

**БАНКОВСКИЕ РИСКИ:
ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА,
МЕТОДОЛОГИЯ**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРЬ В СЛУЧАЕ ДЕФОЛТА В КОНЦЕПЦИИ МИНИМИЗАЦИИ ОСТАТОЧНОГО РИСКА

В статье представлен подход, предполагающий декомпозицию процесса разработки модели RR / LGD на два этапа: построение модели рейтинга RR / LGD и калибровка последнего с помощью линейной формы, минимизирующей остаточный риск. Автор предлагает использовать метрику остаточного риска, приводит расчеты его параметров для моделей RR / LGD для нескольких открытых источников, дает рекомендации о наиболее важных параметрах валидации произвольной модели RR / LGD.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кредитный риск, остаточный риск, потери в случае дефолта, LGD, Recovery Rate, восстановление после дефолта

ВВЕДЕНИЕ

Показатель потерь в случае дефолта (Loss Given Default, LGD) является одним из главных параметров оценки кредитного риска наряду с вероятностью дефолта (Probability of Default, PD) и величиной денежных средств под риском (Exposure at Default, EAD). LGD — это ключевой параметр при расчете регуляторных требований, а также требований к экономическому капиталу в рамках подхода, основанного на внутренних рейтингах (ПВР) [14]. Цель построения модели LGD — максимально точная оценка уровня риска восстановления после события дефолта. С учетом того что ставка восстановления (Recovery Rate, RR) является обратной величиной к LGD, $RR = 1 - LGD$, моделирование RR является тождественным LGD.

Существуют два основных подхода к расчету RR.

1. *Вычисление простого индекса восстановления (среднего или частотного) по формуле:*

$$RR_{avg} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{E_i},$$



Помазанов Михаил Вячеславович — к. ф.-м. н., руководитель подразделения валидации блока «Риски» ПАО «Промсвязьбанк», доцент факультета экономических наук / Школы финансов Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Автор более 35 научных работ, в том числе двух монографий (г. Москва)

где R_i — сумма поступлений средств в счет погашения задолженности заемщика i , дисконтированных к дате дефолта (учитывается как прямое, так и косвенное восстановление);

E_i — EAD заемщика i .

EAD — сумма основного долга, начисленных процентов, штрафов и прочих начислений к отчетному периоду до дефолта. После момента дефолта в EAD не включаются штрафы, проценты и прочие начисления после дефолта, внебалансовая часть, но включаются выданные после дефолта суммы.

Чистая кредитная экспозиция — это кредитная экспозиция, скорректированная (уменьшенная) на сумму дисконтированного финансового залога.

Простой индекс восстановления не ориентирован на суммы, он показывает среднюю долю восстановления среди дефолтных заемщиков.

2. Вычисление средневзвешенного индекса восстановления по формуле:

$$RR_w = \frac{\sum R_i}{\sum E_i}.$$

Взвешенный индекс чувствителен к суммам в дефолте (к убыткам). Таким образом, показатели RR_{avg} и RR_w различаются, если доля восстановления зависит от суммы в дефолте. Если крупные ссуды восстанавливаются тяжелее мелких, то простой индекс восстановления превышает взвешенный, и наоборот.

Сумма восстановления рассчитывается на основе дисконтированных к дате дефолта платежей восстановления:

$$R = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{P_t - C_t}{(1+q)^t},$$

где P_t — восстановительные платежи в момент времени t от даты дефолта;

C_t — затраты на издержки банка по взысканию;
 $\frac{1}{(1+q)^t}$ — дисконт-фактор со ставкой q .

Знак « ∞ » показывает, что теоретически для получения завершеного взыскания можно ждать до бесконечности (на практике, конечно, ожидание ограничено, и в дальнейшем будет видно чем).

Восстановление после дефолта RR или его обратная величина $LGD = 1 - RR$ на практике демонстрирует случайную динамику и имеет типичный частотный профиль, изображенный на рис. 1.

Во многих эмпирических исследованиях отмечается его бимодальность с большей концентрацией наблюдений в нуле и около единицы и более высоким значением LGD в периоды экономических рецессий. Об этом свидетельствуют результаты ряда эмпирических работ по ипотечному кредитованию [2, 6] и корпоративному кредитованию, в том числе по рынку корпоративных облигаций [10, 12, 21, 22], поэтому для расчета непредвиденных потерь необходимо учесть волатильность LGD в дополнение к его ожидаемой оценке. Разброс LGD , усиленный бимодальностью распределения, дает вклад в непредвиденные потери, которые являются базовой составляющей остаточного кредитного риска¹.

Типовая модель разброса LGD формулируется с помощью следующего соотношения [13]:

$$D(LGD_i) = \gamma \times E(LGD_i) \times (1 - E(LGD_i)), \quad (1)$$

где D — дисперсия (квадрат стандартного отклонения);

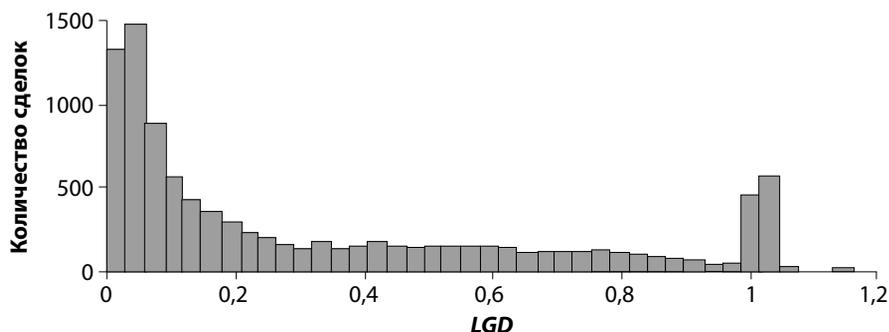
E — математическое ожидание;

$i = 1, \dots, N$ — индекс модельно однородной популяции LGD ²;

γ — параметр, теоретически принадлежащий отрезку $[0, 1]$, его типовое значение $\gamma = 0,25$ предлагается, например, в подходе CreditMetrics [9].

¹ По определению Банка России, остаточный риск — это риск, оставшийся после действий банка по снижению риска, присущего его деятельности [4]. Допустим, для восстановления задолженности после дефолта банк принимает меры (т.е. требует обеспечение), на основании которых статистически справедливо ожидает долю восстановления $RR = 1 - LGD$. Предположим, эта доля восстановления будет иметь место на статистически значимом портфеле. Однако из-за разброса LGD и гранулированности дефолтной части портфеля будут наблюдаться отклонения от ожидаемого значения, в том числе в сторону убытков. Это и дает непредвиденные потери, относящиеся к остаточному риску. — *Здесь и далее прим. авт.*

² Под модельно однородной популяцией следует понимать, например, такие отраслевые сегменты заемщиков, как «Банки», «Физические лица, потребительские кредиты», «Массовый сегмент малого бизнеса», «Крупный корпоративный бизнес», в том числе кредитуемые в определенном банке и т.п. Разумно классифицировать сегменты LGD кредитных активов по бизнес-моделям или финансовым инструментам. Для каждого сегмента возможны различные параметры γ .

