ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2020. Т. 27, № 4. С. 104–130

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.682

ПОЛНАЯ СЛОЖНОСТНАЯ ДИХОТОМИЯ ДЛЯ ЗАПРЕЩЁННЫХ ПОДГРАФОВ С 7 РЁБРАМИ В ЗАДАЧЕ О ХРОМАТИЧЕСКОМ ИНДЕКСЕ

Д. С. Малышев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Аннотация. Задача о рёберной раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы минимизировать количество цветов, достаточное для окрашивания его рёбер так, чтобы соседние рёбра были окрашены в разные цвета. Для всех классов графов, определяемых запрещением подграфов с не более чем 6 рёбрами каждый, известен сложностной статус этой задачи. В настоящей работе данный результат улучшается и получена полная классификация сложности задачи о рёберной раскраске для всех множеств запретов, каждый из которых имеет не более чем 7 рёбер. Ил. 3, библиогр. 36.

Ключевые слова: задача о рёберной раскраске, сильно наследственный класс, вычислительная сложность.

Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. конечные непомеченные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Напомним, что *подграфом графа* называется результат удаления из графа некоторых его вершин и рёбер, где удаление вершины подразумевает удаление всех инцидентных ей рёбер. *Порождённый подграф* — результат удаления некоторых вершин из графа.

Класс графов — произвольное множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Замкнутый относительно удаления вершин класс графов называется *наследственным*. *Сильно наследственный* (или *монотонный*) класс графов — наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Каждый наследственный класс графов

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–00005).

может быть задан посредством своих *запрещённых порождённых подграфов*, т. е. минимальных относительно удаления вершин графов, не принадлежащих ему. Если $\mathcal{X}$ — наследственный класс и $\mathcal{Y}$ — множество его запрещённых порождённых фрагментов, то пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Любой монотонный класс $\mathcal{X}$ может быть задан совокупностью своих запрещённых подграфов $\mathcal{Y}$, при этом пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{Y})$.

Правильной раскраской вершин графа G в k цветов (или просто *k-раскраской вершин графа G*) называется произвольное отображение из $V(G)$ в $\{1, 2, \ldots, k\}$, сопоставляющее смежным вершинам различные цвета. *Правильной раскраской рёбер графа G в k цветов* (или кратко *k-раскраской рёбер G*) называется любое отображение из $E(G)$ в $\{1, 2, \ldots, k\}$, назначающее соседним рёбрам различные цвета. Минимальные количества цветов в k-раскрасках вершин и рёбер графа G называются *хроматическим числом* и *индексом* G и обозначаются через $\chi(G)$ и $\chi'(G)$ соответственно.

Задача о вершинной k-раскраске или просто *задача k-ВР* (соответственно *задача о рёберной k-раскраске* или *задача k-РР*) для заданного графа G состоит в распознавании наличия у него k-раскраски вершин (рёбер). *Задачи о вершинной* и *о рёберной раскраске* (кратко *задачи* ВР и РР) для заданных графа G и числа k состоят в том, чтобы проверить, выполняются ли неравенства $\chi(G) \leqslant k$ и $\chi'(G) \leqslant k$ соответственно. Задачи ВР и РР, а также задачи k-ВР и k-РР при $k \geqslant 3$ являются классическими NP-полными задачами [1, 2].

Согласно известной теореме В. Г. Визинга [3] для любого графа G справедливо неравенство $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин G. Тем самым задача РР для графа G эквивалентна проверке равенства $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Через P_n обозначается простой путь на n вершинах. Известно, что задача ВР полиномиально разрешима для класса $\mathrm{Free}(\{H\})$, если H — порождённый подграф графа P_4 или графа P_3+P_1 (дизъюнктное объединение P_3 и P_1), иначе она NP-полна в данном классе [4]. Однако получить полные классификации её сложности как при запрещении пары порождённых фрагментов, так и при запрещении малых порождённых структур уже не удаётся. Например, для всех наследственных классов, определяемых запретами с не более чем 4 вершинами каждый, кроме трёх, известен вычислительный статус задачи о вершинной раскраске [5]. В работах [6–11] рассматривалась алгоритмическая сложность задачи ВР для пары связных запрещённых порождённых фрагментов, каждый на 5 вершинах, и здесь на настоящее время имеется ровно 4 открытых случая. Некоторые результаты о сложности задачи ВР для наследственных классов, определяемых запретами малого размера, представлены в [12–17].

Для задачи k-ВР сложностной статус остаётся открытым вопросом даже для некоторых классов, определяемых одним запрещённым порождённым подграфом. Для $k = 3$ и семейства $\{\mathrm{Free}(\{H\}) \mid |V(H)| \leqslant 6\}$, а также для $k = 4$ и семейства $\{\mathrm{Free}(\{H\}) \mid |V(H)| \leqslant 5\}$ в [18, 19] были получены полные сложностные дихотомии. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $\mathrm{Free}(\{P_7\})$ [20], а задача 4-ВР разрешима за полиномиальное время в классе $\mathrm{Free}(\{P_6\})$ [21]. При любом k задача k-ВР полиномиально разрешима в классе $\mathrm{Free}(\{P_5\})$ [22]. Для каждого фиксированного $k \geqslant 5$ задача k-ВР NP-полна в классе $\mathrm{Free}(\{P_6\})$ [23], а задача 4-ВР NP-полна в классе $\mathrm{Free}(\{P_7\})$ [23]. На настоящее время сложностной статус задачи k-ВР является открытым вопросом для класса $\mathrm{Free}(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $\mathrm{Free}(\{P_7\})$ и $k = 4$.

В [24–26] рассматривается задача 3-ВР. В работе [24] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе

$$\{\mathrm{Free}(\{H_1, H_2\}) \mid \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|) \leqslant 5\}.$$

В [25] получен аналогичный результат для семейства

$$\{\mathrm{Free}(\{H_1, H_2, H_3\}) \mid \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|, |V(H_3)|) \leqslant 5\}.$$

В [26] рассмотрены четвёрки запрещённых порождённых 5-вершинных подграфов и для всех данных наследственных классов, кроме трёх, установлен вычислительный статус задачи 3-ВР.

Работы, посвящённые классификации вычислительной сложности задач k-РР и РР, встречаются гораздо реже. Так, в [27] при любом k была получена полная сложностная дихотомия для задачи k-РР и всех классов вида $\mathrm{Free}(\{H\})$, а в [28] — полная классификация алгоритмической сложности задачи 3-РР для множеств запрещённых порождённых структур, каждая с не более чем 6 вершинами, среди которых не более двух имеют ровно 6 вершин. В работе [29] рассматривались задача РР и семейство

$$\{\mathrm{Free}_s(\mathcal{Y}) \mid \text{для любого } G \in \mathcal{Y} \text{ либо } |V(G)| \leqslant 7, \text{ либо } |E(G)| \leqslant 6\}$$

и была получена полная классификация сложности задачи РР для классов из данного семейства. В данной работе улучшается результат из [29] и устанавливается вычислительная сложность задачи РР для всех множеств запрещённых подграфов, каждый из которых имеет не более чем 7 рёбер.

1. Используемые обозначения

Пусть G — некоторый граф, а x — вершина графа G. Окрестность вершины x обозначается через $N_G(x)$, а через $\deg_G(x)$ обозначается степень вершины x. Максимальная из степеней вершин графа G обозначается через $\Delta(G)$. Если $\Delta(G) \leqslant 3$, то G называется *субкубическим*. Если степени всех вершин графа равны 3, то он называется *кубическим*.

Как обычно, через P_n и O_n обозначаются простой путь и пустой граф на n вершинах соответственно. Графы B_1, B_1^+, B_1^{++}, ${}^+B_1^+$, B_{1+}^+, B_2, $\overset{+}{B}_2$, B_2^+, B_3 изображены на рис. 1.

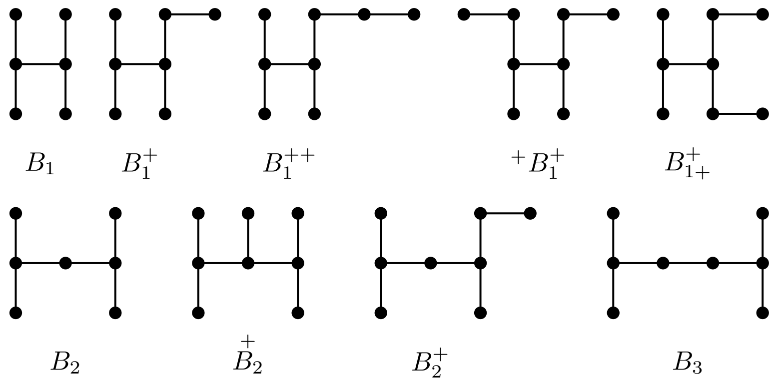

Рис. 1

Пусть G_1 и G_2 — графы с непересекающимися множествами вершин. Тогда $G_1 + G_2$ означает результат дизъюнктного объединения графов G_1 и G_2, т. е. граф $(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$. Для графа G и числа k обозначение kG означает граф $\underbrace{G + G + \cdots + G}_{k \text{ раз}}$. Через $\mathcal{S}$ обозначим множество

$$\{B_1 + P_3,\ B_1 + 2P_2,\ B_1^+ + P_2,\ B_1^{++},\ {}^+B_1^+,\ B_{1+}^+,\ B_2 + P_2,\ B_2^+,\ B_3\}.$$

Графы snake, rose, shark изображены на рис. 2.

Через $T_{i,j,k}$ обозначается дерево, называемое *триодом*, получаемое одновременным отождествлением по вершине v концов трёх простых путей $(v = x_0, x_1, \ldots, x_i)$, $(v = y_0, y_1, \ldots, y_j)$, $(v = z_0, z_1, \ldots, z_k)$ (рис. 3).

Отметим, что параметры i, j, k могут принимать нулевое значение. Через $\mathcal{T}$ обозначается класс всех лесов, каждая компонента связности которых является триодом.

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф графа G, порождённый подмножеством вершин V', а $G \setminus V'$ — результат удаления из графа G всех элементов подмножества V'. Для графа G и его ребра ab результат удаления ab из G обозначается как $G \setminus \{ab\}$.

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — графы, $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — некоторые вершины рассматриваемого графа G. Тогда запись $[v_1, v_2, \ldots, v_s; G_1, G_2, \ldots, G_k]$ означает, что $G[\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}]$ содержит каждый из графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$ в качестве подграфа, а $G_1 \cong G_2$ означает изоморфизм графов G_1 и G_2.

Независимым множеством графа называется любое подмножество попарно несмежных его вершин.

