УДК 514.7

К.И. Шеина

БАЗОВЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ КАРТАНОВЫХ СЛОЕНИЙ, НАКРЫТЫХ РАССЛОЕНИЯМИ.

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена исследованию групп базовых автоморфизмов $A_B(M,F)$ картановых слоений (M,F), накрытых расслоениями, и нахождению достаточных условий для существования в $A_B(M,F)$ структуры конечномерной группы Ли. Класс картановых слоений, накрытых расслоениями, достаточно широк, он содержит, в частности, картановы (X,G)-слоения со связностью Эресмана, картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной, а также картановы слоения с интегрируемой связностью Эресмана.

Методы. В работе мы используем методы слоеных расслоений и накрывающих отображений.

Результаты. Найдены достаточные условия для того, чтобы группа базовых автоморфизмов картанова слоения, накрытого расслоением, допускала структуру конечномерной группы Ли. Получены оценки размерности данной группы. Более того, для картановых слоенией с интегрируемой связностью Эресмана указан способ вычисления групп базовых автоморфизмов.

Выводы. Структура групп базовых автоморфизмов картановых слоений, накрытых расслоениями, определяется структурой глобальной группы голономии таких слоений.

Ключевые слова: картаново слоение, базовые автоморфизмы, связность Эресмана.

K. I. Sheina

BASIC AUTOMORPHISMS OF CARTAN FOLIATIONS COVERED BY FIBRATIONS.

Abstract.

Actuality and goals. This is devoted to the study of groups of basic automorphisms $A_B(M,F)$ of Cartan foliations (M, F) covered by fibrations, and to finding sufficient conditions for the existence of a finite-dimensional Lie group structure in $A_B(M, F)$. The class of Cartan foliations covered by fibrations is quite wide; it contains, in particular, Cartan (X, G)-foliations with Ehresmann connections, Cartan foliations with a vanishing transversal curvature, and Cartan foliations with integrable Ehresmann connection.

Methods. In this work we use the methods of foliated bundles and covering maps.

Results. We get sufficient conditions for the basic automorphism group of Cartan foliation covered by fibrations to admit a finite-dimensional Lie group structure in the category of Cartan foliations. Estimates of the dimension of this group are obtained. Moreover, for Cartan foliations with integrable Ehresmann connection, a method for computing groups of basic automorphisms is specified.

Conclusions. The structure of groups of basic automorphisms of Cartan foliations covered by by fibration is determined by the structure of the global holonomy group of such foliations.

Keywords: Cartan foliation; basic automorphism, Ehresmann connection.

Введение

Одним из основных объектов, ассоциированных с геометрической структурой на гладком многообразии, является его группа автоморфизмов. Во введении к монографии Ш. Кобаяси [1] подчеркнуто, что существование структуры конечномерной группы Ли в группе автоморфизмов многообразия с геометрической структурой является одной из центральных проблем дифференциальной геометрии.

Как известно, решенная 5-ая проблема Гильберта, посвящена нахождению условий, при которых топологическая группа допускает структуру группы Ли [2]. Из многочисленных работ Э. Картана, Р. Майера, Н. Стинрода, К. Номидзу, Ш. Кабаяси, Ш. Эресмана и других авторов известно, что группы автоморфизмов многих геометрических структур являются группами Ли преобразований (см. обзор [3]).

Пространства, которые сейчас называются картановыми геометриями были введены Э. Картаном в 1920-х гг. Теория картановых геометрий изложена в монографиях А. Чапа, Я. Словака [4], Р.В. Шарпе [5], М. Крампина и Д. Саундерса [6]. В настоящее время картановы геометрии и картановы слоения исследуются многими математиками и находят применение в различных физических теориях, см. например, [7], [8], [9] и [10].

Пусть (M,F) – гладкое слоение. Напомним, что голономно инвариантная геометрическая структура на многообразии M называется трансверсальной к слоению (M,F). Другое, эквивалентное определение трансверсальной геометрической структуры, в качестве которой выступает картанова геометрия, дано в разделе 1. В теории слоений с трансверсальными картановыми геометриями в качестве морфизмов рассматриваются локальные диффеоморфизмы, переводящие слои в слои и сохраняющие трансверсальную геометрию (см. раздел 1). Категория картановых слоений обозначается через $\mathfrak{CF}$.

Данная работа посвящена исследованию групп автоморфизмов картановых слоений, то есть слоений, допускающих в качестве трансверсальной структуры картанову геометрию. Изучение картановых слоений мотивировано тем, что такие широкие классы слоений как параболические, конформные, проективные, псевдоримановы, лоренцевы, вейлевы, трансверсально однородные слоения и слоения с трансверсальной линейной связностью принадлежат к классу картановых слоений. Поэтому исследование картановых слоений позволяет с единой точки зрения изучать общие свойства указанных слоений, в то время как многие авторы изучают их по отдельности.

Пусть $A(M,F)$ – полная группа автоморфизмов картанова слоения (M,F) в категории $\mathfrak{CF}$. Группа $A_L(M,F):=\{f \in A(M, F) \mid f(L_\alpha) = L_\alpha \ \forall L_\alpha \in F\}$ является нормальной подгрупппой $A(M,F)$ и называется *группой слоевых автоморфизмов* слоения (M,F). Факторгруппа $A(M,F)/A_L(M,F)$ называется *группой базовых автоморфизмов* и обозначается через $A_B(M,F)$. Подчеркнем, что группа базовых автоморфизмов $A_B(M,F)$ картанова слоения (M,F) является инвариантом в категории картановых слоений $\mathfrak{CF}$.

Мы исследуем группы базовых автоморфизмов $A_B(M,F)$ картановых слоений (M,F), накрытых расслоением и находим достаточные условия для существования в группе $A_B(M,F)$ структуры конечномерной группы Ли. Дж. Лесли, впервые решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях и рассмотрел приложение к слоениям с трансверсальной G-структурой. Для слоений с полными трансверсально проектируемыми аффинными связностями данная проблема решалась И.В. Белько [11].

Группы базовых автоморфизмов полных слоений с эффективными трансверсальными жесткими геометриями исследованы Н.И. Жуковой [12], ею введен алгебраический инва-риант, названный структурной алгеброй Ли слоения, и доказано, что равенство данного инварианта нулю является достаточным условием для того, чтобы группа базовых автоморфизмов данного класса слоений допускала структуру конечномерной группы Ли. В [13] исследовалось существование структуры группы Ли в группах базовых автомор-физмов картановых слоений, моделируемых на неэффективных картановых геометриях.

1. Основные результаты

Среди картановых слоений выделяются слоения, накрытые расслоениями.

Определение 1. Слоение *(M,F)* называется *накрытым расслоением*, если слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\widetilde{k}:\widetilde{M} \to M$, образовано слоями локально тривиального расслоения $\widetilde{r}:\widetilde{M} \to B$.

