УДК 517.938

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Необходимые и достаточные условия сопряженности регулярных гомеоморфизмов Смейла

Рассматривается класс регулярных гомеоморфизмов Смейла, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа периодических орбит, имеющих гиперболический тип, на замкнутых топологических многообразиях. Этот класс содержит диффеоморфизмы Морса–Смейла на замкнутых гладких многообразиях. Для регулярных гомеоморфизмов Смейла приводятся необходимые и достаточные условия сопряженности.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, сопряженность, регулярный гомеоморфизм Смейла.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9244

Введение

Одной из основных задач качественной (или, как иногда говорят, геометрической) теории динамических систем является задача топологической классификации в пределах выделенного класса динамических систем (см. [1]–[3]). Ограничимся рассмотрением обратимых топологических динамических систем с дискретным временем, которые порождаются положительными и отрицательными итерациями гомеоморфизмов несущего многообразия. Первый шаг классификации состоит в нахождении условий сопряженности гомеоморфизмов. Напомним, что гомеоморфизмы $f_1, f_2\colon M^n \to M^n$ n-мерного (топологического) многообразия M^n называются *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ такой, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$. Обычно первый шаг классификации равносилен нахождению полного инварианта сопряженности, т.е. такой характеристики, которая сохраняется при сопряжении и имеет разные описания (или значения) у несопряженных гомеоморфизмов. Одним из известных инвариантов является число вращения Пуанкаре (см. [4]) в классе сохраняющих ориентацию транзитивных гомеоморфизмов окружности (см. в обзоре [5] главу 7, посвященную инвариантам эквивалентности и сопряженности маломерных динамических систем). Числовой характер этого инварианта обусловлен тем, что динамика полностью определяется асимптотическим поведением одной (любой) орбиты. Полный инвариант сопряженности в более высоких размерностях, как правило, связан с вложением в многообразие

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 17-11-01041), кроме доказательства леммы 2, выполненного при поддержке Международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ грантом Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

© Е. В. Жужома, В. С. Медведев, 2021

инвариантных подмножеств, которые определяют динамику гомеоморфизмов данного класса (см. [6]–[9]).

Учитывая, что динамические системы сопрягаются посредством гомеоморфизма, и в связи с открытием топологических многообразий (см. [10]), которые не допускают структуры гладкого многообразия, имеет смысл при решении задачи топологической классификации рассматривать топологические динамические системы на топологических многообразиях. При построении полных инвариантов сопряженности, как правило, сначала находятся необходимые и достаточные условия сопряженности. Для определения таких условий нам понадобится следующее основное определение. (Ниже $\operatorname{clos} N$ обозначает топологическое замыкание множества N.)

Пусть $f_1, f_2\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизмы n-мерного (топологического) многообразия M^n размерности $n \geqslant 2$, и пусть N_1, N_2 – их инвариантные множества соответственно, т.е. $f_i(N_i) = N_i$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что N_1, N_2 *локально динамически эквивалентно вложены*, если существуют открытые окрестности δ_1, δ_2 множеств $\operatorname{clos} N_1$, $\operatorname{clos} N_2$ соответственно и топологическое вложение (т.е. гомеоморфизм на свой образ) $h_0\colon \delta_1 \cup f_1(\delta_1) \to M^n$ такие, что

$$h_0(\delta_1) = \delta_2, \qquad h_0(\operatorname{clos} N_1) = \operatorname{clos} N_2, \qquad h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1},$$

т.е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\delta_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_0"] & f_1(\delta_1) \arrow[d, "h_0"] \\
h_0(\delta_1) = \delta_2 \arrow[r, "f_2"] & f_2(\delta_2) = h_0 \circ f_1(\delta_1)
\end{tikzcd}$$

Имеется большой задел, связанный с построением инвариантов сопряженности гладких и обратимых динамических систем с дискретным временем, у которых неблуждающее множество имеет гиперболическую структуру. Выявление фундаментальной роли гиперболичности в современной теории структурно устойчивых динамических систем принадлежит С. Смейлу (см. [3]), который опирался на работу А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [11] и работы Д. В. Аносова [12], [13]. В последние десятилетия получен значительный прогресс в классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла, которые можно охарактеризовать как структурно устойчивые диффеоморфизмы с регулярной динамикой. Одним из первых инвариантов сопряженности для диффеоморфизмов Морса–Смейла замкнутых поверхностей является сигнатура Гринеса (см. [14]) в классе диффеоморфизмов с конечным множеством гетероклинических орбит (о диффеоморфизмах Морса–Смейла см. обзоры [15], [16]). Для диффеоморфизмов Морса–Смейла на трехмерных многообразиях в работе Х. Бонатти и В. З. Гринеса [17] был предложен метод построения инвариантов сопряженности, связанный с рассмотрением пространства орбит и выделением в этом пространстве геометрических множеств, которые отражают вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек (мы будем называть его методом Бонатти–Гринеса). Развитие этого метода привело

к классификации трехмерных диффеоморфизмов Морса–Смейла; см. [18]–[20]. Однако имеются многомерные классы систем Морса–Смейла (например, диффеоморфизмы Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек) с одинаковыми инвариантами Бонатти–Гринеса, но топологически не сопряженные (см. [9]).

В настоящей статье рассматривается класс гомеоморфизмов, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа периодических орбит, имеющих гиперболический тип, и для этого класса получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности. Этот класс является существенным расширением класса диффеоморфизмов Морса–Смейла. Поэтому полученные условия сопряженности применимы также для диффеоморфизмов Морса–Смейла. Предложенный в статье подход к построению инвариантов топологической сопряженности является альтернативным методу Бонатти–Гринеса и может, кроме систем Морса–Смейла, применяться для некоторых классов структурно неустойчивых диффеоморфизмов. Перейдем к точным определениям.

Пусть гомеоморфизмы $f_1, f_2\colon M^n \to M^n$ имеют периодические орбиты γ_1, γ_2 соответственно. Локальная динамически эквивалентная вложимость γ_1, γ_2 фактически означает, что гомеоморфизмы f_1, f_2 *в некоторых окрестностях* орбит γ_1, γ_2 *сопряжены*. Поэтому для краткости изложения мы также в этом случае будем говорить, что ограничения $f_1|_{\gamma_1}$, $f_2|_{\gamma_2}$ *локально сопряжены*.

