n) + c(c-1)(\text{⦿}, n) - (\text{⦿}, n). \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующих рекуррентных соотношений.



□

5.2. Значения $w_{\mathfrak{sl}_2}((G, n))$ для пути на 5 вершинах.

ЛЕММА 3. //

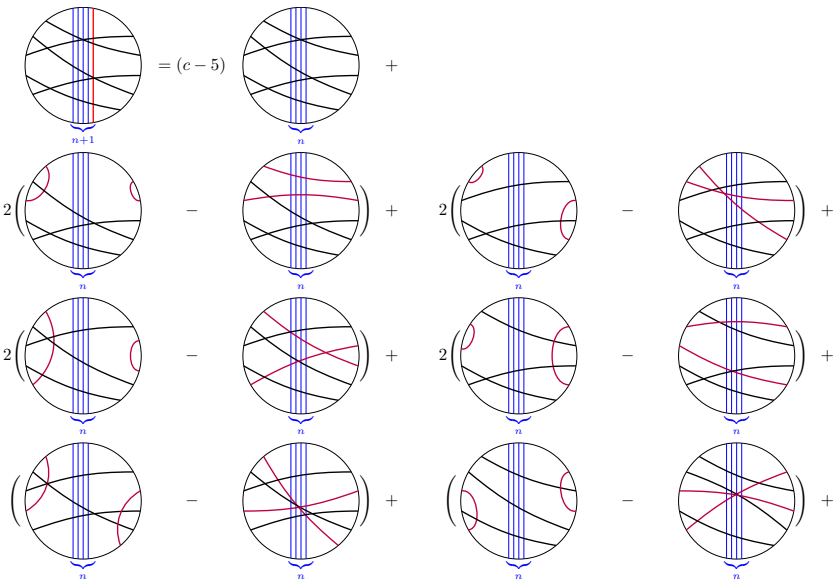
1. Имеет место следующее рекуррентное соотношение для значений \mathfrak{sl}_2 -весаевой системы на графах вида (P_5, n) , где через P_5 обозначен граф-путь на 5 вершинах:

$$\begin{aligned}
 70w_{\mathfrak{sl}_2}((P_5, n + 1)) &= (70c - 1050)w_{\mathfrak{sl}_2}((P_5, n)) + (-70c^4 - 70c^3 + 70c^2)c^n \\
 &\quad + (420c^5 - 840c^4 - 182c^3 + 308c^2 + 112c)(c - 1)^n \\
 &\quad + (320c^4 - 400c^3 + 280c^2 - 120c)(c - 3)^n \\
 &\quad + (280c^5 - 1610c^4 + 2982c^3 - 1953c^2 + 378c)(c - 6)^n \\
 &\quad + (240c^4 - 1560c^3 + 2835c^2 - 1350c)(c - 10)^n
 \end{aligned}$$

2. $w_{\mathfrak{sl}_2}((P_5, 0)) = c(c - 1)^4$.
3. значение \mathfrak{sl}_2 -весаевой системы на графе (P_5, n) равно

$$\begin{aligned}
 w_{\mathfrak{sl}_2}((P_5), n) &= \frac{1}{630}c \left((-42c^3 - 42c^2 + 42c)c^n \right. \\
 &\quad + (270c^4 - 540c^3 - 117c^2 + 198c + 72)(c - 1)^n \\
 &\quad + (240c^3 - 300c^2 + 210c - 90)(c - 3)^n \\
 &\quad + (280c^4 - 1610c^3 + 2982c^2 - 1953c + 378)(c - 6)^n \\
 &\quad + (432c^3 - 2808c^2 + 5103c - 2430)(c - 10)^n \\
 &\quad \left. + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)(c - 15)^n \right)
 \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3. 1. Запишем следующее рекуррентное соотношение для хордовой диаграммы с графом пересечений $(P_5, n + 1)$:



(5.1)