Следующая теорема описывает глобальную структуру картанова слоения, накрытого расслоением.

Теорема 1. Пусть *(M,F)* – картаново слоение, моделируемое на картановой гео-метрии ξ, накрытое расслоением $\widetilde{r}:\widetilde{M} \to B$, где $\widetilde{k}:\widetilde{M} \to M$ – универсальное накрытие. Тогда:

(1) существует регулярное накрывающее отображение $k:\widehat{M} \to M$ такое, что индуцированное слоение $\widehat{F}$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r:\widehat{M} \to B$ над односвязным многообразием *B*, причем ξ индуцирует на B картанову геометрию η, локально изоморфную ξ;

(2) определен эпиморфизм χ: $\pi_1(\mathrm{M},\ \mathrm{x}) \to \Psi$, $x \in M$ фундаментальной группы $\pi_1(M,x)$ на подгруппу Ψ группы Ли автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathrm{B},\eta)$ картанова многообразия (B,η);

(3) группа накрывающих преобразований накрытия $k:\widehat{M} \to M$ изоморфна группе Ψ.

Определение 2. Группа $\Psi = \Psi(M,F)$, удовлетворяющая теореме 1, называется *глобальной группой голономии* картанова слоения (*M,F*), накрытого расслоением.

Мы приводим подробное доказательство следующей теоремы, приведенной без доказательства в статье [13, Proposition 8]. Эта теорема устанавливает связь между группой базовых автоморфизмов $A_B(M,F)$ картанова слоения (*M,F*), накрытого расслоением, и его глобальной группой голономии Ψ.

Теорема 2. Пусть (*M,F*) - картаново слоение, накрытое расслоением $r:\widehat{M} \to B$, где *B* - односвязное картаново многообразие. Предположим, что глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли *Aut(B,*η*)*. Пусть $N(\Psi)$ - нормализатор Ψ в группе $Aut(B,\eta)$. Тогда группа базовых автоморфизмов $A_B(M,F)$ является группой Ли изоморфной открыто-замкнутой подгруппе Ли фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$ и

$\dim(A_B(M,F))=\dim(N(\Psi)/\Psi)$. Структура группы Ли в группе $A_B(M,F)$ единственна.

Следующая теорема указывает способ вычисления групп базовых автоморфизмов для картановых слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Теорема 3. Пусть (M,F) - картаново слоение с интегрируемой связностью Эресмана Q. Тогда:

(1) Существует регулярное накрытие $\tilde{k}:\tilde{M}\to M$ такое, что $\tilde{M}=L_0\times B$, где L_0 – многообразие диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии, а B – односвязное многообразие, причем индуцированное слоение $\tilde{F}=\tilde{k}^*F$ образовано слоями канонической проекции $r: L_0\times B\to B$ на второй сомножитель, а на B индуцирована картанова геометрия η, относительно которой $\tilde{k}$ - морфизм картановых слоений (M,F) и $(\tilde{M},\tilde{F})$.

(2) Слоение (M, F) является $(Aut(B, \eta),B)$-слоением.

(3) Если, кроме того, глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли $Aut(B,\eta)$ и нормализатор $N(\Psi)$ равен централизатору $Z(\Psi)$ группы Ψ в $Aut(B,\eta)$, то имеет место равенство $A_B(M,F)\cong N(\Psi)/\Psi$.

Используя теорему 3, мы строим пример вычисления группы базовых автоморфизмов некоторого конформного слоения произвольной коразмерности q, где $q\geq 3$ на $(q+1)$-мерном многообразии. Другие примеры построены в [13].

2. Категория картановых слоений

Категория картановых геометрий Пусть G и H группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, причем H замкнутая подгруппа в G. Главное H-расслоение $P(N,H)$ над гладким многообразием N с проекцией $p:P\to N$ и $\mathfrak{g}$-значной 1-формой $\omega\in\Omega^1(P,\mathfrak{g})$, на-зывается *картановой геометрией* на N типа (G,H), если выполнены следующие условия:

(c_1) отображение $\omega_u:T_uP\to\mathfrak{g}$ $\forall$ $u\in P$ – изоморфизм векторных пространств;

(c_2) $\omega(A^*)=A$ для любого $A\in\mathfrak{h}$, где A^* – фундаментальное векторное поле;

(c_3) форма ω является H-эквивариантной, т.е. $R_h^*\omega = Ad_G(h^{-1})\omega$ для каждого $h\in H$, где $Ad_G:H\to GL(\mathfrak{g})$ присоединенное представление подгруппы Ли $H\subset G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$; При этом $\mathfrak{g}$-значная форма ω называется *картановой связностью*. Будем обозначать кар-танову геометрию типа (G,H) через $\xi=(P(N,H),\omega)$. Пара (N,ξ) – картаново многообразие.

Максимальная нормальная подгруппа K группы G, содержащаяся в H называется ядром пары (G,H). Обозначим алгебру Ли группы K через $\boldsymbol{\kappa}$. Картанова геометрия $\xi=(P(M,H),\omega)$ типа (G,H) моделируемая на паре групп Ли (G,H), называется эффективной, если ядро K пары (G,H) тривиально. Далее предполагаем, что все рассматриваемые картановы геометрии являются эффективными.

Пусть $\xi=(P(N,H),\omega)$ и $\xi'=(P'(N',H),\omega')$ две картановых геометрии со структурной группой H. Морфизмом из ξ в ξ' называют гладкое отображение $\Gamma:P\to P'$, для которого $\Gamma^*\omega'=\omega$ и $R_a\circ\Gamma=\Gamma\circ R_a$, $a\in H$. Категорию картановых геометрий обозначим через $\mathfrak{Car}$. Если $\Gamma\in Mor(\xi,\xi')$, тогда проекция $\gamma:N\to N'$ определена равенством $p'\circ\Gamma=\gamma\circ p$, где $p:P\to N$ и $p':P'\to N'$ – проекции, соответствующие H-расслоениям.

Проекция γ называется автоморфизмом картановых многообразий (N,ξ) и (N',ξ'). Обозначим через $Aut(N,\xi)$ группу всех автоморфизмов картанова многообразия (N,ξ), а через $A(\xi)$ – группу всех автоморфизмов картановой геометрии ξ. Пусть $A(P,\omega):=\{\Gamma\in Diff(P)\mid \Gamma^*\omega=\omega\}$ – группа автоморфизмов параллелизуемого многообразия (P,ω), которая, как известно, является группой Ли, причем $dim(A(P,\omega))\leq dim\ P$. Заметим, что $A(\xi)=\{\Gamma\in A(P,\omega)\mid \Gamma\circ R_a=R_a\circ\Gamma\}$ – замкнутая подгруппа группы Ли $A(P,\omega)$. Следовательно, $A(\xi)$ является группой Ли, причем определено отображение $\sigma:A(\xi)\to Aut(N,\xi)$: $\Gamma\longmapsto\gamma$, где γ – проекция автоморфизма Γ на N, которое в силу эффективности картановой геометрии, является изоморфизмом групп Ли.