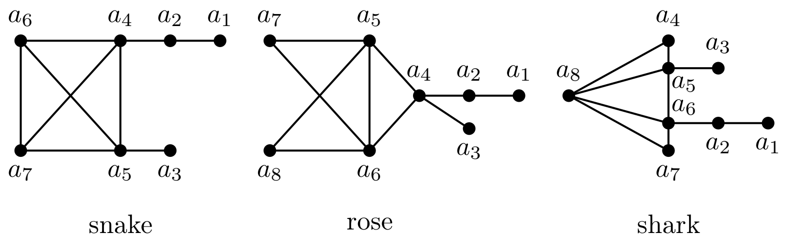

Рис. 2. Графы snake, rose, shark

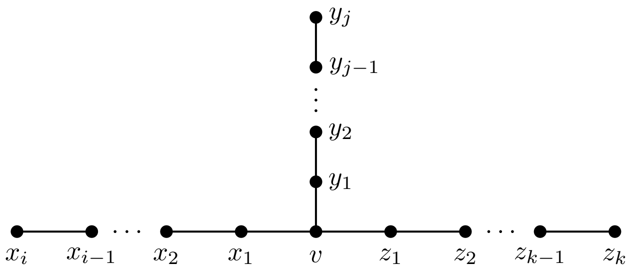

Рис. 3. Граф $T_{i,j,k}$

2. Некоторые вспомогательные результаты

2.1. Структурные свойства несжимаемых графов без подграфов специального вида. Известно (см. [30, с. 465]), что граф G, содержащий вершину x, не более одного соседа которой имеет степень $\Delta(G)$, имеет раскраску рёбер в $\Delta(G)$ цветов тогда и только тогда, когда таковым является граф $G \setminus \{x\}$.

Напомним, что *мостом* называется произвольное ребро графа, удаление которого увеличивает количество его компонент связности. Очевидно, что для любого графа G и результата G' удаления из G некоторого моста верно следующее: G имеет раскраску рёбер в $\Delta(G)$ цветов тогда и только тогда, когда G' имеет раскраску рёбер в $\Delta(G')$ цветов.

Ребро ab графа G назовём *избыточным*, если выполнено неравенство $\deg_G(a) + \deg_G(b) \leqslant \Delta(G) + 1$. Если ab — избыточное ребро графа G, то

$$\chi'(G \setminus \{ab\}) \leqslant \Delta(G) \Leftrightarrow \chi'(G) = \Delta(G).$$

Связный граф G без мостов и избыточных рёбер назовём *несжимаемым*, если любая вершина G имеет не менее двух соседей степени $\Delta(G)$. Задача РР для графов из произвольного монотонного класса полиномиально сводится к той же задаче для несжимаемых графов из этого монотонного класса.

Граф назовём *k-близким к пустому*, если при удалении некоторых k его вершин он становится пустым.

Лемма 1. *Пусть $H \in (\mathcal{S} \setminus \{B_{1+}^{+}\}) \cup \{\overset{+}{B}_2\}$, $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$ — несжимаемый граф. Тогда либо $\Delta(G) \leqslant 10$, либо G является 3-близким к пустому.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta(G) \geqslant 11$. Рассмотрим в G вершину x степени $\Delta(G)$. Поскольку G несжимаем, среди соседей x существуют различные вершины y и z такие, что $\deg_G(y) = \deg_G(z) = \Delta(G)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|N_G(x) \setminus \{y, z\}| \geqslant \Delta(G) - 2, \quad |N_G(y) \setminus \{x, z\}| \geqslant \Delta(G) - 2,$$
$$|N_G(z) \setminus \{x, y\}| \geqslant \Delta(G) - 2.$$

Переобозначим множество $(N_G(x) \cup N_G(y) \cup N_G(z)) \setminus \{x, y, z\}$ через N. Предположим, что N содержит вершину v, смежную с $u \notin \{x, y, z\}$.

Рассмотрим случай, когда $v \in N_G(y)$. Случай, когда $v \in N_G(z)$, аналогичен. Поскольку $\Delta(G) \geqslant 11$, существуют попарно различные вершины

$$v_1, v_2 \in (N_G(y) \cap N) \setminus \{v, u\}, \quad v_3, v_4 \in (N_G(x) \cap N) \setminus \{v, u\},$$
$$v_5, v_6 \in (N_G(z) \cap N) \setminus \{v, u\}.$$

Тем самым граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Нетрудно проверить, что вершины x, y, z, v, u, v_1–v_6 порождают в G граф, для которого каждый элемент множества $\mathcal{S} \setminus \{B_{1+}^{+}, B_3\}$ является подграфом. То же самое верно и относительно B_3, если $vx \in E(G)$ или $vz \in E(G)$, поэтому можно считать, что $vx \notin E(G)$ и $vz \notin E(G)$. Так как G несжимаем, вершина v смежна с вершиной $w \notin \{x, y, z\}$ степени $\Delta(G)$. Так как $\Delta(G) \geqslant 11$, существуют вершины $w_1, w_2 \in N_G(w) \setminus \{v\}$, каждая из которых отлична от вершин v_3 и v_4. Следовательно, $[w_1, w_2, w, v, y, x, v_3, v_4; B_3]$.

Рассмотрим случай, когда $v \in N_G(x)$. По рассуждениям предыдущего абзаца можно считать, что ни один элемент множества $N \setminus N_G(x)$ не смежен ни с одной вершиной вне множества $\{y, z\}$. Поскольку $\deg_G(x) = \deg_G(y) = \Delta(G)$, либо $N \cap (N_G(y) \setminus N_G(x)) \neq \varnothing$, либо $N \cap N_G(y) = N \cap N_G(x)$ и $yz \in E$. Вместе с тем, если $N \cap (N_G(y) \setminus N_G(x)) \neq \varnothing$, то каждый его элемент смежен хотя бы с двумя вершинами степени $\Delta(G)$. Следовательно, каждый элемент данного множества смежен с z.

Поскольку $\Delta(G) \geqslant 11$, существуют попарно различные вершины

$$v_1, v_2, v_3 \in (N_G(y) \cap N) \setminus \{v, u\}, \quad v_4, v_5 \in (N_G(x) \cap N) \setminus \{v, u\},$$
$$v_6, v_7 \in (N_G(z) \cap N) \setminus \{v, u\}.$$

Тем самым граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Можно считать, что либо v_1x, v_2x, v_3x, $yz \in E$, либо v_1z, v_2z, $v_3z \in E$. Нетрудно проверить, что вершины x, y, z, v, u, v_1–v_7 порождают в G граф, для которого каждый элемент множества $\mathcal{S}$ является подграфом. Следовательно, множество N не содержит двух смежных вершин и $V(G) = N \cup \{x, y, z\}$. Тем самым граф G 3-близок к пустому. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть несжимаемый граф G является k-близким к пустому. Тогда либо G имеет не более чем k^3+3k^2 вершин, либо $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство. Предположим, что $V(G)$ разбивается на независимое подмножество I и подмножество $|V'| \leqslant k$. Можно предполагать, что каждый элемент множества V' смежен с некоторым элементом множества I, так как иначе его можно удалить из V' и присоединить к I. Из связности графа G и независимости множества I следует, что каждая вершина из I смежна с некоторой вершиной из V'. Тем самым выполнено неравенство $|V(G)| \leqslant |V'|(\Delta(G) + 1)$, поэтому если $\Delta(G) \leqslant k^2 + 3k - 1$, то справедливо неравенство $|V(G)| \leqslant k^3 + 3k^2$. Значит, можно предполагать, что $\Delta(G) \geqslant k^2 + 3k$. Поскольку G не содержит избыточных рёбер, можно предполагать, что каждая вершина множества V' имеет не менее $(\Delta(G) - 2|V'| + 3)$ соседей в множестве I.

Пусть $V' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k'}\}$, где $k' \leqslant k$. Образуем подграфы H_1 и H_2 графа G. Напомним, что каждая вершина из V' имеет не менее чем (k^2+k+3) соседей в множестве I, а каждая вершина из I имеет не более чем k соседей в V'. Следовательно, существуют такие попарно различные вершины $u_1, u_2, \ldots, u_{k'} \in I$, что $u_i \in N(v_i)$ для любого i. Заметим, что при любом i вершина v_i имеет ровно $(\deg_G(v_i) - \deg_{G[V']}(v_i))$ соседей в I. Отсюда ввиду того, что

$$|I \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k'}\}| > k^2 \quad \text{и} \quad k' - \deg_{G[V']}(v_i) \leqslant k,$$

существуют попарно не пересекающиеся подмножества $V_1^1, \ldots, V_{k'}^1$ такие, что для любого i множество V_i^1 состоит из $(k' - \deg_{G[V']}(v_i))$ соседей вершины v_i, принадлежащих $I \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k'}\}$. Для любого i множество V_i^2 совпадает с $V_i^1 \cup \{u_i\}$.

Для любого j граф H_j получается добавлением к $G[V']$ всех вершин из $\bigcup\limits_{i=1}^{k'} V_i^j$ и всех рёбер, инцидентных v_i и вершинам из V_i^j, $i = 1, \ldots, k'$. Нетрудно видеть, что $\Delta(H_j) = \deg_{H_j}(v_i) = k' + j - 1$ для любых i и j.

Если $\chi'(H_1) = \Delta(H_1) = k'$, то $\chi'(H_2) = k'+1$, поскольку $\chi'(H_2) \geqslant k'+1$ и $(k'+1)$-раскраска рёбер H_2 может быть получена из k'-раскраски рёбер H_1 путём окрашивания рёбер v_1u_1, v_2u_2, $\ldots$, $v_{k'}u_{k'}$ в цвет $k'+1$. Если же $\chi'(H_1) = \Delta(H_1) = k'+1$, то $\chi'(H_2) = k'+1$. Действительно, $\chi'(H_2) \geqslant k'+1$ и в $(k'+1)$-раскраске рёбер H_1 для любого i существует такой цвет c_i, что ребро цвета c_i не встречается среди рёбер, инцидентных v_i. Окрасим ребро v_iu_i в цвет c_i для любого i и получим $(k'+1)$-раскраску рёбер H_2.

По теореме Кёнига (см., например, [31]) хроматический индекс любого двудольного графа равен его максимальной степени. Граф $G' = (V(G), E(G) \setminus E(H_2))$ двудольный, причём

$$\Delta(G') = \Delta(G) - (k'+1),$$

поэтому

$$\chi'(G') = \Delta(G) - (k'+1).$$

Окрасим рёбра G' в $(\Delta(G) - k' - 1)$ цветов, а затем окрасим рёбра H_2 в другие $(k'+1)$ цветов и получим раскраску рёбер G в $\Delta(G)$ цветов. Следовательно, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Лемма 2 доказана.

