

Г. М. Полотовский

**В. А. РОХЛИН И Д. А. ГУДКОВ НА ФОНЕ
16-Й ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА
(ПО ИХ ПЕРЕПИСКЕ 1971–1982 ГГ.)**

Напомню, что в первой части своей 16-й проблемы (только об этой части идёт речь в этой заметке) Д. Гильберт поставил задачу топологической классификации проективных вещественных алгебраических многообразий, выделив, в частности, вопрос о плоских кривых степени 6: “Максимальное число замкнутых и отдельно расположенных ветвей, которые может иметь плоская алгебраическая кривая n -го порядка, было определено Харнаком. Возникает дальнейший вопрос о взаимном расположении этих ветвей на плоскости. Что касается кривых шестого порядка, то я, – правда, на достаточно сложном пути – убедился, что те одиннадцать ветвей, которые получаются по Харнаку, никогда не расположены вне друг друга; всегда существует одна ветвь, внутри которой содержится ещё одна и вне которой находятся остальные девять, или наоборот” (цит. по [1]).

В 1969 г. Д. А. Гудков [2] нашёл ответ на этот вопрос Гильберта: кривыми степени 6 реализуются только схемы расположений овалов, находящиеся в таблице на рис. 1 ниже ломаной линии, где запись $\frac{\alpha}{1}\beta$ кодирует $\beta + 1$ овалов вне друг друга, внутри одного из которых расположены ещё α овалов вне друг друга; $\frac{1}{1}$ обозначает три “концентрических” овала, а $\langle \alpha \rangle$ – α овалов вне друг друга.

Из таблицы видно, что предположение Гильберта о нереализуемости расположения $\frac{5}{1}5$ оказалось неверным. Периодичность расположения реализуемых схем в верхней строке этой таблицы Гудков записал в виде сравнения $\mathcal{X}(B_+) \equiv k^2 \pmod{8}$ с $k = 3$, где $\mathcal{X}(B_+)$ – эйлерова характеристика ориентируемой части дополнения к кривой в проективной плоскости¹. Убедившись в том, что это сравнение справедливо

Ключевые слова: В. А. Рохлин, Д. А. Гудков, 16-я проблема Гильберта.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение No. 075-15-2019-1931.

¹В исходной формулировке Гудкова левая часть сравнения была записана в других комбинаторных терминах.

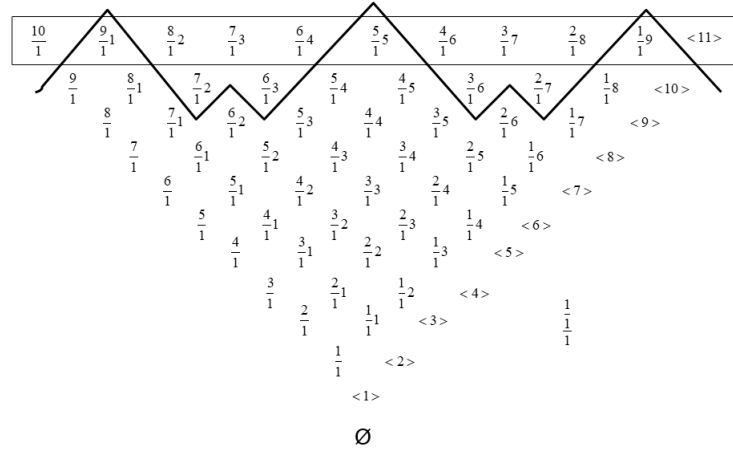


Рис. 1. Классификация Гудкова кривых степени 6.

для всех M -кривых² чётной степени $2k$, которые он мог построить, Гудков выдвинул его в качестве гипотетического необходимого условия существования M -кривой степени $2k$. Эта гипотеза Гудкова, опубликованная впервые в [3], но ещё до этого пропагандировавшаяся им в докладах на конференциях и в частных беседах, вскоре была доказана: сначала В. И. Арнольд [4] доказал сравнение “наполовину”, по mod 4, а затем В. А. Рохлин в [5] и [6]³ доказал его полностью. С лёгкой руки Рохлина это сравнение называется теперь “сравнением Гудкова”.