Картановы слоения Пусть N – гладкое q-мерное, возможно не связное, многообразие и M - гладкое n-мерное многообразие, где $0<q<n$. Предположим, что многообразие N наделено картановой геометрией $\xi=(P(N,H),\omega)$. Пусть $p:P\to N$ – проекция H-расслоения. На каждом открытом подмножестве $V\subset N$ индуцирована картанова структура $\xi_V=(P_V(V,H),\omega_V)$ типа (G,H) такая, что $P_V:=p^{-1}(V)$ и $\omega_V:=\omega|_{P_V}$.

Напомним, что *(N,ξ)-коциклом* на M называется семейство $\zeta=\{U_i,f_i,\{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$ удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\{U_i|i\in J\}$ – открытое покрытие многообразия M открытыми связными подмножествами U_i из M, а f_i: $U_i\to N$ – субмерсии со связными слоями;

(2) если $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, $i,j\in J$, то существует изоморфизм $\Gamma_{ij}:\xi_{f_j(U_i\cap U_j)}\to\xi_{f_i(U_i\cap U_j)}$ картановых геометрий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i\cap U_j)$ и $f_i(U_i\cap U_j)$ такой, что проекция γ_{ij} изоморфизма Γ_{ij} удовлетворяет равенству $f_i=\gamma_{ij}\circ f_j$ на $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, $i,j\in J$;

(3) если $U_i\cap U_j\cap U_k\neq\varnothing$, $i,j,k\in J$, то $\gamma_{ij}\circ\gamma_{jk}=\gamma_{ik}$ для любого $x\in U_i\cap U_j\cap U_k$ и $\gamma_{ii}=id_{U_i}$.

Два (N,ξ)-коцикла называются эквивалентными, если существует (N,ξ)-коцикл, содержащий оба этих коцикла, который также является (N,ξ)-коциклом.

Пусть $[\{U_i,f_i,\{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}]$ – класс эквивалентности (N,ξ)-коцикла на многообразии M, содержащий коцикл ζ. Класс эквивалентности (N,ξ)-коциклов задает картаново слоение на многообразии M, следующим образом. Пусть семейство $\Sigma=\{f_i^{-1}(v)\,|\,v\in V_i,\,i\in J\}$ образует базу некоторой топологии τ в M. Компоненты линейной связности топологического пространства (M,τ) образуют разбиение $F:=\{L_\alpha\,|\,\alpha\in\mathfrak{J}\}$ многообразия M. Пара (M,F) называется *картановым слоением* коразмерности q моделлируемым на картановой геометрии $\xi=(P(N,H),\omega)$, которая называется трансверсальной для слоения *(M,F).* Подмножество $L_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{I}$ называются *слоями слоения (M,F)*. При этом говорят, что *(M,F)* задано *(N, ξ)*-коциклом ζ.

Морфизмы картановых слоений Пусть *(M,F)* и *(M',F')* – картановы слоения, определенные (N,ξ)-коциклом $\zeta=\{U_i,f_i,\{\gamma_{ij}\}\}$ и (N',ξ')-коциклом $\zeta'=\{U'_i,f'_i,\{\gamma'_{ij}\}\}$ соответственно. Все объекты, относящиеся к ζ' отмечены штрихом.

Пусть $f:M\to M'$ – гладкое отображение, которое является изоморфизмом в категории $\mathfrak{Fol}$. Следовательно, для любых $x\in M$ и $y:=f(x)$ существуют окрестности $U_k\ni x$ и $U'_s\ni y$ из ζ и ζ' соответственно и диффеоморфизм $\varphi:V_k\to V'_s$, где $V_k:=f_k(U_k)$ и $V'_s:=f'_s(U'_s)$, удовлетворяют соотношениям $f(U_k)=U'_s$ и $\varphi\circ f_k=f'_s\circ f|_{U_k}$. Далее мы будем использовать следующие обозначения: $P_k:=P|_{V_k},\ \ P'_s:=P'|_{V'_s}$ и $p_k:=p|_{P_k},\ \ p'_s:=p|_{P'_s}$

Говорят, что f сохраняет трансверсальную картанову геометрию, если каждый такой диффеоморфизм $\varphi:V_k\to V'_s$ является изоморфизмом индуцированных картановых геометрий (V_k,ξ_{V_k}) и $(V'_s,\xi'_{V'_s})$, т. е. если существует изоморфизм $\Phi:P_k\to P'_s$, в категории $\mathfrak{Car}$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & P_k \arrow[d, "p_k"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
M\supset U_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[dr, "f|_{U_k}"'] & V_k \arrow[dr, "\varphi"] & P'_s \arrow[d, "p'_s"] \\
 & M'\supset U'_s \arrow[r, "f'_s"] & V'_s
\end{tikzcd}$$

Подчеркнем, что в силу эффективности, трансверсальной картановой геометрии, с данной проекцией φ существует единственный изоморфизм $\Phi:P_k\to P'_s$ в категории $\mathfrak{Car}$. Данное определение Φ корректно, т.е. не зависит от выбора окрестностей U_k и U'_s из ζ и ζ'.

Определение 3. Под морфизмом двух картановых слоений *(M,F)* и *(M',F')* понимается, локальный диффеоморфизм $f:M\to M'$, отображающий слои в слои, и сохраняющий трансверсальную картанову структуру. Категория $\mathfrak{CF}$, объектами в которой являются картановы слоения, а морфизмами – морфизмы картановых слоений, называется *категорией картановых слоений.*

3. Связность Эресмана для слоений

Слоения со связностью Эресмана Р.А. Блюменталь и Дж. Дж. Хебда [14] ввели понятие связности Эресмана для слоения *(M,F)* как естественное обобщение связности Эресмана для субмерсий. Пусть *(M,F)* – слоение коразмерности *q* и *Q* – гладкое q-мерное распределение на M трансверсальное к слоению F. Кусочно-гладкие интегральные кривые распределения *Q* называются горизонтальными, а кусочно-гладкие кривые в слое называются вертикальными. Кусочно-гладкое отображение *H* квадрата $I_1\times I_2$ в *M* называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая $H|_{\{s\}\times I_2}$ является *вертикальной* для любого $s\in I_1$ и кривая $H|_{I_1\times\{t\}}$ является *горизонтальной* для любого $t \in I_2$. В этом случае, пара путей $(H|_{I_1\times\{0\}}, H|_{\{0\}\times I_2})$ называется базой H.

Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой. Распределение Q называется *связностью Эресмана* для слоения (M,F) если для любой пары путей (σ,h) в M с общей начальной точкой $\sigma(0) = h(0)$, где σ – горизонтальная кривая, а h – вертикальная кривая, существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ,h).