Пусть G — несжимаемый граф. Назовём Δ-*компонентой* любую из компонент связности подграфа графа G, порождённого подмножеством его вершин степени $\Delta(G)$. Если G содержит ровно одну Δ-компоненту CO, то $|V(G)| \leqslant |V(CO)|\,(\Delta(G)+1)$, поскольку каждая вершина G смежна хотя бы с одной вершиной CO.

Предположим, что $\Delta(G) \geqslant 4$. Тогда степень каждой вершины в каждой Δ-компоненте не менее чем 2, поэтому каждая из Δ-компонент содержит не менее 3 вершин. По тем же причинам, если имеется не менее двух Δ-компонент, то найдётся порождённый путь $P = (x, v_1, \ldots, v_k, y)$, где $k \in \{1, 2\}$, между вершинами $x \in V(CO_1)$ и $y \in V(CO_2)$ из разных Δ-компонент CO_1 и CO_2, в котором все вершины $v_1, \ldots, v_k$ не принадлежат никаким Δ-компонентам. Можно считать, что если $k = 2$, то не существует пути длины 2 между вершинами из данных Δ-компонент. Следовательно, если $k = 2$, то v_1 не смежна ни с одной вершиной из CO_2, а v_2 не смежна ни с одной вершиной из CO_1.

У вершины x в CO_1 имеется два соседа x' и x'', а у вершины y в CO_2 имеется два соседа y' и y''. Существуют вершины $x'_1, x'_2, x'_3 \in N_G(x') \setminus \{x\}$, причём x'_1, x'_2 отличны от x'', а также вершины $x''_1, x''_2, x''_3 \in N_G(x'') \setminus \{x\}$, причём x''_1, x''_2 отличны от x'. Поскольку CO_1 и CO_2 — разные Δ-компоненты, нет ребра, инцидентного вершине из CO_1 и вершине из CO_2. В частности,

$$x'y' \notin E(G), \quad x'y'' \notin E(G), \quad x''y' \notin E(G), \quad x''y'' \notin E(G).$$

Эти наблюдения и обозначения будут использоваться в следующих двух леммах.

Лемма 3. *Пусть* $H \in \mathcal{S}\backslash\{B_{1+}^{+}, {}^{+}B_{1}^{+}\}$, $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$ *— несжимаемый граф, причём* $\Delta(G) \geqslant 4$. *Тогда* G *имеет не более чем*

$$\max\left(7 + 7 \cdot \frac{\Delta^4(G) - 1}{\Delta(G) - 1}, \frac{\Delta^4(G) - 1}{\Delta(G) - 1}\,(\Delta(G) + 1)\right)$$

вершин.

Доказательство. Предположим, что

$$H \in \{B_1 + P_3,\ B_1 + 2P_2,\ B_1^{+} + P_2,\ B_2 + P_2\}.$$

Тогда H можно представить в виде $H = H_1 + H_2$, где $|E(H_1)| > |E(H_2)|$. Если G содержит подграф H_1, то стянем его в вершину x и получим граф G'. Тогда, очевидно, $\deg_{G'}(x) \leqslant 7\,\Delta(G)$ и степень любой другой вершины G' не превосходит $\Delta(G)$. Так как $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$, то G' либо не содержит подграфа P_3, либо не содержит подграфа $2P_2$, поэтому расстояние от x до любой другой вершины G' не превосходит 3. Значит,

$$|V(G')| \leqslant 1 + 7\,(\Delta(G) + \Delta^2(G) + \Delta^3(G)) = 1 + 7 \cdot \frac{\Delta^4(G) - 1}{\Delta(G) - 1}.$$

Вместе с тем $|V(G)| \leqslant |V(G')| + 6$. Если $G \in \mathrm{Free}_s(\{H_1\})$, то

$$G \in \mathrm{Free}_s(\{B_1^{++}\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_2^{+}\}),$$

эти случаи будут разобраны далее. Таким образом, можно считать, что $H \in \{B_1^{++}, B_2^{+}, B_3\}$.

Предположим, что $P = (x, v_1, y)$. Тогда $[x_1', x_2', x_3', x', x, v_1, y, y', y''; B_3]$, поскольку хотя бы две из вершин x_1', x_2', x_3' отличны от v_1, и $[x_i', x', x'', x, v_1, y, y', y''; B_2^{+}]$ для вершины $x_i' \notin \{v_1, x''\}$, существующей, так как $x'' \notin \{x_1', x_2'\}$ и какая-то из вершин x_1', x_2' отлична от v_1. Если $x'' \notin \{x_1', x_2', x_3'\}$ или $v_1 \notin \{x_1', x_2', x_3'\}$, то $[x_1', x_2', x_3', x, x'', v_1, y, y'; B_1^{++}]$, так как хотя бы две из вершин x_1', x_2', x_3' одновременно отличны от v_1 и x''. Если $x'' \in \{x_1', x_2', x_3'\}$ и $v_1 \in \{x_1', x_2', x_3'\}$, то $[y', y'', y, v_1, x', x, x'', x_i''; B_1^{++}]$, поскольку существует вершина $x_i'' \notin \{v_1, x'\}$.

Предположим, что $P = (x, v_1, v_2, y)$. Очевидно, что $[x', x'', x, v_1, v_2, y, y', y''; B_3]$. Если $x'' \notin \{x_1', x_2', x_3'\}$ или $v_1 \notin \{x_1', x_2', x_3'\}$, то $[x_1', x_2', x_3', x, x'', v_1, v_2, y; B_1^{++}]$, так как хотя бы две из вершин x_1', x_2', x_3' одновременно отличны от v_1 и x''. Если $x'' \in \{x_1', x_2', x_3'\}$ и $v_1 \in \{x_1', x_2', x_3'\}$, то $[x_i', x', x'', v_1, x, v_2, y, y''; B_1^{++}]$, так как существует вершина $x_i' \notin \{v_1, x''\}$. Поскольку G несжимаем, либо $\deg_G(v_1) \geqslant 3$, либо $\deg_G(v_2) \geqslant 3$. Вершины x и y равноправны, поэтому можно предполагать существование вершины v^*, смежной с v_2 и не принадлежащей $V(CO_1) \cup \{v_1, y\}$. Тогда $[v^*, v_2, y, v_1, x, x', x_i', x''; B_2^{+}]$, так как существует вершина $x_i' \notin \{v_1, x''\}$.

Тем самым граф G имеет всего одну Δ-компоненту CO. Предположим, что в CO между вершинами u_1 и u_5 существует порождённый путь $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Тогда $G[N_G(u_1) \cup N_G(u_2) \cup \{u_4, u_5\}]$ содержит подграф B_1^{++}, $G[N_G(u_1) \cup N_G(u_3) \cup \{u_5\}]$ содержит B_2^{+}, $G[N_G(u_1) \cup N_G(u_4)]$ содержит B_3. Тем самым расстояние в CO между любыми двумя вершинами не превосходит 3, поэтому

$$|V(CO)| \leqslant 1 + \Delta(G) + \Delta^2(G) + \Delta^3(G) = \frac{\Delta^4(G) - 1}{\Delta(G) - 1}.$$

Значит, $|V(G)| \leqslant \frac{\Delta^4(G)-1}{\Delta(G)-1} (\Delta(G) + 1)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$ — несжимаемый граф и $\Delta(G) \geqslant 4$. Тогда либо граф G имеет не более чем $\frac{\Delta^5(G)-1}{\Delta(G)-1} (\Delta(G) + 1)$ вершин, либо $\Delta(G) = 4$ и G содержит один из подграфов* snake, rose, shark, *у которого* $\deg_G(a_2) = 2$.

Доказательство. Предположим, что в G существует не менее двух Δ-компонент. Через v' будем обозначать третью вершину пути P, считая от вершины x. Докажем, что $\deg_G(v_1) = 2$. Предположим противное.

Ввиду равноправности x и y можно считать, что либо v_1 не смежна ни с одной из вершин множества $N_G(x)$, либо v_1 имеет соседа в $N_G(x)$ и v_2 имеет соседа в $N_G(y)$ (когда $k = 2$), либо v_1 имеет соседей и в $N_G(x)$, и в $N_G(y)$ (когда $k = 1$). Если реализуется второй случай, то $G[N_G(x) \cup N_G(v_1) \cup N_G(v_2)]$ содержит подграф $\overset{+}{B}_2$, поэтому далее будут рассматриваться только первый и третий случаи.

Предположим, что существует вершина $v^* \in N_G(v_1) \setminus (N_G(x) \cup \{x, v'\})$, что охватывает третий случай. Если $k = 1$, то $G[N_G(x) \cup N_G(v_1) \cup N_G(y)]$ содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если $\Delta(G) \geqslant 6$ или $\Delta(G) = 5$ и $x''v_1 \notin E(G)$, то $N_G(x'') \setminus \{x, x', v_1, v^*\}$ содержит не менее 2 элементов и они вместе с v', v_1, v^*, x, x', x'' порождают подграф, содержащий подграф $\overset{+}{B}_2$. Рассмотрение случая, когда $\Delta(G) = 5$, $x'v_1 \notin E(G)$, аналогично. Отметим, что случай, когда $\Delta(G) = 5$, $x'v_1 \in E(G)$, $x''v_1 \in E(G)$, невозможен, так как тогда $\deg_G(v_1) = 5$ и v_1 должна принадлежать Δ-компонентам.

Предположим, что $k = 2$ и $\Delta(G) = 4$. Тогда из соображений равноправности вершин x и y можно предполагать, что у вершины v_2 имеется сосед $v^{**} \notin \{v_1, y\}$. Если $v^* \neq v^{**}$, то $[y, v_2, v^{**}, v_1, v^*, x, x', x''; \overset{+}{B}_2]$. Значит, $v^* = v^{**}$. Если $v^*x' \notin E(G)$ или $v^*x'' \notin E(G)$, то $[v_2,\ v_1,\ v^*,\ x,\ x',\ x'',\ x_1',\ x_2';\ \overset{+}{B}_2]$ или $[v_2,\ v_1,\ v^*,\ x,\ x',\ x'',\ x_1'',\ x_2'';\ \overset{+}{B}_2]$. Тем самым $v^*x' \in E(G)$, $v^*x'' \in E(G)$. Из соображений равноправности вершин x и y также имеем, что $v^*y' \in E(G)$, $v^*y'' \in E(G)$. Следовательно, $\deg_G(v^*) \geqslant 6$. Получаем противоречие с тем, что $\Delta(G) = 4$. Тем самым $\deg_G(v_1) = 2$.