Рис. 1. Типичное частотное распределение LGD 

Предполагая, что в рамках ПВП модель LGD соответствует средним статистическим наблюдениям восстановлений, т.е. относительно средних она не завышает и не занижает оценку, полагаем $E(LGD_i) = LGD_i$. На практике параметр γ можно уточнить статистически на этапе валидации внутренней модели LGD , например, по формуле:

$$\gamma = \frac{\sum_{d \in D} (\widehat{LGD}_d - LGD_d)^2}{\sum_{d \in D} LGD_d \times (1 - LGD_d)}, \quad (2)$$

где LGD_d — модельная оценка LGD дефолтера до дефолта;

\widehat{LGD}_d — наблюдаемые потери после завершения процесса восстановления дефолтной задолженности.

В работе Б.Н. Антоновой [1] представлен результат оценки LGD российских дефолтных эмитентов по данным информационно-аналитического агентства Sбonds. За период наблюдения с 31 декабря 2002 г. по 31 декабря 2011 г. 124 российских корпоративных эмитента допустили реальный дефолт по рублевым корпоративным облигациям, которые обращались на ММВБ. Под реальным дефолтом понимается неисполнение обязательства эмитентом до истечения льготного периода. На основании выбранного автором метода были рассчитаны RR по дефолтам корпоративных облигаций, выпущенных российскими

эмитентами в количестве случаев $n = 59$, которые сформировали статистическую выборку. Общим итогом оценки оказалась средняя ставка $RR = 48,8\%$ ($LGD = 51,2\%$) при стандартном отклонении $\sigma RR = \sigma LGD = 29,2\%$. Для случая нечувствительной к модели оценки LGD на уровне среднего формула (2) примет простой вид:

$$\gamma = \frac{n-1}{n} \times \frac{\sigma RR^2}{(1-RR)RR} = 0,34.$$

Численная оценка опирается на результат оценки модельного LGD как среднего LGD без построения уточняющей модели. Эту оценку, данную на эмитентах, можно считать консервативной оценкой параметра γ неопределенности LGD для рынка облигаций, однако, как показывает банковская практика восстановления ссуд, параметр «разброс LGD » γ будет существенно выше.

Для формулирования критериев валидации модели LGD важно оценить статистическую погрешность параметра γ . Оценка $\sigma\gamma$ следующая:

$$\frac{\sigma\gamma}{\gamma} \cong \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{2} + \sigma LGD \frac{|2LGD - 1|}{LGD(1-LGD)} \right). \quad (3)$$

В Приложении представлен вывод оценки (3) среднеквадратического отклонения статистической погрешности параметра γ при условии, что модельный LGD равен среднему. Статистическая погрешность (оценка стандартного отклонения

погрешности) для вышеуказанной выборки 59 эмитентов составила $\sigma\gamma = 0,06$.

В работе Р. Янковича и др. [16] представлен расчет уровней восстановления по дефолтным облигациям США, а также стандартных отклонений за период с июля 2002 г. по октябрь 2010 г. Если сравнить результаты восстановлений дефолтных облигаций США и России, полученные на аналогичных периодах наблюдений, то очевидно, что средний уровень восстановлений в США оказался на 10% ниже российского, однако средний параметр волатильности γ практически совпал с российским на уровне $\gamma = 0,34$. Тем не менее выявляется четкая стратификация значений γ по отраслевым сегментам, в частности, минимальный уровень параметра волатильности характерен для сектора «Недвижимость» ($\gamma = 0,1$), максимальный — для секторов «Розничная торговля» и «СМИ и коммуникации» ($\gamma = 0,5$). Учет статистической погрешности отвергает гипотезу о независимости γ , в частности, от отраслевого сегмента, поэтому имеет смысл строить модель LGD также для параметра волатильности γ . При недостатке наблюдений возможно остановиться на предположении, что $\gamma = \text{const}$ для всех измерений внутри модельно однородной популяции, но это может закрепить модельную ошибку.

В статье «Формула компенсации остаточного риска потерь в случае дефолта» [3] обоснованы метрики, в которых могут быть определены скорректированные на параметр волатильности эффективные метрики PD и EAD . Они будут установлены в следующем виде:

$$E\gamma = EAD \times (\gamma + (1 - \gamma) \times LGD),$$

$$PD\gamma = PD \times \frac{LGD}{\gamma + (1 - \gamma) \times LGD}. \quad (4)$$

Граничные значения для двух случаев: $\gamma = 0$ (отсутствие неопределенности LGD) и $\gamma = 1$ (максимальная неопределенность LGD) означают следующее. Для первого случая $PD_0 = PD$; $E_0 = EAD \times LGD$, для второго — $PD_1 = PD \times LGD$; $E_1 = EAD$. Очевидно, что второй случай подразумевает большую экспозицию к дефолту и для него должно быть выше

требование к капиталу, несмотря на то что вероятность потерь снизится.

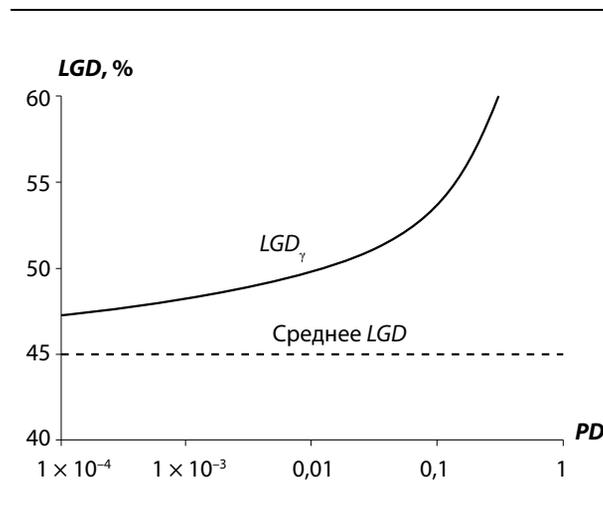
На основе метрик (4) доказывается необходимость введения поправки на LGD [3], которая дает вклад в резервы таким образом, чтобы компенсировать увеличение непредвиденных потерь, связанных с неопределенностью (волатильностью) LGD , метризуемой параметром γ (рис. 2).

Как можно увидеть, типичное для недефолтных рейтингов значение штрафной надбавки равно 3–15%. Это оказалось близко к рекомендациям П. Миу и Б. Оздемира [20], однако такая надбавка имеет другой экономический смысл, не связанный со статистической корреляцией PD и LGD .

В упомянутой статье [3] также показано, что требования к капиталу, учитывающие разброс LGD , существенно растут с увеличением параметра γ . По этой причине есть четкий экономический смысл разрабатывать модель RR / LGD , минимизирующую итоговый разброс LGD (формула (2)) относительно модельного значения.

Одна из важных методологических проблем — экономическая связь PD и LGD для различных сегментов кредитования модельно однородных

Рис. 2. График зависимости LGD от вероятности дефолта для фиксированных значений $R = 0,2$, $\gamma = 0,27$, $LGD = 45\%$



популяций. В частности, при кредитовании суверенных долгов оказался важным вопрос о том, есть ли зависимость LGD от рейтингового разряда.

На основе имеющихся открытых статистических данных [23] можно заключить, что зависимость уровня восстановления от рейтинга страны не подтверждается (рассматривались 25 событий дефолта, рейтинги Moody's 1999–2018 гг., использовался ценовой метод оценки восстановления³) и не сможет пройти статистический тест на отвержение гипотезы H_0 об отсутствии корреляции (рис. 3).