Описанные результаты Гудкова, Арнольда и Рохлина ознаменовали начало нового этапа в развитии предмета⁴: “исследования по топологии вещественных алгебраических многообразий влились в общий поток исследований по дифференциальной топологии” ([9], с. 5), а также

² M -кривой называется кривая с максимально возможным по Харнаку числом овалов.

³Как позже обнаружил А. Марен (см. [7]), первое доказательство Рохлина в [5] содержит ошибку.

⁴Обзор истории исследований топологии алгебраических кривых от античности до первых лет XXI века см. в [8].

инициировали переписку между Рохлиным и Гудковым. Эта переписка охватывает период 1971–1982 гг. В архиве Гудкова сохранились 23 письма: 15 писем Рохлина и 8 писем Гудкова⁵.

Конечно, прежде всего в переписке шёл обмен информацией, касающейся 16-й проблемы Гильберта, в том числе обсуждалось содержание обзора [9], над которым в 1970–1973 гг. работал Гудков. Так, 14.11.1971 Рохлин пишет: “*M*-кривыми степени $\equiv 0 \pmod{4}$ я пока почти не занимался. К сожалению, сейчас я вынужден заниматься совсем другими вещами. Как только я напишу обо всём этом что-нибудь, я сейчас же пришлю Вам текст. Думаю, что это произойдёт не позже, чем через месяц или полтора, так что Вы успеете вставить в Ваш обзор всё, что захотите. Конечно, я буду благодарен за любую информацию о Ваших примерах. Не можете ли Вы прислать мне Ваши статьи или даже Ваш обзор, чтобы я изучил предмет более основательно?”

Письмо В. А. Рохлина от 21.03.1972 приведу полностью:

“Глубокоуважаемый Дмитрий Андреевич!

Я обнаружил другое, значительно более элементарное доказательство Вашего сравнения $p-n \equiv k^2 \pmod{8}$. Это доказательство уточняет доказательство сравнения Арнольда $p-n \equiv k^2 \pmod{4}$, содержащееся в последнем параграфе моей заметки⁶ (которая у Вас имеется). Оказалось, что использованное там сравнение

⁵Гудков вёл большую переписку и хранил копии и черновики многих своих писем. Большая часть переписки Гудкова с математиками (в том числе полностью – переписка с Рохлиным) опубликована в [10].

⁶Имеется в виду статья [5] – Г.П.

14.11.1971

Глубокоуваж. Дмитрий Андреевич!

Доказательство сравнения $p-n \equiv 1 \pmod{8}$ для M -кривых степени $\equiv 2 \pmod{4}$ довольно простое, но, мне кажется, довольно оригинальное. Центральным пунктом доказательства, который, видимо, освещается при Вашей презентации, является применение этой связи на задачу дифференциальной геометрии: симметрия замкнутого ступенчатого гиперэкватора относительно диаметра диаметра диаметра, на 16.

M -кривыми степени $\equiv 0 \pmod{4}$ я пока почти не занимался. К сожалению, сейчас я вынужден заниматься совсем другими вещами!

Как только я напишу обо всём этом что-нибудь, я сейчас же пришлю Вам текст. Думаю, что это произойдёт не позже, чем через месяц или полтора, так что Вы успеете вставить в Ваш обзор всё, что захотите.

Конечно, я буду благодарен за любую информацию о Ваших примерах. Не можете ли Вы прислать мне Ваши статьи или даже Ваш обзор, чтобы я изучил предмет более основательно?

с самым лучшим пожеланием
Ваш В.А.Рохлин

Автограф письма В. А. Рохлина от 14.11.1971

$\chi(F) - \sigma(X) \equiv 2\mathcal{X}(F) \pmod{4}$ уточняется до сравнения $\chi(F) - \sigma(X) \equiv 2\tau(F) \pmod{8}$, где $\tau(F)$ – вычет по модулю 4, который можно описать по расположению поверхности F в X . В частности, его можно вычислить для поверхностей Арнольда в $\mathbb{C}P^2$, что и приводит к сравнению $p - n \equiv k^2 \pmod{8}$. При этом доказательство сравнения $\chi(F) - \sigma(X) \equiv 2\tau(F)$ [в отличие от доказательства сравнения, содержащего Arf -инвариант, из §3 моей заметки] вполне элементарно. Никакие накрытия не нужны.