Предположим, что $\Delta(G) = 5$. Если неверно, что

$$N_G(x') \setminus \{x, x''\} = N_G(x'') \setminus \{x, x'\}, \quad x'x'' \in E(G),$$

то существуют вершины $z_1, z_2 \in N_G(x') \setminus \{x, x''\}$ и $z_3, z_4 \in N_G(x'') \setminus \{x, x'\}$, причём $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \varnothing$. Тогда $[z_1, z_2, z_3, z_4, x', x'', x, v_1; \overset{+}{B}_2]$. Предположим, что

$$V_1 = N_G(x') \setminus \{x, x''\} = N_G(x'') \setminus \{x, x'\} = \{z_1, z_2, z_3\}, \quad x'x'' \in E(G).$$

Граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$, если x имеет соседа $\widehat{x} \notin \{x', x'', v_1\} \cup V_1$. Действительно, рёбра v_1x, $\widehat{x}x$, xx', $x'z_1$, $x'x''$, $x''z_1$, $x''z_2$ образуют подграф $\overset{+}{B}_2$. Таким образом, можно считать, что x смежна с z_1 и z_2. Поскольку G не содержит мостов, хотя бы одна вершина из V_1 имеет соседа $z' \notin \{x, x', x''\} \cup V_1$. Достаточно рассмотреть случаи, когда $z'z_1 \in E(G)$ и когда $z'z_3 \in E(G)$, $xz_3 \notin E(G)$. Если $z'z_1 \in E(G)$, то рёбра v_1x, xx', xz_1, z_1z', z_1x'', $x''z_2$, $x''z_3$ образуют подграф $\overset{+}{B}_2$. Если же $z'z_3 \in E(G)$, $xz_3 \notin E(G)$, то рёбра $z'z_3$, z_3x'', z_3x', $x'z_1$, $x'x$, xv_1, xz_2 образуют подграф $\overset{+}{B}_2$.

Предположим, что $\Delta(G) = 4$ и $x'x'' \notin E(G)$. Тогда $V_2 = \{x'_1, x'_2, x'_3\} = \{x''_1, x''_2, x''_3\}$, так как иначе G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если x имеет соседа в множестве V_2, то некоторый элемент V_2 должен иметь соседа вне $\{x, x', x''\} \cup V_2$, так как xv_1 не является мостом в G. Тогда граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если x не смежна ни с одной вершиной из V_2, то $N_G(x) = \{x^*, v_1, x', x''\}$, где $x^* \notin V_2$. Множество V_2 должно быть независимым, так как иначе $G \notin \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$. Ввиду несжимаемости G имеем $\deg_G(x'_i) = 4$ для некоторого i, причём $N_G(x_i) \cap (\{x', x''\} \cup V_2) = \varnothing$. Тогда $G[\{v_1, x\} \cup V_2 \cup N_G(x'_i)]$ содержит подграф $\overset{+}{B}_2$.

Предположим, что $x'x'' \in E(G)$. Тогда поскольку $G \in \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$, либо $\{x'_1, x'_2\} = \{x''_1, x''_2\}$, либо можно предполагать, что $x'_2 = x''_2$. В первом случае G содержит snake или rose в качестве подграфа, причём степень вершины a_2 этого подграфа в графе G равна 2. Действительно, если x смежна с одной из вершин x'_1 и x'_2 (скажем, с x'_1), то в обозначениях определения snake достаточно положить

$$a_1 = v', \quad a_2 = v_1, \quad a_3 = x'_2, \quad a_4 = x,$$
$$a_5 = x'', \quad a_6 = x', \quad a_7 = x'_1.$$

Если же x смежна с вершиной $\widehat{x} \notin \{x', x'', v_1\}$, то

$$a_1 = v', \quad a_2 = v_1, \quad a_3 = \widehat{x}, \quad a_4 = x,$$
$$a_5 = x'', \quad a_6 = x', \quad a_7 = x_1', \quad a_8 = x_2'.$$

Во втором случае, так как $\deg_G(x) = 4$ и $G \in \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$, вершина x смежна с одной из вершин x_1', x_2', x_1''. Действительно, если существует сосед $\widetilde{x} \notin \{v_1, x', x'', x_1', x_2', x_1''\}$ вершины x, то рёбра $\widetilde{x}x$, v_1x, xx', $x'x_1'$, $x'x''$, $x''x_2'$, $x''x_1''$ образуют подграф $\overset{+}{B}_2$. Тем самым граф G содержит snake или shark в качестве подграфа, причём степень вершины a_2 этого подграфа в графе G равна 2. Это очевидно, если $xx_2' \in E(G)$. Если же x смежна с одной из вершин x_1' и x_1'' (скажем, с x_1'), то в обозначениях определения shark достаточно положить

$$a_1 = v', \quad a_2 = v_1, \quad a_3 = x_1'', \quad a_4 = x_2'',$$
$$a_5 = x'', \quad a_6 = x, \quad a_7 = x_1', \quad a_8 = x'.$$

Предположим, что G имеет только одну Δ-компоненту CO, в которой между вершинами u_1 и u_6 существует порождённый путь $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$. Поскольку $\Delta(G) \geqslant 4$, существуют различные вершины $v' \in N_G(u_2) \setminus \{u_1, u_3\}$ и $v'' \in N_G(u_3) \setminus \{u_2, u_4\}$. Если $N_G(u_4) \neq \{u_3, u_5, v', v''\}$, то граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. То же самое верно, если $N_G(u_4) = \{u_3, u_5, v', v''\}$ и $N_G(u_5) \neq \{u_4, u_6, v', v''\}$. Если же $N_G(u_4) = \{u_3, u_5, v', v''\}$ и $N_G(u_5) = \{u_4, u_6, v', v''\}$, то $[u_1, u_2, u_3, v', u_4, u_5, v'', u_6; \overset{+}{B}_2]$. Тем самым расстояние в CO между любыми двумя вершинами не превосходит 4, поэтому

$$|V(CO)| \leqslant 1 + \Delta(G) + \Delta^2(G) + \Delta^3(G) + \Delta^4(G) = \frac{\Delta^5(G) - 1}{\Delta(G) - 1}.$$

Значит, $|V(G)| \leqslant \frac{\Delta^5(G)-1}{\Delta(G)-1}\,(\Delta(G) + 1)$. Лемма 4 доказана.

2.2. Кликовая ширина графов и новые случаи полиномиальной разрешимости задачи PP **для графов минимальной степени** 4. Кликовая ширина имеет важное значение для построения эффективных алгоритмов на графах, поскольку для любой константы C многие задачи на графах полиномиально разрешимы в классе графов, у которых кликовая ширина не превосходит C (см. [32]). Следующее утверждение даёт достаточное условие равномерной ограниченности кликовой ширины (см. [33]).

Лемма 5. *Для любого монотонного класса $\mathcal{X}$, не включающего $\mathcal{T}$, существует такая константа $C(\mathcal{X})$, что кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

В [29, лемма 4] доказана

Лемма 6. *Если $\mathcal{X}$ — монотонный класс и $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{X}$, то задача* PP *полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}$.*

Лемма 7. *Пусть G — несжимаемый граф,*

$$G \in \mathrm{Free}_s(\{B^+_{1+}\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{{}^+B^+_1\}), \quad \Delta(G) \geqslant 4.$$

Тогда $G \in \mathrm{Free}_s(\{T_{4,4,4}\})$.

Доказательство. Предположим, что граф G содержит подграф, изоморфный $T_{4,4,4}$. Если существует сосед вершины x_1, не принадлежащий триоду $T_{4,4,4}$, то G одновременно содержит подграфы B^+_{1+} и ${}^+B^+_1$. То же самое верно, если у вершины x_1 есть сосед в множестве $V(T_{4,4,4}) \setminus \{y_1, z_1\}$ или если $N_G(x_1) = \{v, x_2, y_1, z_1\}$. Такие же рассуждения можно провести и относительно вершин y_1 и z_1. Следовательно, можно считать, что эти случаи не реализуются. Тем самым для любой вершины $t \in \{x_1, y_1, z_1\}$ либо $\deg_G(t) = 2$, либо $\deg_G(t) = 3$ и в $\{x_1, y_1, z_1\} \setminus \{t\}$ существует сосед вершины t.

Поскольку G несжимаем, $N_G(v)$ содержит не менее двух вершин степени $\Delta(G) \geqslant 4$. Пусть u — произвольная такая вершина. Понятно, что $u \notin \{x_1, y_1, z_1\}$ и u не смежна ни с одной из вершин x_1, y_1, z_1. Пусть $u_1 \neq v$ и $u_2 \neq v$ — соседи вершины u, при этом $\deg_G(u_1) = \Delta(G)$. Среди $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{y_2, y_3, y_4\}$, $\{z_2, z_3, z_4\}$ существует множество, которому не принадлежат ни u_1, ни u_2. Можно считать, что это $\{x_2, x_3, x_4\}$. Если $\{u_1, u_2\} \neq \{y_2, z_2\}$, то $[u_1, u_2, u, v, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2; B^+_{1+}]$. Если же $\{u_1, u_2\} = \{y_2, z_2\}$, то $[y_3, y_2, y_1, u, v, x_1, z_2, z_3; B^+_{1+}]$.

Поскольку $\deg_G(u_1) = \Delta(G) \geqslant 4$, у вершины u_1 существует сосед $u' \notin \{v, u, u_2\}$. Понятно, что $u' \notin \{x_1, y_1, z_1\}$. Если $u_i = y_2$ для $i = 1, 2$, то $[x_2, x_1, v, y_1, y_2, u, u_j, z_1; {}^+B^+_1]$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Аналогично в случае $u_i = z_2$ для $i = 1, 2$. Если же $\{u_1, u_2\} \cap \{y_2, z_2\} = \varnothing$, то $[u', u_1, u, u_2, v, x_1, y_1, y_2; {}^+B^+_1]$ (если $u' \neq y_2$) или $[u', u_1, u, u_2, v, x_1, z_1, z_2; {}^+B^+_1]$ (если $u' \neq z_2$). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любого $H \in \mathcal{S} \cup \{\overset{+}{B}_2\}$ задача* PP *полиномиально разрешима в классе $\mathcal{K}_H = \{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{H\}), \Delta(G) \geqslant 4\}$.*

Доказательство. Из лемм 1–4, 6 и 7 следует, что достаточно рассматривать случай $H = \overset{+}{B}_2$ и несжимаемые графы $G \in \mathcal{K}_H$ с $\Delta(G) = 4$, содержащие один из подграфов snake, rose, shark, в котором $\deg_G(a_2) = 2$.

