МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Тольяттинский государственный университет

ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник трудов
IV Международной научной конференции
«Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе»
(к 80-летию Е.В. Потоскуева)

29-30 ноября 2019 года

Тольятти
Издательство ТГУ
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
«Тольяттинский государственный университет»

ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник трудов
IV Международной научной конференции
«Геометрия и геометрическое образование
в современной средней и высшей школе»
(к 80-летию Е.В. Потоскуева)

29-30 ноября 2019 года

Тольятти
Издательство ТГУ
2020

УДК 372.8:51 +378+514
ББК 22.1 +74.22+74.58
Г35

Г 35 Геометрия и геометрическое образование**:** сборник трудов IV международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 29 – 30 ноября 2019 года /под общ. ред. Р.А. Утеевой. − Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. − 268 с.

Сборник содержит статьи, представленные на конференцию и одобренные редакционной коллегией.

Сборник адресован специалистам, преподавателям и учителям математики, докторантам, аспирантам и студентам.

Конференция включена в план проведения научных конференций, совещаний и семинаров Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в 2019 году.

ISBN

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF RUSSION FEDERATION

TOGLIATTI STATE UNIVERSITY

GEOMETRY AND GEOMETRIC EDUCATION

Collected articles

IV International Scientific Conference
«Geometry and geometric education»
(dedicated to the 80th anniversary of E.V. Potoskuev)

November, 29 -30, 2019 year

Togliatti 2020

ОБРАЩЕНИЕ К УЧАСТНИКАМ
IV международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе»
(к 80- летию Е.В. Потоскуева)

Уважаемые участники IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе»!

Оргкомитет конференции рад приветствовать всех участников в стенах нашего Тольяттинского государственного университета!

Точкой отсчета конференции является ***26-28 ноября 2009 г.,*** в эти дни был проведен Всероссийский научно-методический семинар с обозначенным выше названием в честь 70-летнего юбилея *Евгения Викторовича Потоскуева* – профессора кафедры «Алгебра и геометрия» нашего университета, кандидата физико-математических наук, автора УМК по геометрии для 10-11 классов с углубленным и профильным изучением математики.

В решениях Всероссийского семинара было отмечено следующее:

− придать семинару статус *первой* Международной научной конференции с названием «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе»;

− проводить такую конференцию с интервалом в три года, приурочив её к юбилейной дате ученого-геометра или методиста.

Вторая международная конференция проведена ***22-25 ноября 2012 года.*** Она была посвящена 70- летнему юбилею известного ученого методиста, доктора педагогических наук, профессора, автора учебников по геометрии, включенных в Федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки РФ на 2011/2012 уч.г., заведующего кафедрой теории и методики обучения математике Московского педагогического государственного университета (МПГУ, Москва) – *Валерия Александровича Гусева.*

Третья Международная научная конференция состоялась ***26-28 ноября 2014 года*** в честь 75-летия профессора кафедры *Евгения Викторовича Потоскуева*, автора УМК для 10-11 классов, предназначенного для изучения предмета на углубленном уровне. Учебники «Геометрия 10-11 классы» соответствуют ФГОС среднего (полного) общего образования, имеют гриф «Рекомендовано» и включены в Федеральный перечень учебников.

В основу конференций положен следующий *тезис:* «Для нормального развития ребенку необходимо полноценное питание. Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища. Сегодня математика, особенно геометрия, является одним из немногих экологически чистых и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования. *Геометрия – витамин для мозга*» (И.Ф. Шарыгин).

Для участия в IV конференции заявлены ученые, преподаватели вузов, учителя математики, докторанты, аспиранты, магистранты и студенты из 9 стран: Азербайджан, Беларусь, ДНР, Казахстан, Киргизия, Молдова (Приднестровье), Россия, Туркменистан, Украина.

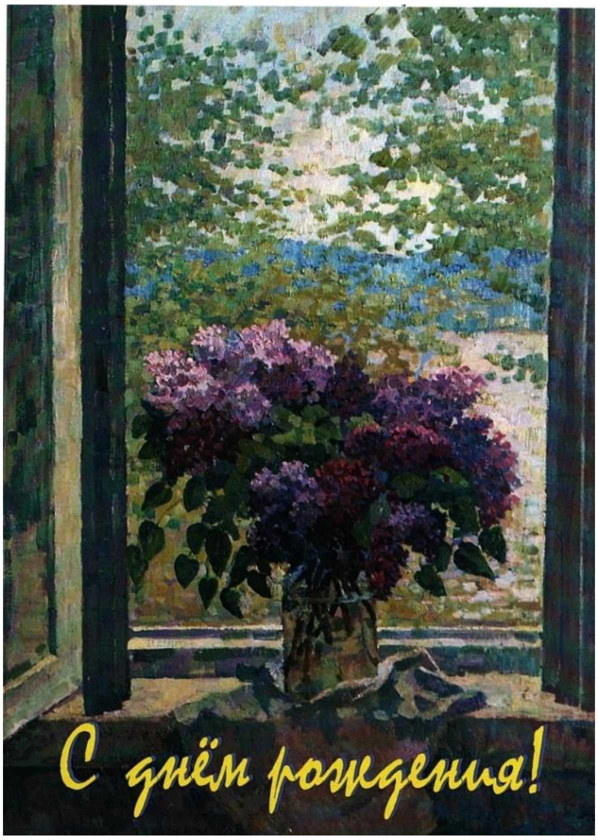
Российские участники конференции представлены городами: Армавир, Астрахань, Брянск, Волгоград, Димитровград, Елец, Казань, Москва, Нижний Новгород, Новосибирск, Орехово-Зуево, Пенза, Ростов-на-Дону, Самара, Санкт-Петербург, Саратов, Стерлитамак, Тольятти, Ульяновск, Ялта, Ярославль.

Второй раз в рамках IV международной научной конференции проводится конкурс научно-исследовательских работ студентов и аспирантов.

Желаем участникам конференции плодотворной работы в обсуждении проблем геометрии и геометрического образования, продуктивного профессионального и неформального общения!

Научный руководитель конференции: д.п.н., профессор,
зав. кафедрой «Высшая математика и математическое образование» Р.А. Утеева

Поздравительные адреса юбиляру в честь 80-летнего юбилея



Глубокоуважаемый Евгений Викторович!

В день Вашего юбилея примите самые искренние поздравления!

От всего сердца желаю Вам доброго здоровья, благополучия, душевного равновесия и безграничной веры в завтрашний день!

Пусть Ваш непростой, но столь благородный труд всегда отзывается признательностью и благодарностью от студентов!

Счастья Вам, непреходящей уверенности в своих силах и неизменно светлого неба над головой!

Ректор Тольяттинского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор М.М. Криштал

Уважаемый Евгений Викторович!

Вы известны в России как крупный математик-методист, посвятивший себя проблемам углубленного обучения математике в школе.

Вы прошли долгий трудовой путь от учителя математики до профессора кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета. В своей многолетней трудовой деятельности Вы проявили себя как талантливый ученый, автор многочисленных учебников, задачников и учебных пособий, успешно применяющихся в школах страны, много сделали и делаете для повышения развивающегося потенциала системы математического образования России.

За высокий профессионализм, большой вклад в совершенствование отечественной системы школьного математического образования, заслуги в научно-педагогической деятельности по подготовке будущих учителей математики Вы неоднократно отмечались памятными знаками и грамотами. Студенты и преподаватели нашего университета, учителя математики региона неизменно используют в своей деятельности, написанные Вами учебники и учебные пособия по обучению школьников методам решения математических задач.

Желаем Вам, Евгений Викторович, крепкого здоровья, оптимизма и дальнейших успехов в Вашей деятельности! Пусть не покидают Вас на этом пути упорство и терпение, вдохновение и творческая энергия, искреннее желание изменить нашу жизнь к лучшему! Долгих Вам лет жизни, плодотворных и насыщенных яркими и важными событиями!

Ректор Пензенского государственного университета, кандидат юридических наук, доцент А.Д. Гуляков

Глубокоуважаемый профессор Евгений Викторович!

Вы широко известны в России и за рубежом как автор учебников геометрии для классов с углубленным и профильным изучением математики и многочисленных учебных и методических пособий для школьников и студентов. Ваши учебные книги и методические исследования в области обучения геометрии всегда актуальны и востребованы, особенно сейчас в условиях реформирования школьного и высшего образования. Поэтому не случайно Вам и Вашему творчеству посвящен целый цикл публикаций, свидетельствующих о высокой значимости Вашей научно-методической и преподавательской деятельности во благо отечественного образования!

Ваши замечательные личные качества как ученого-педагога и человека вдохновляют Ваших коллег и учеников следовать яркому жизненному примеру беззаветного служения делу подготовки высококвалифицированных педагогических кадров в области математического образования!

В день Вашего 80-летнего Юбилея, приуроченного к IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе», мы присоединяемся к поздравлениям с Юбилеем и пожеланиям участников конференции и всей широкой педагогической общественности! От лица преподавательского коллектива Российского государственного профессионально-педагогического университета поздравляю Вас, Евгений Викторович, с этим замечательным Юбилеем! Мы желаем Вам доброго здоровья, благополучия, еще долгих лет жизни и новых творческих успехов во благо нашего образования!

Ректор РГППУ, доктор педагогических наук, профессор Е.М. Дорожкин

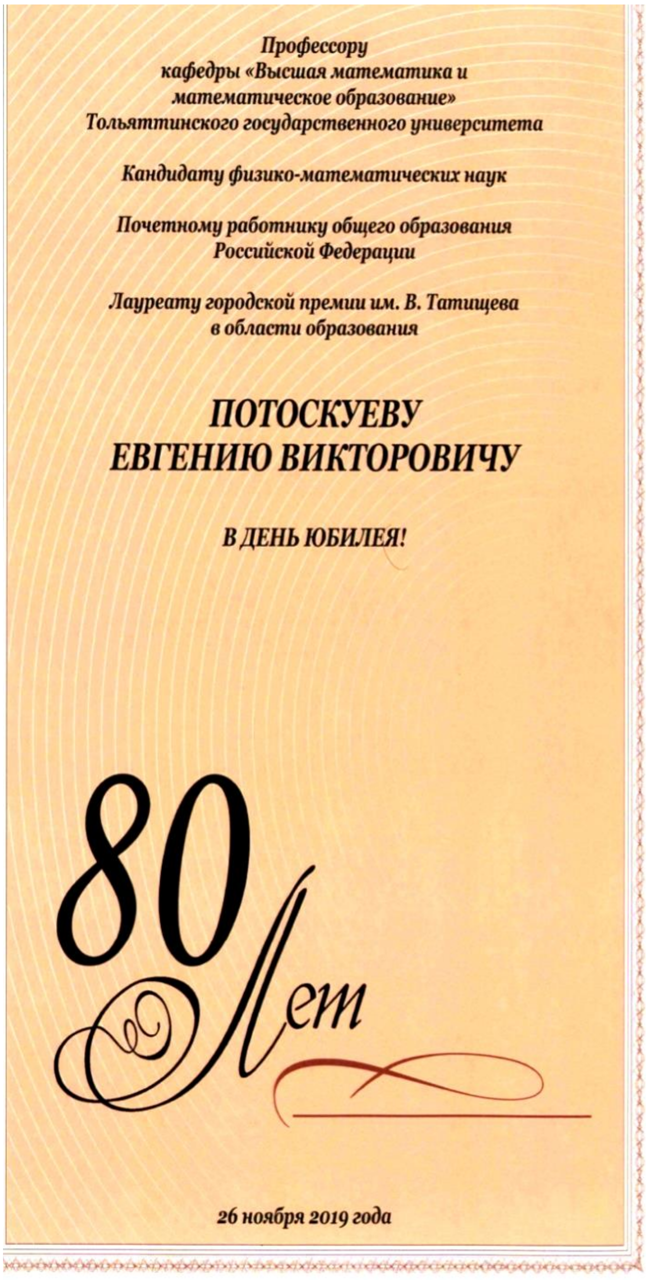
Уважаемый Евгений Викторович!