Простое слоение со связностью Эресмана Пусть $f{:}M\to N$ – субмерсия со связными слоям. Напомним, что слоение $F=\{p^{-1}(z),\ z \in N\}$, образованное слоями субмерсии, называется *простым слоением*. Пусть (M,F) – произвольное гладкое слоение связностью Эресмана. Если существует его накрытие $\widehat{k} : \widehat{M} \to M$ такое, что поднятое слоение $(\widehat{M},\widehat{F})$ является простым, то слоение (M,F) накрыто расслоением.

4. Классы слоений, накрытых расслоениями

(G,X)-слоения со связностью Эресмана Пусть X – гладкое связное многообразие и G – группа Ли диффеоморфизмов многообразия X. Напомним, что действие группы G на многообразии X называется *квази-аналитическим*, если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и элемента $g \in G$ равенство $g|_U = id|_U$ влечет $g=e$, где e – тождественное преобразование в X.

Предположим, что группа диффеоморфизмов G многообразия X действует на N квази-аналитически. Слоение (M, F) заданное (N,ξ)-коциклом $\{U_i,f_i,\{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$ называется (G,X)-слоением, если для каждого $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $i,j \in J$, существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{ij} = g|_{f_j(U_i\cap U_j)}$. Если, кроме того, (X,ξ) – картаново многообразие и группа G – подгруппа группы автоморфизмов $Aut(X,\xi)$, то (M,F) – картаново (G,X)-слоение. Из [7, Раздел VI] следует, что картановы (G,X)-слоения со связностью Эресмана, накрыты расслоениями.

Картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной Картаново слоение (M,F) типа (G,H), трансверсальная картанова кривизна которого равна нулю, является $(G,G/H)$-слоением и, если слоение (M,F) имеет связность Эресмана, то оно накрыто расслоением. Следовательно, все полученные результаты справедливы для картановых слоений с нулевой трансверсальной кривизной, допускающих связность Эресмана.

Конформные слоения коразмерности q, $q \geq 3$ Согласно [12, теорема 5], любое конформное слоение коразмерности q, $q \geq 3$ не являющееся римановым слоением и обладающее связностью Эресмана, накрыто расслоением и поэтому входит в класс исследуемых слоений.

Слоения с интегрируемой связностью Эресмана Напомним, что связность Эресмана Q для слоения (M,F) называется интегрируемой, если интегрируемо распределение Q. Слоения с интегрируемой связностью Эресмана накрыты расслоениями и входят в исследуемый нами класс слоений.

Надстроечные слоения Конструкция надстроечного слоения предложена А. Хефлигером и подробно описана в [15]. Заметим, что надстроечные слоения образуют класс слоений с интегрируемой связностью Эресмана и накрыты расслоениями.

Картаново слоение коразмерности *q=1* Любое гладкое одномерное распределение интегрируемо, поэтому, картаново слоение (M,F) коразмерности 1, допускающие связность Эресмана, накрыто расслоением.

5. Доказательство основных теорем

Регулярные накрывающие отображения

Определение 4. Пусть $f{:}M\to B$ – субмерсия. Говорят, что $\widehat{h}\in Diff(M)$ лежит над $h\in Diff(B)$ относительно f, если $h\circ f=f\circ\widehat{h}$.

Пусть $\widetilde{\kappa}:\widetilde{K}\to K$ – универсальное накрывающее отображение, где K и $\widetilde{K}$ – гладкие многообразия. По аналогии с теоремой 28.10 из [16], нетрудно показать, что для любого $h\in Diff(K)$ существует диффеоморфизм $\widetilde{h}\in Diff(\widetilde{K})$, лежащий над h. Для произвольного накрывающего отображения аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Нетрудно доказать следующий критерий существования поднятий произвольных диффеоморфизмов относительно регулярных накрытий.

Предложение 1. Пусть $\kappa:\widehat{K}\to K$ – гладкое регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Г. Диффеоморфизм $\widehat{h}\in Diff(\widehat{K})$ лежит над некоторым диффеоморфизмом $h\in Diff(K)$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет равенству $\Gamma\circ\widehat{h}=\widehat{h}\circ\Gamma$

Доказательство теоремы 1 Предположим, что *(M,F)* – картаново слоение, моделируемое на эффективной картановой геометрии $\xi=(P(N,H),\omega)$, накрыто расслоением $\widetilde{r}:\widetilde{M}\to B$, и $\widetilde{k}:\widetilde{M}\to M$ – универсальное накрытие. Расслоение $\widetilde{r}:\widetilde{M}\to B$ имеет связные слои и односвязное многообразие $\widetilde{M}$. Применяя точную гомотопическую последовательность для этого расслоения мы получаем, что его базовое многообразие B также односвязно.

Для произвольной точки $b\in B$ рассмотрим $y\in\widetilde{r}^{-1}(b)$ и $x=\widetilde{k}(y)$. Не нарушая общности, считаем, что существует окрестность U_i, $x\in U_i$, из (N,ξ)-коцикла $\{U_i,f_i,\{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, за-дающего слоение ($M,F$) и окрестность $\widetilde{U}_i$, $y\in\widetilde{U}_i$ такая, что $\widetilde{\kappa}|_{\widetilde{U}_i}:U_i\to U_i$ диффеоморфизм.

Пусть $\widetilde{V}_i:=\widetilde{r}(\widetilde{U}_i)$. Тогда определен диффеоморфизм $\phi:\widetilde{V}_i\to V_i$ удовлетворяющий равенству $\phi\circ\widetilde{r}|_{\widetilde{U}_i}=f_i\circ\widetilde{\kappa}|_{\widetilde{U}_i}$. Подчеркнем, что диффеоморфизм φ индуцированной карта-новой геометрии $\eta_{\widetilde{V}_i}$ на $\widetilde{V}_i$ будет также изоморфизмом $(\widetilde{V}_i,\eta_{\widetilde{V}_i})$ и (V_i,ξ_{V_i}) в категории кар-тановых геометрий $\mathfrak{Car}$. Прямая проверка показывает, что определенная на B геометрия η является картановой, причем $\eta|_{\widetilde{V}_i}=\eta_{\widetilde{V}_i},\ i\in J$. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Зафиксируем точки $x_0\in M$ и $y_0\in\widetilde{\kappa}^{-1}(x_0)\in\widetilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M,x_0)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\widetilde{M}$ как группа накрывающих преобразований $\widetilde{G}\cong\pi_1(M,x_0)$ накрытия $\widetilde{k}$. Так как $\widetilde{G}$ сохраняет индуцированное слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$, образованное слоями расслоения $\widetilde{r}:\widetilde{M}\to B$, то каждое преобразование $\widetilde{\psi}\in\widetilde{G}$ определяет диффеоморфизм

$\varphi \in Diff(B)$ многообразия *B*, удовлетворяющий равенству $\widetilde{r} \circ \widetilde{\psi} = \psi \circ \widetilde{r}$. Отображение $\chi : \widetilde{G} \to \Psi : \widetilde{\psi} \to \psi$ – эпиморфизм групп и утверждение (2) доказано.