Напомним определение гиперболической неподвижной точки для гладкого диффеоморфизма. Пусть z_0 – неподвижная точка C^1-диффеоморфизма $F\colon L^n \to L^n$ некоторого n-мерного замкнутого гладкого многообразия L^n, $n \geqslant 2$, т.е. $F(z_0) = z_0 \in L^n$. Точка z_0 называется *гиперболической*, если дифференциал $DF(z_0)\colon T_{z_0}L^n \to T_{z_0}L^n$ не имеет собственных значений, равных по модулю 1. Заметим, что $DF(z_0)$ здесь является линейным изоморфизмом касательного пространства $T_{z_0}L^n$, естественно изоморфного пространству $\mathbb{R}^n$, и при этом начало координат $O \in \mathbb{R}^n$ является неподвижной точкой отображения $DF(z_0)$, $DF(z_0)(O) = O$. Согласно теореме Гробмана–Хартмана (см. [21]–[23]) ограничения $F|_{z_0}$ и $DF(z_0)|_O$ локально сопряжены.

Определение гиперболичности неподвижной точки естественным образом обобщается на определение гиперболичности периодической точки следующим образом. Периодическая точка z_0 периода $p \in \mathbb{N}$ называется *гиперболической*, если она является гиперболической неподвижной точкой диффеоморфизма F^p. Далее, неподвижную точку мы рассматриваем как периодическую с периодом 1. Периодическая орбита называется *гиперболической*, если все точки орбиты гиперболические. Известно (см., например, [3], [24], [20]), что для гиперболической точки z_0 периода $p \in \mathbb{N}$ существуют так называемые устойчивое $W^{\mathrm{s}}(z_0)$ и неустойчивое $W^{\mathrm{u}}(z_0)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M^n$ таких, что $\varrho_M(F^{pk}z_0, F^{pk}y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$ соответственно, где ϱ_M – метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^{\mathrm{u}}(z_0)$ есть устойчивое многообразие относительно F^{-1}. Известно, что $W^{\mathrm{s}}(z_0)$ и $W^{\mathrm{u}}(z_0)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{s}}(z_0)}$ и $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{u}}(z_0)}$ соответственно и являются инъективными погружениями последних в M^n.

Пусть теперь x_0 – периодическая точка гомеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ топологического n-мерного многообразия M^n, $n \geqslant 2$, периода $p \in \mathbb{N}$, $f^p(x_0) = x_0$. Будем говорить, что x_0 имеет *тип гиперболической точки* или x_0 является *локально гиперболической*, если существует линейный изоморфизм $f_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что неподвижная точка $O \in \mathbb{R}^n$ является гиперболической точкой отображения f_0, и ограничения $f^p|_{x_0}$, $f_0|_O$ локально сопряжены. Аналогично случаю диффеоморфизма это определение распространяется на периодическую орбиту.

Пусть $\mathrm{Orb}(x)$ – локально гиперболическая периодическая орбита периода $p \in \mathbb{N}$, т.е. $\mathrm{Orb}(x) = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ состоит из p точек. Так как $f^p(x)$ имеет тип неподвижной гиперболической точки, а у неподвижной гиперболической точки линейного диффеоморфизма имеются устойчивое и неустойчивое многообразия, то также существуют устойчивое $W^{\mathrm{s}}(x)$ и неустойчивое $W^{\mathrm{u}}(x)$ многообразия точки x, которые можно определить как множества точек

$$W^{\mathrm{s}}(x) = \bigl\{y \in M^n \mid \varrho_M(f^{pk}(x), f^{pk}(y)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\bigr\},$$
$$W^{\mathrm{u}}(x) = \bigl\{y \in M^n \mid \varrho_M(f^{pk}(x), f^{pk}(y)) \to 0 \text{ при } k \to -\infty\bigr\}$$

соответственно, причем $W^{\mathrm{s}}(x)$ и $W^{\mathrm{u}}(x)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{s}}(x)}$ и $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{u}}(x)}$ размерностей $\dim W^{\mathrm{s}}(x)$ и $\dim W^{\mathrm{u}}(x)$ соответственно, где $\dim W^{\mathrm{s}}(x) + \dim W^{\mathrm{u}}(x) = n$. Устойчивое многообразие орбиты $\mathrm{Orb}(x)$ равно объединению $W^{\mathrm{s}}(\mathrm{Orb}(x)) = \bigcup_{i=0}^{p} W^{\mathrm{s}}(f^i(x))$. Аналогично определяется неустойчивое многообразие $W^{\mathrm{u}}(\mathrm{Orb}(x))$.

Периодическая орбита $\mathrm{Orb}(x)$ называется *стоковой*, если $\dim W^{\mathrm{s}}(x) = n$ (следовательно, $\dim W^{\mathrm{u}}(x) = 0$). Периодическая орбита $\mathrm{Orb}(x)$ называется *источниковой*, если $\dim W^{\mathrm{s}}(x) = 0$ (следовательно, $\dim W^{\mathrm{u}}(x) = n$). Наконец, периодическая орбита $\mathrm{Orb}(x)$ называется *седловой*, если $1 \leqslant \dim W^{\mathrm{s}}(x) \leqslant n-1$ (следовательно, $1 \leqslant \dim W^{\mathrm{u}}(x) \leqslant n-1$).

Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей* точкой гомеоморфизма f, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Множество неблуждающих точек обозначается через $\mathrm{NW}(f)$. Очевидно, периодическая точка является неблуждающей (следовательно, все периодические орбиты принадлежат неблуждающему множеству).

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизм топологического n-мерного замкнутого многообразия M^n, $n \geqslant 2$. Гомеоморфизм f называется *регулярным гомеоморфизмом Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ гомеоморфизма f состоит из конечного числа периодических орбит;
- каждая периодическая орбита $\gamma \in \mathrm{NW}(f)$ является локально гиперболической (имеет гиперболический тип);
- неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ содержит непустые подмножества стоковых и источниковых орбит[1].