Без сомнения, это доказательство лучше выражает топологическую суть дела, чем первое. Оно не было найдено сразу просто потому, что общая топологическая теорема, на которой оно основано [т.е. сравнение $\chi(F) - \sigma(X) \equiv 2\tau(F) \pmod{8}$] не была известна. Вероятно, я скоро напишу это доказательство подробно. Конечно, я пришлю его Вам. Не знаю, сможете ли Вы ещё учесть его в Вашем обзоре.

Напишите, пожалуйста, нет ли аналогичных гипотез, относящихся к другим ситуациям⁷, например, к кривым нечётной степени, к поверхностям или к неплоским кривым.

С самыми лучшими пожеланиями
Ваш В. Рохлин”

В большом ответном письме от 24.04.1972 Д. А. Гудков излагает с подробными мотивировками целый ряд своих гипотез. Приведу для примера две из них.

“Гипотеза. Все M -кривые нечётной степени t , допустимые по теореме Гарнака и имеющие “достаточно мало” гнёзд (из соображений пересечения с прямой, кривой второго порядка и др.), существуют”.

“Гипотеза о поверхностях 4-го порядка F , не гомотопных 0 в $\mathbb{R}P^3$.

Существуют лишь три поверхности, сумма чисел Бетти ($\sigma(F)$) которых равна 24, и эта сумма наибольшая (M -поверхности):

$$F: R_2^1 + 9R_0^0; \quad R_6^1 + 5R_0^0; \quad R_{10}^1 + R_0^0.$$



Владимир Абрамович
Рохлин

⁷Замечу, что точно такой же вопрос – “Нет ли у Вас других гипотез?” – задал Д. А. Гудкову в своём письме от 27.03.1971 В. И. Арнольд – Г.П.

($R_k^1 + lR_0^0$ состоит из куска R_k^1 типа однополостного гиперболоида с $(k - 1)$ -й ручкой – жанр куска равен k ; R_0^0 – оваллоид; lR_0^0 – l оваллоидов в одной из областей, на которые делит R_k^1 пространство $\mathbb{R}P^3$. Поверхность $R_1^0 + R_0^0$ построена Гильбертом в 1907 г., поверхность $R_6^1 + 5R_0^0$ – Уткиным недавно, поверхность $R_2^1 + 9R_0^0$ ещё не построена).

Гипотеза о поверхностях степени 4 подтвердилась: в 1976 г. В. М. Харламов [11] доказал существование недостающей поверхности. Гипотеза о кривых нечётной степени оказалась неверной – в 1980 г. О. Я. Виро [12] завершил классификацию неособых кривых степени 7, доказав при этом, что кривая степени 7, содержащая 14 овалов внутри одного, невозможна. Замечу, что Дмитрия Андреевича совершенно не расстраивало опровержение его гипотез, однажды он сказал мне: “Я сознательно выдвигаю много гипотез, хотя в справедливости некоторых из них совершенно не уверен: моя цель – привлечь людей к этой проблематике”.



Дмитрий Андреевич
Гудков

В переписке решались и разные “математико-организационные” вопросы. Так, несколько писем конца 1972-го – начала 1973-го годов были посвящены разрешению коллизии с одновременными и независимыми работами Д. А. Гудкова и А. Д. Крахнова в Горьком и В. М. Харламова в Ленинграде, пересекающимися по результатам. В итоге соответствующие статьи [13] и [14] были опубликованы в одном и том же номере журнала.

Шёл также обмен библиографической информацией. Например, 23 апреля 1973 г. В. А. Рохлин пишет:

“Дорогой Дмитрий Андреевич, второпях я так и не записал ни указанных Вами обзоров, ни дамской работы 1906 г. с неравенствами Петровского. Пожалуйста, пришлите координаты!”

И вскоре получает ответ:

“Дорогой Владимир Абрамович! Сообщаю Вам библиографию.

1. Ragsdale V. (дама) "On the Arrangement of the Real branches of Plane Algebraic curves" Amer. Jour. of Math. 28, pp. 377–404, 1906”⁸

⁸Через несколько лет О. Я. Виро [10], а затем его ученик И. В. Итенберг [15] привели контрпримеры к гипотезе Рэгсдейл из этой работы.