Действительно, если $H \in \mathcal{S} \setminus \{B_{1+}^{+}\}$, то из лемм 1–3 следует, что существует константа C_H такая, что для любого несжимаемого графа $G \in \mathcal{K}_H$ либо $\chi'(G) = \Delta(G)$, либо $|V(G)| \leqslant C_H$. Хроматический индекс любого графа с не более чем C_H вершинами может быть найден за время $O(1)$. Если $H = B_{1+}^{+}$, то утверждение данной леммы следует из лемм 6 и 7. Возможность рассмотрения соответствующих ограничений в случае, когда $H = \overset{+}{B}_2$, следует из леммы 4.

Предположим, что G содержит подграф snake. Пусть $V' = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$ и $N = \{x \mid xa_i \in E(G),\ a_i \in V',\ x \notin V'\}$. Так как $G \in \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$, $\Delta(G) = 4$, то $|N| \leqslant 3$. Нетрудно видеть, что 4-раскраска рёбер подграфа $(V(G), E(G) \setminus \{a_i a_j \mid a_i, a_j \in V'\})$ продолжается до 4-раскраски рёбер G тогда и только тогда, когда между N и V' присутствуют рёбра не более чем двух цветов. Тем самым можно считать, что никакая вершина из N не смежна с тремя вершинами из V'.

Предположим, что $b \in N \setminus \{a_2\}$ и $N_G(b) \cap V' = \{a_i\}$. Тогда обязательно $\deg_G(b) = 2$ ввиду несжимаемости G и того, что если существуют вершины $c_1, c_2 \in N_G(b) \setminus \{a_i\}$, то $[c_1, c_2, b, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7; \overset{+}{B}_2]$. Теперь предположим, что $b \in N$ и $N_G(b) \cap V' = \{a_i, a_j\}$. Тогда обязательно $\deg_G(b) \leqslant 3$, так как если $N_G(b) = \{c_1, c_2, a_i, a_j\}$, то $[c_1, c_2, b, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7; \overset{+}{B}_2]$.

Не уменьшая общности можно считать, что $N = \{a_2, a_3, a_8\}$ и

$$N_G(a_2) \cap V' = \{a_4\}, \quad N_G(a_3) \cap V' = \{a_5\}, \quad N_G(a_8) \cap V' = \{a_6\}$$

или

$$N_G(a_2) \cap V' = \{a_4\}, \quad N_G(a_3) \cap V' = \{a_5\}, \quad N_G(a_8) \cap V' = \{a_6, a_7\}.$$

В первом случае $\deg_G(a_2) = \deg_G(a_3) = \deg_G(a_8) = 2$, поэтому любую 4-раскраску рёбер подграфа $G \setminus V'$ можно продолжить до 4-раскраски рёбер G путём окраски a_2a_4, a_3a_5, a_6a_8 в один цвет. Во втором случае $\deg_G(a_2) = \deg_G(a_3) = 2$ и $\deg_G(a_8) \leqslant 3$. Тем самым любую 4-раскраску рёбер $G \setminus V'$ можно продолжить до 4-раскраски рёбер G путём окраски a_2a_4, a_6a_8 в один цвет, а a_3a_5, a_6a_7 — в другой.

Предположим, что G содержит подграф rose. Можно считать, что $a_4a_7 \notin E(G)$ и $a_4a_8 \notin E(G)$, так как этот случай влечёт возникновение соответствующего подграфа snake. Предположим, что вершина a_7 смежна с $b \notin \{a_3, a_5, a_6, a_8\}$. Тогда $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_8, a_7, b, a_6; \overset{+}{B}_2]$. Тем самым $N_G(a_i) \subseteq \{a_3, a_5, a_6, a_j\}$ для любого $i \in \{7, 8\}$, где $\{i, j\} = \{7, 8\}$. Вершина a_3 не может одновременно иметь соседа в множестве $\{a_7, a_8\}$ (скажем, a_7) и соседа $c \notin \{a_4, a_7, a_8\}$, поскольку тогда рёбра ca_3, a_3a_7, a_3a_4, a_4a_2, a_4a_6, a_6a_5, a_6a_8 образуют подграф $\overset{+}{B}_2$. Следовательно, либо

$N_G(a_3) \subseteq \{a_4, a_7, a_8\}$, либо вершины a_7 и a_8 имеют соседей только в множестве $\{a_5, a_6, a_7, a_8\}$. Удалим из G вершины a_5–a_8 и получим граф G'.

Убедимся в том, что $\chi'(G') \leqslant 4$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G) \leqslant 4$. Для этого достаточно показать, что из 4-раскрашиваемости рёбер G' следует 4-раскрашиваемость рёбер G. Можно считать, что в 4-раскраске рёбер G' рёбра a_2a_4 и a_3a_4 имеют цвета 1 и 2. Назначим цвет 1 ребру a_7a_8 (если оно есть) и ребру a_5a_6, цвет 2 рёбрам a_5a_8 и a_6a_7, цвет 3 ребру a_3a_7 (если оно есть) и рёбрам a_4a_5 и a_6a_8, цвет 4 ребру a_3a_8 (если оно есть) и рёбрам a_4a_6 и a_5a_7.

Предположим, что G содержит подграф shark. Очевидно, что не существует вершины $b \notin V(\text{shark}) \setminus \{a_1\}$, смежной хотя бы с одной из вершин a_4 и a_7, так как иначе $[b, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; \overset{+}{B}_2]$. Если $a_3a_4 \in E(G)$, то не существует вершины $b \in N_G(a_3) \setminus \{a_4, a_5, a_7\}$, так как иначе $[b, a_3, a_4, a_5, a_7, a_6, a_2, a_8; \overset{+}{B}_2]$. Если $a_3a_7 \in E(G)$, то не существует вершины $b \in N_G(a_3) \setminus \{a_4, a_5, a_7\}$, так как иначе $[b, a_3, a_7, a_6, a_8, a_5, a_4, a_2; \overset{+}{B}_2]$. Если $b_1, b_2 \in N_G(a_3) \setminus \{a_4, a_5, a_7\}$, то $[b_1, b_2, a_3, a_5, a_7, a_8, a_4, a_6; \overset{+}{B}_2]$. Отсюда следует, что $N_G(a_3) = \{a_5, c\}$, где $c \notin \{a_4, a_7\}$, поскольку a_3a_5 не является мостом в графе G. Удалим из G все рёбра подграфа $G[\{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}]$ и получим граф G''.

Убедимся в том, что $\chi'(G'') \leqslant 4$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G) \leqslant 4$. Для этого достаточно показать, что из 4-раскрашиваемости рёбер G'' следует 4-раскрашиваемость рёбер G. Так как $\deg_G(a_2) = \deg_G(c) = 2$, можно считать, что в 4-раскраске рёбер G'' рёбра a_3a_5 и a_2a_6 имеют цвета 1 и 2. Назначим цвет 1 рёбрам a_6a_8 и a_4a_7 (если оно есть), цвет 2 рёбрам a_4a_5 и a_7a_8, цвет 3 рёбрам a_4a_8 и a_5a_6, цвет 4 рёбрам a_5a_8 и a_6a_7. Лемма 8 доказана.

2.3. Сложность задачи РР для классов субкубических графов. Определим некоторое преобразование, называемое *заменой вершины треугольником.* Оно применяется к вершине x графа, окрестность которой состоит в точности из вершин x_1, x_2, x_3, и определяется следующим образом. Удаляется вершина x, добавляются вершины x'_1, x'_2, x'_3 и рёбра x'_1x_1, x'_2x_2, x'_3x_3, $x'_1x'_2$, $x'_2x'_3$, $x'_1x'_3$. Нетрудно видеть, что 3-раскраска рёбер исходного графа существует тогда и только тогда, когда она существует для полученного графа.

Через $\mathcal{X}_k$ обозначим множество кубических графов, не содержащих порождённых циклов длины до k включительно. Ясно, что классы $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ совпадают с множеством всех кубических графов. Обозначим через $\mathcal{X}^*_k$ множество графов, которые получаются из графов из $\mathcal{X}_k$ последовательным выполнением замен вершины треугольником для каждой его вершины. Очевидно, что $\mathcal{X}^*_k \subseteq \mathrm{Free}_s(\{\overset{+}{B}_2\})$ для любого k, поскольку среди любых трёх вершин, образующих путь в произвольном графе из $\mathcal{X}_k^*$, найдутся две, принадлежащие общему треугольнику.

Лемма 9. *Для любого k задача* РР NP-*полна для графов из* $\mathcal{X}_k^*$.

Доказательство. Известно, что для любого k задача РР NP-полна для графов из $\mathcal{X}_k$ (см. [36]). Задача РР в классе $\mathcal{X}_k$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}_k^*$, поэтому задача РР NP-полна для графов из $\mathcal{X}_k^*$. Лемма 9 доказана.

Монотонное замыкание класса графов $\mathcal{Z}$ — множество графов, являющихся подграфами графов из $\mathcal{Z}$. Оно обозначается через $[\mathcal{Z}]_m$.

Лемма 10. *Пусть H^* — граф без изолированных вершин, имеющий ровно* 7 *рёбер и принадлежащий* $[\mathcal{X}_1^*]_m$, $H \in \mathcal{S}$. *Тогда задача* РР *полиномиально разрешима для субкубических графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{H^*, \overset{+}{B}_2\})$ *и для субкубических графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{H\})$.

Доказательство. По лемме 6 можно рассматривать несжимаемые субкубические графы из классов $\mathrm{Free}_s(\{H^*, \overset{+}{B}_2\})$ и $\mathrm{Free}_s(\{H\})$, содержащие подграф $T_{5,5,5}$. Пусть G — такой граф, причём $\Delta(G) = 3$. Поскольку G несжимаем, среди вершин x_1, y_1, z_1 есть не менее двух степени 3. Покажем, что задача РР для субкубических графов из рассматриваемых классов полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathrm{Free}_s(\{T_{5,5,5}\})$. Последний класс является случаем полиномиальной разрешимости задачи РР по лемме 6. Тем самым будет доказана данная лемма. Рассмотрим два случая: когда $\{x_1, y_1, z_1\}$ не независимо и когда оно является таковым.