От имени коллектива профессорско-преподавательского состава, студентов, ректората и Ученого Совета Волгоградского государственного социально-педагогического университета сердечно поздравляю Вас с замечательным юбилеем.

Трудно переоценить Ваш вклад в развитие школьного математического образования. Вы являетесь автором ряда учебников и учебных пособий по математике для средней школы, Ваши учебники по геометрии входят в Федеральный комплект. Вы прошли славный путь профессионального становления. В 1962 г. окончили физико-математический факультет Кировского государственного педагогического института им. В.И. Ленина, в 1967 – аспирантуру при кафедре геометрии Ярославского государственного педагогического института им. К.Д. Ушинского. Занятия вели известные ученые-геометры: А.М. Лопшиц, Б.А. Розенфельд, Н.М. Бескин, Н.Ф. Четверухин, И.М. Яглом и др. С 1967 по 1973 гг. работали старшим преподавателем Вологодского государственного педагогического института, затем – доцентом, зав.кафедрой Запорожского государственного педагогического института, Тобольского государственного педагогического института. С 1989 г. Ваша профессиональная деятельность связана с г. Тольятти в качестве старшего преподавателя, декана физико-математического факультета Тольяттинского филиала Самарского государственного педагогического университета, с 2008 г. – профессора кафедры алгебры и геометрии, высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета. Вы подготовили более 70 победителей и призёров различных математических олимпиад учащихся школ г. Тольятти. В 2000 г. издательством

«Дрофа» издан сборник задач с Вашим участием «Геометрия. 8-11 кл.». Первое издание учебников и задачников «Геометрия» для 10 и 11 классов вышло в 2003 году. Вы постоянно читаете лекции на областных и региональных семинарах учителям математики, студентам во многих городах России, в том числе - в Волгоградской области.

Доброго Вам здоровья, многих лет жизни и новых свершений в благородном деле науки и просвещения.



Профессору
кафедры «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинского государственного университета

Кандидату физико-математических наук

Почетному работнику общего образования Российской Федерации

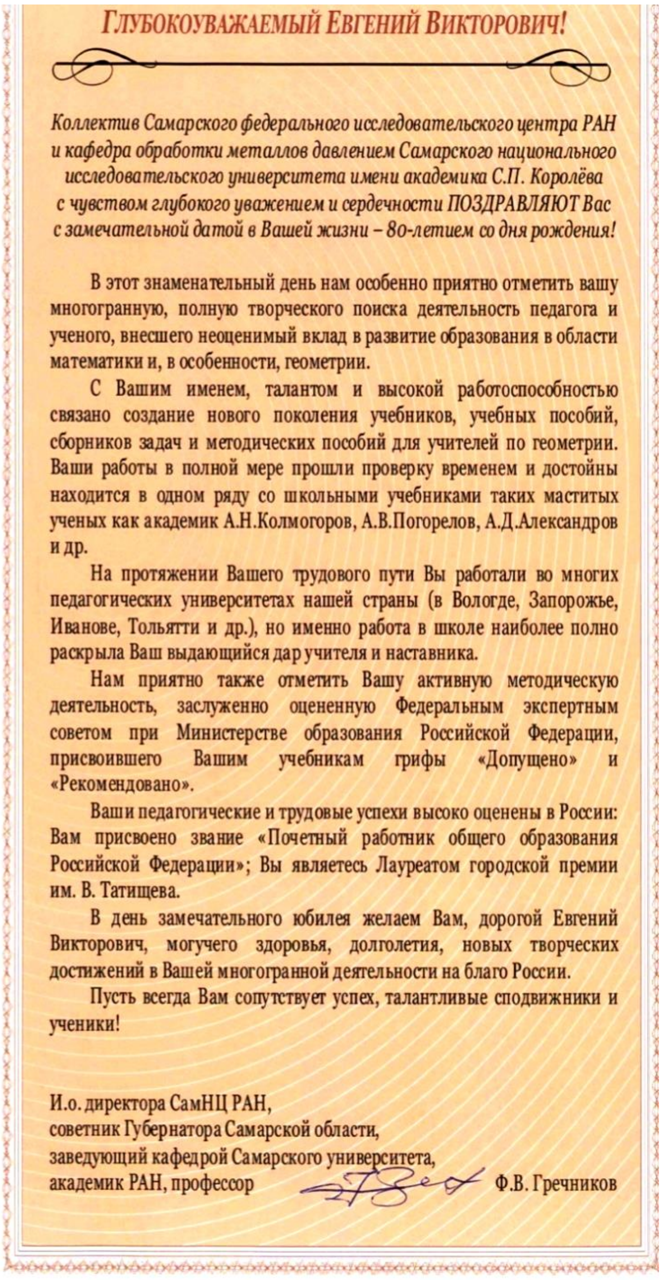
Лауреату городской премии им. В. Татищева в области образования

ПОТОСКУЕВУ
ЕВГЕНИЮ ВИКТОРОВИЧУ

В ДЕНЬ ЮБИЛЕЯ!

80 Лет

26 ноября 2019 года



ГЛУБОКОУВАЖАЕМЫЙ ЕВГЕНИЙ ВИКТОРОВИЧ!

Коллектив Самарского федерального исследовательского центра РАН и кафедра обработки металлов давлением Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва с чувством глубокого уважением и сердечности ПОЗДРАВЛЯЮТ Вас с замечательной датой в Вашей жизни – 80-летием со дня рождения!

В этот знаменательный день нам особенно приятно отметить вашу многогранную, полную творческого поиска деятельность педагога и ученого, внесшего неоценимый вклад в развитие образования в области математики и, в особенности, геометрии.

С Вашим именем, талантом и высокой работоспособностью связано создание нового поколения учебников, учебных пособий, сборников задач и методических пособий для учителей по геометрии. Ваши работы в полной мере прошли проверку временем и достойны находится в одном ряду со школьными учебниками таких маститых ученых как академик А.Н.Колмогоров, А.В.Погорелов, А.Д.Александров и др.

На протяжении Вашего трудового пути Вы работали во многих педагогических университетах нашей страны (в Вологде, Запорожье, Иванове, Тольятти и др.), но именно работа в школе наиболее полно раскрыла Ваш выдающийся дар учителя и наставника.

Нам приятно также отметить Вашу активную методическую деятельность, заслуженно оцененную Федеральным экспертным советом при Министерстве образования Российской Федерации, присвоившего Вашим учебникам грифы «Допущено» и «Рекомендовано».

Ваши педагогические и трудовые успехи высоко оценены в России: Вам присвоено звание «Почетный работник общего образования Российской Федерации»; Вы являетесь Лауреатом городской премии им. В. Татищева.

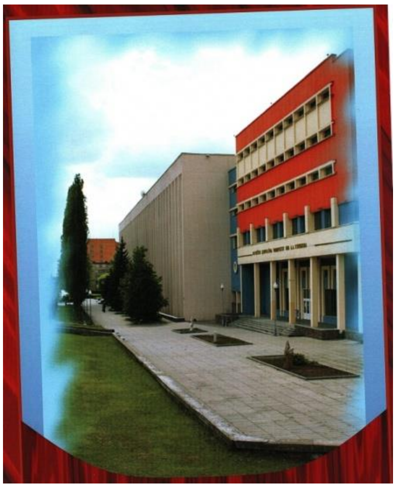
В день замечательного юбилея желаем Вам, дорогой Евгений Викторович, могучего здоровья, долголетия, новых творческих достижений в Вашей многогранной деятельности на благо России.

Пусть всегда Вам сопутствует успех, талантливые сподвижники и ученики!

И.о. директора СамНЦ РАН,
советник Губернатора Самарской области,
заведующий кафедрой Самарского университета,
академик РАН, профессор Ф.В. Гречников

Ректор Волгоградского государственного
социально-педагогического университета,
доктор педагогических наук, профессор А.М. Коротков

Уважаемый Евгений Викторович!



Сердечно поздравляем Вас с Юбилеем! Это настоящий талант – быть профессионалом своего дела!

Вы внесли неоценимый вклад в развитие геометрического образования свой страны. Разработанные Вами учебно-методические комплексы по геометрии для 10-11 классов с углубленным и профильным изучением математики, хрестоматия «Педагогическая поэма» известны не только в России, но и в Республике Беларусь.

Ваш трудовой путь является ярким примером самоотверженного служения геометрии. Несколько поколений ученых и учителей-практиков смогли сохранить и преумножить славные традиции одной из лучших в Самарской области геометрических школ, начало которой было положено именно Вами, чей труд был по достоинству оценен не одним поколением учителей математики.

Позвольте пожелать Вам, Евгений Викторович, здоровья, творческой энергии, целеустремленности, дальнейшего развития и успехов во всех начинаниях!

Проректор по научной работе
Могилевского Государственного Университета имени А.А. Кулешова,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.В. Тимощенко

Поздравительный адрес юбиляру от Могилевского государственного университета имени А. А. Кулешова вручает заведующий кафедрой методики преподавания математики, кандидат педагогических наук, доцент Гостевич Татьяна Васильевна (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

Уважаемый Евгений Викторович!

Коллектив издательство «Дрофа» сердечно поздравляет Вас с юбилеем! Искренне желаем Вам неиссякаемой творческой энергии, новых идей и свершений! Пусть Ваша жизнь будет наполнена новыми приятными впечатлениями, встречами с интересными людьми. Желаем Вам и в будущем оставаться таким же активным и жизнерадостным. Пусть Ваш опыт и знания всегда находят воплощение в Ваших книгах. Искренне благодарим Вас за Ваш труд на нелегком поприще создания учебников для подрастающего поколения.

Главный редактор Р.Г. Гагкуев. Москва, 26 ноября, 2019 год

Первые учебники, задачники и методические пособия к ним Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича для классов с углубленным и профильным изучением математики / Под науч. ред. А.Р. Рязановского. Допущены Министерством образования РФ. Москва. - Дрофа, 2003

Дорогой Евгений Викторович!

Примите самые сердечные поздравления от коллектива Издательства ИЛЕКСА по случаю дня Вашего рождения!