В обзорной работе Л. Аллен и Э. Сондерса [5] демонстрируются расчеты, согласно которым взаимодействие PD и LGD корпоративных кредитов увеличивает ожидаемые потери и требования к капиталу почти до 30%. Однако модели оценки кредитного риска портфеля зачастую базируются на предположении о том, что LGD фиксирован

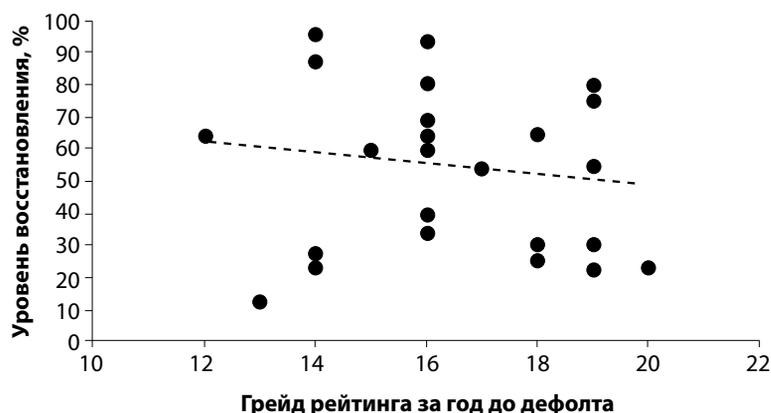
и независим от PD . П. Миу и Б. Оздемир [20] отмечают, что при игнорировании в модели корреляции PD и LGD показатель LGD в среднем должен быть увеличен на 6% (с 35% до 41%) для компенсации эффекта корреляции PD и LGD . Зависимость между уровнем дефолтности и уровнем восстановления после дефолта по рынку корпоративных облигаций Америки и Европы за период 1983–2016 гг. (по данным Moody's [23]) показана на рис. 4.

В соответствии с историческими данными согласно методологии оценки кредитного риска рекомендуется применять стрессовую поправку к невозмущенному значению потерь после дефолта LGD в следующем виде:

$$LGD_{stress} = LGD_0 + (1 - LGD_0)(1 - e^{-17,6EDR}),$$

где EDR — ожидаемая частота дефолтов (центральная тенденция);

Рис. 3. Зависимость уровня восстановления стран-дефолтеров от рейтингового грейда страны за один год до дефолта, измеренная ценовым методом

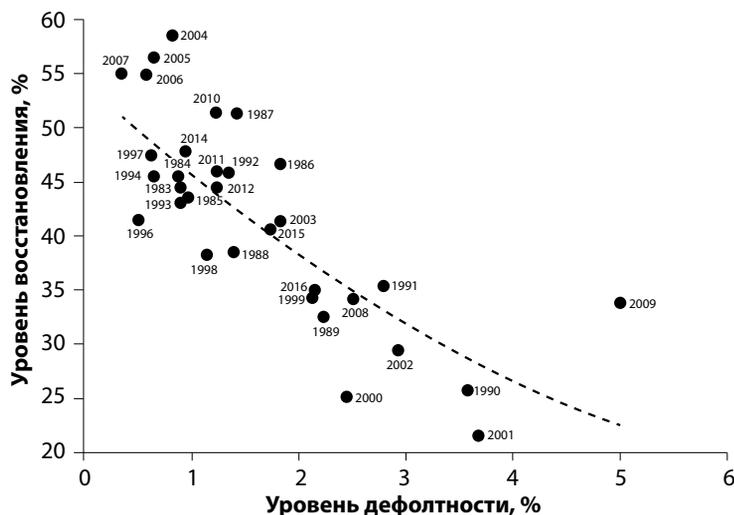


Примечание: $y = -0,0171x + 0,8294$, $R^2 = 0,0201$.

Источник: [23].

³ Часто такой подход называется рыночным. Согласно данному подходу ставка восстановления может быть рассчитана как отношение рыночной цены облигации через некоторое время после дефолта к номинальной стоимости облигации (Е), к аналогичной безрисковой облигации, к рыночной стоимости облигации до наступления дефолта. Результаты расчетов этими тремя способами незначительно различаются. Преимуществом расчета ставки восстановления с помощью рыночного подхода является то, что данная ставка определяется непосредственно на основе наблюдаемых на рынке котировок. Рыночная цена облигации, являющаяся результатом торговых операций с данной бумагой, отражает ожидания участников рынка относительно ставки восстановления, которая учитывает неопределенность, связанную с получением платежей по восстановлению, расходы на взыскание платежей и ставку дисконтирования.

Рис. 4. Зависимость между уровнем дефолтности и уровнем восстановления за период 1983–2016 гг. по данным о рынке корпоративных облигаций США и ЕС



Примечание: $y = 0,5421e^{-17,64x}$, $R^2 = 0,6255$.
 Источник: [23].

LGD_0 — невозмущенное значение LGD в спокойный период, для данных Moody's это значение $LGD_0 \cong 50\%$. Вместе с тем результаты исследований российского рынка корпоративных облигаций [11] не позволяют утверждать, что существует зависимость между данными компонентами кредитного риска.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ДРАЙВЕРЫ ДЛЯ МОДЕЛИ RR / LGD

Уровень восстановления заемщика после дефолта очень специфичен и зависит от множества факторов. В литературе (см., например, работу Й. Грунерта и М. Вебера [15]) определяют четыре категории факторов для корпоративных заемщиков (рис. 5), которые отвечают за:

1) заемщика и компанию-заемщика, прежде всего за кредитоспособность (рейтинг);

2) макроэкономике, в том числе за уровень дефолта;

3) условия кредитования, в первую очередь за обеспечение;

4) деловые связи заемщика, в том числе за их интенсивность.

Факторы делятся на количественные и качественные, предполагающие экспертную оценку. Набор факторов формирует лонг-лист, из которого выбираются факторы, коррелирующие с уровнем реализованного LGD .

При построении моделей для различных классов активов используются источники данных, способы измерения и методы, представленные в табл. 1.

Для обучения модели классификации LGD используются различные линейные и нелинейные алгоритмы. В работе Г. Лотермана и др. [19] анализируются такие методы, как:

- обычный метод наименьших квадратов (OLS);
- ридж-регрессия (RiR);

Рис. 5. Схема базисных факторов модели RR / LGD



Таблица 1. Источники, меры и методы для оценки LGD

| Источник | Меры | Методы | Экспозиция |
|--------------------------------------|---|----------------------------------|--|
| Рыночная стоимость | Разница в цене | Рыночный LGD | Крупный корпоративный блок, субъекты, банки |
| | Кредитные спреды | Подразумеваемый рынком LGD | |
| Восстановление и ожидаемая стоимость | Дисконтированные денежные потоки | Практический LGD | Розничный блок, малый и средний бизнес, корпоративный блок |
| | Исторические убытки и предполагаемые частичные убытки | Подразумеваемые исторические LGD | Розничный блок |

- надежная регрессия (RoR);
- обычный метод наименьших квадратов с бета-преобразованием (B-OLS);
- бета-регрессия (BR);
- обычный метод наименьших квадратов с преобразованием Бокса — Кокса (BC-OLS);

- деревья регрессии (RT);
- многомерные адаптивные регрессионные сплайны (MARS);
- опорные векторные машины с методом наименьших квадратов (LS-SVM);
- искусственные нейронные сети (ANN);

■ линейная регрессия и нелинейная регрессия (OLS+);

■ логистическая регрессия и (не)линейная регрессия (LOG+).

Тем не менее даже на внушительных эмпирических данных (табл. 2), насчитывающих десятки тысяч измерений для корпоративных и потребительских портфелей банков, было обнаружено, что полученные модели имеют ограниченные прогнозирующие характеристики независимо от того, какой метод используется, хотя нелинейные методы дают более высокие характеристики, чем традиционные линейные.