I. Рассмотрим сначала случай, когда среди x_1y_1, x_1z_1, y_1z_1 есть ребро графа G. Предположим, что $x_1y_1 \in E(G)$. Стянем треугольник, образованный v, x_1, y_1, в вершину u_1 и получим граф G_1^*, для которого $\Delta(G_1^*) \leqslant 3$. Нетрудно видеть, что $\chi'(G) = 3$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G_1^*) \leqslant 3$. Можно считать, что среди x_2, y_2, z_1 не менее двух вершин имеют степень 3. Действительно, иначе 3-раскраска рёбер G_1^* (а следовательно, и 3-раскраска рёбер G) существует тогда и только тогда, когда она существует для $G_1^* \backslash \{u_1\} \cong G \backslash \{v, x_1, y_1\}$. Из соображений симметрии можно считать, что $\deg_G(x_2) = \deg_G(y_2) = 3$. Пусть $N_G(x_2) = \{x', x_1, x_3\}$ и $N_G(y_2) = \{y', y_1, y_3\}$.

Если $x' = x_4$ или $x'x_3 \in E(G)$, то G содержит в качестве подграфа любой граф из $[\mathcal{X}_1^*]_m$ без изолированных вершин, имеющий ровно 7 рёбер. Случаи $x' = y_2$ и $x' = z_1$ будут разобраны далее, и в них окажется, что граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если $\deg_G(x_3) = 3$, то подграф $G[N_G(x_3) \cup \{x_3, x', x_1, y_1, v\}]$ содержит $\overset{+}{B}_2$. Если же $\deg_G(x_3) = 2$, то получаем $N_G(x') = \{a, b, x_2\}$ ввиду несжимаемости G. Понятно, что $\{a, b\} \cap \{x_3, y_1\} = \varnothing$. Тогда $[a, b, x', x_2, x_3, x_1, y_1, v; \overset{+}{B}_2]$.

Если $x' \notin V(T_{5,5,5})$, то G одновременно содержит

$$B_1 + P_3,\ B_1 + 2P_2,\ B_1^+ + P_2,\ B_1^{++},\ {}^+B_1^+,\ B_{1+}^+,\ B_2 + P_2,\ B_2^+$$

в качестве подграфа. Это же верно, если $x' \in V(T_{5,5,5})$, для этого нетрудно по отдельности разобрать два случая: $x' \in \{x_4, x_5\}$ и $x' \in \bigcup\limits_{i=2}^{5} \{y_i, z_i\}$. Рассмотрим далее все возможные подслучаи расположения вершины x'.

I.a. Предположим, что $x' = y_2$. Стянем подграф $G[\{v, x_1, y_1, x_2, y_2\}]$ в вершину u_2 и получим граф G_2^*, для которого $\Delta(G_2^*) \leqslant 3$. Нетрудно видеть, что $\chi'(G) = 3$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G_2^*) \leqslant 3$. Можно считать, что $\deg_G(x_3) = 3$ или $\deg_G(y_3) = 3$, иначе

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_2^* \setminus \{u_2\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_2^* \setminus \{u_2\} \cong G \setminus \{v, x_1, y_1, x_2, y_2\}.$$

Тогда G одновременно содержит подграфы B_3 и $\overset{+}{B}_2$, поэтому можно считать, что $x' \notin \{y_2, z_1\}$ и $y' \notin \{x_2, z_1\}$.

I.b. Предположим, что $x' \neq y'$. Если $x' = y_3$, то $[y_1, y_2, y_3, y_4, x_2, x_1, v, z_1; B_3]$, поэтому можно считать, что $x' \neq y_3$ и $y' \neq x_3$. Тогда $[x_3, x_2, x', x_1, y_1, y_2, y_3, y'; B_3]$.

I.c. Предположим, что $x' = y'$. Если $\deg_G(x_3) = 3$, то подграф $G[N_G(x_3) \cup N_G(y_1) \cup \{y_1, x_3\}]$ содержит B_3. Тем самым $\deg_G(x_3) = 2$ и $\deg_G(y_3) = 2$. Так как G несжимаем, существует вершина x^*, смежная с x' и отличная от x_2 и y_2.

Если $x^* \neq z_1$, то $[x^*, x_2, y_2, x', y_1, v, x_1, z_1; B_3]$. Если же $x^* = z_1$, то стянем $G[\{v, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x'\}]$ в вершину u_3 и получим подграф G_3^*. Имеем

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_3^* \setminus \{u_3\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_3^* \setminus \{u_3\} \cong G \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x', x_2, y_2\}.$$

Итак, независимо от того, какой из случаев $G \in \mathrm{Free}(\{H^*, \overset{+}{B}_2\})$ или $G \in \mathrm{Free}(\{H\})$ рассматривается, возможно выполнить редукцию G.

II. Пусть $\{x_1, y_1, z_1\}$ — независимое множество и $N_G(x_1) = \{x'', v, x_2\}$. Нетрудно проверить, что G одновременно содержит подграфы

$$B_1 + P_3,\ B_1 + 2P_2,\ B_1^+ + P_2,\ B_1^{++},\ {}^+B_1^+,\ B_{1+}^+.$$

Можно считать, что $N_G(y_1) = \{y'', v, y_2\}$. Рассмотрим два подслучая: $\deg_G(z_1) = 3$ и $\deg_G(z_1) = 2$.

II.a. Предположим, что существует z'' такая, что $N_G(z_1) = \{z'', v, z_2\}$. Если $x'' \neq y''$, то $[x_2, x_1, x'', v, y_1, y_2, y'', z_1; \overset{+}{B}_2]$, за исключением случаев, когда $x'' = y_2$ или $y'' = x_2$. Поэтому G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$, если среди x'', y'', z'' имеется хотя бы две различные вершины. Если же $x'' = y'' = z''$ и степень хотя бы одной из вершин x_2, y_2, z_2 равна 3, то G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если же $x'' = y'' = z''$ и $\deg_G(x_2) = \deg_G(y_2) = \deg_G(z_2) = 2$, то стянем подграф $G[\{v, x_1, y_1, z_1, x''\}]$ в вершину u_4 и получим граф G_4^*. Имеем

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_4^* \setminus \{u_4\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_4^* \setminus \{u_4\} \cong G \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x''\}.$$

Следовательно, если $G \in \mathrm{Free}(\{H^*, \overset{+}{B}_2\})$, то возможно выполнить редукцию графа G. Далее в данном подслучае будем предполагать, что $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$.

II.a.1. Докажем, что не существует таких $p \in \{2, 3\}$ и $q \in \{2, 3, 4\}$, что $x_p y_q \in E(G)$. Можно предполагать, что $p \leqslant q$. Если $p = 2$, то

$$[x_3, x_2, y_q, x_1, v, y_1, z_1, z_2, z_3; B_2 + P_2, B_2^+],$$
$$[y_{q+1}, y_q, y_{q-1}, x_3, x_2, x_1, v, y_1, z_1, z'', z_2; B_3]$$

(и при $q = 2$ и когда $q \neq 2$). Если $p = 3$, то $[x_4, x_3, y_q, x_2, x_1, v, y_1, z_1; B_3]$ и

либо $[x_4, x_3, y_q, x_2, x_1, x'', v, y_1, y_2; B_2 + P_2, B_2^+]$ (когда $x'' \notin \{x_4, y_2\}$),

либо $[x_4, x_3, y_q, x_2, x_1, x'', v, z_1, z_2; B_2 + P_2, B_2^+]$ (когда $x'' = y_2$),

либо $[x_5, x_4, x_1, x_3, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1, v; B_2 + P_2, B_2^+]$ (когда $x'' = x_4$).

Тем самым для любых $2 \leqslant p \leqslant 4$, $2 \leqslant q \leqslant 4$, где $(p, q) \neq (4, 4)$, имеем

$$x_p y_q \notin E(G), \quad x_p z_q \notin E(G), \quad y_p z_q \notin E(G).$$

II.a.2. Докажем, что $x'' \neq y_3$ (а значит, и $x'' \neq z_3$, $y'' \notin \{x_3, z_3\}$, $z'' \notin \{x_3, y_3\}$). Предположим противное. Тогда G одновременно содержит подграфы $B_2 + P_2$ и B_2^+. Если $z'' \notin \{y_2, y_4\}$, то $[y_2, y_3, y_4, x_1, v, z_1, z'', z_2; B_3]$. Граф G содержит подграф B_3, если $y'' \in \{x_3, z_2, z_3\}$. Рассмотрим ситуацию, когда $z'' \in \{y_2, y_4\}$. Тогда G содержит подграф B_3, если $y'' = x_2$.

Предположим, что $z'' = y_4$. Если $\deg_G(y_2) = 3$, то G содержит подграф B_3, поэтому $\deg_G(y_2) = 2$. Поскольку G несжимаем, $\deg_G(y'') = 3$. Тогда G содержит подграф B_3 (независимо от наличия ребра $y''x_2$).

Предположим, что $z'' = y_2$. Имеем $\deg_G(x_2) = 2$, иначе G содержит подграф B_3. Тогда $\deg_G(x_3) = 3$ ввиду несжимаемости G, поэтому он содержит подграф B_3.

II.a.3. Докажем, что $x'' \neq y_2$ (а значит, и $x'' \neq z_2$, $y'' \notin \{x_2, z_2\}$, $z'' \notin \{x_2, y_2\}$). Предположим, что $x'' = y_2$. Тогда $[y_3, y_2, x_1, y_1, v, z_1, z'', z_2; B_3]$. Вместе с тем

$$[x_2, x_1, y_1, v, z_1, z'', z_2, y_2, y_3, z_3, z_4; B_2 + P_2, B_2^+], \quad \text{если } z'' \neq x_2,$$
$$[y_3, y_2, y_1, x_1, x_2, x_3, z_1; z_2, z_3; B_2 + P_2, B_2^+], \quad \text{если } z'' = x_2.$$

II.a.4. Докажем, что $\deg_G(x_2) = 2$ и $\deg_G(x_3) = 2$, т. е. что G не несжимаемый.

Пусть $N_G(x_2) = \{x_3, x_1, \widehat{x}\}$. Тогда

$$[x_3, x_2, \widehat{x}, x_1, v, y_1, y_2, y_3, z_1; B_2 + P_2, B_2^+].$$

Если среди y'' и z'' существует вершина (скажем, y''), отличная от $\widehat{x}$, то $[x_3, x_2, \widehat{x}, x_1, v, y_1, y'', y_2; B_3]$. Если же $\widehat{x} = y'' = z''$, то ввиду несжимаемости G либо $\deg_G(x'') = 3$, либо существует сосед вершины x'' степени 3, отличный от x_1, но тогда G содержит подграф B_3.