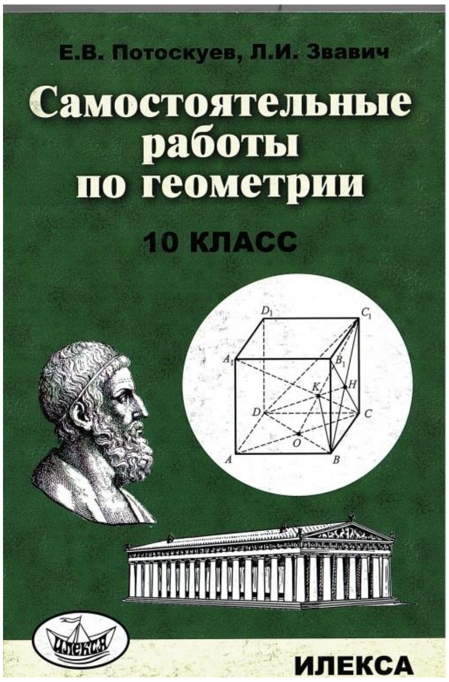
С удовольствием вспоминаем совместную работу по подготовке к изданию Ваших пособий в нашем издательстве. Она не всегда протекала гладко, были и серьёзные споры и недоразумения, но такая кропотливая работа позволила выпустить по настоящему качественные книги.

От всей души желаем Вам долгих и счастливых лет жизни в полном здравии и в окружении любящих Вас людей. Интересных, продуктивных идей и возможностей для их воплощения, бодрости духа и отличного настроения! Ваши профессиональные навыки и творческий подход помогли создать поистине уникальные учебники и учебные пособия по геометрии. Пусть дело, которому Вы отдаете душевные силы, опыт и знания, приносит радость и желание новых профессиональных свершений.

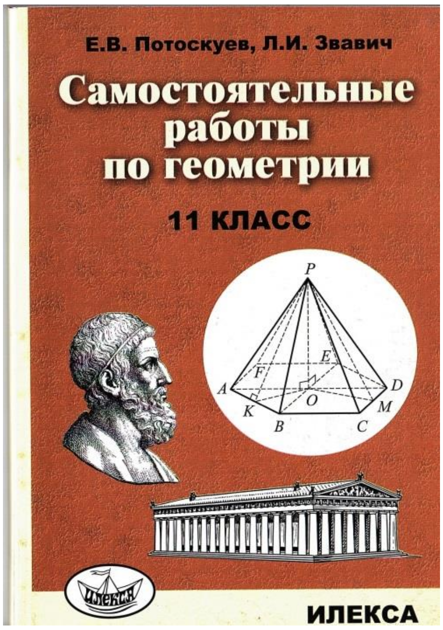
От имени всего коллектива,

Генеральный директор Издательства ИЛЕКСА

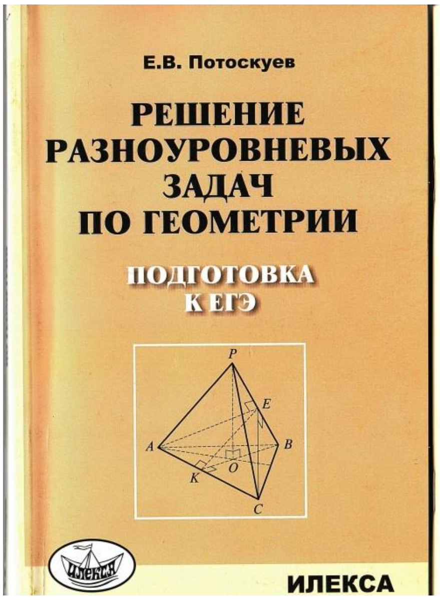
В.Б. Кожевников

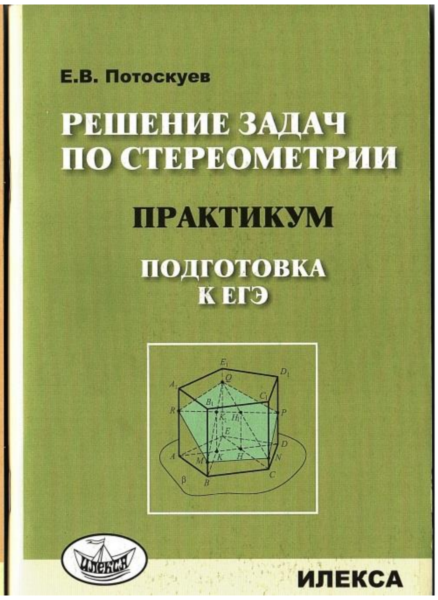


Учебное пособие, 2017.134 с.



Учебное пособие,2017.120 с





Учебно-методическое пособие 2016 г. 171 с.

Практикум,2014. 108с.

Уважаемый Евгений Викторович!

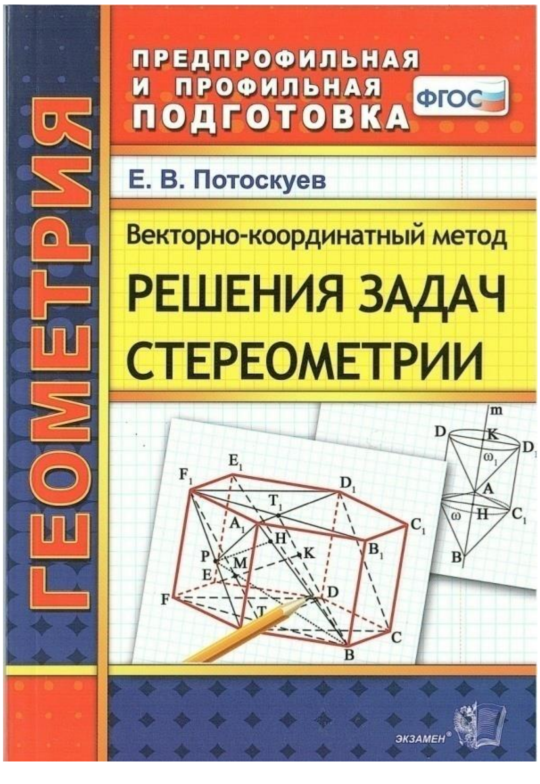
Примите наши самые искренние поздравления в день Вашего 80-летия!

Судьба связала Вас с российским образованием, и служению ему посвящены многие годы Вашей жизни. Вы принимаете активное участие в решении важных образовательных задач, оказываете непосредственное влияние на обеспечение образовательных организаций качественно подготовленными книгами.

Большая трудоспособность и высокий профессионализм – Ваши отличительные качества. А неравнодушие, готовность всегда оказать поддержку снискали Вам заслуженный авторитет и искреннее уважение среди коллег и партнеров.

И сегодня Вы полны энергии и оптимизма, Ваш накопленный опыт, знания позволят сделать еще много добрых дел на благо отечественного образования. От всей души желаем Вам крепкого здоровья на долгие годы, благополучия семье и близким, успехов в Вашей ответственной работе!

Коллектив издательства ***«Экзамен»***



Учебное пособие.2019. 223 с.

Учебное пособие.2020 г. 223 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ

ПОЧЕТНАЯ ГРАМОТА

НАГРАЖДАЕТСЯ

ПОТОСКУЕВ
Евгений Викторович,

профессор кафедры
«Высшая математика и математическое образование»
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»,
кандидат физико-математических наук,

за многолетний добросовестный труд,
значительный вклад в развитие системы
высшего образования Самарской области
и в связи с юбилеем

Министр В.А.Акопьян

«12» ... 20...

Распоряжение № ...

г. Самара

Вручение Почетной грамоты
от Департамента образования
администрации г. о. Тольятти
(г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

ПОЗДРАВЛЕНИЯ И БЛАГОДАРНОСТИ ЕВГЕНИЮ ВИКТОРОВИЧУ ОТ ЕГО УЧЕНИКОВ И СТУДЕНТОВ В ДЕНЬ 80-летнего ЮБИЛЕЯ

Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.

Выпускники первого выпуска лицея №51г. Тольятти

Выпускники первого выпуска специалитета 1993 года

Выпускники магистратуры ТГУ

В честь Евгения Викторовича магистрант назвала сына Евгением

КОРОТКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ

Дворянинов Сергей Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент
Россия, г. Москва, dvoryan@yandex.ru

Идет 50-й год с момента моей первой встречи с Евгением Викторовичем. В конце апреля 1970 года в Симферополе, в поселке Лозовое, проходила Всероссийская математическая олимпиада школьников. Я был десятиклассником от Куйбышевской области, а Евгений Викторович руководил командой школьников из Ярославля.

Прошли годы, и вот в Тольятти, в одной из школ поселка Шлюзовой, проходит финал Самарской областной олимпиады. Мы встретились вновь. Опять проходит время, работаю в СИПКРО. Поездки по всей области. Очень много курсов в Тольятти. Требуются помощь и поддержка. Звоню Евгению Викторовичу, приезжаю к нему домой, приглашаю работать с учителями области. Ура! Получаю отклик!

Так, Евгений Викторович на несколько лет стал доцентом СИПКРО. Геометрическое направление в работе кафедры математического образования СИПКРО обеспечено в полной мере. Часто Евгений Викторович рассказывал о своих аспирантских годах, о своем учителе Захаре Александровиче Скопеце, о встречах с Ягломом, Лопшицем, Колмогоровым, которые приезжали в те годы в Ярославль. Мечтаю, чтобы Евгений Викторович свои воспоминания написал. Они уникальны!

Евгений Викторович читает лекции и в Самаре, и во многих районах области. Его статьи учителя математики находят в журнале "Математика в школе", газете «Математика» издательства «Первое сентября».

Через какое-то время − знаменательное событие. В Тольятти выходит в свет первое издание учебника "Геометрия". Эта книга стоит у меня на полке. Евгений Викторович получает Премию им. В.В. Татищева в области образования, учрежденную мэрией г. Тольятти.

Евгений Викторович продолжает работу учителем в тольяттинских лицеях. Среди победителей и призеров Самарских областных олимпиад много его учеников. Наряду с этим, он продолжает работу над совершенствованием своего учебника. Все это время редактировать книгу помогает жена, верный друг и помощник Тамара Николаевна. На следующем этапе к работе над учебником "Геометрия 10-11" подключается московский педагог Л.И. Звавич. Учебник проходит многочисленные экспертизы, получает положительные отзывы академий и выходит в издательстве "Дрофа". С тех пор многие годы учебники "Геометрия 10-11" Потоскуева-Звавича неизменно входят в Федеральный перечень учебников для общеобразовательной школы. Евгений Викторович по линии издательства знакомит с научно-методическими особенностями своего учебника учителей многих регионов нашей страны и ближнего зарубежья. Искренне и сердечно поздравляю Вас, дорогой Евгений Викторович, с 80-летним юбилеем!

Участники Всероссийского съезда учителей математики:
А.В. Ястребов, Е.В. Потоскуев, С.В. Дворянинов
На заднем плане: А.В. Шевкин (г. Москва, МГУ, 30 октября 2010 г.)

НАРОДНЫЙ ПРОФЕССОР МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Ковалева Галина Ивановна
доктор педагогических наук, доцент, директор центра математического образования,
Волгоградская государственная академия последипломного образования
Россия, г. Волгоград, kovaleva-gi@mail.ru

Центр математического образования ГАУ ДПО «Волгоградская академия последипломного образования» от всего сердца поздравляет Вас с юбилеем!

Большой практический опыт и творческий подход к решению поставленных задач позволяют Вам на протяжении многих лет успешно трудиться в системе образования.

Любовь к геометрии, помноженная на высокую работоспособность, позволили создать Вам учебно-методический комплекс по стереометрии, востребованный уже второй десяток лет.

Работая по Вашему учебнику, учителя Волгоградского региона открывают своим ученикам красоту построений сечений, изящество приемов решения стереометрических задач, лаконичность векторного метода доказательства утверждений, широту использования координатно-векторного метода и многое другое. Отточенность формулировок, доступность изложения и системность построения материала, «изумительные» задачи – далеко не полный перечень причин, из-за которых к Вашему УМК будет обращаться еще не одно поколение учителей и учащихся.