Введенное понятие можно объяснить следующим образом. Понятие гиперболичности для неблуждающего множества было введено Стивом Смейлом,

[1]Необходимость этого условия требует дополнительных исследований.

после работ которого, по образному выражению Д. В. Аносова, в теории динамических систем началась гиперболическая революция. Введенное ранее понятие диффеоморфизма Смейла (не вполне устоявшееся) означает структурную устойчивость плюс наличие нетривиальных базисных множеств (иногда только нульмерных, а иногда допускаются одномерные базисные множества). Таким образом, динамика диффеоморфизма Смейла на нетривиальных базисных множествах хаотическая. Поскольку в гладком случае введенные гомеоморфизмы имеют регулярную динамику, то мы решили ввести понятие *регулярный гомеоморфизм Смейла.*

Обозначим множество регулярных гомеоморфизмов Смейла $M^n \to M^n$ через $\mathrm{SRH}(M^n)$. Отметим, что кроме диффеоморфизмов Морса–Смейла этот класс содержит регулярные структурно неустойчивые диффеоморфизмы (например, диффеоморфизмы, принадлежащие границе множества диффеоморфизмов Морса–Смейла в пространстве диффеоморфизмов).

Для гомеоморфизма $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$ будем далее обозначать через $\alpha(f)$ семейство источниковых периодических орбит, через $\omega(f)$ – семейство стоковых периодических орбит и через $\sigma(f)$ – семейство седловых периодических орбит. Обозначим через $A(f)$ объединение стоковых периодических орбит и неустойчивых многообразий седловых периодических орбит, а через $R(f)$ – объединение источниковых периодических орбит и устойчивых многообразий седловых периодических орбит:

$$A(f) = \omega(f) \bigcup_{s_i \in \sigma(f)} W^{\mathrm{u}}(s_i), \qquad R(f) = \alpha(f) \bigcup_{s_i \in \sigma(f)} W^{\mathrm{s}}(s_i).$$

Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема. *Гомеоморфизмы $f_1, f_2 \in \mathrm{SRH}(M^n)$, $n \geqslant 2$, сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

– *множества $A(f_1), A(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены*;
– *множества $R(f_1), R(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены.*

Поскольку класс регулярных гомеоморфизмов Смейла $\mathrm{SRH}(M^n)$ содержит диффеоморфизмы Морса–Смейла $M^n \to M^n$, то для каждого такого диффеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ определены множества $A(f), R(f)$. Из приведенной теоремы получаем следующие необходимые и достаточные условия сопряженности диффеоморфизмов Морса–Смейла.

Следствие. *Пусть f_1, f_2 – диффеоморфизмы Морса–Смейла замкнутого n-мерного (гладкого) многообразия M^n, $n \geqslant 2$. Тогда f_1, f_2 сопряжены, если и только если выполняется одно из следующих условий*:

– *множества $A(f_1), A(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены*;
– *множества $R(f_1), R(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены.*

Ниже будет показано, что для гомеоморфизма $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$ множество $A(f)$ является притягивающим. Поэтому определение локально динамической и эквивалентной вложимости можно упростить. А именно, множества $A(f_1)$, $A(f_2)$ *локально динамически эквивалентно вложены*, если существуют открытые

окрестности δ_1, δ_2 множеств $A(f_1)$, $A(f_2)$ соответственно и гомеоморфизм h_0: $\delta_1 \to \delta_2$ такие, что

$$f_1(\delta_1) \subset \delta_1, \qquad h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1}.$$

Полностью аналогично можно дать определение локально динамической вложимости для множеств $R(f_1)$, $R(f_2)$.

Описание топологической структуры множеств $A(f)$, $R(f)$ и построение классификационного инварианта является самостоятельной задачей, которая зависит от рассматриваемого подкласса $\mathrm{SRH}(M^n)$. В качестве простейшей иллюстрации применения приведенной теоремы для построения классификационного инварианта приведем следующий результат: *полным инвариантом сопряженности гомеоморфизмов Смейла с тремя неподвижными точками на проективной плоскости является динамический тип седла, который может принимать только четыре значения в зависимости от сохранения или обращения ориентации действия гомеоморфизма на инвариантных многообразиях данного седла.*

§ 1. Свойства SRH-гомеоморфизмов

Пусть $\mathrm{Orb}(x)$ – орбита точки $x \in M^n$ для гомеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$. Напомним, что *ω-предельным множеством* $\omega(x)$ называется множество точек $y \in M^n$ со следующим свойством: $y \in \omega(x)$, если и только если $f^{k_i}(x) \to y$ для некоторой последовательности натуральных чисел $k_i \to \infty$. Ясно, что ω-предельные множества у всех точек орбиты $\mathrm{Orb}(x)$ совпадают. Поэтому можно определить ω-предельное множество орбиты $\mathrm{Orb}(x)$ как $\omega(x) = \omega(\mathrm{Orb}(x))$. Аналогично определяется α-предельное множество $\alpha(x) = \alpha(\mathrm{Orb}(x))$ с заменой f на f^{-1}. Непосредственно из определения неблуждающего множества $\mathrm{NW}(f)$ вытекает, что $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \mathrm{NW}(f)$ для любой точки $x \in M^n$. Для регулярного гомеоморфизма Смейла мы имеем равенство

$$\mathrm{NW}(f) = \alpha(f) \cup \omega(f) \cup \sigma(f), \qquad f \in \mathrm{SRH}(M^n). \tag{1.1}$$

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$. Тогда*:

1) *если $\omega(x) \subset \sigma(f)$, то $x \in W^{\mathrm{s}}(\sigma_*)$ для некоторой седловой периодической орбиты $\sigma_* \in \sigma(f)$;*
2) *если $\alpha(x) \subset \sigma(f)$, то $x \in W^{\mathrm{u}}(\sigma_*)$ для некоторой седловой периодической орбиты $\sigma_* \in \sigma(f)$.*

Доказательство. Мы будем доказывать только утверждение 1), поскольку утверждение 2) доказывается аналогично. Пусть $\omega(x) \subset \sigma(f)$. Ясно, что $x \notin \alpha(f)$. Поэтому существует окрестность $U(\alpha)$ множества $\alpha(f)$ источниковых периодических орбит, не пересекающаяся с положительной полуорбитой $\mathrm{Orb}^+(x) = \bigcup_{k\geqslant 0} f^k(x)$. Из локальной гиперболичности стоковых периодических орбит вытекает, что существует окрестность $U(\omega)$ множества $\omega(f)$ такая, что если $\mathrm{Orb}^+(x) \cap U(\omega) \neq \varnothing$, то $\omega(x) \subset \omega(f)$. Поэтому $\mathrm{Orb}^+(x) \cap U(\omega) = \varnothing$ в силу включения $\omega(x) \subset \sigma(f)$. Следовательно, $\mathrm{Orb}^+(x)$ принадлежит компактному множеству $N = M^n \setminus (U(\omega) \cup U(\alpha))$.