и далее следуют ещё более десяти ссылок на статьи по алгебраическим кривым, опубликованные в весьма труднодоступных изданиях. 15.01.1974 Рохлин пишет: “Я искал в присланных Вами сочинениях информацию о кривых степеней 8, 10, 12, но почти ничего не нашёл. Меня интересует сейчас не техника построения, а факт существования. Нет ли где-нибудь сколько-нибудь полной таблицы построенных кривых?”

Дмитрий Андреевич поручил мне составление такой таблицы, после чего отправил её В. А. Рохлину: “Высылаю Вам таблицы M -кривых (до 12-го порядка), строящихся известными способами. Таблицы составил Г. Полотовский. По-моему, стоило бы опубликовать обзор по способам Брюэотти с приложением таблицы кривых, но где это сделать я не знаю⁹”.

Со своей стороны В. А. Рохлин сообщал Д. А. Гудкову литературу по топологии: “Лучшее учебное сочинение по характеристическим классам – лекции Милнора (Математика, 3:4 и 9:4). Arf -инвариант, определённый в моей заметке, вычисляется прямо на основании своего определения. Другие Arf -инварианты, употребляемые в топологии, имеются, например, у Кервера и Милнора (Ann. Math. 77, No. 3) и Понтрягина (Труды МИАН, XLV, последний параграф). Не ждите, впрочем, от изучения топологии по книгам и статьям слишком много”. (21.01.1972.)

Надо сказать, что в переписке неоднократно обсуждаются вопросы преподавания математики. В частности, это объясняется стремлением Д. А. Гудкова поставить топологическое образование в Горьковском университете¹⁰. Хорошо понимая сказанное Рохлиным об изучении топологии по книгам, он писал 07.01.1973:

“Дело идёт о том, что в Горьком нет настоящей культуры во многих областях математики, в частности, в алгебраической геометрии и в топологии. Этот недостаток чувствуют многие здешние математики. <...> Хорошо было бы получить также от Вас <...> специалиста по алгебраической топологии (топологии многообразий и т. п.) на постоянную работу в ГГУ. Конечно, при условии,

⁹Такая статья [16] была опубликована.

¹⁰До середины 1970-х годов топология не входила в учебные планы советских университетов, но В. А. Рохлин читал в Ленинградском университете курс топологии с 1965 г. [17].

что это соответствует желанию самого этого специалиста. Лучше всего, чтобы он не терял с Вами связи. Это может быть очень хороший студент с выходом в целевую аспирантуру у Вас, или оканчивающий аспирант, или уже работающий математик. Я со своей стороны приложил бы все усилия, чтобы осуществить такой план”.

Подходящего специалиста не нашлось, и Д. А. Гудков сам начал читать спецкурс по студенческим записям лекций В. А. Рохлина по топологии. В начале 1975 г. Гудков присылает Рохлину “отчёт”:

“Ваш курс, который я называю начальным, у меня подвинулся до третьей главы, т. е. я прочёл 23 лекции. < ... > Две оставшиеся главы: 4. Гладкие многообр. и 5. Римановы пространства буду читать на следующий семестр. Больше одной 2-х часовой лекции в неделю не получается, т. к. слушатели очень заняты, и я боюсь злоупотребить их вниманием (могут разбежаться). По просьбе слушателей я составил подробный конспект лекций 1-й главы и буду составлять конспекты остальных. Есть идея напечатать эти конспекты на ротапринтере. В связи с этим у меня возникли некоторые мысли, которые хорошо бы обсудить с Вами: 1) в предисловии я указываю, что читаю лекции по студенческим конспектам Ваших лекций. 2) Быть может, Вы согласитесь, чтобы я поставил в качестве автора и Вас с указанием, что за ошибки несу ответственность целиком я. 3) Быть может, Вы хотели бы просмотреть эти конспекты? 4) Если Вы возражаете, то я не буду отдавать эти лекции на ротапринт”.