Обозначим 9-ю диаграмму в этом соотношении через D_3 , а 11-ю — через D_4 , тогда в терминах графов пересечений это соотношение после упрощений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\text{diag}_9, n+1) &= (c-5)(\text{diag}_9, n) + \\
 &2 \left(c(c-1)(\text{diag}_{10}, n) - (\text{diag}_{11}, n) \right) + 2 \left(c(c-1)(\text{diag}_{12}, n) - (\text{diag}_{13}, n) \right) + \\
 &2 \left(c(\text{diag}_{14}, n+1) - (\text{diag}_{15}, n) \right) + 2 \left(\gamma(D_3(n)) - (\text{diag}_{16}, n) \right) + \\
 &\left(\gamma(D_4(n)) - (\text{diag}_{17}, n) \right) + \left((c-1)^2(\text{diag}_{18}, n) - (\text{diag}_{19}, n) \right) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Выразим значения весовой системы $w_{\mathfrak{S}\mathfrak{L}_2}$ на D_3 и D_4 через уже известные значения:

$$\text{diag}_{10} = (c-2) \text{diag}_{11} + \text{diag}_{12} - \text{diag}_{13}; \quad (5.3)$$

$$\gamma(D_3) = c \left((c-2)(\text{diag}_{10}, n) + c^2(c-1)^{n+1} - (\text{diag}_{11}, n) \right); \quad (5.4)$$

$$\text{diag}_{14} = (c-2) \text{diag}_{15} + \text{diag}_{16} - \text{diag}_{17}; \quad (5.5)$$

Обозначим вторую, третью и четвертую диаграммы соотношения через D_5 , D_6 и D_7 , соответственно, тогда

$$\gamma(D_4) = (c-2)\gamma(D_5) + \gamma(D_6) - \gamma(D_7). \quad (5.6)$$

Повторное применение рекуррентного соотношения для «лишней» хорды в левой части каждой из диаграмм D_5 , D_6 и D_7 дает следующие соотношения в терминах графов пересечений:

$$\gamma(D_5) = (c-2)(\text{diag}_{18}, n) + c^2(c-1)^{n+1} - (\text{diag}_{19}, n), \quad (5.7)$$

$$\gamma(D_6) = ((c-2)(c-1)^{n+1}c + 2c^2(c-1)^n), \quad (5.8)$$

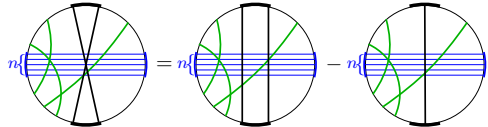
$$\gamma(D_7) = (c-2)(\text{diag}_{18}, n) + c^3(c-1)^n - (\text{diag}_{19}, n). \quad (5.9)$$

Значения правой части равенств нам уже известны.

Чтобы исключить из уравнения лишние графы, запишем следующие соотношения. Приводим их для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}\mathfrak{L}_2}$ на хордовых диаграммах и на соответствующих графах пересечений.

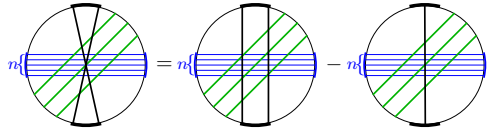
$$\text{diag}_{18} = \text{diag}_{19} - \text{diag}_{20}; \quad (5.10)$$

$$(\bullet \circ \bullet, n) = (\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n); \quad (5.11)$$



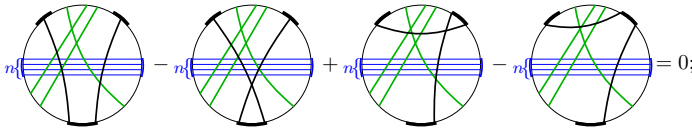
$$(5.12)$$

$$(\bullet \circ \bullet, n) = (\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n); \quad (5.13)$$



$$(5.14)$$

$$(\bullet \circ \bullet, n) = (\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n); \quad (5.15)$$