Существуют достаточно малые попарно не пересекающиеся окрестности $V(\sigma_1),\dots,V(\sigma_m)$ седловых периодических орбит $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ соответственно, где $\sigma(f)=\bigcup_{i=1}^m \sigma_i$, такие, что образ $f(V(\sigma_i))$ любой из них не пересекается с объединением $\bigcup_{j\neq i} V(\sigma_j)$. Предположим теперь, что точка x не принадлежит устойчивым многообразиям седловых периодических орбит. Тогда $\mathrm{Orb}^+(x)$, попадая в любую из окрестностей $V(\sigma_i)$, должна выйти из $V(\sigma_i)$, поскольку $f\in \mathrm{SRH}(M^n)$. Так как $f(V(\sigma_i))\cap(\bigcup_{j\neq i} V(\sigma_j))=\varnothing$, то компактное множество $N_0 = N\setminus(\bigcup_{i=1}^m V(\sigma_i))$ должно содержать бесконечное множество точек положительной полуорбиты $\mathrm{Orb}^+(x)$. Тогда $\omega(x)\cap N_0\neq\varnothing$, что противоречит включению $\omega(x)\subset\alpha(f)\cup\omega(f)\cup\sigma(f)$; см. (1.1).

Лемма доказана.

Пусть N_{a} – инвариантное множество гомеоморфизма $f\in\mathrm{SRH}(M^n)$. Оно называется *притягивающим*, если существует открытая окрестность $U(N_{\mathrm{a}})$ множества N_{a} (она будет называться *захватывающей областью*) такая, что

$$\operatorname{clos} f(U(N_{\mathrm{a}}))\subset U(N_{\mathrm{a}}),\qquad \bigcap_{k\geqslant 0} f^k(U(N_{\mathrm{a}}))=N_{\mathrm{a}}.$$

Иногда в качестве захватывающей области удобно будет брать замкнутую окрестность $U(N_{\mathrm{a}})$. Тогда включение записывается в виде $f(U(N_{\mathrm{a}}))\subset\operatorname{int}U(N_{\mathrm{a}})$. Инвариантное множество N_{r} называется *отталкивающим*, если оно является притягивающим для f^{-1}. Соответствующая захватывающая для f^{-1} окрестность называется *выталкивающей* для f.

Пусть $A\subset M^n$ – притягивающее множество гомеоморфизма f. Через $B(A)$ будем обозначать *бассейн* множества A, т.е. множество

$$B(A)=\Big\{x\in M^n\colon \lim_{k\to\infty} f^k(x)\in A\Big\}.$$

Множество $B(A)\setminus A$ называется *областью притяжения* множества A. Ясно, что любая захватывающая окрестность $U(A)=U$ множества A принадлежит бассейну $B(A)$, и имеет место равенство

$$B(A)=\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)\Big). \tag{1.2}$$

Для отталкивающего множества $R\subset M^n$ бассейн $B(R)$ определяется как бассейн множества R относительно гомеоморфизма f^{-1} (заметим, что для f^{-1} множество R является притягивающим множеством). Аналогичным образом определяется *область отталкивания* множества R.

Пусть A – притягивающее (инвариантное) множество гомеоморфизма f. Замкнутое множество $G(A)\subset B(A)\setminus A$ называется *порождающим* для области притяжения $B(A)\setminus A$, если

$$B(A)\setminus A=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(G(A)).$$

Более того, справедливо следующее:

1) орбита из $B(A) \setminus A$, пересекающая внутренность множества $G(A)$, пересекает $G(A)$ ровно в одной точке;

2) орбита из $B(A) \setminus A$, пересекающая границу множества $G(A)$, пересекает $G(A)$ по крайней мере в двух точках;

3) граница множества $G(A)$ состоит из конечного числа (топологических) компактных подмногообразий коразмерности 1.

Для краткости изложения множество $G(A)$ мы будем называть *порождающим множеством для бассейна* $B(A)$. Полностью аналогично определяется порождающее множество области отталкивания для отталкивающего (инвариантного) множества.

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество* $\omega(f)$ *является притягивающим множеством гомеоморфизма* f, *причем существует захватывающая окрестность* $U(\omega)$ *множества* $\omega(f)$, *представляющая собой объединение конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых* n*-мерных шаров, каждый из которых содержит одну точку из множества* $\omega(f)$. *Более того, для любой открытой окрестности* $V_0(\omega)$ *множества* $\omega(f)$ *существуют вышеописанная захватывающая окрестность* $U(\omega)$ *и порождающее множество* $G(\omega)$ *для бассейна* $B(\omega(f))$ *такие, что*

$$G(\omega) = \mathrm{clos}\big[U(\omega) \setminus f(U(\omega))\big] \subset V_0(\omega).$$

2. *Множество* $\alpha(f)$ *является отталкивающим множеством гомеоморфизма* f, *причем существует выталкивающая окрестность* $U(\alpha(f))$ *множества* $\alpha(f)$, *представляющая собой объединение конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых* n*-мерных шаров, каждый из которых содержит одну точку из множества* $\alpha(f)$. *Более того, для любой открытой окрестности* $V_0(\alpha)$ *множества* $\alpha(f)$ *существуют вышеописанная выталкивающая окрестность* $U(\alpha(f))$ *и порождающее множество* $G(\alpha)$ *для бассейна* $B(\alpha(f))$ *такие, что*

$$G(\alpha) = \mathrm{clos}\big[f(U(\alpha)) \setminus U(\alpha)\big] \subset V_0(\alpha).$$

Доказательство. Достаточно доказать только утверждение 1, поскольку утверждение 2 вытекает из него с переходом от f к f^{-1}. Согласно [20], [25], [26] требуемое утверждение верно для диффеоморфизмов Морса–Смейла. Так как для f множество $\omega(f)$ имеет гиперболический тип, то отсюда следует требуемый результат. Для удобства читателя приведем схему доказательства.