Банки, анализируемые Г. Лотерманом и др. [19], имеют уникальные распределения *LGD*, представленные на рис. 6.

В табл. 3 представлен результат измерения линейной корреляции Пирсона прогнозного и реализованного *LGD* для разных методов и банков.

Из табл. 3 видно, что существенные расхождения результатов, полученных разными методами, наблюдаются только для банка 3, причем для данных этого банка даже лучшие модели показывают слабый результат. В целом можно заметить, что линейная модель OLS дает результат на уровне среднего, а для банка 6 выше среднего.

В работе Т. Конечны и др. [17] представлена модель *LGD*, обученная на рынке потребительского кредитования Чехии. Целью исследования было показать, что лаговые макропеременные, участвующие в модели с задержкой, все еще являются сильными риск-движущими факторами.

В результате авторы сошлись на содержательном наборе факторов, представленных в табл. 4.

Следующая содержательная модель *LGD* представлена в работе М. Кошака и Ю. Польшака [18]. Модель обучена на быстро развивающемся рынке заимствований малого и среднего бизнеса Восточной Европы, в том числе Словении. В табл. 5 представлены риск-доминирующие переменные, которые были выделены авторами как определяющие модель *LGD*.

В качестве третьего примера модели *LGD* предлагается рассмотреть модель, подготовленную методом линейной регрессии на основании реальных данных о корпоративных и розничных кредитах за десять лет от группы европейских коммерческих банков под контролем Европейского центрального банка [7, 8]. Было обработано 26 000 наблюдений, в числе которых 7500 крупных и средних корпоративных дефолтов. В результате получилась модель уровня восстановления, представленная в табл. 6.

Авторы рассмотрели в несколько раз больше риск-доминирующих факторов (лонг-лист), однако значимым оказался набор, представленный в табл. 6 (шорт-лист).

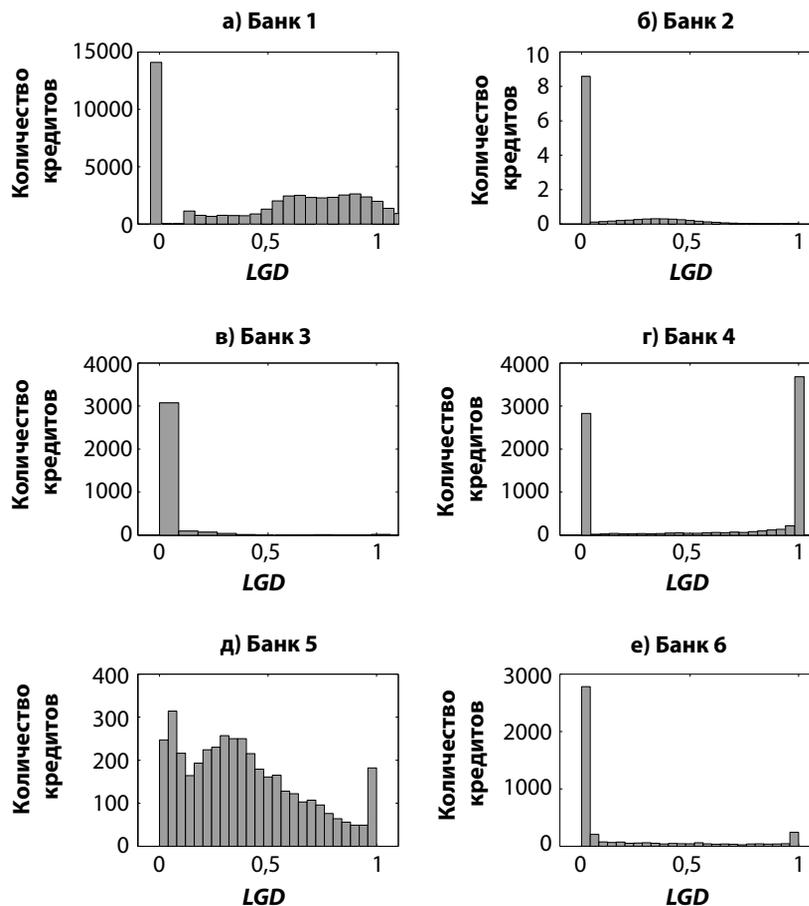
Подводя итоги выборочного исследования результатов моделирования *RR / LGD*, выполненного разными авторами на основе разных статистических баз восстановлений, можно сделать следующие выводы.

1. Невозможно однозначно сказать, что какой-то из методов оптимален с точки зрения точности

Таблица 2. Данные, анализируемые в работе Г. Лотермана и др.

| Банки | Тип | Общее количество |
|--------|-------------------------|------------------|
| Банк 1 | Потребительские кредиты | 47853 |
| Банк 2 | Ипотечные кредиты | 119211 |
| Банк 3 | Ипотечные кредиты | 3351 |
| Банк 4 | Возобновляемые кредиты | 7889 |
| Банк 5 | Ипотечные кредиты | 4097 |
| Банк 6 | Корпоративные кредиты | 4276 |

Источник: [19].

Рис. 6. Плотность распределения *LGD*

Источник: [19].

моделирования. Во многих примерах (см., например, табл. 3), увеличение сложности и точности методов не приводит к заметному улучшению результатов модели, наоборот, часто наблюдается ухудшение.

2. Набор риск-доминирующих параметров модели может существенно различаться при анализе статистических баз разных банков, экономик или модельно однородных популяций.

3. Средние параметры восстановления и их модельный разброс могут значительно колебаться при сужении модельно однородных популяций,

в том числе сегментов кредитования в разных банках. Также существенно неоднородны и максимальные точности, достигнутые на определенных оптимальных моделях.

Общие результаты максимальных достигнутых точностей моделирования *LGD*, измеренных в различных метриках, включая такие как корреляция реализованного и модельного *LGD*, достаточно скромны. Очень редко достигается корреляция больше 0,6, средняя корреляция на лучших моделях составляет около 0,45.

Таблица 3. Результат измерения линейной корреляции Пирсона прогнозного и реализованного *LGD*