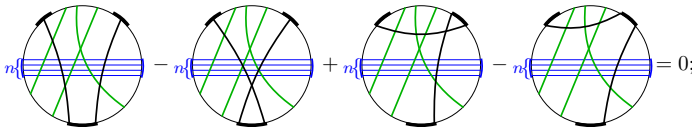
$$(5.16)$$

Обозначим четвертую диаграмму в этом соотношении через $D_8(n)$, тогда

$$(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n) + (\bullet \circ \bullet, n+1) - \gamma(D_8(n)) = 0; \quad (5.17)$$

Применяя, как и выше, рекуррентное соотношение Чмутова–Варченко (3.3), получим выражение значения весовой системы $w_{s|_2}$ на $\gamma(D_8(n))$ через уже известные нам значения:

$$\begin{aligned} \gamma(D_8(n)) = & (c-3)(\bullet \circ \bullet, n) + (c^2(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n)) + \\ & ((c-1)^2(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n)) + (c(\bullet \circ \bullet, n+1) - (\bullet \circ \bullet, n)). \end{aligned} \quad (5.18)$$



$$(5.19)$$

Обозначим вторую диаграмму в этом соотношении через $D_9(n)$, тогда

$$(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n) + (\bullet \circ \bullet, n+1) - \gamma(D_9(n)) = 0; \quad (5.20)$$

Применяя, как и выше, рекуррентное соотношение Чмутова–Варченко (3.3), получим выражение значения весовой системы $w_{s|_2}$ на $\gamma(D_9(n))$ через уже известные нам значения:

$$\begin{aligned} \gamma(D_9(n)) = & (c-3)(\bullet \circ \bullet, n) + (c(c-1)(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n)) + \\ & (c(c-1)(\bullet \circ \bullet, n) - (\bullet \circ \bullet, n)) + (c(\bullet \circ \bullet, n+1) - (\bullet \circ \bullet, n)). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для следующего 4-членного соотношения соотношение на графах пересечений получено подстановкой рекуррентного соотношения Чмутова–Варченко (3.3) для пересекающей две хорды «лишней» хорды в третьей диаграмме 4-членного соотношения и последующим упрощением.

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Diagram 1} \right) - n \left(\text{Diagram 2} \right) + n \left(\text{Diagram 3} \right) - n \left(\text{Diagram 4} \right) = 0; \\
 & \hspace{15em} (5.22)
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) - c(c-1) \left(\bullet \bullet, n \right); \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Diagram 1} \right) - n \left(\text{Diagram 2} \right) + n \left(\text{Diagram 3} \right) - n \left(\text{Diagram 4} \right) = 0 \\
 & \hspace{15em} (5.24)
 \end{aligned}$$

Обозначим третью и четвертую диаграммы в этом соотношении через $D_{10}(n)$ и $D_{11}(n)$ соответственно, тогда

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + \gamma(D_{10}(n)) - \gamma(D_{11}(n)) = 0; \quad (5.25)$$

Применяя, как и выше, рекуррентное соотношение Чмутова–Варченко (3.3), получим выражение значений весовой системы $w_{s_{12}}$ на $\gamma(D_{11}(n))$ и $\gamma(D_{12}(n))$ через уже известные нам значения:

$$\begin{aligned}
 \gamma(D_{10}(n)) &= (c-3) \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + (c \left(\bullet \bullet, n+1 \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right)) + \\
 & \quad ((c-1)^2 \left(\bullet \bullet, n \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right)) + (c^2 \left(\bullet \bullet, n \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right)); \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\gamma(D_{11}(n)) = (c-2) \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + (c \left(\bullet \bullet, n+1 \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right)). \quad (5.27)$$

$$(5.28)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Diagram 1} \right) - n \left(\text{Diagram 2} \right) + n \left(\text{Diagram 3} \right) - n \left(\text{Diagram 4} \right) = 0; \\
 & \hspace{15em} (5.29)
 \end{aligned}$$

Обозначим третью и четвертую диаграммы в этом соотношении через $D_{12}(n)$ и $D_{13}(n)$ соответственно, тогда