Пусть γ – притягивающая периодическая орбита периода $p \in \mathbb{N}$, и пусть $x_0 \in \gamma$. В силу определения класса $\mathrm{SRH}(M^n)$ в некоторой окрестности точки x_0 гомеоморфизм f^p сопряжен линейному диффеоморфизму F_0 пространства $\mathbb{R}^n$ с гиперболической притягивающей неподвижной точкой в начале координат $O \in \mathbb{R}^n$. Для линейного F_0 согласно [20], [25], [26] существует n-мерный шар $\mathbb{B}^n$, окружающий O и являющийся захватывающей окрестностью притягивающей точки O. Кроме того, замкнутое шаровое кольцо $\mathrm{clos}[\mathbb{B}^n \setminus F_0(\mathbb{B}^n)]$ является порождающим множеством бассейна $B(O) = W^{\mathrm{s}}(O) \setminus \{O\}$. Отсюда вытекает существование захватывающей окрестности $U(x_0)$ точки x_0 относительно f^p,

причем $U(x_0)$ гомеоморфна $\mathbb{B}^n$. Более того, бассейн $B(x_0)$ относительно f^p имеет порождающее множество $G(x_0)$, гомеоморфное $\mathrm{clos}[\mathbb{B}^n \setminus F_0(\mathbb{B}^n)]$. Поэтому $G(x_0)$ образует требуемое порождающее множество бассейна $B(\gamma)$. Поскольку положительная итерация захватывающей окрестности также является захватывающей окрестностью, то мы получаем требуемое утверждение для γ. Для остальных стоковых орбит построение аналогичное.

Лемма доказана.

Отметим, что порождающие множества $G(\omega)$, $G(\alpha)$ в лемме 2 представляют собой объединения конечного числа замкнутых n-мерных шаровых колец, каждое из которых гомеоморфно произведению $S^{n-1} \times [0,1]$.

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$. Тогда справедливо следующее.*

1. *$A(f)$ является замкнутым инвариантным множеством, содержащим все стоковые и все седловые периодические точки гомеоморфизма f:*

$$\omega(f) \cup \sigma(f) \subset A(f).$$

2. *$A(f)$ является притягивающим множеством гомеоморфизма f.*

3. *$R(f)$ является замкнутым инвариантным множеством, содержащим все источниковые и все седловые периодические точки гомеоморфизма f:*

$$\alpha(f) \cup \sigma(f) \subset R(f).$$

4. *$R(f)$ является отталкивающим множеством гомеоморфизма f.*

Доказательство. Так как устойчивое и неустойчивое многообразия седла содержат данное седло, то $A(f)$ и $R(f)$ содержат все седловые периодические точки. Отсюда следуют включения $\omega(f) \cup \sigma(f) \subset A(f)$, $\alpha(f) \cup \sigma(f) \subset R(f)$.

Согласно лемме 2 множество $\alpha(f)$ является отталкивающим и имеет выталкивающую окрестность $U(\alpha)$. Поскольку $\bigcap_{k \geqslant 0} f^{-k}(U(\alpha)) = \alpha(f)$ и

$$\cdots \subset f^{-k}(U(\alpha)) \subset \cdots \subset f^{-2}(U(\alpha)) \subset f^{-1}(U(\alpha)) \subset U(\alpha),$$

то $A(f) \subset M^n \setminus U(\alpha)$ и $\bigcup_{m \geqslant 0} f^m(x) \in M^n \setminus U(\alpha)$ для любой точки $x \in M^n \setminus U(\alpha)$. Более того, так как ω-предельное множество $\omega(x)$ точки $x \in M^n \setminus U(\alpha)$ лежит в неблуждающем множестве $\mathrm{NW}(f)$, то $\omega(x) \subset \omega(f) \cup \sigma(f) \subset A(f)$, поскольку $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$. Отсюда в силу того, что $G(\alpha) = \mathrm{clos}[f(U(\alpha)) \setminus U(\alpha)]$ есть порождающее множество для бассейна $B(\alpha(f))$, вытекает, что множество $\mathrm{int}[M^n \setminus U(\alpha)]$ является захватывающей окрестностью множества $A(f)$. Следовательно, $A(f)$ – притягивающее множество гомеоморфизма f. Это доказывает утверждения 1 и 2 для $A(f)$. Остальные утверждения для $R(f)$ доказываются аналогично.

Лемма доказана.

Следующий результат означает, что область отталкивания $B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f)$ множества $\alpha(f)$ совпадает с областью притяжения $B(A(f)) \setminus A(f)$ множества $A(f)$, и у этих областей существуют одинаковые семейства порождающих множеств.

Лемма 4. *Пусть* $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$. *Тогда*

$$M^n = \alpha(f) \cup B(A(f)) = \omega(f) \cup B(R(f)), \qquad B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f) = B(A(f)) \setminus A(f).$$

Более того, справедливы следующие утверждения.

– *Если* $U(\alpha(f)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_\alpha$ – *выталкивающая окрестность множества* $\alpha(f)$, *то множество* $\mathrm{clos}[f(U_\alpha) \setminus U_\alpha] = G_\alpha$ *является порождающим для бассейна* $B(A(f))$:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(G_\alpha) = B(A(f)) \setminus A(f).$$

– *Если* $U(A(f)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_A$ – *захватывающая окрестность множества* $A(f)$, *то множество* $\mathrm{clos}[U_A \setminus f(U_A)] = G_A$ *является порождающим для бассейна множества* $\alpha(f)$:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(G_A) = B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f).$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in M^n$ и докажем первое равенство $M^n = \alpha(f) \cup B(A(f))$. Если $x \notin \alpha(f)$, то ω-предельное множество $\omega(x)$ точки x содержится в объединении $\omega(f) \cup \sigma(f)$, поскольку $f \in \mathrm{SRH}(M^n)$ и $\omega(x) \in \mathrm{NW}(f) = \alpha(f) \cup \omega(f) \cup \sigma(f)$. Отсюда в силу леммы 3 следует включение

$$x \in A(f) \cup B(A(f)) = B(A(f)),$$

что доказывает первое равенство. Второе равенство $M^n = \omega(f) \cup B(R(f))$ доказывается аналогично.