Заметим, что $\widetilde{G}$ – подгруппа группы автоморфизмов $A(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ в категории $\mathfrak{CF}$. Следовательно Ψ – подгруппа группы автоморфизмов *Aut(B,η)* в категории картановых геометрий $\mathfrak{Car}$. Ядро *ker(χ)* отображения χ определяет фактор-многообразие $\widehat{M} := \widetilde{M}/\ker(\chi)$ с фактор-отображением $\widehat{\kappa} : \widetilde{M} \to \widehat{M}$ и фактор-группой $\widehat{G} := \widetilde{G}/\ker(\chi)$ такой, что $M \cong \widehat{M}/\widehat{G}$. Фактор-отображение $\kappa : \widehat{M} \to M$ – регулярное накрывающее отображение, причем $\widehat{G}$ действует на $\widehat{M}$ как группа накрывающих преобразований. Отображение $\theta : \widehat{G} \to \Psi : \widetilde{\psi} \cdot \ker(\chi) \mapsto \chi(\widetilde{\psi}),\ \widetilde{\psi} \in \widetilde{G}$ – изоморфизм групп, (3) доказано. □

Слоеное расслоение Пусть *(M,F)* – картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии *ξ=(P(N,H),ω)* типа *(G,H)*. Тогда определено главное *H*-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$, *H*-инвариантное слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и $\mathfrak{g}$-значная *H*-эквивариантная 1-форма β на $\mathcal{R}$ удовлеторяющие следующим условиям:

(i) $\beta(A^*)=A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$;

(ii) отображение $\beta_u : T_u\mathcal{R} \to \mathfrak{g}\ \forall u \in \mathcal{R}$ сюръективно, причем $ker(\beta_u) = T_u\mathcal{F}$;

(iii) слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ – трансверсально параллелизуемое;

(iv) $L_X\beta=0$ для каждого векторного поля X касательного к слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Главное *H*-расслоение $\mathcal{R}(M, H)$ называется *слоеным расслоением*, а слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ *поднятым слоением* для картанова слоения *(M, F)*.

Если поднятое слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образовано слоями локально тривиального расслоения $\pi_b : \mathcal{R} \to W$, то $W = \mathcal{R}/\mathcal{F}$ – гладкое многообразие, на котором индуцированы $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\widetilde{\beta}$, причем $\pi_b^*\widetilde{\beta} := \beta$, и локально свободное действие группы Ли H на *W*. При этом $(W, \widetilde{\beta})$ – параллелизуемое многообразие и $A(W, \widetilde{\beta})$ – группа Ли его автоморфизмов, свободно действующая на *W*. Далее, через $A^H(W, \widetilde{\beta})$ обозначается замкнутая подгруппа Ли группы Ли $A(W, \widetilde{\beta})$, образованная преобразованиями, коммутирующими с индуцированным действием группы Ли *H* на *W*.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что картаново слоение *(M,F)* накрыто расслоением. Тогда, слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\widetilde{k} : \widetilde{M} \to M$, определено слоями локально тривиального расслоения $\widetilde{r} : \widetilde{M} \to B$. Благодаря теореме 1, определены регулярное накрывающее отображение $\kappa : \widehat{M} \to M$ и локально тривиальное расслоение $r : \widehat{M} \to B$, причем *B* – односвязное многоообразие с индуцированной картановой геометрией η. Пусть Ψ – глобальная группа голономии слоения (M, F), тогда Ψ изоморфна группе накрывающих преобразований G накрытия $\kappa : \widehat{M} \to M$. Так как многообразие $\widetilde{M}$ односвязно, то существует универсальное накрывающее отображение $\widehat{\kappa} : \widetilde{M} \to \widehat{M}$, удовлетворяющее равенству $\kappa \circ \widehat{\kappa} = \widetilde{\kappa}$. Пусть $\widetilde{G}$, G и $\widehat{G}$ группы накрывающих преобразований для накрывающих отображений $\widetilde{k}$, k и $\widehat{\kappa}$, соответственно, причем $\Psi \cong G \cong \widetilde{G}/\widehat{G}$.

Рассмотрим следующие прообразы H-расслоения $\mathcal{R}$ относительно $\tilde{k}$ и k

$$\widetilde{\mathcal{R}} := \{(\widetilde{x}, u) \in \widetilde{M} \times \mathcal{R} \,|\, \widetilde{\kappa}(\widetilde{x}) = \pi(u)\} = \widetilde{\kappa}^* \mathcal{R} \ \ u$$

$$\widehat{\mathcal{R}} := \{(\widehat{x}, u) \in \widehat{M} \times \mathcal{R} \,|\, \kappa(\widehat{x}) = \pi(u)\} = \kappa^* \mathcal{R}.$$

Заметим, что

$$\widetilde{\theta} : \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R} : (\widetilde{x}, u) \mapsto (\widetilde{\kappa}(\widetilde{x}), u) \quad \forall (\widetilde{x}, u) \in \widetilde{\mathcal{R}},$$

$$\theta : \widehat{\mathcal{R}} \to \mathcal{R} : (\widehat{x}, u) \mapsto (\kappa(\widehat{x}), u) \quad \forall (\widehat{x}, u) \in \widehat{\mathcal{R}},$$

$$\widehat{\theta} : \widetilde{\mathcal{R}} \to \widehat{\mathcal{R}} : (\widetilde{x}, u) \mapsto (\widehat{\kappa}(\widetilde{x}), u) \quad \forall (\widetilde{x}, u) \in \widetilde{\mathcal{R}},$$

– регулярные накрывающие отображения с группами накрывающих преобразований $\widetilde{G}$, G и $\widehat{G}$ соответственно. Более того, $\widetilde{\Gamma} \cong \widetilde{G}$, $\Gamma \cong G$ и $\widehat{\Gamma} \cong \widehat{G}$

Пусть $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ и $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ соответствующие поднятые слоения. Так как $(\tilde{M}, \tilde{F})$ и $(\widehat{M}, \widehat{F})$ являюся простыми слоениями, то $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ и $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ также простые слоения, которые образованы локально тривиальными расслоениями $\widetilde{\pi}_b : \widetilde{\mathcal{R}} \to \widetilde{W}$ и $\widehat{\pi}_b : \widehat{\mathcal{R}} \to \widehat{W}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_0\,(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}}) = 0$, $\mathfrak{g}_0(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}}) = 0$, и $\widetilde{W} = \widetilde{\mathcal{R}}/\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widehat{W} = \widehat{\mathcal{R}}/\widehat{\mathcal{F}}$ – гладкие многообразия. Так как расслоения $\tilde{r}:\tilde{M} \to B$ и $r:\widehat{M} \to B$ имеют одинаковую базу B, то каждый слой слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ инвариантен относительно действия группы $\widehat{G}$, т.е. $\widehat{G} \subset A_L(\widetilde{M}, \widetilde{F})$. Поэтому, $\widehat{\Gamma} \subset A_L(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ и пространства слоев $\widetilde{\mathcal{R}}/\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{W}$ и $\widehat{\mathcal{R}}/\widehat{\mathcal{F}} = \widehat{W}$ совпадают, т.е. $\widetilde{W} = \widehat{W}$. Следовательно, группы базовых автоморфизмов $A_B(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ и $A_B(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ могут быть отождествлены, т.е. $A_B(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}}) = A_B(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$.