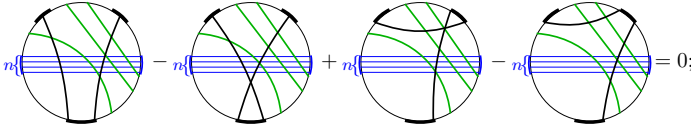
$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) - \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \bullet, n \right) + \gamma(D_{12}(n)) - \gamma(D_{13}(n)) = 0; \quad (5.30)$$

Применяя, как и выше, рекуррентное соотношение Чмутова–Варченко (3.3), получим выражение значений весовой системы $w_{s_{12}}$ на $\gamma(D_{12}(n))$ и

$\gamma(D_{13}(n))$ через уже известные нам значения:

$$\begin{aligned} \gamma(D_{12}(n)) &= (c-3)(\bullet \downarrow \bullet, n) + c(c-1)(\bullet \bullet, n) - (\bullet \nearrow \bullet, n) + \\ &\quad c(c-1)(\bullet \leftarrow, n) - (\bullet \downarrow \bullet, n) + c(\bullet \bullet, n+1) - (\bullet \rightleftarrows, n); \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\gamma(D_{13}(n)) = (c-2)(\bullet \downarrow \bullet, n) + c(c-1)(\bullet \bullet, n) - (\bullet \nearrow \bullet, n). \quad (5.32)$$



$$n(\text{diagram 1}) - n(\text{diagram 2}) + n(\text{diagram 3}) - n(\text{diagram 4}) = 0; \quad (5.33)$$

Обозначим третью и четвертую диаграммы в этом соотношении через $D_{14}(n)$ и $D_{15}(n)$ соответственно, тогда

$$(\bullet \rightleftarrows, n) - (\bullet \nearrow \bullet, n) + \gamma(D_{14}(n)) - \gamma(D_{15}(n)) = 0; \quad (5.34)$$

Применяя, как и выше, рекуррентное соотношение Чмутова–Варченко (3.3), получим выражение значений весовой системы $w_{s_{12}}$ на $\gamma(D_{12}(n))$ и $\gamma(D_{13}(n))$ через уже известные нам значения:

$$\begin{aligned} \gamma(D_{14}(n)) &= (c-3)(\bullet \nearrow \bullet, n) + c^2(\bullet \leftarrow, n) - (\bullet \nearrow \bullet, n) + \\ &\quad c(\bullet \bullet, n+1) - (\bullet \downarrow \bullet, n) + (c-1)^2(\bullet \bullet, n) - (\bullet \rightleftarrows, n); \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\gamma(D_{15}(n)) = (c-2)(\bullet \nearrow \bullet, n) + c^2(\bullet \leftarrow, n) - (\bullet \nearrow \bullet, n). \quad (5.36)$$

Подставляя значения весовой системы на графах $\gamma(D_8(n)) - \gamma(D_{15}(n))$ в уравнения (5.17), (5.20), (5.25), (5.30), (5.34), мы получили систему из 9 линейных уравнений. Исключив из системы не участвующие в рекуррентном соотношении (5.2) переменные $(\bullet \rightleftarrows, n)$, $(\bullet \nearrow \bullet, n)$, $(\bullet \bullet, n)$, мы получили систему из 6 линейных уравнений с 6 неизвестными: $(\bullet \downarrow \bullet, n)$, $(\bullet \leftarrow, n)$, $(\bullet \nearrow \bullet, n)$, $(\bullet \rightleftarrows, n)$, $(\bullet \bullet, n)$, $(\bullet \bullet, n)$. Эта система невырождена, ее определитель равен 97240500000. Решив эту систему, мы получили выражение участвующих в рекуррентном соотношении (5.2) переменных через (P_1, n) . Подставив эти выражения и значения весовой системы на графах $\gamma(D_3) - \gamma(D_7)$ в (5.2), мы получаем рекуррентное соотношение, сформулированное в лемме.

2. Граф $(P_5, 0) = P_5$ представляет собой дерево на 5 вершинах, следовательно, $w_{s_{12}}(P_5, 0) = c(c-1)^4$.
3. Решение получившегося рекуррентного соотношения дает значение весовой системы $w_{s_{12}}$ на произвольном графе (P_5, n) .