Предположим, что $\deg_G(x_2) = 2$ и $N_G(x_3) = \{x_2, x_4, \widetilde{x}\}$. Тогда имеем $[x_4, x_3, \widetilde{x}, x_2, x_1, v, y_1, z_1; B_3]$. Вместе с тем если $\widetilde{x} \neq x'', x'' \neq x_4$, то

$$[x_4, x_3, \widetilde{x}, x_2, x_1, x'', v, y_1, y_2; B_2 + P_2, B_2^+].$$

Если $x'' = x_4$ или $\widetilde{x} = x''$, то среди вершин y'' и z'' есть отличная от x''. Тогда нетрудно убедиться, что G одновременно содержит подграфы $B_2 + P_2$ и B_2^+.

II.b. Пусть $\deg_G(z_1) = 2$. Тогда $N_G(z_2) = \{z''', z_1, z_3\}$ поскольку граф G несжимаем.

Предположим, что $G \in \mathrm{Free}_s(\{H^*, \overset{+}{B}_2\})$ и $x'' \neq y''$. Тогда

$$[x_2, x_1, x'', v, y_1, y_2, y'', z_1; \overset{+}{B}_2],$$

за исключением случаев, когда $x'' = y_2$ или $y'' = x_2$. Пусть $x'' = y_2$. Если ещё $y'' = x_2$, то, очевидно, $\deg_G(x_3) = \deg_G(y_3) = 2$, так как иначе G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Тогда стянем $G[\{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}]$ в вершину u_5 и получим граф G_5^*. Имеем

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_5^* \setminus \{u_5\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_5^* \setminus \{u_5\} \cong G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\},$$

поэтому можно предполагать, что $\deg_G(x_2) = 2$, так как иначе G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если $y'' = y_3$, то стянем $G[\{y_3, y_2, y_1, x_1, v\}]$ в вершину u_6 и получим граф G_6^*. Имеем

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_6^* \setminus \{u_6\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_6^* \setminus \{u_6\} \cong G \setminus \{y_3, y_2, y_1, x_1, v\},$$

поэтому можно предполагать, что $\deg_G(y_3) = 2$, так как иначе граф G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Ввиду несжимаемости G получаем $\deg_G(y'') \geqslant 2$. Если $\deg_G(y'') = 3$, то G содержит подграф $\overset{+}{B}_2$. Если $N_G(y'') = \{y_1, a\}$, то 3-раскраска рёбер G существует тогда и только тогда, когда существует 3-раскраска рёбер $G\setminus\{v, y_1, y_2, x_1\}$. Действительно, в любой 3-раскраске рёбер $G \setminus \{v, y_1, y_2, x_1\}$ можно выбрать цвет c_1, в который одновременно не окрашены x_2x_3 и y_3y_4, и окрасить в него рёбра x_1x_2 и y_2y_3. Можно выбрать цвет c_2 (возможно, что $c_2 = c_1$), в который одновременно не окрашены $y''a$ и z_1z_2, и окрасить в него рёбра y_1y'' и vz_1. Тогда, как нетрудно видеть, полученная частичная 3-раскраска рёбер G продолжается до 3-раскраски рёбер G.

Предположим, что $x'' = y''$. Если $N_G(x_2) = \{x_1, x_3, \breve{x}\}$, то либо

$$[\breve{x}, x_2, x_3, x_1, x'', v, y_1, z_1; \overset{+}{B}_2], \quad \text{если } \breve{x} \neq x'',$$

либо $\breve{x} = x''$. Предположим, что $\breve{x} = x''$. Тогда $\deg_G(y_2) = 2$. Стянем $G[\{x_2, x'', x_1, y_1, v\}]$ в вершину u_7 и получим граф G_7^*. Имеем

$$\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G_7^* \setminus \{u_7\}) \leqslant 3,$$

причём

$$G_7^* \setminus \{u_7\} \cong G \setminus \{x_2, x'', x_1, y_1, v\}.$$

Пусть $\deg_G(x_2) = \deg_G(y_2) = 2$. Тогда $N_G(x'') = \{a', x_1, y_1\}$ ввиду несжимаемости G, причём $\deg_G(a') \geqslant 2$. Если $\deg_G(a') = 3$, то подграф $G[N_G(a') \cup \{a', x_1, y_1, y_2, v\}]$ содержит $\overset{+}{B}_2$. Если же $\deg_G(a') = 2$, то 3-раскраска рёбер G существует тогда и только тогда, когда существует 3-раскраска рёбер $G \setminus \{v, x_1, y_1, x''\}$.

Далее будем предполагать, что $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$.

II.b.1. Предположим, что $z''' \notin \{x_1, y_1\}$. Тогда G одновременно содержит подграфы $B_2 + P_2$ и B_2^+. Возможны следующие варианты.

Если $z''' = x_2$ и $y'' \neq z_3$, то $[y'', y_2, y_1, v, z_1, z_2, z_3, x_2; B_3]$.

Если $z''' = x_2$ и $y'' = z_3$, то $[x_1, x_2, x_3, z_2, z_3, y_1, y_2, v; B_3]$.

Если $z''' \neq x_2$ и $x'' \neq z_3$, то $[x'', x_1, x_2, v, z_1, z_2, z''', z_3; B_3]$.

Если же $z''' \neq x_2$ и $x'' = z_3$, то либо $[y_2, y_1, y'', v, x_1, z_3, z_2, z_4; B_3]$ (когда $y'' \neq z_4$), либо $[y_2, y_1, v, z_4, z_3, z_2, z''', z_1; B_3]$ (когда $y'' = z_4$, $z''' \neq y_2$), либо $[y_3, y_2, y_1, z_2, z_3, x_1, x_2, v]$ (когда $y'' = z_4$, $z''' = y_2$).

II.b.2. Рассмотрим ситуацию, когда $z''' = x_1$, которая аналогична ситуации, когда $z''' = y_1$. Возможны только следующие варианты.

Если $y'' \neq x_2$, то $[y_2, y_1, y'', v, x_1, x_2, z_2; B_2]$, поэтому G одновременно содержит подграфы $B_2 + P_2$ и B_2^+.

Если $y'' = x_2$, то G одновременно содержит подграфы $B_2 + P_2$ и B_2^+.

Если $y'' \neq z_3$, то $[y'', y_2, y_1, v, z_1, z_2, z_3, x_1; B_3]$.

Если же $y'' = z_3$, то либо $\deg_G(x_3) = 3$, либо $\deg_G(x_2) = 3$ ввиду несжимаемости G. В первом случае $G[N_G(x_3) \cup \{x_3, x_1, v, y_1, z_1\}]$ содержит подграф B_3. Во втором случае либо $G[N_G(x_2) \cup N_G(y_1) \cup \{x_2, y_1\}]$ содержит подграф B_3 (если $x_2y_2 \notin E(G)$), либо $[x_3, x_2, x_1, y_2, y_1, z_3, z_2, z_4; B_3]$ (если $x_2y_2 \in E(G)$). Лемма 10 доказана.

3. Основной результат работы

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{Y}$ — множество графов, каждый из которых имеет не более чем 7 рёбер. Тогда задача* PP *полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{Y})$, если либо $\mathcal{Y}$ содержит субкубический лес, не принадлежащий множеству $\{\overset{+}{B}_2 + O_n \mid n \geqslant 0\}$, либо $\mathcal{Y}$ одновременно содержит и граф вида $\overset{+}{B}_2 + O_n$ и граф из $[\mathcal{X}_1^*]_m$. Во всех остальных случаях она* NP*-полна для графов из $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Напомним, что задача PP NP-полна в классе $\mathcal{X}_k$ при любом k. Следовательно, можно считать, что $\mathcal{X}_k \nsubseteq \mathcal{X}$ для любого k. Заметим, что $\mathcal{Y}$ конечно и для любого графа G^*, не являющегося субкубическим лесом, существует такое k^* (которое можно положить равным обхвату графа G^*), что $\mathcal{X}_{k^*+1} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{G^*\})$. Следовательно, $\mathcal{Y}$ содержит субкубический лес.

Заметим, что любой субкубический лес F с 7 рёбрами может быть представлен в виде $F = F' + O_n$, где $F' \in \mathcal{T} \cup \mathcal{S} \cup \{\overset{+}{B}_2\}$. Действительно, если в F каждая компонента связности имеет не более одной вершины степени 3, то $F \in \mathcal{T}$. Если же в F имеется компонента связности с не менее чем двумя вершинами степени 3, то она принадлежит множеству

$$\{B_1,\, B_1^+,\, B_1^{++},\, {}^+B_1^+,\, B_{1+}^+,\, B_2,\, B_2^+,\, \overset{+}{B}_2,\, B_3\}.$$

Значит, $F' \in \mathcal{S} \cup \{\overset{+}{B}_2\}$.

Рассмотрим произвольный субкубический лес $F \in \mathcal{Y}$. Заметим, что если $G \in \mathrm{Free}_s(\{H + P_1\})$, то либо $G \in \mathrm{Free}_s(\{H\})$, либо $G \cong H$. Отсюда и из леммы 6 можно предполагать, что $F \in \mathcal{S} \cup \{\overset{+}{B}_2\}$. Если $F \in \mathcal{S}$, то по леммам 8 и 10 задача PP полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}$. Если $F = \overset{+}{B}_2$ и $\mathcal{Y} \cap [\mathcal{X}_1^*]_m = \varnothing$, то $\mathcal{X}_1^* \subseteq \mathcal{X}$, так как $\overset{+}{B}_2 \notin [\mathcal{X}_1^*]_m$

и никакой граф из $[\mathcal{X}_1^*]_m$ не будет запрещённым для $\mathcal{X}$. Задача РР NP-полна для графов из $\mathcal{X}$ по лемме 9. Если же $F = \overset{+}{B}_2$ и $\mathcal{Y} \cap [\mathcal{X}_1^*]_m \neq \varnothing$, то по леммам 8 и 10 задача РР полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. New York: Freeman, 1979. 338 p.
2. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. Vol. 10, No. 4. P. 718–720.
3. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ. Т. 3. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. С. 25–30.
4. **Král' D., Kratochvíl J., Tuza Z., Woeginger G. J.** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Proc. 27th Int. Workshop Graph-Theoretic Concepts Comput. Sci. (Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001). Heidelberg: Springer, 2001. P. 254–262. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2204).
5. **Lozin V. V., Malyshev D. S.** Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 216. P. 273–280.
6. **Hoàng C. T., Lazzarato D.** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 186. P. 105–111.
7. **Karthick T., Maffray F., Pastor L.** Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. 2017. Vol. 81, No. 3. P. 1053–1074.
8. **Malyshev D. S.** The coloring problem for classes with two small obstructions // Optim. Lett. 2014. Vol. 8, No. 8. P. 2261–2270.
9. **Malyshev D. S.** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // J. Comb. Optim. 2016. Vol. 31, No. 2. P. 833–845.
10. **Malyshev D. S.** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Appl. Math. 2018. Vol. 47. P. 423–432.
11. **Malyshev D. S., Lobanova O. O.** Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 219. P. 158–166.
12. **Malyshev D. S.** Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases // J. Comb. Optim. 2017. Vol. 33. P. 809–813.
13. **Cameron K., Huang S., Penev I., Sivaraman V.** The class of (P_7, C_4, C_5)-free graphs: Decomposition, algorithms, and χ-boundedness // J. Graph Theory. 2020. Vol. 93, No. 4. P. 503–552.
14. **Cameron K., da Silva M., Huang S., Vuskovic K.** Structure and algorithms for (cap, even hole)-free graphs // Discrete Math. 2018. Vol. 341. P. 463–473.
15. **Dai Y., Foley A., Hoàng C. T.** On coloring a class of claw-free graphs: To the memory of Frédéric Maffray // Electron. Notes Theor. Comput. Sci. 2019. Vol. 346. P. 369–377.

