УДК 512.772, 515.165.4

О ТОПОЛОГИИ ПЛОСКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ СТЕПЕНЕЙ 7 И 8

И.М. Борисов[1], В.А. Горская[2], Г.М. Полотовский[3], Н.Д. Пучкова[4], И.М. Соколова[5]

1 *i.m.borisov@mail.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
2 *victoriya.gorskaya@mail.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
3 *polotovsky@gmail.com*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
4 *nataha1910@mail.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
5 *i2000raaa.sockolova@gmail.com*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Рассматривается относящаяся по тематике к первой части 16-й проблемы Гильберта задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых, распадающихся на несколько неприводимых сомножителей. Даётся обзор полученных авторами в последние два года результатов о кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя, и о кривых степени 8, распадающихся на 2 сомножителя.

Ключевые слова: 16-я проблема Гильберта, распадающиеся плоские вещественные алгебраические кривые, топологическая классификация.

Плоской проективной вещественной алгебраической кривой (ниже просто кривая) C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ – координаты в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Множество $\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 | C_m(x_0, x_1, x_2) = 0\}$, называется множеством вещественных точек кривой C_m и обозначается $\mathbb{R}C_m$.

Вопрос о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ в случае *неособой* кривой, включённый Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы, был решён Д.А. Гудковым [1] в 1969 г. В [1] Гудков поставил задачу о топологии множества $\mathbb{R}C_6$ для случая, когда кривая C_6 распадается в произведение двух M-кривых (кривая C_m называется M-кривой, если $\mathbb{R}C_m$ имеет максимально возможное для данной степени m число компонент связности, согласно теореме Харнака равное $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1$). Эта задача была решена в [2], а затем и для случая, когда сомножителей больше двух – в [3]. Начиная с середины 1980-х годов многие авторы (вся известная нам библиография приведена в [4]) внесли вклад в решение аналогичной задачи о кривых C_7, распадающихся в произведение двух M-кривых; эта задача в настоящее время близка к завершению. Также была найдена классификация взаимных расположений M-кривой степени 5 и пары прямых.

В докладе даётся обзор полученных нами результатов (частично опубликованных в [4] – [6]) в аналогичных классификационных задачах: а) о кривых C_7, распадающихся в произведение трёх M-кривых – пары коник и кубики; б) о кривых C_8, распадающихся в произведение двух M-кривых: коники и секстики или двух квартик. Без наложения дополнительных условий все эти задачи труднообозримы, поэтому всюду предполагаются выполненными условия максимальности и общего положения: каждые две кривые-сомножители пересекаются транверсально в максимально возможном по теореме Безу числе точек и все эти точки расположены на одной компоненте связности каждой из кривых-сомножителей. Но и при этом задача остаётся слишком объёмной, поэтому рассматриваемые случаи делятся на серии, выделяемые условиями комбинаторного характера.

Схема исследования во всех случаях следующая: сначала перечисляются *топологические модели* кривых данной серии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, топологическим следствиям теоремы Безу и следствиям известных результатов о топологии неособых алгебраических кривых. Затем для каждой модели из полученного списка мы пытаемся либо доказать её нереализуемость алгебраической кривой рассматриваемого класса с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, либо построить её алгебраическую реализацию с помощью различных вариантов метода малого параметра, включая метод “patchworking”, предложенный О.Я. Виро, и его обобщения.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Литература

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. *Топология кривых* 6*-го порядка и поверхностей* 4*-го порядка (к* 16*-й проблеме Гильберта)* // Уч. зап. Горьков. ун-та. – 1969. – Вып. 87. – С. 1–214.

2. Полотовский Г. М. *Каталог М-распадающихся кривых* 6*-го порядка* // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 236. – № 3. – С. 548–551.

3. Kuzmenko T. V, Polotovskiĭ G. M. *Classification of curves of degree* 6 *decomposing into a product of M-curves in general position* // Translations of the American Mathematical Society. Series 2. – 1996. – Vol. 173. – P. 165–178.

4. Борисов И. М., Полотовский Г. М. *О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени* 8 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. – 2020. – Т. 176. С. 3–18.

5. Горская В. А., Полотовский Г. М. *О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости* // Журнал СВМО. – 2020. Т. 22. –№ 1. – С. 24–37.

6. Борисов И. М. *Построение некоторых взаимных расположений М-кубики и М-квинтики* // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22. Вып. 1. – С. 76–91.

ON THE TOPOLOGY OF PLANE REAL DECOMPOSABLE CURVES OF DEGREES 7 AND 8

I.M. Borisov, A.V. Gorskaya, G.M. Polotovskiy, N.D. Puchkova, I.M. Sokolova

We consider the problem of isotopic classification of plane real algebraic curves that decompose into several irreducible factors, which is related to the first part of Hilbert’s 16th problem. A review of the results obtained by the authors in the last two years about curves of degree 7 that decompose into three factors, and about curves of degree 8, that decompose into two factors, is given.

Keywords: Hilbert’s 16th problem, decomposable plane real algebraic curves, topological classification.