□

Из лемм 2 и 3 вытекает следующий основной результат:

ТЕОРЕМА 5. *[[Если продолжение s_{12} -весовой системы на графы, удовлетворяющее 4-членному соотношению для них, существует, то его значение на*

графах вида (C_5, n) , где C_5 — цикл на 5 вершинах, равно

$$w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, n)) = \frac{1}{630}c((270c^4 - 540c^3 - 999c^2 + 576c + 324)(c - 1)^n + (280c^4 - 1610c^3 + 3234c^2 - 2646c + 756)(c - 6)^n + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)(c - 15)^n) \quad (5.37)$$

Из формулы (5.37) следует, что, в частности

$$\begin{aligned} w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, 0)) &= c^5 - 5c^4 + 10c^3 - 13c^2 + 6c \\ w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, 1)) &= c^6 - 10c^5 + 50c^4 - 139c^3 + 176c^2 - 72c \\ w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, 2)) &= c^7 - 15c^6 + 135c^5 - 715c^4 + 1981c^3 - 2480c^2 + 1008c \\ w_{\mathfrak{S}_2}((C_5, 3)) &= c^8 - 20c^7 + 265c^6 - 2266c^5 + 11331c^4 - 30108c^3 + 36716c^2 - 14724c \end{aligned}$$

Эти результаты совпадают со значениями продолженной весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$, полученными Е. Красильниковым.















§ 6. Производящие функции для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах и их проекциях на пространство примитивных элементов






Результаты вычисления значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах серий (G, n) могут быть записаны в виде экспоненциальной производящей функции для каждой из серий. Воспользовавшись этими представлениями и теоремой 1, мы выводим формулы для экспоненциальных производящих функций для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на проекциях графов рассматриваемых нами серий на примитивные.

6.1. Производящие функции для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах с малым числом вершин. Из полиномиальных формул для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах вида (G, n) для $|V(G)| \leq 4$ и произвольного n (следствие 2, теорема 2, теорема 3, теорема 4) следуют формулы для экспоненциальных производящих функций.

ТЕОРЕМА 6. // Следующая таблица содержит формулы для экспоненциальных производящих функций значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах серий (G, n) для графов G с малым числом вершин.

граф G	кол-во вершин в графе (G, n)	производящая функция $\mathcal{G}_G(x)$ для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах серии (G, n)
\emptyset	n	e^{cx}











граф G	кол-во вер- шин в гра- фе (G, n)	производящая функция $\mathcal{G}_G(x)$ для значений весовой системы $w_{s_{12}}$ на графах серии (G, n)
	$n + 1$	$xce^{(c-1)x}$
	$n + 2$	$\frac{1}{6}cx^2(2ce^{cx} + 3e^{(c-1)x} + (4c - 3)e^{(c-3)x})$
	$n + 2$	$\frac{1}{6}cx^2(2ce^{cx} - 3e^{(c-1)x} + (4c - 3)e^{(c-3)x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(5ce^{cx} + (18c^2 - 12c + 12)e^{(c-1)x} + (40c - 30)e^{(c-3)x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{(c-6)x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(-5ce^{cx} + (18c^2 - 12c - 3)e^{(c-1)x} + (20c - 15)e^{(c-3)x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{(c-6)x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(5ce^{cx} + (18c^2 - 12c - 3)e^{(c-1)x} - (20c - 15)e^{(c-3)x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{(c-6)x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(-5ce^{cx} + (18c^2 - 12c + 12)e^{(c-1)x} - (40c - 30)e^{(c-3)x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{(c-6)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (210c^2 - 210c + 105)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 770c - 465)e^{(c-3)x} + (420c^2 - 1155c + 630)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 - 7c)e^{cx} + (84c^2 - 126c + 21)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 490c - 255)e^{(c-3)x} + (336c^2 - 924c + 504)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 - 7c)e^{cx} + (42c^2 + 42c - 42)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)e^{(c-3)x} + (168c^2 - 462c + 252)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (-42c^2 - 42c + 42)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 350c - 150)e^{(c-3)x} + (252c^2 - 693c + 378)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 - 7c)e^{cx} + (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)e^{(c-3)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (-84c^2 + 126c - 21)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 - 70c + 165)e^{(c-3)x} + (84c^2 - 231c + 126)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (84c^2 - 126c + 21)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 - 70c + 165)e^{(c-3)x} + (-84c^2 + 231c - 126)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$