16. **Fraser D. J., Hamela A. M., Hoàng C. T., Holmes K., LaMantia T. P.** Characterizations of $(4K_1, C_4, C_5)$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 231. P. 166–174.
17. **Golovach P., Johnson M., Paulusma D., Song J.** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs // J. Graph Theory. 2017. Vol. 84. P. 331–363.
18. **Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J.** Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theor. Comput. Sci. 2012. Vol. 414, No. 1. P. 9–19.
19. **Golovach P. A., Paulusma D., Song J.** 4-Coloring H-free graphs when H is small // Discrete Appl. Math. 2013. Vol. 161, No. 1–2. P. 140–150.
20. **Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M.** Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. 2018. Vol. 38, No. 4. P. 779–801.
21. **Spirkl S., Chudnovsky M., Zhong M.** Four-coloring P_6-free graphs // Proc. 30th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (San Diego, USA, Jan. 6–9, 2019). Philadelphia, PA: SIAM, 2019. P. 1239–1256.
22. **Hoàng C. T., Kamiński M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X.** Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. 2010. Vol. 57, No. 1. P. 74–81.
23. **Huang S.** Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // Eur. J. Comb. 2016. Vol. 51. P. 336–346.
24. **Malyshev D. S.** The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Math. 2015. Vol. 338, No. 11. P. 1860–1865.
25. **Malyshev D. S.** The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs Comb. 2017. Vol. 33, No. 4. P. 1009–1022.
26. **Сироткин Д. В., Малышев Д. С.** О сложности задачи вершинной 3-раскраски для наследственных классов графов, определённых запретами небольшого размера // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 4. С. 112–130.
27. **Galby E., Lima P. T., Paulusma D., Ries B.** Classifying k-edge colouring for H-free graphs // Inf. Process. Lett. 2019. Vol. 146. P. 39–43.
28. **Malyshev D. S.** The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 811–822.
29. **Malyshev D. S.** Complexity classification of the edge coloring problem for a family of graph classes // Discrete Math. Appl. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 97–101.
30. **Schrijver A.** Combinatorial optimization – Polyhedra and efficiency. Heidelberg: Springer, 2003. 1882 p.
31. **König D.** Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére // Matematikai és Természettudományi Értesitö. 1916. Vol. 34. P. 104–119. [Hungarian].

32. Courcelle B., Makowsky J., Rotics U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. 2000. Vol. 33, No. 2. P. 125–150.
33. Boliac R., Lozin V. V. On the clique-width of graphs in hereditary classes // Algorithms and Computation. Proc. 13th Int. Symp. (Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002). Heidelberg: Springer, 2002. P. 44–54. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2518).
34. Gurski F., Wanke E. Line graphs of bounded clique-width // Discrete Math. 2007. Vol. 307, No. 22. P. 2734–2754.
35. Kobler D., Rotics D. Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width // Discrete Appl. Math. 2003. Vol. 126, No. 2–3. P. 197–223.
36. Lozin V. V., Kamiński M. Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles // Contrib. Discrete Math. 2007. Vol. 2, No. 1. P. 61–66.

Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
22 января 2020 г.
После доработки —
1 июня 2020 г.
Принята к публикации
11 июня 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2020. Vol. 27, No. 4. P. 104–130

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.682

COMPLETE COMPLEXITY DICHOTOMY FOR 7-EDGE FORBIDDEN SUBGRAPHS IN THE EDGE COLORING PROBLEM

D. S. Malyshev

National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: `dsmalyshev@rambler.ru`

Abstract. The edge coloring problem for a graph is to minimize the number of colors that are sufficient to color all edges of the graph so that all adjacent edges receive distinct colors. The computational complexity of the problem is known for all graph classes defined by forbidden subgraphs with at most 6 edges. We improve this result and obtain a complete complexity classification of the edge coloring problem for all sets of prohibitions each of which has at most 7 edges. Illustr. 3, bibliogr. 36.

Keywords: edge coloring problem, strongly hereditary class, computational complexity.

REFERENCES

1. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, New York, 1979).
2. **I. Holyer,** The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comput.* **10** (4), 718–720 (1981).
3. **V. G. Vizing,** On estimation of the chromatic index of a p-graph, in *Descrete Analysis,* Vol. 3 (Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1964), pp. 25–30.
4. **D. Král', J. Kratochvíl, Z. Tuza,** and **G. J. Woeginger,** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs, in *Proc. 27th Int. Workshop Graph-Theoretic Concepts Comput. Sci., Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001* (Springer, Heidelberg, 2001), pp. 254–262 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2204).

This research is supported by the Russian Science Foundation (project No. 19–71–00005).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (4), 706–721 (2020), DOI 10.1134/S1990478920040092.

5. **V. V. Lozin** and **D. S. Malyshev,** Vertex coloring of graphs with few obstructions, *Discrete Appl. Math.* **216**, 273–280 (2017).
6. **C. T. Hoàng** and **D. Lazzarato,** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes, *Discrete Appl. Math.* **186**, 105–111 (2015).
7. **T. Karthick, F. Maffray,** and **L. Pastor,** Polynomial cases for the vertex coloring problem, *Algorithmica* **81** (3), 1053–1074 (2017).
8. **D. S. Malyshev,** The coloring problem for classes with two small obstructions, *Optim. Lett.* **8** (8), 2261–2270 (2014).
9. **D. S. Malyshev,** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem, *J. Comb. Optim.* **31** (2), 833–845 (2016).
10. **D. S. Malyshev,** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures, *Discrete Appl. Math.* **47**, 423–432 (2018).
11. **D. S. Malyshev** and **O. O. Lobanova,** Two complexity results for the vertex coloring problem, *Discrete Appl. Math.* **219**, 158–166 (2017).
12. **D. S. Malyshev,** Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases, *J. Comb. Optim.* **33**, 809–813 (2017).
13. **K. Cameron, S. Huang, I. Penev,** and **V. Sivaraman,** The class of (P_7, C_4, C_5)-free graphs: Decomposition, algorithms, and χ-boundedness, *J. Graph Theory* **93** (4), 503–552 (2020).
14. **K. Cameron, M. da Silva, S. Huang,** and **K. Vuskovic,** Structure and algorithms for (cap, even hole)-free graphs, *Discrete Math.* **341**, 463–473 (2018).
15. **Y. Dai, A. Foley,** and **C. T. Hoàng,** On coloring a class of claw-free graphs: To the memory of Frédéric Maffray, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.* **346**, 369–377 (2019).
16. **D. J. Fraser, A. M. Hamela, C. T. Hoàng, K. Holmes,** and **T. P. LaMantia,** Characterizations of $(4K_1, C_4, C_5)$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **231**, 166–174 (2017).
17. **P. Golovach, M. Johnson, D. Paulusma,** and **J. Song,** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs, *J. Graph Theory* **84**, 331–363 (2017).
18. **H. J. Broersma, P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **J. Song,** Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest, *Theor. Comput. Sci.* **414** (1), 9–19 (2012).
19. **P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **J. Song,** 4-coloring H-free graphs when H is small, *Discrete Appl. Math.* **161** (1–2), 140–150 (2013).
20. **F. Bonomo, M. Chudnovsky, P. Maceli, O. Schaudt, M. Stein,** and **M. Zhong,** Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices, *Combinatorica* **38** (4), 779–801 (2018).
21. **S. Spirkl, M. Chudnovsky,** and **M. Zhong,** Four-coloring P_6-free graphs, in *Proc. 30th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, San Diego, USA, Jan. 6–9, 2019* (SIAM, Philadelphia, PA, 2019), pp. 1239–1256.

22. C. T. Hoàng, M. Kamiński, V. V. Lozin, J. Sawada, and **X. Shu,** Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time, *Algorithmica* **57** (1), 74–81 (2010).

23. S. Huang Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs, *Eur. J. Comb.* **51**, 336–346 (2016).

24. D. S. Malyshev, The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs, *Discrete Math.* **338** (11), 1860–1865 (2015).

25. D. S. Malyshev, The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs, *Graphs Comb.* **33** (4), 1009–1022 (2017).

26. D. V. Sirotkin and **D. S. Malyshev,** On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (4), 112–130 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (4), 759–769 (2018)].

27. E. Galby, P. T. Lima, D. Paulusma, and **B. Ries,** Classifying k-edge colouring for H-free graphs, *Inf. Process. Lett.* **146**, 39–43 (2019).

28. D. S. Malyshev, The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **11**, 811–822 (2014).

29. D. S. Malyshev, Complexity classification of the edge coloring problem for a family of graph classes, *Discrete Math. Appl.* **27** (2), 97–101 (2017).

30. A. Schrijver, *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency* (Springer, Heidelberg, 2003).

31. D. König, Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére, *Matematikai és Természettudományi Értesitö* **34**, 104–119 (1916) [Hungarian].

32. B. Courcelle, J. Makowsky, and **U. Rotics,** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width, *Theory Comput. Syst.* **33** (2), 125–150 (2000).

33. R. Boliac and **V. V. Lozin,** On the clique-width of graphs in hereditary classes, *Algorithms and Computation* (Proc. 13th Int. Symp., Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002) (Springer, Heidelberg, 2002), pp. 44–54 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2518).

34. F. Gurski and **E. Wanke,** Line graphs of bounded clique-width, *Discrete Math.* **307** (22), 2734–2754 (2007).

35. D. Kobler and **D. Rotics,** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width, *Discrete Appl. Math.* **126** (2–3), 197–223 (2003).

36. V. V. Lozin and **M. Kamiński,** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles, *Contrib. Discrete Math.* **2** (1), 61–66 (2007).

Dmitry S. Malyshev

Received January 22, 2020
Revised June 1, 2020
Accepted June 11, 2020