| Методы | Банк 1 | Банк 2 | Банк 3 | Банк 4 | Банк 5 | Банк |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| OLS | 0,311 | 0,485 | 0,117 | 0,664 | 0,474 | 0,350 |
| B-OLS | 0,295 | 0,477 | 0,077 | 0,651 | 0,507 | 0,305 |
| BR | 0,26 | 0,464 | 0,157 | 0,653 | 0,456 | 0,321 |
| BC-OLS | 0,24 | 0,472 | 0,137 | 0,573 | 0,501 | 0,286 |
| RiR | 0,306 | 0,492 | 0,146 | 0,666 | 0,478 | 0,354 |
| RoR | 0,306 | 0,477 | 0,173 | 0,653 | 0,454 | 0,349 |
| RT | 0,3 | 0,582 | 0,387 | 0,692 | 0,506 | 0,339 |
| MARS | 0,321 | 0,558 | 0,502 | 0,692 | 0,567 | 0,362 |
| LS-SVM | 0,347 | 0,569 | 0,453 | 0,702 | 0,579 | 0,396 |
| ANN | 0,36 | 0,603 | 0,378 | 0,705 | 0,596 | 0,362 |
| LOG + OLS | 0,326 | 0,484 | 0,076 | 0,668 | 0,498 | 0,348 |
| LOG + B-OLS | 0,317 | 0,529 | 0,121 | 0,665 | 0,512 | 0,323 |
| LOG + BR | 0,28 | 0,453 | 0,074 | 0,668 | 0,457 | 0,335 |
| LOG + BC-OLS | 0,213 | 0,463 | 0,167 | 0,666 | 0,51 | 0,31 |
| LOG + RiR | 0,329 | 0,539 | 0,132 | 0,676 | 0,492 | 0,341 |
| LOG + RoR | 0,326 | 0,535 | 0,151 | 0,673 | 0,474 | 0,339 |
| LOG + RT | 0,33 | 0,555 | 0,455 | 0,666 | 0,5 | 0,335 |
| LOG + MARS | 0,332 | 0,553 | 0,488 | 0,675 | 0,569 | 0,329 |
| LOG + LS-SVM | 0,34 | 0,559 | 0,415 | 0,677 | 0,58 | 0,365 |
| LOG + ANN | 0,35 | 0,559 | 0,538 | 0,67 | 0,585 | 0,369 |
| OLS + RT | 0,338 | 0,579 | 0,258 | 0,678 | 0,536 | 0,362 |
| OLS + MARS | 0,339 | 0,562 | 0,502 | 0,692 | 0,577 | 0,363 |
| OLS + LS-SVM | 0,371 | 0,567 | 0,465 | 0,7 | 0,576 | 0,349 |
| OLS + ANN | 0,372 | 0,601 | 0,261 | 0,705 | 0,557 | 0,35 |
| Средняя корреляция | 0,32 | 0,53 | 0,28 | 0,67 | 0,52 | 0,34 |
| Разброс корреляций для разных методов | 0,04 | 0,05 | 0,17 | 0,03 | 0,05 | 0,02 |

Источник: [19].

Таблица 4. Переменные, входящие в модель *LGD* (работа Т. Конечны и др.)

| Пояснительная переменная логит- <i>LGD</i> | Макроэкономические переменные, текущие значения | Макроэкономические переменные, значения отставания / опережения |
|--|---|---|
| Факторы, специфичные для клиента | Рост реального ВВП (r/r) | Рост реального ВВП (r/r) ($t - 1$) |
| Экспозиция к дефолту | Рост реального ВВП (r/r) | Рост реального ВВП (r/r) ($t - 2$) |
| Отношения с банком | Рост реального потребления (r/r) | Рост реальных инвестиций (r/r) ($t - 2$) |

Таблица 4. Переменные, входящие в модель LGD (работа Т. Конечны и др.) (продолжение)

| Пояснительная переменная логит-LGD | Макроэкономические переменные, текущие значения | Макроэкономические переменные, значения отставания / опережения |
|------------------------------------|---|---|
| Возраст | Рост реальных инвестиций (г/г) | Уровень безработицы ($t - 8$) |
| Наличие детей | Ставка на срок три месяца | Рост реальной заработной платы (г/г) ($t - 3$) |
| Телефон | Уровень инфляции (г/г) | Рост реальной заработной платы (г/г) ($t - 4$) |
| Работа | Цены на недвижимость (г/г) | Рост реальной заработной платы (г/г) ($t - 5$) |
| Образование | Дефолтность | — |
| Пол | Рост розничных кредитов (г/г) | — |

Примечание: г/г — по сравнению с предыдущим годом, ($t - n$) — значение в период n лет до текущей даты t .
Источник: [17].

Таблица 5. Переменные, входящие в модель LGD (работа М. Кошака и Ю. Польшака)

| Обеспечение сделки | Отрасль | Срок | Последний рейтинг заемщика до дефолта | Показатель EAD |
|-----------------------------------|------------------------|---------------------|---------------------------------------|----------------|
| Уступка дебиторской задолженности | Производство | Долгосрочная ссуда | C | Большой |
| Финансовый залог | Прочий реальный сектор | Краткосрочная ссуда | D | Средний |
| Личная гарантия | Услуги | — | E | Небольшой |
| Физический залог | Торговля | — | — | — |
| Залог недвижимости | — | — | — | — |
| Отсутствие обеспечения | — | — | — | — |

Источник: [18].

Таблица 6. Модель RR

| Переменные | Группировка | Коэффициент | p-value | Вес, % |
|----------------------------|--|-------------|---------|--------|
| — | Константа | 0,1001 | <0,0001 | — |
| Макрогеографический регион | Центральная Европа | 0,2145 | <0,0001 | 13,87 |
| | Северо-Восточная Европа | 0,1113 | | |
| | Островные государства Европы | 0,0788 | | |
| | Северо-Западная Европа | 0 | | |
| EAD | — | 0,1567 | <0,0001 | 10,13 |
| Сегментация портфеля | Средний и большой бизнес, корпоративный блок | 0,594 | 0,0033 | 38,4 |
| | Малый бизнес (кроме ипотеки) | 0,377 | 0,0022 | |
| | Физические лица (кроме ипотеки) | 0 | <0,0001 | |

Таблица 6. Модель RR (продолжение)

| Переменные | Группировка | Коэффициент | p-value | Вес, % |
|--------------------|-----------------|-------------|---------|--------|
| Тип продукта | Ипотека | 0,1876 | <0,0001 | 12,13 |
| | Другие продукты | 0 | | |
| Личные гарантии | Отсутствие | 0,1134 | <0,0001 | 7,33 |
| | Наличие | 0 | | |
| Ипотека | Отсутствие | 0,1609 | <0,0001 | 10,4 |
| | Наличие | 0 | | |
| Тип восстановления | Вне суда | 0,1189 | <0,0001 | 7,69 |
| | В суде | 0,0533 | | |
| | Нет информации | 0 | | |

Источники: [7, 8].

Все это убедительно говорит о практической целесообразности применения прямых линейных подходов, для которых возможна оптимальная настройка чувствительности в целях минимизации остаточного риска.

Для построения оптимальной модели рейтинга RR / LGD вполне достаточно опираться на простую метрику — корреляцию Пирсона, максимизируя ее.

ЛИНЕЙНАЯ КАЛИБРОВКА МОДЕЛИ LGD, ОПТИМАЛЬНАЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОСТАТОЧНОГО РИСКА

Обозначим как θ безразмерный рейтинг LGD⁴ (или RR) произвольной внутренней структуры. Линейная модель \hat{R}_θ уровня восстановления RR относительно рейтинга θ будет иметь следующий вид:

$$\hat{R}_\theta = \hat{R} + \mu \times \frac{\theta - \hat{\theta}}{\delta\theta} \times \delta R, \quad (5)$$

где \hat{R}_θ — среднее значение⁵ n реализованных восстановлений уровня R , т.е. $\hat{R} = \frac{1}{n} \sum_{\theta} R$;

δR — среднеквадратическое стандартное отклонение R , измеренное по смещенной оценке как

$$\delta R^2 = \frac{1}{n} \sum_{\theta} (R - \hat{R})^2.$$

Аналогично $\hat{\theta}$ определяется как среднее значение θ по всему множеству реализаций восстановлений, на которых строится модель:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{\theta} \theta, \quad \delta\theta^2 = \frac{1}{n} \sum_{\theta} (\theta - \hat{\theta})^2.$$

Главный искомый параметр модели (5) — это μ , он должен зависеть от риск-детерминированности рейтинга LGD и минимизировать коэффициент разброса LGD, обозначенный параметром γ , т.е. наблюдаемое восстановление R будет определяться случайной величиной ε и моделью \hat{R}_θ в виде $R = \hat{R}_\theta + \varepsilon$, где дисперсия ε моделируется, согласно формуле (1), следующим соотношением:

$$D\varepsilon = \gamma \times \hat{R}_\theta (1 - \hat{R}_\theta). \quad (6)$$

При этом математическое ожидание $M\varepsilon = 0$ по определению модели. Далее на входе модели необходимо определить корреляцию ρ между реализованными восстановлениями R и рейтингом LGD, обозначенным как θ . Ее оценка будет задаваться формулой:

⁴ Под рейтингом LGD понимается любая специально разработанная функция, зависящая от риск-доминирующих параметров LGD / RR, которая коррелирует с реализованным LGD / RR.