граф G	кол-во вершин в графе (G, n)	производящая функция $\mathcal{G}_G(x)$ для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на графах серии (G, n)
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 - 7c)e^{cx} + (-42c^2 - 42c + 42)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 70c + 60)e^{(c-3)x} + (-168c^2 + 462c - 252)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (42c^2 + 42c - 42)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 350c - 150)e^{(c-3)x} + (-252c^2 + 693c - 378)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 - 7c)e^{cx} + (-84c^2 + 126c - 21)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 490c - 255)e^{(c-3)x} + (-336c^2 + 924c - 504)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{210}cx^4((42c^3 - 28c^2 + 28c)e^{cx} + (-210c^2 + 210c - 105)e^{(c-1)x} + (120c^3 - 290c^2 + 770c - 465)e^{(c-3)x} + (-420c^2 + 1155c - 630)e^{(c-6)x} + (48c^3 - 312c^2 + 567c - 270)e^{(c-10)x})$
	$n + 5$	$\frac{1}{630}cx^5((270c^4 - 540c^3 - 999c^2 + 576c + 324)e^{(c-1)x} + (280c^4 - 1610c^3 + 3234c^2 - 2646c + 756)e^{(c-6)x} + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{(c-15)x})$





В последней строке таблицы приведено значение производящей функции для значений весовой системы на (C_5, n) . При $n > 0$ граф (C_5, n) не является графом пересечений, однако если продолжение весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на все простые графы существует, на графах (C_5, n) оно должно равняться коэффициентам этой производящей функции. Заслуживает внимания тот факт, что эта производящая функция является линейной комбинацией лишь трех различных экспонент, тогда как в производящих функциях для графов на четырех вершинах участвуют пять различных экспонент.

6.2. Производящие функции для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на проекциях графов с малым числом вершин на подпространство примитивных. Применяя теорему 1 для графов из предыдущей таблицы, мы получаем производящие функции для значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на проекциях на примитивные графов вида (G, n) , где G — граф не более чем с 4 вершинами либо цикл на 5 вершинах C_5 .

ТЕОРЕМА 7. *[[Следующая таблица содержит формулы для экспоненциальных производящих функций значений весовой системы $w_{\mathfrak{S}_2}$ на проекциях графов серий (G, n) на подпространство примитивных для графов G с малым числом вершин.*

граф G	кол-во вер- шин в гра- фе (G, n)	производящая функция $\mathcal{P}_G(x)$ для значений весовой системы на проекции $\pi((G, n))$ графов серий (G, n) на подпространство примитивных
	$n + 1$	$cx e^{-x}$
	$n + 2$	$\frac{1}{6}cx^2(2c + 3e^{-x} - 6ce^{-2x} + (-3 + 4c)e^{-3x})$
	$n + 2$	$\frac{1}{6}cx^2(2c - 3e^{-x} - 6ce^{-2x} + (-3 + 4c)e^{-3x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(5c - (12c^2 + 12c - 12)e^{-x} - 45ce^{-2x} + (60c^2 + 40c - 30)e^{-3x} - (60c^2 - 45c)e^{-4x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{-6x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(-5c - (12c^2 + 12c + 3)e^{-x} - 15ce^{-2x} + (60c^2 + 20c - 15)e^{-3x} - (60c^2 - 45c)e^{-4x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{-6x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(5c - (12c^2 + 12c + 3)e^{-x} + 15ce^{-2x} + (60c^2 - 20c + 15)e^{-3x} - (60c^2 - 45c)e^{-4x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{-6x})$
	$n + 3$	$\frac{1}{30}cx^3(-5c - (12c^2 + 12c - 12)e^{-x} + 45ce^{-2x} + (60c^2 - 40c + 30)e^{-3x} - (60c^2 - 45c)e^{-4x} + (12c^2 - 33c + 18)e^{-6x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (-280c^2 - 420c + 210)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 987c)e^{-2x} + (-320c^3 + 2360c^2 + 1540c - 930)e^{-3x} + (-2520c^3 - 3080c^2 + 2310c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1680c^2 - 2625c + 1260)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 - 14c) + (-112c^2 - 252c + 42)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 357c)e^{-2x} + (-320c^3 + 1520c^2 + 980c - 510)e^{-3x} + (-2520c^3 - 2240c^2 + 1680c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1512c^2 - 2163c + 1008)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 - 14c) + (-56c^2 + 84c - 84)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 + 63c)e^{-2x} + (-320c^3 + 680c^2 + 140c + 120)e^{-3x} + (-2520c^3 - 1120c^2 + 840c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1176c^2 - 1239c + 504)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$