Теперь докажем равенство $B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f) = B(A(f)) \setminus A(f)$. Пусть $x \in B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f)$. Тогда $x \notin \alpha(f)$. Поэтому в силу доказанных выше равенств имеем $x \in B(A(f))$. Из $x \in B(\alpha(f))$ следует включение $\alpha(x) \subset \alpha(f)$. Следовательно, $x \notin A(f)$, что влечет включение $x \in B(A(f)) \setminus A(f)$. Пусть теперь дано $x \in B(A(f)) \setminus A(f)$. Тогда $x \notin A(f)$ и $x \notin \alpha(f)$. С другой стороны, имеем $\alpha(x) \subset \sigma(f) \cup \alpha(f)$. Если предположить, что $\alpha(x) \subset \sigma(f)$, то в силу леммы 1 точка x принадлежит неустойчивому многообразию некоторой седловой периодической орбиты. Этого не может быть, поскольку $x \notin A(f)$. Следовательно, $\alpha(x) \subset \alpha(f)$ и $x \in B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f)$.

Пусть U_α – захватывающая окрестность множества $\alpha(f)$. Из равенства $B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f) = B(A(f)) \setminus A(f)$ тогда следует, что порождающее множество $\mathrm{clos}[f(U_\alpha) \setminus U_\alpha] \stackrel{\mathrm{def}}{=} G_\alpha$ бассейна $B(\alpha(f))$ принадлежит бассейну $B(A(f))$. Чтобы доказать, что G_α суть порождающее множество бассейна $B(A(f))$, достаточно показать, что любая орбита из $B(A(f)) \setminus A(f)$ пересекает G_α хотя бы один раз. Возьмем $\mathrm{Orb}(x) \subset B(A(f)) \setminus A(f)$. Тогда $\mathrm{Orb}(x) \subset B(\alpha(f)) \setminus \alpha(f)$ и, следовательно, $\mathrm{Orb}(x) \cap G_\alpha \neq \varnothing$, что и требовалось доказать. Последнее утверждение доказывается полностью аналогично.

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Если f_1 и f_2 сопряжены, то сопрягающий гомеоморфизм определен на всем многообразии M^n. Поэтому множества $A(f_1)$, $A(f_2)$ так же, как и множества $R(f_1)$, $R(f_2)$, будут локально динамически эквивалентно вложены, поскольку в качестве окрестности этих множеств можно взять несущее многообразие M^n.

Докажем теперь обратное утверждение. Для определенности предположим, что множества $A(f_1)$, $A(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены, и будем доказывать сопряженность гомеоморфизмов f_1, f_2. По условию существуют открытые окрестности δ_1, δ_2 множеств $A(f_1)$, $A(f_2)$ соответственно и гомеоморфизм $h_0\colon \delta_1 \to \delta_2$ такие, что

$$h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1}, \qquad f_1(\delta_1) \subset \delta_1, \qquad h_0(A(f_1)) = A(f_2). \tag{2.1}$$

Уменьшив, если необходимо, окрестность δ_1, можно считать, что $\delta_1 \subset B(A(f_1))$.

Множества $\alpha(f_1)$, $\alpha(f_2)$ представляют собой конечные семейства источниковых периодических точек $\{\alpha_j(f_1)\}_{j=1}^{l_1}$, $\{\alpha_j(f_2)\}_{j=1}^{l_2}$ соответственно. Сначала покажем, что существует порождающее множество $G(\alpha(f_1)) \overset{\text{def}}{=} G_1$ бассейна $B(\alpha(f_1))$, принадлежащее окрестности δ_1 и представляющее собой конечное объединение замкнутых попарно не пересекающихся n-мерных шаровых колец $A_1, \dots, A_{l_1}$, причем одна из компонент связности каждого кольца A_i ограничивает в M^n область B_i, гомеоморфную открытому n-мерному шару и содержащую ровно один источник $\alpha_i(f_1)$ гомеоморфизма f_1. Действительно, согласно лемме 2 существует такое порождающее множество G_0 бассейна $B(\alpha(f_1))$, но не обязательно принадлежащее окрестности δ_1. Поскольку G_0 принадлежит области выталкивания $B(\alpha(f_1)) \setminus \alpha(f_1)$ бассейна $B(\alpha(f_1))$, то $G_0 \cap \omega(f_1) = \varnothing$. Более того, так как α-предельное множество любой точки из G_0 принадлежит множеству $\alpha(f_1)$, которое не пересекается с $\sigma(f_1)$, то $G_0 \cap A(f_1) = \varnothing$. Отсюда в силу леммы 4 вытекает включение $G_0 \subset B(A(f_1)) \setminus \omega(f_1)$, т.е. G_0 принадлежит области притяжения множества $A(f_1)$. Поскольку G_0 – компактное множество, то существует положительная итерация $f_1^{m_1}$ такая, что $f_1^{m_1}(G_0)$ принадлежит захватывающей области множества $A(f_1)$. В силу определения захватывающей области отсюда вытекает существование итерации $f_1^{m_2}$ такой, что $f_1^{m_2}(G_0) \subset \delta_1$. Поскольку итерации порождающего множества являются порождающими множествами, то $G(\alpha(f_1)) = f_1^{m_2}(G_0)$ является порождающим множеством бассейна $B(\alpha(f_1))$. Так как $f_1(\delta_1) \subset \delta_1$, то $f_1^k(G(\alpha(f_1))) \subset \delta_1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Из того, что f_1 является гомеоморфизмом, следует, что $G(\alpha(f_1)) = G_1$ удовлетворяет требуемым условиям.