⁵ В значении RR_{avg} частотного индекса (см. «Введение»).

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{\theta} \frac{(R - \hat{R})(\theta - \hat{\theta})}{\delta R \times \delta \theta}.$$

Более сложную, нелинейную модель *LGD* не имеет смысла использовать на практике: она не обеспечит существенного повышения точности оценки в силу высокой волатильности *LGD*, обусловленной двухмодовым распределением (см. рис. 1). Предложенная линейная модель *LGD* не гарантирует автоматически естественных ограничений на моделируемый уровень восстановления $\hat{R}_{\theta} \in [0, 1]$, как, например, популярное логистическое представление типа $\hat{R}_{\theta} = \frac{1}{1 + e^{A\theta + B}}$. Тем не

менее, как было рассмотрено выше (см. табл. 3), практика показывает, что путем выбора метода не удастся создать столь мощную модель *LGD*, чтобы результаты ее прогноза существенно улучшались по сравнению с линейными аналогами.

Например, если обратиться к рекомендациям по минимальному *LGD* Базельского комитета по банковскому надзору [14], то они варьируются в диапазоне 35–45%. Ниже этих значений *LGD* формально можно оценить только при наличии финансового обеспечения, которое в действительности должно корректировать *EAD*, а не *LGD*. Если этого не делать, то модель неопределенности *LGD* (1) формально разрушается, поскольку финансовое обеспечение — это стопроцентно реализуемое восстановление, фактически неттинг.

Ниже будет показан диапазон параметров \hat{R} , ρ , при которых линейная модель (6) не выходит за рамки естественных ограничений.

Переходя к оценкам наблюдаемых величин, имеем:

$$\begin{aligned} n \times MSE &= \sum_{\theta} (R - \hat{R}_{\theta})^2 = \sum_{\theta} \varepsilon^2 = \\ &= \sum_{\theta} D\varepsilon = \gamma \times \sum_{\theta} \hat{R}_{\theta} (1 - \hat{R}_{\theta}) = \\ &= \gamma \times \left(\sum_{\theta} \hat{R} (1 - \hat{R}) - \sum_{\theta} \left(\frac{\theta - \hat{\theta}}{\delta \theta} \right)^2 \delta R^2 \times \mu^2 \right) = \\ &= \gamma \times n \times (\hat{R} (1 - \hat{R}) - \delta R^2 \times \mu^2), \end{aligned}$$

где *MSE* — среднеквадратическая ошибка (Mean Square Error).

В то же время:

$$\begin{aligned} n \times MSE &= \sum_{\theta} (R - \hat{R}_{\theta})^2 = \\ &= \sum_{\theta} \left(R - \hat{R} - \mu \times \frac{\theta - \hat{\theta}}{\delta \theta} \times \delta R \right)^2 = \\ &= \sum_{\theta} (R - \hat{R})^2 - 2\mu \times \delta R^2 \sum_{\theta} \frac{(R - \hat{R})(\theta - \hat{\theta})}{\delta R \times \delta \theta} + \\ &\quad + \sum_{\theta} \left(\frac{\theta - \hat{\theta}}{\delta \theta} \right)^2 \delta R^2 \times \mu^2 = \\ &= n \times \delta R^2 \times (1 - 2\mu \times \rho + \mu^2). \end{aligned}$$

Приравнявая полученные выше выражения, выводим зависимость $\gamma(\mu)$:

$$\gamma(\mu) = \gamma_0 \times \frac{1 - 2\mu \times \rho + \mu^2}{1 - \gamma_0 \times \mu^2},$$

где $\gamma_0 = \frac{\delta R^2}{\hat{R}(1 - \hat{R})}$ — значение параметра γ для случая не чувствительной к модели оценки *LGD*, рассмотренной во «Введении».

Для поиска оптимального значения μ решается следующая задача:

$$\mu^* = \arg \min_{\mu} \gamma(\mu), \quad (7)$$

при этом оптимальное $\gamma^* = (\mu^*)$.

Задача (7) решается стандартным способом поиска минимума функции с использованием производной $\gamma' = (\mu^*) = 0$. Не утомляя читателя стандартными математическими выкладками, можно выписать решение:

$$\begin{aligned} \mu^* &= \rho \times \frac{2}{1 + \gamma_0 + \sqrt{(1 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0\rho^2}}, \\ \gamma^* &= \gamma_0 \times \left[1 - \frac{2\rho^2}{1 + \gamma_0 + \sqrt{(1 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0\rho^2}} \right], \\ MSE^* &= \delta R^2 \times \\ &\times \left[1 - 4\rho^2 \times \frac{\gamma_0 + \sqrt{(1 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0\rho^2}}{(1 + \gamma_0 + \sqrt{(1 + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0\rho^2})^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\rho = 0$ (случай «рейтинг *LGD* не работает») получается очевидное решение: $\mu^* = 0, \gamma^* = \gamma_0, MSE^* = \delta R^2$.

На рис. 7 представлены графики решений (8) в полном диапазоне неотрицательной корреляции рейтинга *LGD* с реальными измерениями для различных уровней разброса *LGD*.

Из рис. 7 видно, что эффект от минимизации разброса *LGD* становится наиболее существенным по мере усиления риск-детерминированности рейтинга *LGD*. Однако для оптимального параметра μ модели *LGD* эффект появляется сразу, и μ становится заметно меньше ρ при увеличении разброса *LGD*.

Граничные параметры для предложенной линейной модели (5) вычисляются исходя из условия $0 \leq \hat{R}_\theta \leq 1$. Предположим, не ограничивая общности, что рейтинг θ равномерно распределен на отрезке $[0, 1]^6$.

Тогда $\hat{\theta} = \frac{1}{2}, \delta\theta = \frac{1}{\sqrt{12}}$. Согласно модели (1)

$\delta R = \sqrt{\gamma_0 \times \hat{R}(1 - \hat{R})}$, и граничные значения составят:

$$\hat{R}_\theta^\pm = \hat{R} \pm \mu \times \sqrt{3 \times \gamma_0 \times \hat{R}(1 - \hat{R})}. \quad (9)$$

Это означает, что:

$$\mu_{\max} = \frac{\min(\hat{R}, 1 - \hat{R})}{\sqrt{3 \times \gamma_0 \times \hat{R}(1 - \hat{R})}}.$$

Избегая анализа полного многообразия трехмерной области параметров \hat{R}, γ_0, ρ , в которой выполнено ограничение $0 \leq \hat{R} \leq 1$, проведем расчет μ_{\max} для типовых параметров *LGD* по данным восстановления корпоративных облигаций США (см. «Введение»). Для них $\gamma_0 = 0,34, \hat{R} = 38,7\%, \mu_{\max} = 0,79$, что соответствует очень высоким показателям риск-детерминированности модели *LGD* с корреляцией $\rho > 0,8$, которая не достигается никакими моделями.