граф G	кол-во вер- шин в гра- фе (G, n)	производящая функция $\mathcal{P}_G(x)$ для значений весовой системы на проекции $\pi((G, n))$ графов серий (G, n) на подпространство примитивных
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (56c^2 - 84c + 84)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 147c)e^{-2x} + (-320c^3 + 680c^2 + 700c - 300)e^{-3x} + (-2520c^3 - 1400c^2 + 1050c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1344c^2 - 1701c + 756)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 - 14c) + (672c^3 + 672c^2 + 63c)e^{-2x} + (-320c^3 - 160c^2 + 140c + 120)e^{-3x} + (-2520c^3)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 840c^2 - 315c)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (112c^2 + 252c - 42)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 + 273c)e^{-2x} + (-320c^3 - 160c^2 - 140c + 330)e^{-3x} + (-2520c^3 - 280c^2 + 210c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1008c^2 - 777c + 252)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (-112c^2 - 252c + 42))e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 + 273c)e^{-2x} + (-320c^3 - 160c^2 - 140c + 330)e^{-3x} + (-2520c^3 + 280c^2 - 210c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 672c^2 + 147c - 252)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 - 14c) + (56c^2 - 84c + 84)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 + 63c)e^{-2x} + (-320c^3 - 1000c^2 + 140c + 120)e^{-3x} + (-2520c^3 + 1120c^2 - 840c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 504c^2 + 609c - 504)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$

граф G	кол-во вер- шин в гра- фе (G, n)	производящая функция $\mathcal{P}_G(x)$ для значений весовой системы на проекции $\pi((G, n))$ графов серий (G, n) на подпространство примитивных
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (-56c^2 + 84c - 84)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 147c)e^{-2x} + (-320c^3 - 1000c^2 + 700c - 300)e^{-3x} + (-2520c^3 + 1400c^2 - 1050c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 336c^2 + 1071c - 756)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 - 14c) + (112c^2 + 252c - 42)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 357c)e^{-2x} + (-320c^3 - 1840c^2 + 980c - 510)e^{-3x} + (-2520c^3 + 2240c^2 - 1680c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 168c^2 + 1533c - 1008)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 4$	$\frac{1}{420}cx^4((-56c^3 - 56c^2 + 56c) + (280c^2 + 420c - 210)e^{-x} + (672c^3 + 672c^2 - 987c)e^{-2x} + (-320c^3 - 2680c^2 + 1540c - 930)e^{-3x} + (-2520c^3 + 3080c^2 - 2310c)e^{-4x} + (3360c^3 - 2520c^2)e^{-5x} + (-560c^3 + 1995c - 1260)e^{-6x} + (-672c^3 + 1848c^2 - 1008c)e^{-7x} + (96c^3 - 624c^2 + 1134c - 540)e^{-10x})$
	$n + 5$	$\frac{1}{630}cx^5 \cdot ((480c^4 + 720c^3 - 159c^2 + 576c + 324)e^{-x} + (-5040c^4 - 5040c^3 + 315c^2)e^{-3x} + (4080c^4 + 1620c^3 - 3990c^2 + 360c)e^{-4x} + 15120c^4e^{-5x} + (-25760c^4 + 19600c^3 + 1974c^2 - 2646c + 756)e^{-6x} + (8400c^4 - 12600c^3 + 4725c^2)e^{-7x} + (5040c^4 - 13860c^3 + 7560c^2)e^{-8x} + (-1680c^4 + 5880c^3 - 5985c^2 + 1890c)e^{-9x} + (-720c^4 + 4680c^3 - 8505c^2 + 4050c)e^{-11x} + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{-15x})$