Вы не только «Пифагор из Тольятти», Вы *народный профессор методики обучения геометрии!* Каждая строчка методических пособий пропитана Вашей доброжелательностью, желанием помочь учителю, сделать его работу качественной и интересной. Диалог Евгения Викторовича с учителями, учениками и студентами – путь открытия новых знаний и способов решения задач. Умения Евгения Викторовича строить окружность на доске одним движением руки и чертежи стереометрических фигур без линейки – восхищают.

Уважаемый Евгений Викторович!

В этот замечательный праздник мы желаем Вам крепкого здоровья, душевных сил и неисчерпаемой энергии!

Пусть удача сопутствует каждому дню Вашей жизни, а душа остается молодой долгие годы! Здоровья и счастья Вам!

Ковалева Г.И. и Потоскуев Е.В. (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.)

Е.В. ПОТОСКУЕВУ − 80 ЛЕТ!

Смирнов Владимир Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики, Московский педагогический государственный университет
Россия, г. Москва, v-a-smirnov@mail.ru

Смирнова Ирина Михайловна
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры элементарной математики, Московский педагогический государственный университет
Россия, г. Москва, i-m-smirnova@yandex.ru

Евгений Викторович Потоскуев внёс огромный вклад в геометрическое образование не только учащихся общеобразовательных учреждений, но и подготовку учителей математики в педагогических университетах.

Его учебники геометрии для 10, 11 классов с углублённым изучением математики широко известны и пользуются большим авторитетом не только в России, но и за рубежом. И это не случайно. Учебники прошли тщательную первоначальную экспертизу.

Напомним, что в своё время (середина 90-х годов прошлого века) при Министерстве общего и профессионального образования Российской Федерации был образован Федеральный экспертный совет по общему образованию (ФЭС). В нём работали секции по различным школьным предметам, в том числе и по математике. В состав секции входили видные учёные-математики, методисты, известные учителя, среди которых были: Н.П. Адамская, Е.А. Бунимович, О.В. Василян, Л.И. Звавич, Б.П. Пигарев, Е.С. Смирнова и др. Всего в работе секции участвовало порядка тридцати человек. Высококвалифицированный и авторитетный состав позволял на самом высоком уровне решать поставленные задачи, давать всестороннюю экспертную оценку направляемых в школу учебников и пособий по математике.

Для большей объективности, каждую поступившую в секцию рукопись учебника рассматривали три рецензента (профессиональный математик, методист и практикующий учитель). При этом особое внимание обращалось на: *соответствие стандартам математического образования; уровень научной и практической значимости; логическую стройность, чёткость и последовательность изложения; личностную ориентацию, доступность и интересность учебного материала; экспериментальную проверку, отзывы учителей.*

После рецензирования работы обсуждались на заседании секции. Были «жаркие» коллективные дискуссии. И далеко не все поступившие рукописи получали одобрение. В связи с этим, очень приятно отметить, что названные учебники получили блестящие рецензии, высшую оценку «рекомендовать к использованию и включить в Федеральный перечень учебной литературы».

Сегодня эти учебники являются единственными учебниками геометрии для 10, 11 классов с углублённым изучением математики, которые дают учащимся полноценное геометрическое образование, развивают не только логическое мышление, но и пространственные представления учащихся, сочетают научность и доступность изложения.

Учебники прекрасно подходят и для обучения элементарной геометрии студентов математических факультетов педагогических университетов. Они могут быть рекомендованы в качестве современной замены классических учебников по элементарной геометрии Ж. Адамара и Д.И. Перепёлкина.

Дорогой Евгений Викторович! Сердечно поздравляем Вас с Юбилейным Днём рождения и желаем всего самого, самого доброго! Многие Вам лета! С большим уважением, искренне Ваши, Ирина, Владимир Смирновы.

В день чествования юбиляра с 80-летием−вручение поздравительного адреса от МПГУ: Потоскуев Евгений Викторович и профессор Смирнов Владимир Алексеевич (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

ТОЛЬЯТТИНСКАЯ ДОРОГА Е.В. ПОТОСКУЕВА ДЛИНОЮ В 30 ЛЕТ

Утеева Роза Азербаевна
доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, R.Uteeva@ tltsu.ru

В далеком 1989 году мы приехали из разных городов в Тольятти, в открывшийся тогда год назад филиал Куйбышевского государственного педагогического института. С тех пор, наши профессиональные судьбы практически были неразрывно связаны «тольяттинской дорогой» длиною в 30 лет! Имея за плечами двадцатилетний опыт работы преподавателем геометрии в Вологодском, Запорожском (в должности заведующего кафедрой), Тобольском пединститутах; Ивановском институте усовершенствования учителей, Евгений Викторович с первых дней совместной работы на кафедре вызвал у меня уважение и восхищение. Поэтому в общении с ним в те годы, я чувствовала себя как «аспирант», перед настоящим Профессором, несмотря на его должность старшего преподавателя.

Евгений Викторович был энергичным, активным, деятельным. Будучи членом профкома института и благодаря его геометрическому типу мышления, умению аргументировано убеждать, многие приглашенные в институт коллеги-преподаватели достаточно быстро получили квартиры от Автоваза и города. Получил двухкомнатную квартиру и сам Евгений Викторович вместе с Тамарой Николаевной.

Фото из личного архива: Евгений Викторович вместе с Тамарой Николаевной на фоне своего дома

В 1990-1991 гг. Евгений Викторович также исполнял обязанности декана физико-математического факультета. Все это свидетельствует о том, что за столь короткий промежуток работы в Тольяттинском филиале Самарского государственного педагогического института (впоследствии университета) он заслужил уважение студентов, коллег и администрации вуза. Однако вскоре судьба уводит его в иное увлекательное пространство (кандидат физико-математических наук, преподаватель с большим стажем работы в вузе!) – пространство школьной геометрии.

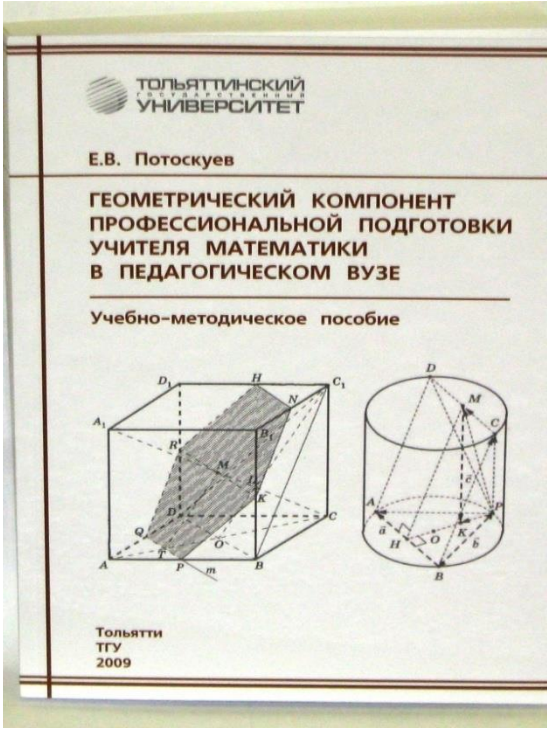
Мы уже не раз [1–5] писали об удивительной судьбе, биографии, педагогической и научной деятельности Евгения Викторовича − талантливого, трудолюбивого и скромного человека – Учителя учителей, профессора, педагога, методиста, научного руководителя студентов и магистрантов, мастера в избранной им профессии. Однако полностью оценить научно-методический вклад Евгения Викторовича в развитие геометрического, и математического образования в целом, нельзя в рамках нескольких статей. Это еще предстоит сделать его ученикам и последователям.

Обращаясь в прошлое, анализируя достаточно долгий период нашего совместного сотрудничества, можно отметить, что тольяттинская дорога была непростой, непрямой. Были периоды, когда мы, как параллельные прямые, не пересекались значительное время.

После моего возвращения с учебы в очной докторантуре МПГУ (1993-1997 гг.), в университете была создана кафедра «Геометрия и методика преподавания математики», заведование которой было поручено мне. Евгений Викторович тогда уже работал в лицее, и наши пересечения периодически возникали на городских конференциях школьников «Первые шаги в науку», где я была председателем жюри секции «Математика», а Евгений Викторович – научным руководителем, под руководством которого его подопечные всегда занимали призовые первые места! В 2002 году удалось уговорить Евгения Викторовича вернуться в институт на должность профессора кафедры. Практически с этого момента началась наша продуктивная совместная работа, наполненная пониманием и взаимоподдержкой. На кафедре были созданы все условия для того, чтобы Евгений Викторович мог творить! Его успехи и достижения становились достоянием каждого из нас, они обогащали нас новыми методическими идеями! Сам Евгений Викторович не раз отмечал, что именно период работы в университете и моральная поддержка коллег, сказались положительно на его дальнейшем творческом пути, связанным с продолжающейся кропотливой работой над учебниками и задачниками, а также учебными и методическими пособиями для учителя и учащихся.

Большую ценность для специалистов в области теории и методики обучения геометрии, учителей математики, студентов, аспирантов представляют учебно-методическое пособие и хрестоматия, написанные Евгением Викторовичем и изданные в Тольяттинском университете к его 70-летнему и 75-летнему юбилеям.

В наших планах к очередному юбилею была идея подготовить и издать монографию «История геометрии в лицах», однако из–за неожиданного и скоропостижного ухода Тамары Николаевны 10 июня 2019 года, ухудшения состояния здоровья самого Евгения Викторовича, она не была реализована. Авторский курс «Избранные главы геометрии для профильной школы» Е.В. Потоскуева является образцом для каждого преподавателя и учителя, а методика чтения лекций и проведения практических занятий по этому курсу заслуживают особого внимания. Безусловно, высочайшее мастерство, ораторское искусство преподавания геометрии, требовательность к посещению занятий и выполнению в срок индивидуальных заданий по каждой теме курса каждым магистрантом, − способствовали достижению хороших результатов в обучении «геометрии и геометрией» и качеству геометрических знаний у студентов. Экзаменационные билеты по курсу традиционно включали теоретические вопросы, требующие знаний не только определений понятий или формулировок теорем, но и их доказательств, а также решений нескольких задач. Студентам, достигшим высоких результатов после экзамена или по завершению курса, он всегда дарил свои учебники и пособия.



Тольятти, ТГУ,2009.400 с. *Тольятти, ТГУ, 2014. 383 с.*

Свой опыт, знания, любовь к геометрии, методические приёмы и методы её преподавания на высшем уровне, он щедро передавал студентам специалитета, бакалаврам, а в настоящее время− магистрам математического образования, многие из которых работают в школах города и преподают геометрию, следуя его методике! Его занятия были всегда открыты для посещения студентами, аспирантами и преподавателями других вузов, приезжающими к нам на стажировку.

Кафедра и Тольяттинский государственный университет гордятся тем, что Е.В. Потоскуев является признанным авторитетом в современном математическом сообществе, о чем свидетельствуют многочисленные участники всех трех юбилейных международных научных конференций «Геометрия и геометрическое образование», организованных в честь нашего профессора! Благодаря почитанию и глубокому уважению коллег к Евгению Викторовичу, наши студенты, учителя математики школ города Тольятти, преподаватели университета имеют уникальную возможность вживую увидеть, услышать доклады известных ученых, авторов школьных и вузовских учебников геометрии и математики, побывать на мастер-классах, круглых столах, принять участие в конкурсах научно-исследовательских работ.