В. А. Рохлин отвечает 19.05.1973:

“Простите, что я не ответил Вам сразу: просто скопилось огромное количество писем, рецензий и т. п., а пишу я медленно и мало. <...> Постараюсь ответить на Ваши вопросы. Против печатания Ваших лекций (или их конспектов) я, конечно же, ничего не имею. Против указания, что они читались в основном по студенческим записям моих лекций, возразить нечего, коль скоро это правда; только стоит сказать, что у нас это обязательный курс геометрии, точнее, его часть, читаемая в третьем семестре. (Я имею в виду топологию; риманова геометрия читается в четвёртом семестре, и не мною, кстати, а Ю. А. Волковым, который составил и соответствующую часть нашей программы). Быть соавтором я, конечно, не могу. Смотреть эти конспекты до печати у меня нет сил, но если

Вы хотите, чтобы их покритиковал абсолютно компетентный человек, Вы можете попросить об этом, например, Олега Яновича Виро, который читал в этом учебном году обязательный курс топологии вместо меня (кстати, он недавно получил премию Ленинградского математического общества, а свою диссертацию защитил ещё в декабре). Возможно, он не откажется приехать в Горький на неделю или десять дней, чтобы посмотреть Ваш текст и проконсультировать Вас относительно наших основных спецкурсов и их записей (я с ним, впрочем, об этом не разговаривал)”.

О. Я. Виро не отказался. С тех пор он и В. М. Харламов неоднократно приезжали в Горький. Гудков поставил в Горьковском университете обязательный курс топологии, роль Рохлина, Виро и Харламова в создании которого трудно переоценить. В предисловии к серии из шести методических разработок “Начала топологии” (1981 – 1983) Гудков написал: “Значительную часть этого пособия просмотрел О. Я. Виро и сделал полезные замечания. Я выражаю искреннюю благодарность В. А. Рохлину, В. М. Харламову и О. Я. Виро”.

К сожалению, сложившиеся у Д. А. Гудкова и В. А. Рохлина дружеские отношения протекали в основном эпистолярно: принять неоднократные взаимные приглашения не позволяли состояние здоровья и занятость, так что лично Гудков и Рохлин встречались всего три или четыре раза. Мне известно, что в 1974 г. Гудков делал доклад на семинаре Рохлина в Ленинграде; в конце 1970-х Рохлин докладывал о комплексных топологических характеристиках вещественных алгебраических кривых на заседании Московского математического общества, и Дмитрий Андреевич ездил слушать доклад Владимира Абрамовича в Москву, взяв с собой и меня; один раз – кажется, в самом начале 1980-х – Владимир Абрамович со своей женой А. А. Гуревич приезжали в Нижний Новгород. Как-то после этого Дмитрий Андреевич с нескрываемым удовольствием рассказывал мне: “Вчера Наташка (Наталья Васильевна, жена Дмитрия Андреевича – Г.П.) говорит мне: «Как так получается, что тебя посещают такие замечательные люди?»”

В августе 1982 г. Гудков принимал участие в Ленинградской международной топологической конференции. Я не знаю, встречался ли он в этот раз с Рохлиным, в последнем письме Гудкову Владимир Абрамович писал 01.02.1980: “Сам я о вещественных алгебраических многообразиях не размышлял уже несколько лет, но за происходящим

слежусь». Но вот что пишет об этом пребывании Гудкова в Ленинграде Е. И. Гордон [18]:

“Расскажу об одном серьёзном столкновении Д.А. с партийными органами, которое могло весьма плохо кончиться. В 1983 году при переизбрании на должность заведующего кафедрой геометрии и алгебры сначала всё шло гладко и спокойно, но вдруг начали возникать всякие препятствия со стороны тогдашнего ректора А. Г. Угодчикова. Вопрос несколько раз откладывали, предъявляли какие-то странные претензии вроде недостаточного внедрения вычислительной техники (практически отсутствовавшей в то время на факультете) в учебную и научную работу, отсутствие прикладной тематики и т.п. Д.А. вспоминал, что неприятности начались с того, как однажды на Совете университета ректор, только что вернувшийся из обкома, без всякого повода и при обсуждении совсем другого вопроса вдруг с большим раздражением обрушился на Д.А. Поскольку в тот период отношения с ректором у Д.А. были довольно спокойными, Д.А. выдвигал следующую версию происшедшего. Незадолго до того Д.А. был в Ленинграде на топологической конференции. Там он пошёл в партком Ленинградского университета и начал «как коммунист» требовать возвращения на работу выдающегося математика Владимира Абрамовича Рохлина, незадолго перед тем отправленного на пенсию. К увольнению Рохлина имели отношение самые высокие партийные сферы¹¹<...> Поэтому в парткоме реагировали очень бурно и начали орать на Д.А., который тоже отвечал очень резко. По-видимому, из парткома ЛГУ позвонили в Горьковский обком, и там дали указание «разобраться»”.