Согласно условиям доказываемой теоремы, Ψ – дискретная подгруппа группы Ли *Aut(B,η)*. Пусть *N*(Ψ) – нормализатор Ψ в группе Ли *Aut(B, η)*. Тогда, *N*(Ψ) замкнутая подгруппа Ли группы Ли *Aut(B,η)* и фактор-группа *N*(Ψ)/ Ψ также является группой Ли.

Пусть $\pi : \mathcal{R} \to M$ – проекция слоеного расслоения над (*M,F*). Благодаря дискретности глобальной группы голономии Ψ в группе Ли *Aut(B,η)* поднятое слоение $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения $\pi_b : \mathcal{R} \to W$, которое называется базовым. Подчеркнем, что существует отображение $\tau : \widehat{W} \to W$ удовлетворяющее равенству $\tau \circ \widehat{\pi}_b = \theta \circ \pi_b$. Непосредственная проверка показывает, что $\tau : \widehat{W} \to W$ – регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Φ, $\Phi \subset A^H(\widehat{W}, \widehat{\beta})$, причем *Φ* естественным образом изоморфна группам Ψ, *G* и *Γ*.

Обозначим через *η=(P(B,H),ω)* картанову геометрию с проекцией *p:P→B* на *B*, определенную в доказательстве теоремы 1. Заметим, что $\widehat{W} = P$ – пространство главного *H*-расслоения для картановой геометрии η. Так как $\kappa : \widehat{M} \to M$, $\theta : \widehat{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}$ и $\pi : \mathcal{R} \to M$ – морфизмы следующих слоений $\kappa : (\widehat{M}, \widehat{F}) \to (M, F)$, $\theta : (\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и $\pi : (\mathcal{R}, \mathcal{F}) \to (M, F)$ в категории слоений $\mathfrak{Fol}$, то определены отображения $\widehat{\tau} : B \to M/F$ и $s : W \to W/H \cong M/F$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P=\widehat{W} \arrow[rrrr, "\tau"] \arrow[ddd, "p"'] & & & & W \arrow[ddd, "s"] \\
& \widetilde{\kappa}^*\mathcal{R}=\widetilde{\mathcal{R}} \arrow[r, "\widehat{\theta}"'] \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_B"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & \kappa^*\mathcal{R}=\widehat{\mathcal{R}} \arrow[r, "\theta"'] \arrow[ull, "\widehat{\pi}_B"'] \arrow[d, "\widehat{\pi}"'] & \mathcal{R} \arrow[ur, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi"] & \\
& \widetilde{M} \arrow[r, "\widehat{\kappa}"] \arrow[dl, "\widetilde{r}"'] & \widehat{M} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dll, "r"] & M \arrow[dr, "q"] & \\
\widehat{M}/\widehat{F}=B \arrow[rrrr, "\widehat{\tau}"] & & & & M/F
\end{tikzcd}$$

Как доказано в [13,теорема 1], существуют изоморфизмы групп Ли $\varepsilon : A_B(M,F) \to im(\varepsilon) \subset A^H(W,\widetilde{\beta})$ и $\widehat{\varepsilon} : A_B(\widetilde{M},\widetilde{F}) = A_B(\widehat{M},\widehat{F}) \to im(\widehat{\varepsilon}) \subset A^H(\widehat{W},\widehat{\beta})$. Определим отображение $\Theta : im(\varepsilon) \to N(\Phi)/\Phi$ следующим образом. Возьмем произвольный элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W,\widetilde{\beta})$. Обозначим элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W,\widetilde{\beta})$ через $f \cdot A_L(M,F) \in A_B(M,F)$, где $f \in A(M,F)$. Так как $\widetilde{k}:\widetilde{M} \to M$ – универсальное накрывающее отображение, то существует диффеоморфизм $\widetilde{f} \in Diff(\widetilde{M})$ лежащий над f относительно. Заметим, что $\widetilde{f} \in A(\widetilde{M},\widetilde{F})$, тогда $\widetilde{f} \circ A_L(\widetilde{M},\widetilde{F}) \in A_B(\widetilde{M},\widetilde{F})$. Рассмотрим $\widehat{h} := \widehat{\varepsilon}(\widetilde{f} \cdot A_L(\widetilde{M},\widetilde{F})) \in im(\widehat{\varepsilon}) \subset A^H(\widehat{W},\widehat{\beta})$. Прямая проверка показывает, что $\widehat{h}$ лежит над *h* относительно τ. Напомним, что *Φ* – группа накрывающих преобразваний накрытия $\tau : \widehat{W} \to W$. Применяя предложение 1, мы получаем, что $\widehat{h} \in N(\Phi)$ и множество всех автоморфизмов $im(\widehat{\varepsilon})$ лежащих над *h* равно множеству всех преобразований из класса $\widehat{h} \cdot \Phi$. Положим $\Theta(h) := \widehat{h} \cdot \Phi \in N(\Phi)/\Phi$. Проверка показывает, что отображение $\Theta : im(\varepsilon) \to N(\Phi)/\Phi$ – мономорфизм групп.

Эффективность картановой геометрии *η=(P(B,H),ω)* на *B*, где $P = \widehat{W}$, влечет существование изоморфизма групп Ли $\sigma : A^H(\widehat{W},\widehat{\beta}) \to Aut(B,\eta)$. Заметим, что $\sigma(\Phi) = \Psi$ и $\sigma(N(\widetilde{\Phi})) = N(\Psi)$, следовательно существует индуцированный изоморфизм групп Ли $\widetilde{\sigma} : N(\Phi)/\Phi \to N(\Psi)/\Psi$. Тогда, композиция мономорфизмов групп Ли

$$\delta := \widetilde{\sigma} \circ \Theta \circ \varepsilon : A_B(M,F) \to N(\Psi)/\Psi$$

является требуемым мономорфизмом групп Ли. Благодаря единственности структуры группы Ли в группе базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$, и [13, теорема 1], образ $im(\delta)$ является открыто-замкнутой подгруппой фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$. □

Доказательство теоремы 3 (1) Согласно условиям доказываемой теоремы 3, *(M,F)* является *Q*-полным картановым слоением, причем распределение *Q* интегрируемо. В этом случае, существует *q*-мерное слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F}^t)$ такое, что $TF^t=Q$. Пусть $\widetilde{k}:\widetilde{M} \to M$ – универсальное накрывающее отображение. Из [15, Предложение 2] известно, что в этом случае *Q* является интегрируемой связностью Эресмана для слоения *(M,F)*.