Участники первой конференции, посвященной 70-летнему юбилею Е.В. Потоскуева: проф. Жохов А.Л., проф. Шамсутдинова И.Г. , проф. Утеева Р.А., проф. Походова Н.С., проф. Малова И.Е., проф. Потоскуев Е.В., проф. Гусев В.А.(Тольятти, ТГУ, 26 ноября 2009).

Участники четвертой конференции, посвященной 80-летнему юбилею Е.В. Потоскуева: проф. В.А. Смирнов, проф. В.В. Орлов, проф. Н.П. Бахарев, проф. А.В. Ястребов, проф. Е.В. Потоскуев, проф. С.В. Талалов (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

Поздравление от коллег – представителей Дома Ученых ТГУ:
проф.Ю.В. Казаков, проф. Н.П. Бахарев (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

Фото на память после торжественного пленарного заседания:
проф. Е.В. Потоскуев, дочь Галина и Утеева Р.А.
(г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.).

К 80-летнему юбилею Е.В. Потоскуева подготовлена выставка его научно-методических и учебных изданий, а также статья в журнал «Математика в школе» [6].

Публикации, посвящённые Евгению Викторовичу Потоскуеву:
1. *Утеева Р.А., Жохов А.Л., Симонова Н.С.* Поздравляем юбиляра (к 65-летию со дня рождения) /Математика − М.: Изд. дом «Первое сентября».−2005.№2. С.26.
2. *Утеева Р.А., Жохов А.Л., Симонова Н.С., Антонова И.В.* Об учебно-методическом комплексе Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича по геометрии 10-11 классы /Математика − М.: Изд. дом «Первое сентября».−2005.№ 15(581).С.21-22.
3. *Утеева Р.А., Антонова И.В., Ермолаев Е.А., Симонова Н.С.* Поздравляем с юбилеем Потоскуева Евгения Викторовича //Математика в школе: Научно-теоретический журнал - М.: Школьная Пресса, 2009, №10. С 66-67.
4. Утеева Р.А. Е.В. Потоскуев – геометр и педагог /Геометрическое образование, концепции, методики, технологии: сборник трудов Всероссийского научно-методического семинара «Геометрическое образование в современной средней и высшей школе», 26-28 ноября 2009.− Тольятти, ТГУ, 2009. С. 3- 6.
5. Утеева Р.А. Научно-педагогическая деятельность Евгения Викторовича Потоскуева (к 75-летию со дня рождения) /Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов III Межд. научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе», Тольятти, 27-29 ноября 2014. − Изд-во ТГУ, 2014.− С. 5-30.
6. *Утеева Р.А.* Геометрия – наука, методика и искусство преподавания (к 80-летию со дня рождения Евгения Викторовича Потоскуева) // Математика в школе: Научно-теоретический и методический журнал. 2020.−№1. С. 71-76.

ДОЛГОЕ ЗНАКОМСТВО С ЕВГЕНИЕМ ВИКТОРОВИЧЕМ ПОТОСКУЕВЫМ

Ястребов Александр Васильевич
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа,
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
Россия, г. Ярославль, alexander.yastrebov47@gmail.com

Я познакомился с Е.В. Потоскуевым в 1968 г. при обстоятельствах, которые не назовешь иначе, как «романтическими». Летом того года на базе Ярославского и Ивановского педагогических институтов был организован математический лагерь для талантливых школьников из центральных областей России. Организатором и участником его был Андрей Николаевич Колмогоров, всемирно известный математик и инициатор реформы школьного математического образования. Евгению Викторовичу и мне посчастливилось преподавать в этом лагере. Он был одним из лекторов, а я, студент второго курса, вел практические занятия за А.Н. Колмогоровым! Безумное везение! Непередаваемое чувство возникает у начинающего студента, когда он ходит по лагерю вдвоем (!) с великим математиком и тот говорит лично ему: «Понимаете, Саша, математическое творчество основано на интуитивном, а не на формализованном мышлении...». Здесь я должен извиниться за то, что пишу о своих чувствах. Делаю это только потому, что подобные чувства – я убежден в этом – были присущи и юбиляру.

Долгое знакомство не означает детального знания. Многие десятилетия мы с Евгением Викторовичем жили в разных городах, в разных обстоятельствах, виделись редко, переписывались еще реже. Зато мы знаем главное: мы оба принадлежим одной научной школе, мы оба любим геометрию, мы оба преподаем до старости лет и любим это делать. Хотелось бы думать, что мы могли бы обратиться друг к другу на языке притчи «Маугли» и сказать: «Мы с тобой одной крови, я и ты!» Впрочем, юбиляр может меня поправить.

Об одном обстоятельстве не знает никто, а оно по-своему любопытно. Читая учебники Евгения Викторовича, особенно тонкие и сложные места, я испытывал чувство, которое словами можно выразить примерно так: «Да, правильно… Да, все так и есть… Да, я бы объяснил это именно так…». Потом мне стало казаться, что, случись мне писать школьный учебник, я написал бы его в точности так же, как это сделал Евгений Викторович.

Вот здесь и возникло мое внутреннее противоречие. С одной стороны, мне было очевидно, что ничего подобного у меня бы не получилось. С другой стороны, чувство было стойким и никуда не уходило, а я привык доверять своим чувствам. С этим противоречием я жил несколько лет, пока не прочитал книгу А. Реньи «Трилогия о математике». В ней высказана такая мысль: каждое правильно понятое открытие вызывает у читателя мысль о том, что, занявшись серьезнее, он и сам бы мог сделать это открытие (стр. 132). Тут все встало на свои места. Учебники Евгения Викторовича – это своего рода «открытие» в области педагогики математики, и он очень постарался, чтобы придать им совершенную форму. А я очень постарался, чтобы понять суть этого открытия, и мне это удалось. Согласимся с тем, что новые открытия и приобщение к ним – это лучшее, что есть в этой жизни. Я благодарен юбиляру за доставленное удовольствие!

Участники Колмогоровских чтений: проф. В.А.Тестов, проф. А.Л.Жохов, проф. А.В.Ястребов, проф. Е.В.Потоскуев (г. Ярославль, апрель, 2004 г.).

О ГЛАВНОМ УЧИТЕЛЕ В МОЕЙ ЖИЗНИ

Пояркова Ольга Сергеевна
учитель математики, выпускница кафедры «Алгебра и геометрия»
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Санкт-Петербург, poyarkovaolga@yandex.ru

Нам, выпускникам специалитета 2007 года, а затем магистратуры, повезло, так как мы, прошли полный курс обучения у Евгения Викторовича. Он читал нам вузовскую геометрию на 1-3 курсах, вел практикум по решению геометрических задач, а затем в магистратуре – авторский курс «Избранные главы геометрии для профильной школы». У него на занятиях не было ни презентаций, ни видео, ни музыки, ни веселых картинок. Только он, мел и доска. Этого хватало, чтобы каждый раз (за полтора часа лекции) вновь и вновь влюбляться в геометрию. Он эмоционален, принципиален. Он болеет за состояние нашего образования. Он внимателен к каждому ученику и студенту. Он знает о нас многое, он помнит о нас даже через несколько лет после выпуска. Порой он бывает вспыльчив, хронически не переносит вранье и подхалимов. Он прекрасен!!!

Евгений Викторович может целое занятие отвести на беседу о состоянии образования и науки, может решить за пару только одну задачу (зато как!) или, наоборот, в одно занятие вложить столько…

Помню, как я сдавала первый экзамен у него по геометрии на 1 курсе. Готовилась, как никогда. И вдруг меня переклинило на экзамене −просто белый лист перед глазами и всё! Я не ответила на его вопросы, мне было стыдно. Я готова была получить двойку и прийти на пересдачу. Он поставил «3» со словами: "Знаю, что занимались. Знаю, что работали весь семестр. Знаю, что перегорели... Не могу поставить «неудовлетворительно» за вашу работу, но и больше тройки поставить не имею права. Верю, вы еще сдадите на 5".В следующем семестре я с легкостью сдала зачет, а еще через полгода – экзамен по проективной геометрии на 5.

Выпускники 2007 г.: Крыгина Е.П., Потоскуев Е.В., Куприенко Е.Ю., Пояркова О.С. (г. Тольятти, ТГУ, 26 ноября 2009 г.).

СОЗДАТЕЛЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ АЗЕРБАЙДЖАНА XX ВЕКА – М.А. ДЖАВАДОВ

Асланов Рамиз Муталлим оглы
доктор педагогических наук, профессор, заведующий отделом
научно-технической информации Институт математики и механики,
НАН Азербайджана, *г. Баку. e-mail:* r_aslanov@list.ru

Аннотация. *Статья посвящена краткой биографии Джавадова Максуда Алисимран оглы, его научному наследию и роли в развитии геометрии Азербайджана XX века. В работе также рассказывается об учебных пособиях по геометрии и алгебре на азербайджанском языке М.А. Джавадова. Особо отмечается его роль в подготовке не одного поколения математиков.*
Ключевые слова: *жизнь и творчество, геометрия, алгебра, матрица, пространство, образование, подготовка кадров, преподавание математики, пособия.*

THE CREATOR OF THE GEOMETRIC SCHOOL OF AZERBAIJAN OF THE XX CENTURY – M.A. JAVADOV

Aslanov Ramiz Mutallim oglu
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Scientific and Technical Information Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan,
Azerbaijan, Baku. e-mail: r_aslanov@list.ru

Abstract. *The article is devoted to a short biography of Javadov Maksud Alisimran oglu, his scientific heritage and role in the development of the geometry of Azerbaijan of the XX century. The work also tells about textbooks on geometry and algebra in the Azerbaijani language. His role in the preparation of more than one generation of mathematicians is especially noted.*
Keywords: *life and work, geometry, algebra, matrix, space, education, training, teaching mathematics, manuals.*

Максуд Алисимран оглы Джавадов

Джавадов Максуд Алисимран оглы – доктор физико-математических наук, член-корреспондент АН Азербайджана, профессор кафедры геометрии Бакинского государственного университета, специалист в области геометрии.

Джавадов Максуд Алисимран оглы родился 13 апреля 1902 года в селе Баскал Шемахинского уезда, ныне Исмаиллинского района Азербайджанской Республики в семье крестьянина-бедняка. Начальное образование получил в Баскальской сельской школе.

С 1914 по 1918 гг. учился в Шекинской гимназии. В 1924 году он поступил в Азербайджанский педагогический институт. Окончив физико-математический факультет в 1927 году, М.А. Джавадов был оставлен для ведения научно-педагогической работы на кафедре высшей математики Азербайджанского государственного университета, в состав которого к этому времени был передан педагогический институт. Параллельно с этим продолжал свою учебу на физико-математическом факультете университета. В эти годы М.А. Джавадов начал вести занятия в качестве помощника проф. А.С. Кованого, он перевел на азербайджанский язык курсы его лекций по исчислению конечных разностей и математическому анализу, являющиеся первыми вузовскими учебными пособиями на азербайджанском языке.