Очевидно, что в практически значимом диапазоне возможных моделей рейтингов *LGD* и не

экстремальных практических уровней среднего восстановления \hat{R} (т.е. не близких к 0% и к 100%) линейная модель *LGD* (5) не выдаст диапазон прогнозных восстановлений \hat{R}_θ , статистически существенно выходящий за рамки ограничений $[0, 1]$. На практике при построении модели *LGD* рекомендуется преобразовать рейтинг *LGD* в диапазон равномерно распределенных значений, оценить μ^* (8) и проверить ограничение (9).

В табл. 7 представлены расчеты параметра γ_0 разброса *LGD* без учета модели *LGD*, оптимальный γ^* с точки зрения остаточного риска после применения модели (5), оптимальный параметр чувствительности μ^* , а также диапазон \hat{R}_θ^\pm возможных значений модельного *RR*, если применять формулу (8). Корреляция ρ между реализованным *LGD* и моделью оценивалась по формуле $\rho = \sqrt{R_{\text{squared}}}$. Расчеты проведены для трех источников, упомянутых в разделе «Практические драйверы для модели *RR / LGD*», в которых указаны параметры моделей. Из табл. 7 видно, что модельный уровень восстановления (формула (9)) не выходит за границу диапазона $[0, 1]$. Судя по соотношению γ^* / γ_0 и рис. 7, модели, представленные в табл. 7, могут дать снижение остаточного риска *LGD* на 10–25% по сравнению с оценкой *LGD* в нулевом приближении по среднему значению.

Результаты построения иных, более сложных моделей можно сравнить с результатами модели (5) для оценки их эффективности.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ПОДХОДА

В настоящей работе мы рассмотрели декомпозицию процесса разработки модели *RR / LGD* на построение модели рейтинга *RR / LGD* и на калибровку последнего с помощью линейной формы (5), минимизирующей остаточный риск.

Рейтинговая модель *RR / LGD* строится таким образом, чтобы обеспечить максимальную

⁶ Равномерное распределение случайного параметра ξ можно создать с помощью преобразования $F(\xi)$, где F — функция распределения ξ .

Рис. 7. Зависимости решений (8) от корреляции рейтинга *LGD* с реальными измерениями для различных уровней γ_0 разброса *LGD* относительно среднего значения

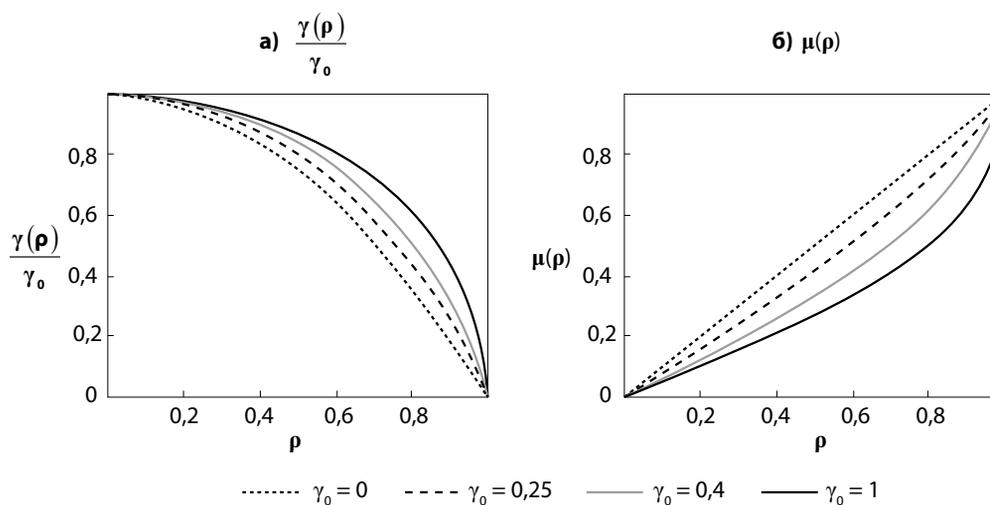


Таблица 7. Расчеты параметра γ_0 разброса *LGD* без учета модели *LGD*, оптимальный γ^* с точки зрения остаточного риска после применения модели (5), оптимальный параметр чувствительности μ^* , диапазон \hat{R}_0^\pm возможных значений уровня восстановления

| Источник | Модель <i>LGD</i> | Тип актива / период / число наблюдений | \hat{R} | δR | Псевдо- <i>R</i> -квадрат | γ_0 | γ^* | μ^* | \hat{R}_0^\pm |
|---------------------------------------|----------------------------------|---|-----------|------------|---------------------------|------------|------------|---------|-----------------|
| Работа Т. Конечны и др. [17] | Обобщенная линейная модель (GLM) | Потребительское кредитование / I квартал 2003 г. — II квартал 2010 г. / 18698 наблюдений | 0,42 | 0,40 | 0,152 (скорректированный) | 0,657 | 0,594 | 0,245 | 0,25–0,59 |
| Работа М. Кошка и Ю. Польшака [18] | GLM | Малый и средний бизнес / 2002–2005 гг. / 124 наблюдения | 0,73 | 0,35 | 0,363 (по Нагелькерке) | 0,622 | 0,468 | 0,421 | 0,48–0,98 |
| Работы С. Бонини и Дж. Кайвано [7, 8] | OLS | Физические лица (потребительское кредитование), малый бизнес, средний и большой бизнес / IV квартал 2002 г. — IV квартал 2012 г. / 26000 наблюдений | 0,51 | 0,46 | 0,31 (скорректированный) | 0,847 | 0,692 | 0,329 | 0,25–0,77 |

корреляцию Пирсона с реализованным *RR / LGD* на обучающей статистической выборке. При этом восстановительные платежи за вычетом затрат должны быть очищены от не являющихся таковыми

и дисконтированы к моменту дефолта. Финансовое обеспечение должно быть учтено в модели *EAD*. Модель рейтинга *RR / LGD* строится на рискдоминирующих факторах, примеры которых

представлены в разделе «Практические драйверы для модели RR/LGD ».

На следующем шаге рассчитывается оптимальный параметр чувствительности μ по формуле (8)

с учетом параметра $\gamma_0 = \frac{\delta R^2}{\hat{R}(1-\hat{R})}$ разброса LGD

и корреляции $\rho = \frac{1}{N} \sum_{\theta} \frac{(R-\hat{R})(\theta-\hat{\theta})}{\delta R \times \delta \theta}$ рейтинга θ

с реализованным восстановлением R (раздел «Линейная калибровка модели LGD , оптимальная с точки зрения остаточного риска»).

Калибровка модели (5) определяется формулой (8). Валидность модели в рамках ограничения модельного RR должна быть проверена по формуле (9), в случае выхода \hat{R}_θ за диапазон $[0, 1]$ \hat{R}_θ присваиваются граничные значения.