Дружба и сотрудничество Д. А. Гудкова с В. А. Рохлиным, О. Я. Виро и В. М. Харламовым быстро распространились на такие же отношения учеников Гудкова с Виро, Харламовым, а затем и с другими учениками Рохлина и с учениками его учеников. Это сыграло заметную роль в интенсивном развитии вещественной алгебраической геометрии в последние десятилетия XX века.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Проблемы Гильберта* (под ред. П. С. Александрова). Наука, М., 1969.

¹¹Подробнее о положении В. А. Рохлина в Ленинградском университете см. [17] и [19] – Г.П.

2. Д. А. Гудков, *Полная топологическая классификация расположения овалов кривой 6-го порядка в проективной плоскости*. — Учёные зап. Горьковского университета, вып. 87 (1969), 118–153.
3. Д. А. Гудков, *Построение новой серии M -кривых*. — ДАН СССР **200**, вып. 6 (1971), 1269–1272.
4. В. И. Арнольд, *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырёхмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм*. — Функц. анализ и его прил. **5**, вып. 3 (1971), 1–9.
5. В. А. Рохлин, *Доказательство гипотезы Гудкова*. — Функц. анализ и его прил. **6**, вып. 2 (1972), 62–64.
6. В. А. Рохлин, *Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта*. — Функц. анализ и его прил. **6**, вып. 4 (1972), 58–64.
7. А. Марен, *Несколько замечаний о вещественных плоских алгебраических кривых*. — В кн.: *В поисках утраченной топологии*. Мир, М., 1989, стр. 162–172.
8. Д. А. Гудков, *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*. — УМН **29**, вып. 4(178) (1974), 3–79.
9. Г. М. Полотовский, *Топология вещественных алгебраических кривых: история и результаты*. — Историко-математические исследования, Вторая серия, вып. 14(29) (2011), 177–212.
10. *Дмитрий Андреевич Гудков: документы, переписка, воспоминания* (редактор-составитель Г. М. Полотовский). ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, 2018.
11. В. М. Харламов, *Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$* . — Функц. анализ и его прил. **10**, вып. 4 (1976), 55–68.
12. О. Я. Виро, *Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейла*. — ДАН СССР **254**, вып. 6 (1980), 1306–1310.
13. Д. А. Гудков, А. Д. Крахнов, *О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических $(M-1)$ -многообразий*. — Функц. анализ и его прил. **7**, вып. 2 (1973), 15–19.
14. В. М. Харламов, *Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий*. — Функц. анализ и его прил. **7**, вып. 2 (1973), 74–78.
15. I. Itenberg, *Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale*. — C. R. Acad. Sci. Paris (Série I), **317** (1993), 277–282.
16. Г. М. Полотовский, *К задаче топологической классификации расположения овалов неособых алгебраических кривых в проективной плоскости*. — В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, вып. 1 (1975), стр. 101–128.
17. А. М. Вершик, *В. А. Рохлин в Ленинграде (1960–1984)*. — В кн.: В. А. Рохлин, *Избранные труды*. МЦНМО, ВКМ НМУ, М., 1999, стр. 457–471.
18. Е. Гордон, *Дмитрий Андреевич Гудков в моей жизни*. — Интернет-журнал “Семь искусств”, No. 102. <http://7i.7iskusstv.com/2018-nomer9-egordon/>.
19. С. П. Новиков, *Рохлин*. — В кн.: В. А. Рохлин, *Избранные труды*. МЦНМО, ВКМ НМУ, М., 1999, стр. 472–491.

Polotovskiy G. M. V. A. Rokhlin and D. A. Gudkov against the background of Hilbert's 16th problem (according to their correspondence in 1971–1982).

The story of the friendship and cooperation between Vladimir Abramovich Rokhlin and the Nizhny Novgorod mathematician Dmitry Andreevich Gudkov during the last period of Rokhlin's mathematical biography, when he worked in the topology of real algebraic varieties, in which he received remarkable results. The paper is based on the correspondence of 1971–1982 preserved in Gudkov's archive containing 15 letters by V. A. Rokhlin and 8 letters by D. A. Gudkov.

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”,
Нижний Новгород, Россия
E-mail: polotovskiy@gmail.com

Поступило 29 октября 2020 г.