После окончания университета в 1930 году М.А. Джавадов, в связи с реорганизацией вуза в отраслевые высшие учебные заведения, стал работать ассистентом кафедры высшей математики Азербайджанского нефтяного института (ныне Азербайджанский государственный институт нефти и промышленности). В 1934 году М.А. Джавадов был приглашен на работу во вновь восстановленный Азербайджанский университет в качестве и. о. доцента. С этим вузом связана вся последующая научная, административная и общественная деятельность М.А. Джавадова.

С конца 30-х годов М.А. Джавадов вел научные исследования в области геометрии. В 1940 году он выполнил работу «Геометрические системы» и успешно защитил ее в качестве кандидатской диссертации в МГУ. В 40-х годах была выполнена работа, относящаяся к проблеме метрической двойственности. В это время он выполнил работу, относящуюся к расслоенным пространствам П.К. Рашевского. Исследовательская работа по геометрии М.А. Джавадова была связана с Казанской геометрической школой. При поддержке казанской геометрической школы в 1957 году, после защиты работы «Неевклидовы геометрии над алгебрами и их применение к вещественным геометриям» в Казанском университете, М.А. Джавадов был удостоен учёной степени доктора физико-математических наук.

Трудовая деятельность ученого тесно связана с педагогикой. Будучи студентом, он начал преподавать с 1927 года. С 1930 года работал на кафедре математики Азербайджанского индустриального института (ныне Азербайджанская государственная академия нефти и промышленности). В 1934 – 1938 гг. работал доцентом АГУ им. С.М. Кирова и Азербайджанского индустриального института. С 1938 года и до самой смерти возглавлял кафедру геометрии в БГУ. В 1938 – 1944 годах являлся деканом физико-математического факультета БГУ, в 1944 – 1952 гг. – проректором по учебной работе. Начиная с 50-х годов, М.А. Джавадов занимается изучением пространства над алгеброй; исследует аффинные, проективные и неевклидовы пространства над любыми полупростыми алгебрами и в частности над алгебрами альтернионов (чисел Клиффорда), и квадратных матриц n-го порядка вещественных, комплексных и двойных.

Исследования М.А. Джавадова в этой области являются существенным развитием ранее известных результатов. В своих работах он предлагал различные интерпретации изучаемых им пространств. Наиболее известной является интерпретация проективных и неевклидовых пространств над алгебрами альтернионов высших рангов с помощью линейных конгруэнций в пространствах более высокого измерения над алгебрами альтернионов более низкого ранга. В применениях геометрий над алгебрами к вещественным геометриям М.А. Джавадов предложил новый метод геометрического истолкования спинорных представлений групп движений вещественных неевклидовых пространств. Этот метод считается гораздо более наглядным и органичным, нежели используемый ранее метод Э. Картана. Также широко известна в математической среде его интерпретация спинорных представлений в неевклидовых пространствах, при которой эти движения представляются дробно-линейными подстановками над координатами точек абсолюта. Этими же подстановками М.А. Джавадов представляет конформные преобразования в пространствах над алгебрами альтернионов.

Исследования М.А. Джавадова опубликованы более чем в 20 статьях, размещенных в центральной и республиканской печати. Позднее они были обобщены автором и легли в основу главной работы его жизни: *«Геометрия над алгебрами и их применения к вещественным геометриям»*. Она же явилась его докторской диссертацией. После блестящей защиты в 1957 году М.А. Джавадов в одночасье стал математической легендой Советского Союза. В 1957 году он был удостоен звания профессора и избран членом-корреспондентом НАН Азербайджана. Его интерпретации легли в основу работ десятков математиков по всему миру.

Первый ряд слева: Заид Халилов, Максуд Джавадов, Г. Хайями, Гашим Агаев
Второй ряд: Хайями. Багиров, Маис Джавадов, Фарамаз Максудов, Фарман Алиев, Гамбар Намазов (Москва, 1966, Международный математический конгресс).

Джавадов М.А. является автором 7 учебников, пособий и более 80 научно-методических работ и статей на азербайджанском и русском языках. М.А. Джавадов исследовал геометрические пространства над алгебрами, изучал различные пространства, координаты точек которых являются элементами алгебр, наиболее важными из них, алгебры альтернионов вещественных, комплексных или двойных матриц n-го порядка. Часть его работ была посвящена аффинным и проективным пространствам над алгебрами. Им построена теория неевклидовых пространств над алгебрами, являющимися обобщением неевклидовых геометрий. Он опубликовал ряд интересных статей, посвященных истории развития математики в Азербайджанской ССР, уделял большое внимание подготовке научных кадров, активно содействовал развитию методики преподавания математики как науки в Азербайджане. Он был удостоен государственных наград, «ордена Ленина», дважды ордена «Трудового Красного знамени» и ордена «Славы».

Великий азербайджанский математик Максуд Алисимран оглы Джавадов умер 27 мая 1974 года в городе Баку.

Профессор Азербайджанского государственного университета (ныне БГУ) М.А. Джавадов был образцом того, кого принято называть честным и культурным человеком, который безвозмездно делился своими знаниями. Научный вклад М.А. Джавадова в геометрию и её становление в Азербайджане бесценен. Его труды принадлежат будущему. М.А. Джавадов человек с большой буквы. Приведем список его некоторых публикаций:

1. Линейные и квадратичные формы.− Б.: Азернешр, 1941, 94 с. (на азерб. яз.)

2. Элементы теории групп (совместно с академиком Украинской АН Ю.В. Лопатинским).− Баку: АзербССР, издательство ХМК, 1942, 80 с. (на азерб. яз)

3. Векторное исчисление. Учебное пособие. Баку: издательство Просвещение, 1957.- 205 s. (на азерб. яз.)

4. Великий русский учёный Н.И.Лобачевский. − Баку, 1961, 52 с. (на азерб. яз.)

5. Развитие математики в Советском Азербайджане (1920-1960 гг.). − Баку Азернешр, 1962, 140 с. (на азерб.яз.) (совместно с А.И. Гусейновым)

6. Структура курса геометрии. Методическое пособие для учителей математики. −Баку, издательство Просвещение,1966.- 114 с. (на азерб. яз.)

7. Проективные и аффинные преображения в курсе аналитической геометрии. Учебное пособие. − Баку, 1966.- 66 с. (на азерб. яз.)

8. Об одной реализации расслоенного пространства. /Труды семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ, т. 8, 1950, 314-327.

9. Конформные преобразования в евклидовых и неевклидовых пространствах любого числа измерений как дробно линейные преобразования./ ДАН СССР, 86 (4), 1952, 653-656.

10. Проективные и неевклидовы геометрии над матрицами./ ДАН СССР, 67 (5), 1954,769-772.

11. Неевклидовы геометрии над алгебрами альтернионов./ Ученые записки Казанского университета, 1955, 115(10)б 8-9.

12. К вопросу о метрической двойственности / Уч. зап. АГУ, 1956, № 6, с.3–17.

13. Аффинные пространства над алгебрами / Уч. зап. АГУ, 1957, № 7, с.3–12.

14. Геометрическое истолкование спинорных представлений групп движений неевклидовых пространств / Уч. зап. АГУ, 1957, № 11, с.3–18.

15. Неевклидовы геометрии над алгебрами / Уч. зап. АГУ, 1957, № 4, с.3–16.

16. Проективные пространства над алгебрами / Уч. зап. АГУ, 1957, № 2, с. 3–18.

17. Об одном применении неевклидовой геометрии над алгеброй двойных матриц к проективной геометрии над алгеброй вещественных матриц / Уч. зап. АГУ, физ-мат. и хим. серия,1960, № 3, с.11–16.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Марданов М.Дж., Асланов Р.М.* Предшественники современной математики Азербайджана. Историко-математические очерки. М.: Издательство «Прометей» 2016.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ МАГИСТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В КУРСЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ»

Дорофеев Сергей Николаевич
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Тольяттинский государственный университет,
Россия, г. Тольятти, komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Аннотация. *В статье раскрываются проблемы подготовки будущих магистров математического образования к профессиональной деятельности. В этом процессе важную значимость приобретает обучение будущих магистров концептуальным основам аксиоматического и теоретико-группового подходов построения математических теорий. Приводится программа построения курса «Современные проблемы науки и образования», в большей степени раскрывающая, как проблемы современной математики, так и методики обучения математике.*
Ключевые слова: *обучение геометрическим методам познания окружающего мира, аксиоматический и теоретико-групповой подходы к построения математических теорий, инварианты группы преобразований.*

GEOMETRIC COMPONENT OF PREPARATION OF FUTURE MASTERS OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE COURSE «MODERN PROBLEMS OF SCIENCE AND EDUCATION»

Dorofeev Sergey Nikolaevich
Doctor of pedagogical Sciences, candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Togliatti state University, *Russia, Togliatti,* komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Abstract. *The article reveals the problems of preparation of future masters of mathematical education for professional activity. In this process, the training of future masters in the conceptual foundations of axiomatic and group-theoretic approaches to the construction of mathematical theories becomes important. The program of construction of the course "Modern problems of science and education" is given, which reveals both the problems of modern mathematics and the methods of teaching mathematics to a greater extent.*
Keywords*: teaching geometric methods of cognition of the surrounding world, axiomatic and group-theoretic approaches to the construction of mathematical theories, invariants of the transformation group.*

На современном этапе подготовки магистров по направлению 44.04.01 «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование») первостепенное значение имеет усиление геометрической составляющей, как фактора, свидетельствующего о достаточно высокой профессиональной подготовленности магистра, способного не только организовать творческий процесс обучения старшеклассников, но и готового к организации самостоятельной научно-исследовательской работы, как в области методики преподавания математики, так и в области математики [1,6].

Достижению поставленных целей в значительной степени способствует дисциплина «Современные проблемы науки и образования, ориентированная на формирование компетенций, связанных с развитием способности к абстрактному мышлению, анализу, синтезу; способности совершенствовать и развивать свой общекультурный и интеллектуальный уровень; способности к организации профессионального и личностного самообразования; проектированию образовательных маршрутов обучающихся; формированию готовности к разработке и реализации методик, технологий и приемов обучения; к анализу результатов процесса их использования в организациях, осуществляющих образовательную деятельность; готовности к применению знаний современных проблем математики и методики её преподавания [2,3]. Мы глубоко убеждены в том, что этот курс предназначен для обучения именно студентов магистратуры по профилю «Математическое образование», так как будущие магистры − учителя математики должны знать проблемы математики и методики преподавания математики уже решенные, проблемы, находящиеся в стадии решения и прогнозировать проблемы, актуальные в ближайшем будущем [7]. Согласно учебному плану в нашем университете на курс отводиться 4 ЗЕТ, а программа курса состоит из трех разделов.