Коэффициент при каждой экспоненте в каждой из производящих функций для значений $w_{s\ell_2}$ на проекциях (G, n) , где $|V(G)| \leq \ell$, является многочленом от c степени не выше ℓ . Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. //Значение весовой системы $w_{s\ell_2}$ на проекции графа (G, n) , где $|V(G)| \leq 4$, либо G — цикл на 5 вершинах C_5 — многочлен степени не выше, чем число вершин в графе G .

Это доказывает в частном случае графов вида (G, n) , $|V(G)| \leq 4$ следующую гипотезу:

ГИПОТЕЗА 1. [С.К.Ландо] Значение весовой системы \mathfrak{sl}_2 на проекции хордовой диаграммы на пространство примитивных — многочлен степени не выше половины окружения (т.е. длины наибольшего цикла) ее графа пересечений.

Список литературы

- [1] D. Bar-Natan, “On Vassiliev knot invariants”, *Topology*, **34**:2 (1995), 423–472.
- [2] A. Bigeni, “A generalization of the Kreweras triangle through the universal \mathfrak{sl}_2 weight system”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **161** (2017), 309–326.
- [3] A. Bouchet, “Circle graph obstructions”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **60**:1 (1994), 107–144.
- [4] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, CUP, 2012.
- [5] S. Chmutov, S. Lando, “Mutant knots and intersection graphs”, *Algebr. Geom. Topol.*, **7**:3 (2007), 1579–1598.
- [6] S. Chmutov, A. Varchenko, “Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from \mathfrak{sl}_2 ”, *Topology*, **36**:1 (1997), 153–178.
- [7] П. А. Филиппова, “Значения весовой системы, отвечающей алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , на полных двудольных графах”, *Функц. анализ и его прил.*, **54**:3 (2020), 73–93.
- [8] S. A. Joni, G.-C. Rota, “Coalgebras and bialgebras in combinatorics”, *Stud. Appl. Math.*, **61**:2 (1979), 93–139.
- [9] M. Kontsevich, “Vassiliev knot invariants”, *Adv. in Soviet Math*, **16**, part 2 (1993), 137–150.
- [10] E. Kulakova, S. Lando, T. Mukhutdinova, G. Rybnikov, “On a weight system conjecturally related to \mathfrak{sl}_2 ”, *European J. Combin.*, **41** (2014), 266–277.
- [11] S. Lando, “On a Hopf Algebra in Graph Theory”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **80**:1 (2000), 104–121.
- [12] S. Lando, “On primitive elements in the bialgebra of chord diagrams”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **180** (1997), 167–174.
- [13] А. К. Звонкин, С. К. Ландо., *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, Москва, 2010.
- [14] S. Lando, V. Zhukov, “Delta-Matroids and Vassiliev Invariants”, *Moscow Mathematical Journal*, **17**:4 (2017), 741–755.
- [15] J. W. Milnor, J. C. Moore, “On the structure of Hopf algebras”, *Ann. of Math.*, **81**:2 (1965), 211–264.
- [16] W. R. Schmitt, “Incidence Hopf algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **96** (1994), 299–330.
- [17] V. Vassiliev, “Cohomology of knot spaces”, *Advance in Soviet Math.*, **1** (1990), 23–69.

П. А. Филиппова (P. A. Filippova)

Международная лаборатория кластерной
геометрии НИУ ВШЭ

E-mail: apoly38@gmail.com