В силу леммы 4 множество $G_1 \subset \delta_1$ является порождающим для бассейна $B(A(f_1))$. Покажем, что $h_0(G_1) \overset{\text{def}}{=} G_2$ является порождающим множеством для бассейна $B(A(f_2))$. Сначала заметим, что из (2.1) вытекают включения $f_1^k(\delta_1) \subset \delta_1$, $f_2^k(\delta_2) \subset \delta_2$ и равенство $h_0 \circ f_1^k|_{\delta_1} = f_2^k \circ h_0|_{\delta_1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для любой точки $z_2 \in G_2$ имеется единственная точка $z_1 \in G_1$ такая, что $h_0(z_1) = z_2$. Поскольку $z_1 \in G_1 \subset B(A(f_1))$, то $f_1^k(z_1) \to A(f_1)$ при $k \to \infty$.

Поэтому

$$f_2^k(z_2) = f_2^k \circ h_0(z_1) = h_0 \circ f_1^k(z_1) \to h_0(A(f_1)) = A(f_2) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $z_2 \in B(A(f_2))$ и $G_2 \in B(A(f_2))$. Возьмем теперь произвольную орбиту $\mathrm{Orb}_{f_2} \subset B(A(f_2)) \setminus A(f_2)$ и покажем, что она пересекается с G_2. Так как эта орбита лежит в области притяжения множества $A(f_2)$, то $\mathrm{Orb}_{f_2} \cap \delta_2 \neq \varnothing$. Поэтому существует точка $x_2 \in \mathrm{Orb}_{f_2} \cap \delta_2$. Орбита Orb_{f_1} точки $x_1 = h_0^{-1}(x_2) \subset \delta_1$ относительно гомеоморфизма f_1 принадлежит бассейну $B(A(f_1))$ и, следовательно, пересекает G_1 в некоторой точке, скажем $w_1 \in \delta_1$. Часть орбиты Orb_{f_1} между точками x_1, w_1 принадлежит области δ_1, поскольку $f_1^k(\delta_1) \subset \delta_1$ и либо $x_1 = f_1^k(w_1)$, либо $w_1 = f_1^k(x_1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Предположим для определенности, что $w_1 = f_1^k(x_1)$. Отсюда в силу соотношения (2.1) получаем

$$w_2 = h_0(w_1) = h_0 \circ f_1^k(x_1) = h_0 \circ f_1^k \circ h_0^{-1}(x_2) = f_2^k(x_2) \in G_2 \cap \mathrm{Orb}_{f_2}.$$

Аналогично показывается, что произвольная орбита $\mathrm{Orb}_{f_2} \subset B(A(f_2)) \setminus A(f_2)$ пересекает внутренность G_2 в одной точке или границу G_2 в двух точках. Таким образом, $h_0(G_1) = G_2 \subset \delta_2$ является порождающим множеством для бассейна $B(A(f_2))$.

В силу леммы 4 множество G_2 является порождающим для области выталкивания $B(\alpha(f_2)) \setminus \alpha(f_2)$ бассейна $B(\alpha(f_2))$. Пусть

$$\bigcup_{k \geqslant 0} f_1^{-k}(G_1) \overset{\mathrm{def}}{=} O^-(G_1), \qquad \bigcup_{k \geqslant 0} f_2^{-k}(G_2) \overset{\mathrm{def}}{=} O^-(G_2),$$

и определим отображение $h\colon O^-(G_1) \to O^-(G_2)$ следующим образом. Для точки $x \in f_1^{-m}(G_1) \subset O^-(G_1)$ положим

$$h(x) = f_2^{-m} \circ h_0 \circ f_1^m(x), \qquad m \geqslant 0.$$

Стандартная проверка показывает, что h является гомеоморфизмом и выполняется равенство

$$h \circ f_1|_{O^-(G_1)} = f_1 \circ h|_{O^-(G_1)}.$$

Так как на $G_1 \subset O^-(G_1)$ отображение h совпадает с h_0, то h можно продолжить на множество $\bigcup_{k \geqslant 0} f_1^k(G_1) \overset{\mathrm{def}}{=} O^+(G_1)$ аналогичной формулой

$$h(x) = f_2^m \circ h_0 \circ f_1^{-m}(x), \qquad m \geqslant 0.$$

Заметим, что в силу $G_1 \subset \delta_1$ имеет место включение $O^+(G_1) \subset \delta_1$. Из (2.1) получаем, что $O^+(G_2) \subset \delta_2$ и на $O^+(G_1)$ отображение h совпадает с h_0. Поэтому h естественным образом продолжается на $A(f_1)$, если положить $h|_{A(f_1)} = h_0|_{A(f_1)}$.

Согласно лемме 4 имеют место равенства

$$B(\alpha(f_1)) \setminus \alpha(f_1) = O^-(G_1) \cup O^+(G_1), \qquad B(\alpha(f_2)) \setminus \alpha(f_2) = O^-(G_2) \cup O^+(G_2).$$

Отсюда в силу того, что h продолжено на $A(f_1)$, получаем наличие гомеоморфизма

$$h\colon M^n \setminus \alpha(f_1) \to M^n \setminus \alpha(f_2), \qquad h \circ f_1|_{M^n \setminus \alpha(f_1)} = f_2 \circ h|_{M^n \setminus \alpha(f_1)}, \tag{2.2}$$

поскольку согласно лемме 4 выполняются соотношения $M^n \setminus \alpha(f_i) = B(A(f_i))$, $i = 1, 2$.

Напомним, что множества $\alpha(f_1)$, $\alpha(f_2)$ представляют собой конечные семейства точек $\{\alpha_j(f_1)\}_1^{l_1}$, $\{\alpha_j(f_2)\}_1^{l_2}$ соответственно. Бассейн $B(\alpha(f_i))$ суть дизъюнктивное объединение бассейнов $\bigcup_{j=1}^{l_i} B(\alpha_j(f_i))$, $i = 1, 2$. В силу леммы 2 порождающее множество G_i для $B(\alpha(f_i)) \setminus \alpha(f_i) = B(A(f_i)) \setminus A(f_i)$ представляет собой дизъюнктивное объединение шаровых колец. Поскольку каждый бассейн $B(\alpha_j(f_i))$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$, то любое шаровое кольцо ограничивает в $B(\alpha_j(f_i))$ n-мерный шар, и в понятном смысле можно говорить о том, что шаровое кольцо окружает некоторую точку.