Первый раздел *«Аксиоматический подход к построению математических теорий»* знакомит обучающихся с основными понятиями этого метода. В процессе изучения этого раздела мы познакомим обучающихся с эволюцией становления аксиоматического метода, начиная с «Начал» Евклида и до нынешнего времени; с различными способами реализации этого метода к построению математических теорий; приемами решения задач, относящихся к классу ближайших следствий системы аксиом. Значимость изучения этого раздела обусловлена, хотя бы тем, что в процессе реализации этого метода в построении евклидовой геометрии и при доказательстве независимости аксиомы параллельности от других аксиом этой системы, известным русским математиком Н.И. Лобачевским было сделано великое открытие, перевернувшее сознание не только математиков, но и ученых других различных научных отраслей, послужившее основой для развития нового направления в математике − неевклидовых геометрий. Аксиоматический метод широко используется не только в построении математических теорий, но и теорий, направленных на развитие новых современных методов познания окружающего мира [4,5]. Например, широкое применение компьютерных и информационных технологий требует постоянного совершенствования современных языков программирования. Как известно такой язык, как и любой другой искусственный язык, представляет собой некоторый фиксированный набор слов и постулируемых правил построения предложений. Набор слов этого языка можно считать основными понятиями, а правила построения предложений или команд − аксиомами. Очевидное требование к такой системе аксиом – это полнота. *Второй* раздел «*Современные парадигмы математики и математического образования»* позволяет студентам освоить основные проблемы математики, связанные с её обоснованием и развитием концептуального единства. Решение этих проблем в конце 19 века породило развитие нового метода в обосновании геометрии – теоретико-группового. Основы этого метода были изложены в известной Эрлангенской программе Ф.Клейна, которую он провозгласил при вступлении на должность профессора Гетингенского университета.

Современная математика обладает достаточно высоким потенциалом, способствующим не только решению математических задач, но и задач, лежащих далеко за ее пределами. В последнее время стали актуальными процессы, связанные с выделением их инвариантной части. Теоретико-групповой подход к изложению современных научных теорий предполагает как раз построение системы инвариантов конкретной группы преобразований. Обучение магистров решению школьных геометрических задач, допускающих оптимальные решения посредством соответствующих преобразований плоскости и пространства, составляет одно из важных концептуальных направлений, способствующих повышению качества математического образования будущих магистров. Метод предполагает выделение и описание всех тех преобразований изучаемого пространства, которые имеют нетривиальную группу преобразований. Значительный вклад в развитие этого метода был внесен такими известными российскими математиками как Г.Б. Гуревич, О.В. Мантуров и др.

Третий раздел ориентирован на усвоение обучающимися основными понятиями, формами и методами технологического подхода к решению проблем современного математического образования. В данном разделе магистранты знакомятся с дифференцированным, личностно ориентированным и проблемными подходами к обучению школьников основам аксиоматического и теоретико-группового методов изложения математических теорий.

Таким образом, целью курса является подготовка студентов к решению профессиональных задач в соответствии с профильной направленностью ОПОП ВО магистратуры и формирование готовности будущих магистров к научно-исследовательской, педагогической, методической и проектной деятельности.

В развитии современных научных теорий наблюдается тенденция не только в применении методов решения задач математического моделирования, но в создании и изучении математических аналогов реальных процессов. Отметим, что многие математические методы находят широкое применение и в решении задач, связанных с изучением процессов развития реального мира.

В ходе изучения данного курса мы формируем у студентов представления о предмете и проблемах современной науки математики и математического образования, раскрываем возможности ознакомления с ними учащихся общеобразовательной школы в рамках предметной области «Математика и информатика». Программа курса также направлена на овладение языком математики в устной и письменной форме; математическими знаниями и умениями, необходимыми для курсов углубленного или профильного изучения математики; развитие математического мышления и интуиции, творческих возможностей и способностей, необходимых для дальнейшего продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности; воспитание средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для научно-технического прогресса; подготовка к методически грамотной организации и проведению элективных курсов по алгебре в 10-11 классах с углубленным и профильным изучением математики. Приведем примерное описание тематического содержания курса «Современные проблемы науки и образования» (Таблица 1).

Таблица 1 − Тематическое содержание дисциплины «Современные проблемы науки и образования»

Раздел, модуль	Подраздел, тема
Раздел 1. Аксиоматический подход к построению математических теорий	1. Понятие аксиоматического метода. Основные требования к системе аксиом. Примеры аксиоматических определений математических структур.
	2. Система аксиом Гильберта трехмерного евклидова пространства. Непротиворечивость, полнота и независимость системы аксиом Гильберта.
	3. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Непротиворечивость. Независимость. Полнота.
	4.Система аксиом Атанасяна трехмерного векторного пространства. Непротиворечивость. Независимость. Полнота.
	5. Система аксиом Александрова трехмерного векторного пространства. Непротиворечивость. Независимость. Полнота.
Раздел 2. Современные парадигмы математики и математического образования	1. Концептуальное единство математики. 2. Математическая программа Бурбаки. 3. Теоретико-групповой подход к определению математических теорий. Эрлангенская программа Ф. Клейна. 4. Группы симметрий геометрических фигур. Инварианты группы симметрий. 5. Теоретико-множественная парадигма и современный школьный курс математики.
Раздел 3. Современные проблемы образования (технологический аспект)	1. Основные проблемы реализации дифференцированного обучения школьников математике.
	2. Основные проблемы реализации проблемного обучения школьников математике.
	3. Основные проблемы реализации личностно-ориентированного обучения школьников математике.
	4. Информационные технологии в обучении школьников математике.
	5. УДЕ как технология формирования творческой активности у школьников при обучении математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Дорофеев, С. Н.* Теория и практика формирования творческой активности будущих учителей математики в педагогическом вузе /Диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук / Пенза, 2000. – 410 с.

2. *Дорофеев С. Н.* УДЕ в подготовке старшеклассников к творческой математической деятельности /Азимут научных исследований: педагогика и психология. Некоммерческое партнерство «Институт направленного образования» (Тольятти). Т.5, №4 (17), 2016. С.53-57.
3. *Дорофеев С. Н.* УДЕ как метод подготовки будущих бакалавров педагогического образования к профессиональной деятельности //Гуманитарные науки и образование. МордГПИ им. М. Е. Евсевьева. – №1, 2013. С.14-17.
4. *Кочуренко Н. С.* Формирование умения конструировать серию задач, подводящих к «самостоятельному открытию» теоремы // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: Межвузовский сборник научных трудов, посвященный 65-летию заслуженного деятеля науки РФ, доктора физико-математических наук, профессора О. В. Мантурова, под ред. С. Н. Дорофеева. – Пенза: ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2001. С. 277-280.
5. *Лодатко Е. А.* Философия обучения математике как смысловая составляющая современного образовательного пространства // Вектор науки ТГУ: Серия: Педагогика, психология. 2.
6. *Утеева Р. А.* Содержательно-методические особенности подготовки магистров математического образования в России // Science and Education a New Dimension, 2015. T.III, №45 (22). – с.14-17.
7. *Утеева Р. А., Симонова Н.С.* О содержании курса «Современные проблемы науки и образования» для магистров педагогического образования/Математика и математическое образование: сборник трудов VII международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 29-29 апреля 2015 года) /под общ. ред. Р.А. Утеевой. –Тольятти: Изд-во ТГУ, 2015. С.184-188.

Вручение памятной медали в честь 80-летнего юбилея Е.В. Потоскуеву от кафедры «Высшая математика и математическое образование» проф. С.Н. Дорофеевым (г. Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.). На заднем плане: преподаватели кафедры О.И. Петрова, О.И. Иванов, С.А. Крылова

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ «СКВОЗНЫХ» ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ

Ковалева Галина Ивановна
доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры методики преподавания физики и математики, ИКТ, Волгоградский государственный социально-педагогический университет; директор центра математического образования,
Волгоградская государственная академия последипломного образования
Россия, г. Волгоград, kovaleva-gi@mail.ru

Бузулина Татьяна Ивановна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент центра математического образования,
Волгоградская государственная академия последипломного образования,
Россия, г. Волгоград, vgapkro.matem@mail.ru

Аннотация. *В статье представлены идея построения системы задач, построенной на основе некоторой стереометрической модели, и методические аспекты её использования для достижения различных учебных целей при изучении стереометрии.*
Ключевые слова: *система задач, задачный подход; методика обучения геометрии.*

METHODOLOGY FOR USING “THROUGH” TASKS IN STUDYING STEREOMETRY

Kovaleva Galina Ivanovna
doctor of pedagogical Sciences, Professor, Professor of Methods of Teaching Physics and Mathematics, ICT Department, Volgograd State Social and Pedagogical University,
Director of the Center for Mathematical Education,
Volgograd State Academy of Postgraduate Education,
Russia, Volgograd, kovaleva-gi@mail.ru

Buzulina Tatyana Ivanovna
candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Center for Mathematical Education, Volgograd State Academy of Postgraduate Education,
Russia, Volgograd, vgapkro.matem@mail.ru

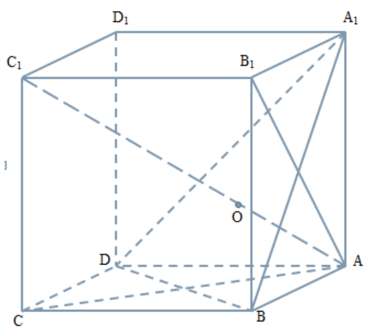
Abstract. *The article presents the idea of constructing a system of tasks built on the basis of some stereometric model, and methodological aspects of its use to achieve various educational goals in the study of stereometry.*
Keywords: *system of tasks, task approach; geometry teaching technique.*

В методической литературе встречаются различные задачные конструкции: циклы задач (Г.В. Дорофеев), «пучок» задач (О.А. Иванов), цепочки задач (Д. Пойа), серии задач (Н.С. Мельник, С.Е. Рукшин), динамические задачи (Э.А. Мазин, Т.М. Калинкина, Г.В. Токмазов, М.В. Таранова), развивающиеся задачи (Е.В. Никольский), многоступенчатые задачи (А.М. Левашов, М.И. Зайкин), многоэтапные задания (М. Клякля), открытые задачи (Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин) и пр. «Сквозные» задачи рассматривали Н.Я. Виленкин, А. Сатволдиев [1], решая задачу усиления политехнического обучения в процессе преподавания математики.

Суть метода сквозных задач заключался в том, что одна и та же физическая модель, рассматривается с разных точек зрения, вскрывая прикладную направленность различных разделов курса математики, при этом «упорядоченные комплексы математических задач, связанные с одной и той же физической моделью, выступают в качестве ведущего средства обучения».

Если вместо «физической модели» использовать стереометрическую и рассматривать при изучении разных тем, то системы задач, построенные на основе этой стереометрической модели, будут служить достижению различных конкретных учебных целей.

Актуальность обращения к «скзозным» задачам обусловлена противоречиями между: необходимостью в рамках задачного подхода трансформации содержания обучения, в частности стереометрии, в системы задач и неиспользованием для этого метода таких задач; значимостью «сквозных» задач как средств реализации системно-деятельностного подхода обучения математике и недостаточной разработанностью методики использования «сквозных» задач в процессе обучения стереометрии.



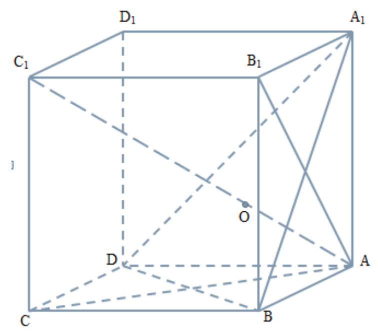
Рассмотрим **задачу:** *Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD.*

Формируя у учащихся умение использовать теорему о трех перпендикулярах при доказательстве перпендикулярности прямых, найдем проекции диагонали AC_1 на грани ABC и ABB_1, установим перпендикулярность проекций диагонали куба на грани ABC и ABB_1 с прямыми BDиBA_1 соответственно, и на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости, сделаем вывод, что диагональ AC_1перпендикулярна плоскости A_1BD.