Согласно теореме о разложении Касивабары [17], универсальное накрывающее многообразие равно произведению многообразий $\widetilde{M} = \widetilde{Q} \times B$, где $\widetilde{Q}$ – универсальное накрывающее многоообразие для любого слоя слоения *(M,F)*, а *B* – универсальное накры-вающее многоообразие для любого слоя слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F}^t)$. Определены индуцированные слоения $\widetilde{F} := \widetilde{\kappa}^* F = \{\widetilde{Q} \times \{y\} \,|\, y \in B\}$, $\widetilde{F}^t = \widetilde{\kappa}^* F^t = \{\{z\} \times B \,|\, z \in \widetilde{Q}\}$. Следовательно, *(M,F)* накрыто расслоением $\widetilde{s} : \widetilde{Q} \times B \to \widetilde{Q}$. Также как и в доказательстве теоремы 1, на многообразии B индуцируется картанова геометрия η такая, что *(M,F)* становится *(Aut(B, η),B)*-слоением.

(2) Пусть Ψ – глобальная группа голономии этого слоения. Предположим, что нормализатор *N*(Ψ) равен централизатору *Z*(Ψ) группы Ψ в группе *Aut(B,η)*. Так как слоение *(M,F^t)* накрыто расслоением $\widetilde{s} : \widetilde{Q} \times B \to \widetilde{Q}$, то для него определена глобальная группа голономии Ψ^t.

Зафиксируем точки $x_0 \in M$ и $(z_0, y_0) \in \widetilde{\kappa}^{-1}(x_0) \in \widetilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\widetilde{M} = \widetilde{Q} \times B$ как группа накрывающих преобразований $\widetilde{G} \cong \pi_1(M, x_0)$ накрытия $\widetilde{\kappa}$. Так как $\widetilde{G}$ сохраняет оба индуцированных слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ и $(\widetilde{M}, \widetilde{F}^t)$, то каждый элемент $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ может быть записан в виде $\widetilde{g} = (\psi^t, \psi)$, где ψ^t – преобразование из подгруппы Ψ^t в $Diff(\widetilde{Q}), \psi \in \Psi$ причем $\widetilde{g}(z, y) = (\psi^t(z), \psi(y)),\ (z, y) \in \widetilde{Q} \times B$. Отображения $\widetilde{\chi} : \widetilde{G} \to \Psi : \widetilde{g} = (\psi^t, \psi) \to \psi$ и $\widetilde{\chi}^t : \widetilde{G} \to \Psi^t : \widetilde{g} = (\psi^t, \psi) \to \psi^t$ являются эпиморфизмами указанных групп. Пусть *h* – любой элемент из класса смежности $h \circ \Psi \in N(\Psi)$. Так как $N(\Psi) = Z(\Psi)$, то мы получаем следующую цепочку равенств

$$\widetilde{g} \circ (id_{\widetilde{Q}}, h) = (\psi^t, \psi) \circ (id_{\widetilde{Q}}, h) = (\psi^t \circ id_{\widetilde{Q}}, \psi \circ h) =$$

$$(id_{\widetilde{Q}} \circ \psi^t, h \circ \psi) = (id_{\widetilde{Q}}, h) \circ (\psi^t, \psi) = (id_{\widetilde{Q}}, h) \circ \widetilde{g}$$

для любого $\widetilde{g} = (\psi^t, \psi) \in \widetilde{G}$, т.е. $\widetilde{G} \circ (id_{\widetilde{Q}}, h) = (id_{\widetilde{Q}}, h) \circ \widetilde{G}$. Следовательно, согласно предложению 1, диффеоморфизм $\widetilde{h}$ проектируется на *M*, т.е. существует такое преобра-зование $\widetilde{h} \in Diff(M)$, что $(id_{\widetilde{Q}}, h)$ лежит над $\widetilde{h}$ относительно универсального накрытия $\widetilde{\kappa} : \widetilde{M} \to M$. Используя принадлежность $(id_{\widetilde{Q}}, h) \in A(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, нетрудно проверить, что $\widetilde{h} \in A(M, F)$. Следовательно, отображение $\varepsilon : A_B(M, F) \to N(\Psi)/\Psi$, заданное равенством $\varepsilon(\widetilde{h} \cdot A_L(M, F)) = h$ является сюръективно. Таким образом, ε – изоморфизм групп Ли. □

6. Пример вычисления группы базовых автоморфизмов

Пусть $\mathbb{S}^q$ – *q*-мерная стандартная сфера, где $q \geq 3$. Отождествим $\mathbb{S}^q$ с $\mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$, где $\{\infty\}$ – бесконечно удаленная точка. Определим преобразование $\psi : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q$ равенством $\psi(z) = \lambda z$ для любого $z \in \mathbb{S}^q \cong \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$, где λ — действительное число, причем $0 < \lambda < 1$. Обозначим через $Conf(\mathbb{S}^q)$ группу Ли всех конформных преобразований сферы $\mathbb{S}^q$. Пусть $\Psi = <\psi>$, подгруппа группы $Conf(\mathbb{S}^q)$, порожденная преобразованием ψ, и изоморфная $\mathbb{Z}$. Определим действие группы целых чисел $\mathbb{Z}$ на произведении $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q$ равенством $n(t, z) = (t - n, \psi^n(z))$ для любых $n \in \mathbb{Z}$, $(t, z) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}$. Это действие свободное и собственно разрывное, поэтому определено многообразие орбит $M = \mathbb{R}^1 \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{S}^q$ и фактор-отображение $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q \to M$. Так как указанное действие сохраняет структуру произведения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q$, то определены два слоения (*M,F)* и *(M,F^t)*, накрытые тривиальными расслоениями $pr_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q$ и $pr_1 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q \to \mathbb{R}^1$ соответственно. Обозначим через $\chi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ и $\nu : \mathbb{S}^q \to \mathbb{S}^q/\Psi$ проекции на пространство орбит, а через

$r : M \to M/F$ – проекцию на пространство слоев сления *(M,F).* Наблюдения показывают, что топологические пространства *M/F* и $\mathbb{S}^q/\Psi$ гомеоморфны и удовлетворяют коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^1 \arrow[d, "\chi"'] & \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^q \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{S}^q \arrow[d, "\nu"'] \\
\mathbb{S}^1 & M \arrow[l, "p"] \arrow[r, "r"'] & \mathbb{S}^q/\Psi \cong M/F
\end{tikzcd}$$

где $p : M \to \mathbb{S}^1$ – проекция локально тривиального расслоения, образованного слоями *(M,F*^{t}*).* Так как многообразие *M* является пространством локально тривиального расслоения над окружностью $\mathbb{S}^1$ с компактным стандартным слоем $\mathbb{S}^q$, то *M* – компактно.