Возьмем из порождающего множества G_1 бассейна $B(\alpha_r(f_1))$ шаровое кольцо $g_r \subset G_1$, которое окружает источниковую периодическую точку $\alpha_r(f_1)$ периода p_r, $1 \leqslant r \leqslant l_1$. Тогда шаровое кольцо $f_1^{-kp_r}(g_r)$ примыкает к шаровому кольцу $f_1^{-(k+1)p_r}(g_r)$ по одной компоненте границы для любого $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому множество

$$\bigcup_{k \geqslant 0} f_1^{-kp_r}(g_r) \cup \{\alpha_r(f_1)\} = D_r^n$$

гомеоморфно n-мерному замкнутому шару. Из (2.2) вытекает, что $h(g_r)$ является n-мерным шаровым кольцом, причем шаровое кольцо $f_2^{-kp_r} \circ h(g_r) = h \circ f_1^{-kp_r}(g_r)$ примыкает к шаровому кольцу $f_2^{-(k+1)p_r} \circ h(g_r) = h \circ f_1^{-(k+1)p_r}(g_r)$ по одной компоненте границы для любого $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда в силу того, что шаровое кольцо $h(g_r)$ входит в порождающее множество бассейна $B(\alpha(f_2))$, вытекает, что множество

$$\bigcup_{k \geqslant 0} f_2^{-kp_r} \circ h(g_r) = \bigcup_{k \geqslant 0} h \circ f_1^{-kp_r}(g_r)$$

гомеоморфно проколотому шару $D_r^n \setminus \{\alpha_r(f_1)\}$ и

$$\operatorname{clos}\Bigl(\bigcup_{k \geqslant 0} f_2^{-kp_r} \circ h(g_r)\Bigr) \setminus \bigcup_{k \geqslant 0} f_2^{-kp_r} \circ h(g_r)$$

есть некоторая источниковая периодическая точка $\alpha_{j(r)}(f_2)$ периода p_r из семейства $\{\alpha_j(f_2)\}_1^{l_2}$ гомеоморфизма f_2.

Из приведенной конструкции следует, что соответствие $r \to j(r)$ взаимно однозначное и, следовательно, $l_1 = l_2 = l$. Поскольку для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$ шаровое кольцо $f_1^{-mp_r}(g_r)$ может быть помещено в любую сколь угодно малую окрестность точки $\alpha_r(f_1)$, то отсюда также вытекает, что h продолжается в точки $\alpha_r(f_1)$, $1 \leqslant r \leqslant l_1 = l$, до гомеоморфизма, если положить $h(\alpha_r(f_1)) = \alpha_{j(r)}(f_2)$. Так как при таком продолжении h сохраняется соотношение (2.2), то мы получаем требуемый сопрягающий гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **1**, ВИНИТИ, М., 1985, 156–178; Гл. 2. Элементарная теория, 178–204; англ. пер.: D. V. Anosov, “Smooth dynamical systems”, Ch. 1, 2, *Dynamical systems I*, Encyclopaedia Math. Sci., **1**, Springer, Berlin, 1988.

[2] Д. В. Аносов, Е. В. Жужома, “Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих”, Тр. МИАН, **249**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2005, 3–239; англ. пер.: D. V. Anosov, E. V. Zhuzhoma, “Nonlocal asymptotic behavior of curves and leaves of laminations on universal coverings”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **249** (2005), 1–221.

[3] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

[4] А. Пуанкаре, “Четвертый мемуар”, *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, Серия “Классики естествознания", ОГИЗ, М.–Л., 1947, 192–266; пер. с фр.: H. Poincaré, “Sur les courbes définies par les équations différentielles”, *J. Math. Pures Appl.* (4), **II** (1886), 151–211.

[5] I. Nikolaev, E. Zhuzhoma, *Flows on 2-dimensional manifolds. An overview*, Lecture Notes in Math., **1705**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xx+294 pp.

[6] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, “О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами коразмерности один”, *Докл. РАН*, **374**:6 (2000), 735–737; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with expanding attractors or contracting repellers of codimension one”, *Dokl. Math.*, **62**:2 (2000), 274–276.

[7] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.

[8] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия”, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions”, *Sb. Math.*, **207**:5 (2016), 702–723.

[9] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Сопряженность диффеоморфизмов Морса–Смейла с тремя неблуждающими точками”, *Матем. заметки*, **104**:5 (2018), 775–780; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Conjugacy of Morse–Smale diffeomorphisms with three nonwandering points”, *Math. Notes*, **104**:5 (2018), 753–757.

[10] J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 399–405.

[11] А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.

[12] Д. В. Аносов, “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707–709; англ. пер.: D. V. Anosov, “Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 1068–1070.

[13] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, Тр. МИАН СССР, **90**, Наука, М., 1967, 3–210; англ. пер.: D. V. Anosov, “Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90** (1967), 1–235.

[14] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54**:3 (1993), 3–17; англ. пер.: V. Z. Grines, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. Notes*, **54**:3 (1993), 881–889.

[15] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Глобальная динамика систем Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2008, 115–139; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Global dynamics of Morse–Smale systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 112–135.

[16] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *УМН*, **74**:1(445) (2019), 41–116; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **74**:1 (2019), 37–110.

[17] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.

[18] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *Докл. РАН*, **377**:2 (2001), 151–155; англ. пер.: C. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “On the topological classification of gradient-like diffeomorphisms without heteroclinic curves on three-dimensional manifolds”, *Dokl. Math.*, **63**:2 (2001), 161–164.

[19] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

[20] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2011, 424 с.

[21] Д. М. Гробман, “Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **128**:5 (1959), 880–881.

[22] Д. М. Гробман, “Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве”, *Матем. сб.*, **56(98)**:1 (1962), 77–94.

[23] P. Hartman, “On the local linearization of differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:4 (1963), 568–573.

[24] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, ii+149 pp.

[25] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.

[26] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

Евгений Викторович Жужома
(Evgenii V. Zhuzhoma)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступила в редакцию
04.03.2019 и 27.04.2020

Владислав Сергеевич Медведев
(Vladislav S. Medvedev)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: medvedev@unn.ac.ru