Для проверки / валидации уже построенной модели (M) RR/LGD рекомендуется сопоставить

ее с опорной моделью (5), построенной на данных проверяемой модели M . Для этого необходимо рассчитать корреляцию ρ реализованного LGD с LGD_M . Вторым шагом будет непосредственный расчет γ_M по формуле (2) для M . Очевидно, что средние значения реализованного и модельного LGD должны совпадать с точностью до статистической ошибки расчета RR . Следует придерживаться одной из концепций формата расчета восстановления: простого (частотного) или средневзвешенного. Общепринято придерживаться простого формата, а взвешенность на EAD учесть в модели RR/LGD , зависящей от EAD . После расчета оптимального γ^* опорной модели (5) по формуле (8) следует сопоставить полученные параметры разброса LGD . Если $\gamma_M > \gamma^* + \sigma_\gamma$, где σ_γ — статистическая погрешность (3), оцененная в Приложении, то модель M неоптимальна и может быть улучшена.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Оценка среднеквадратической ошибки параметра «разброс LGD»

Формула (2) расчета параметра γ имеет статистическую погрешность, которую предстоит оценить сверху в единицах среднеквадратического отклонения. В качестве оценки сверху возьмем погрешность оценки γ^0 для LGD_d , не чувствительной к модели. В единицах восстановления R_d среднеквадратическая ошибка имеет форму:

$$\delta\gamma^0 = \sqrt{D \left[\frac{\sum_{d \in D} (\hat{R}_d - \bar{R})^2}{n \times \bar{R} \times (1 - \bar{R})} \right]},$$

где D — дисперсия;

n — число наблюдений.

По предположению $\hat{R}_d = R + \sigma \times \varepsilon_d$, где $R = M \hat{R}_d$ — математическое ожидание реализованного восстановления \hat{R}_d , $\varepsilon_d \in N(0, 1)$. \bar{R} (среднее \hat{R}_d) будет оцениваться как $\bar{R} = R + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\sum_{d \in D} \varepsilon_d}{\sqrt{n}} \in N(0, 1)$. Тогда:

$$\sum_{d \in D} (\hat{R}_d - \bar{R})^2 = \sigma^2 \sum_{d \in D} (\varepsilon_d - \varepsilon)^2 = \sigma^2 (\sum_{d \in D} \varepsilon_d^2 - \varepsilon^2).$$

Выражения $\sum_{d \in D} \varepsilon_d^2$ и ε^2 имеют χ^2 распределения со степенями свободы n и 1 соответственно, т.е. эти случайные величины можно представить следующим образом:

$$\sum_{d \in D} \varepsilon_d^2 = n + \sqrt{2n} \times \xi, \quad \varepsilon^2 = 1 + \sqrt{2} \times \eta,$$

где $M\xi = 0$, $M\eta = 0$, $D\xi = 1$, $D\eta = 1$.

$$\bar{R} \times (1 - \bar{R}) = \left(R + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon \right) \left(1 - R - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon \right) = R(1 - R) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon (1 - 2R) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt{D \left[\frac{\sum_{d \in D} (\hat{R}_d - \bar{R})^2}{n \times \bar{R} \times (1 - \bar{R})} \right]} = \sqrt{D \left[\frac{\sigma^2}{R(1 - R)} \times \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \xi + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon \frac{1 - 2R}{R(1 - R)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]}.$$

Допуская максимальную корреляцию ξ и опуская члены более высокого порядка малости $O\left(\frac{1}{n}\right)$, получаем оценку сверху:

$$\delta\gamma^0 \cong \frac{\gamma^0}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{2} + \sigma \frac{|1 - 2R|}{R(1 - R)} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонова Б.Н. Оценка ставки восстановления по российским корпоративным облигациям // Корпоративные финансы. — 2012. — №4(24). — С. 130–143.
2. Карминский А.М., Лозинская А.М., Ожегов Е.М. Методы оценки потерь кредитора при ипотечном жилищном кредитовании // Экономический журнал ВШЭ. — 2016. — Т. 20. — №1. — С. 9–51.
3. Помазанов М.В. Формула компенсации остаточного риска потерь в случае дефолта // Управление финансовыми рисками. — 2020. — №4. — С. 260–270. — DOI: 10.36627/2221-7541-2020-4-4-260-270.
4. Указание Банка России от 15 апреля 2015 г. №3624-У «О требованиях к системе управления рисками и капиталом кредитной организации и банковской группы». — <https://base.garant.ru/71057396/>.
5. Allen L., Saunders A. (2005). *A Survey of Cyclical Effects in Credit Risk Measurement Models*. — https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=315561.
6. Araten M., Jacobs M., Varshney P. (2004). «Measuring LGD on commercial loans: an 18-year internal study». *RMA Journal*, Vol. 86(8), pp. 96–103.
7. Bonini S., de Carvalho G. (2014). «Development of a LGD model Basel2 compliant: a case study». In: *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*. Springer, Switzerland. — https://doi.org/10.1007/978-3-319-05014-0_10.
8. Bonini S., de Carvalho G. (2016). *Econometric Approach for Basel II Loss Given Default Estimation: from Discount Rate to Final Multivariate Model*. — <https://www.semanticscholar.org/paper/Econometric-approach-for-Basel-II-Loss-Given-%3A-from/fc954a9ac25c2fd9f2de67b9f-89b53aa36742e6c>.
9. *CreditMetrics. Technical Document*. — <https://www.msci.com/documents/10199/93396227-d449-4229-9143-24a94dab122f>.
10. Dermine J., de Carvalho C.N. (2006). «Bank loan Losses-Given-Default: a case study». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 30(4), pp. 1219–1243.
11. Ermolova M.D., Penikas H.I. (2017). «PD-LGD correlation study: evidence from the Russian corporate bond market». *Model Assisted Statistics and Applications*, Vol. 12 (4), pp. 335–358.
12. Felsovalyi A., Hurt L. (1998). «Measuring loss on Latin American defaulted bank loans: a 27-year study of 27 countries». *Journal of Lending and Credit Risk Management*, Vol. 80, pp. 41–46.
13. Gordy B., Lutkebohmert E. (2013). «Granularity adjustment for regulatory capital assessment». *International Journal of Central Banking*, Vol. 9, pp. 33–71.
14. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework*. — <https://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf>.
15. Grunert J., Weber M. (2009). «Recovery rates of commercial lending: empirical evidence for German companies». *Journal of Banking & Finance*, Vol. 33(3), pp. 505–513. — <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2008.09.002>.
16. Jankowitsch R., Naglerb F., Subrahmanyam M.G. (2014). «The determinants of recovery rates in the US corporate bond market». *Journal of Financial Economics*, Vol. 114(1), pp. 155–177. — <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.06.001>.
17. Konečný T., Seidler J., Belyaeva A., Belyaev K. (2017). *The Time Dimension of the Links Between Loss Given Default and the Macroeconomy*. — <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp2037.en.pdf>.
18. Kořak M., Poljšak J. (2010). *Loss Given Default Determinants in a Commercial Bank Lending: an Emerging Market Case Study*. — https://www.researchgate.net/publication/229050806_Loss_given_default_determinants_in_a_commercial_bank_lending_An_emerging_market_case_study.
19. Loterman G., Brown I., Martens D., Mues C., Baesens B. (2012). «Benchmarking regression algorithms for loss given default modeling». *International Journal of Forecasting*, Vol. 28, pp. 161–170.
20. Miu P., Ozdemir B. (2006). «Basel requirement of downturn LGD: modeling and estimating PD & LGD correlations». *Journal of Credit Risk*, Vol. 2(2), pp. 43–68.
21. Qi M., Zhao X. (2011). «Comparison of modeling methods for Loss Given Default». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 35 (11), pp. 2842–2855.
22. Schuermann T. (2004). *What Do We Know About Loss Given Default?* — <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.525702>.
23. *Sovereign Default Research*. — https://www.moody.com/Pages/Sovereign-Default-Research.aspx?stop_mobi=yes.