Распределение *Q* касательное к слоям слоения *(M,F*^{t}*),* является интегрируемой связностью Эресмана для слоения *(M,F).* Слоение *(M,F)* имеет два компактных слоя L_1 и L_2, диффеоморфные окружности, любой другой слой *L* диффеоморфен прямой, а его замыкание равно объединению LUL_1UL_2. Подчеркнем, что (*M,F*) – конфорное слоение, которое можно рассматривать как картаново типа (*G,H*), где $G = Conf(\mathbb{S}^q)$, а *H* – стационарная подгруппа группы $Conf(\mathbb{S}^q)$ в некоторой точке из $\mathbb{S}^q$. Как известно, $H \cong CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ – полупрямое произведение конформной группы $CO(q) = \mathbb{R}^+ \times O(q)$ и нормальной абелевой подгруппы $\mathbb{R}^q$. Заметим, что Ψ – глобальная группа голономии слоения (*M,F*), причем Ψ – дискретная подгруппа группы Ли $Conf(\mathbb{S}^q)$.

Нетрудно проверить, что нормализатор группы Ψ равен $N(\Psi) = \mathbb{R}^+ \times O(q)$ и совпадает и централизатором $Z(\Psi)$. Применяя теорему 3, мы получаем, что группа базовых автоморфизмов A_B*(M,*F) является группой Ли изоморфной фактор-группе $N(\Psi)/\Psi \cong U(1) \times O(q)$, где $U(1) \cong \mathbb{S}^1$. Таким образом, группа Ли базовых автоморфизмов A_B*(M,F)* изоморфна произведению групп Ли $U(1) \times O(q)$.

Благодарности. Выражаю благодарность Н.И. Жуковой за полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2009-1931.

Библиографический список.

1. **Кобаяси, Ш.** Группы преобразований в дифференциальной геометрии / М.: Наука, 1995.
2. **Скляренко, Е.Г.** К пятой проблеме Гильберта/ Проблемы Гильберта, под редакцией П. С. Александрова. – 1969. – С. 101–115.
3. **Chu, H.** The automorphism group of a geometric structure./ H. Chu H., S. Kobayashi // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – 113 – P. 141–150.
4. **Cap, A.** Parabolic Geometries. I. Background and General Theory/ A., Cap, J. Slovak // Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society. – Providence, RI, 2009.
5. **Sharpe, R.W.** Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Progpam. Graduate Texts in Mathematics/ R.W. Sharpe// Springer-Verlag, New York, 1997.
6. **Crampin, M.** Cartan Geometries and their Symmetries, A Lie Algebroid Approach./ M. Crampin, D. Saunders// ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry 4. – 2016.
7. **Bazaikin Y.V.** Chaos in Cartan foliations / Y. V. Bazaikin, A. S. Galaev, N. Zhukova//Chaos. – 2020. –Vol.30. – P.1–9.
8. **Pecastaing V.** Om two theorems about local automorphisms of geometric structures/ V. Pecastaing// Ann. Int. Fourier, Grenoble. – 2016. – 66. – no. 1. – 175–208.

9. **Cap A.** Holonomy reductions of Cartan geometries and curved orbit decompositions/ A. Cap, A. R. Gover, and M. Hammerl// Duke Math. J. – 2014. – V. 163. – 1035–1070.
10. **Jennen H.** Cartan geometry of spacetimes with a nonconstant cosmological function A/H. Jennen// arXiv:1406. 2621v2[gr-qc]. Physics. REV. D 90, 084046. – 2014.
11. **Белько И.В.** Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением / И.В.Белько // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, № 2. – С. 181–195.
12. **Zhukova N. I.** Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms/ N. I. Zhukova // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys.–2009–2–P. 14–35.
13. **Sheina K. I.** The Groups of Basic Automorphisms of Complete Cartan Foliations / K. I. Sheina, N. I. Zhukova // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2018. - Vol. 39. - No. 2. - P. 271–280.
14. **Blumenthal R. A.** Ehresmann connections for foliations/ R. A. Blumenthal, J. J. Hebda// Indiana Univ. Math. J. – 1984 – 33:4. – P. 597–611.
15. **Жукова Н. И.** Минимальные множества картановых слоений/ Н. И. Жукова// Тр. МИАН. –2007.–256.С. 105–135.
16. **Busemann H.** The geometry of geodesics/ H. Busemann// Academic Press, New York. – 2011.
17. **Kashiwabara S.** The decomposition of differential manifolds and its applications/ S. Kashiwabara// Tohoku Math. J. – 1959. – 11. P. 43–53.

References

1. Kobayashi S. Springer-Verlag, New York, 1995.
2. Skljarenko E.G. Hilbert's Problems, edited by P. S. Alexandrov. 1969. P. 101–115.
3. Chu H., Kobayashi S. Trans. Amer. Math. Soc. 1964. 113. P. 141–150.
4. Cap A., Slovak J. Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society. Providence, RI, 2009.
5. Sharpe R.W. Springer-Verlag, New York, 1997.
6. Crampin M., Saunders D. ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry 4. 2016.
7. Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. Chaos. 2020. Vol. 30. P. 1–9.
8. Pecastaing V. Ann. Int. Fourier, Grenoble. 2016. 66 no. 1, 175–208.
9. Cap A., Gover A. R., Hammerl M. Duke Math. J., 2014. Vol. 163. P. 1035–1070.
10. Jennen H. arXiv:1406. 2621v2[gr-qc]. Physics. REV. D 90, 084046. 2014.
11. Belko I.V. Math. USSRSb. 1983. 45. 191–204.
12. Zhukova N.I. Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Ser. Math. Inf. Sci. Phys. 2009.2. P. 14–35.
13. Sheina K. I., Zhukova N. I. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. No. 2. P. 271–280.
14. Blumenthal R. A., Hebda, J. J. Indiana Univ. Math. J. 1984. 33:4. P. 597–611.
15. Zhukova N.I. Proc. Steklov Inst. Math., 2007, 256(1), 105–135
16. Busemann H. Academic Press, New York, 2011.
17. Kashiwabara S. Tohoku Math. J. 1959. 11, 43–53.

Шеина Ксения Игоревна
аспирантка, Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
(Россия, г. Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25/12)

Sheina Kseniya Igorevna
graduate student, National
Research University“Higher
School of Economics”
(25/12 Bolshaya Pecherskaya
street, Nizhny Novgorod, Russia)

E-mail: ksheina@hse.ru