Формируя у учащихся умение использовать координатно-векторный метод для доказательства утверждений, зададим декартовую систему координат, найдем координаты вершин куба, координаты векторов, например, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{A_1B}$, докажем через скалярное произведение, что прямая AC_1 перпендикулярна прямым A_1D и A_1B, применим признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Построим обратную задачу, формируя умения обращения задач. Построение обратного утверждения не вызывает затруднений, если задача дана в условной форме. Поэтому переформулируем **задачу** в условную форму: *Если прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом, то его диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD.* Тогда обратная ей задача имеет вид: *Если в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD, то он является кубом.*

Доказательство основано на теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах. На первом и втором шаге докажем, что смежные боковые грани прямоугольного параллелепипеда являются квадратами, а, следовательно, прямоугольный параллелепипед является кубом.



1)

$$\left.\begin{array}{l} AC_1 \perp A_1B \\ AC_1 - \textit{наклонная} \\ AB_1 - \textit{проекция} \end{array}\right| \Rightarrow AB_1 \perp A_1B.$$

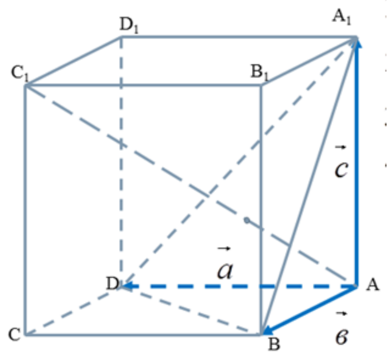
2)

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \perp A_1B \\ ABCD - \textit{прямоугольник} \end{array}\right| \Rightarrow ABCD - \textit{квадрат} \Rightarrow AB = AD.$$

$$\textit{Аналогично}, AA_1D_1D - \textit{квадрат} \Rightarrow AD = AA_1.$$

3) $$\left.\begin{array}{l} AB = AD = AA_1 \\ ABCDA_1B_1C_1D_1 - \textit{прямоугольный} \\ \textit{параллелепипед} \end{array}\right| \Rightarrow ABCDA_1B_1C_1D_1 - \textit{куб}.$$

При изучении темы «Векторы» данная задача и обратная к ней легко решаются векторным методом.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - \textit{куб}$.

Доказать, что $AC_1 \perp (A_1BD)$.

$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b} - \vec{c}$.

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow AC_1 \perp A_1B.$$

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D} = \vec{a}^2 - \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow AC_1 \perp A_1D.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC_1 \perp A_1B \\ AC_1 \perp A_1D \\ A_1B \cap A_1D \end{array}\right| \Rightarrow AC_1 \perp (A_1BD).$$

Дано: $AC_1 \perp (A_1BD)$.

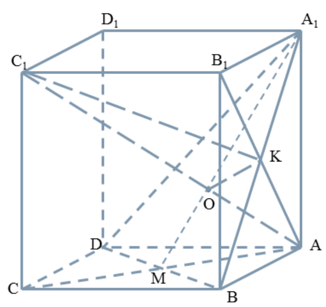
Доказать, что $ABCDA_1B_1C_1D_1 - \textit{куб}$.

$$AC_1 \perp (A_1BD) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow |\vec{b}| = |\vec{c}|.$$

$$AC_1 \perp (A_1BD) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D} = \vec{a}^2 - \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{c}|.$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \Rightarrow ABCDA_1B_1C_1D_1 - \textit{куб}.$$

Поскольку перпендикулярность диагонали AC_1 плоскости A_1BD прямоугольного параллелепипеда является признаком куба, то включая его в условие задач можно конструировать новые з**адачи**, например: *В прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан шар радиуса 5 (цилиндр, диаметр оснований которого равен 3). Найдите объем этого параллелепипеда, если диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD.*



Формируя у учащихся умения нахождения расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми формулируем **задачи:** *Найдите расстояния, например, от вершин A_1,B, D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до диагонали AC_1; от вершины C_1 до прямой A_1B; от вершин C_1 и A до плоскости A_1BD; между скрещивающимися прямыми – между диагональю куба и прямыми, содержащие стороны равностороннего треугольника A_1BD.*

В первом случае расстояния равны радиусу окружности, описанной около правильного треугольника A_1BD. И для куба с ребром равным *a*, эти расстояния равны $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.Во втором случае расстояние от вершины C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до прямой A_1B равно длине отрезка C_1K, где *K* – середина отрезка A_1B.

Решение третьей задачи – длины отрезков C_1O и *AO*, где *O* – точка пересечения прямой AC_1 и плоскости A_1BD. Решая четвертую задачу, найдем, например, расстояние между прямымиAC_1 и BA_1; AC_1 и BD;AC_1 и A_1D. Оно будет равно радиусу вписанной в правильный треугольник A_1BD окружности, то есть длине отрезка *OM*. Для куба с ребром равным *a*, эти расстояния равны $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Перечень тем, в которых можно использовать данную «сквозную задачу» можно продолжить. Например, параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей и др.

Таким образом, одна и та же «стереометрическая модель» используется при изучении разных тем, формировании различных умений, является компонентом нескольких учебных задач. Значимость «сквозных» задач раскрывают следующие функции: *систематизирующая* (систематизирует содержание обучения математике), *структурируюшая (*является структурным элементом систем задач по разным темам стереометрии, построенных на одной и той же «стереометрической модели»), *ориентировочная* (знания свойств «стереометрической модели» становятся ориентировочной основой действий при решении других задач, при дальнейшем её исследовании, в том числе с использованием разных математических методов), *формирующая* (формирует знания, различные математические умения).

Реализация системного подхода требует разработки системы «сквозных» задач курса, конструирования системы задач, построенной на основе некоторой стереометрической модели, в рамках одной темы (урока), работы с задачей как системным элементом (Таблица 1).

Идея «сквозных» задач прослеживается в современных УМК по стереометрии, в частности, под ред. Е.В. Потоскуева (постоянное обращение к кубу, правильной пирамиде). Успешность реализации в учебном процессе зависит от уровня сформированности у учителя умений конструировать системы задач к уроку и навыков организации работы учащихся над задачей. Методы и приемы конструирования систем задач описаны в [2].

Таблица 1

Матричное построение системы «сквозных» задач

<table>
<tr><td></td><td>«Сквозная задача» 1</td><td>«Сквозная задача» 2</td><td>….</td><td>«Сквозная задача» N</td></tr>
<tr><td>Параллельность</td><td rowspan="4">Диагональ куба</td><td rowspan="4">Медианы тетраэдра</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Перпендикулярность</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Тема</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Организация математической деятельности учащихся требует и построения соответствующего диалога. В идеале учащиеся выдвигают гипотезы, формулируют задачи сами, тогда в формулировке задачи заложена цель предстоящей деятельности.

Например: 1) Найдите проекции диагонали куба на грани.

2) Каково взаимное расположение диагонали куба и скрещивающейся с ней диагонали любой грани куба? (Диагональ куба перпендикулярна скрещивающейся с ней диагональю любой грани).

3) Определите взаимное расположение диагоналиAC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и плоскости A_1BD? (Диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD).

4) Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости CB_1D_1. Каково взаимное расположение плоскостей A_1BD и CB_1D_1? (Плоскости A_1BD и CB_1D_1 параллельны).

5) Чему равно расстояние между этими плоскостями?

6) Зная расстояние между параллельными плоскостями A_1BD и CB_1D_1, найдите расстояние между BD и CD_1. Сформулируйте задачу. (Докажите, что диагональ куба втрое больше расстояния между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба).

Одним из условий эффективного использования «сквозных» задач при изучении стереометрии является включение учащихся в конструирование новых задач. (*Найдите расстояние от середины ребра AB куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *до его диагонали* AC_1.).

Решение системы задач, построенные на основе одной стереометрической модели, служит обогащению представлений, структурированию знаний, формированию различных математических умений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Виленкин, Н.Я.* Метод сквозных задач в школьном курсе математики [Текст] / Н.Я. Виленкин, А. Сатволдиев // Повышение эффективности обучения математике в школе: Кн. Для учителя: Из опыта работы /Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1989. – 240 с. – С.101-112.

2. *Ковалева Г.И.* Теория и практика обучения будущих учителей математики конструированию систем задач / Г.И. Ковалева // Монография. – Волгоград: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2012. – 214 с.

ИССЛЕДОВАНИЯ УЧИТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ БРЯНЩИНЫ НА ОСНОВЕ УЧЕБНИКОВ Е. В. ПОТОСКУЕВА, Л. И. ЗВАВИЧА

Малова Ирина Евгеньевна
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры
математического анализа, алгебры и геометрии
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
Россия, Брянск, mira44@yandex.ru

Аннотация. *Дан обзор результатов исследования учителей Брянской области и студентов Брянского государственного университета по использованию учебников геометрии профильного уровня Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича. Выделены учебные проблемы учащихся при изучении стереометрии и методические способы их решения, актуальные для сегодняшнего дня. Приведен пример задания для методического самообразования.*
Ключевые слова: *стереометрия; УМК Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича; методика обучения математике, методическое самосовершенствование.*

RESEARCHES OF TEACHERS AND STUDENTS OF THE BRYANSK REGIONBASED ON THE TEXTBOOKS OF E. V. POTOSKUEV, L. I. ZVAVICH

Abstract. *A review of the results of researches by teachers of the Bryansk region and students of the Bryansk State University on the use of geometry textbooks by E. V.Potoskuev and L. I. Zvavich is given. The educational problems of pupils in the study of stereometry and methodological methods for solving them that are relevant for today are highlighted. An example of a task for methodological self-education is given.*
Keywords: *stereometry; UMK f E.V. Potoskuev and L. I. Zvavich; teaching methods of mathematics, self-education.*

В 2007 г. в Брянске состоялась областная научно-практическая конференция «Проблемы, опыт, перспективы обучения учащихся геометрии в профильных классах», в работе которой принимал участие Е. В. Потоскуев, поскольку конференция подводила итоги двухгодичной экспериментальной работы учителей по использованию УМК, разработанного им совместно с Л. И. Звавичем. Представим обзор публикаций, каждая из которых заканчивается вопросами для методического самосовершенствования учителей, и фрагменты резолюции конференции [6].

В статье Е. А. Игнатовой [6, С.14-20] выделены проблемы в изучении стереометрии и способы их решения в УМК:

– проблема наглядности при изучении первых разделов стереометрии, когда зрительное восприятие геометрических объектов не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает, и отображение пространственных фигур в виде чертежа на бумаге приводит к тому, что очень многие закономерности представляются в искаженном виде; для её решения в УМК [2, 3, 4, 5] рекомендуется использовать модели куба и пирамиды и обучать учащихся построению стереометрического чертежа;

– проблема обучения доказательствам, выражающаяся в том, что из-за уменьшения часов, отведенных на изучение математики, учителя исключают доказательства из практики обучения, что является серьёзной методической ошибкой в силу значимости умения правильно доказывать утверждения и оценивать их истинность и/или обоснованность; в УМК [2, 3, 4, 5] доказательствам уделяется особое внимание, кроме того есть набор опорных задач, в которых дополнительно к теоремам рассматриваются важные геометрические факты.

В статье И. Н. Тяпкиной [6, С.21-26] определены цели изучения темы «Аксиомы стереометрии»: сформировать представления учащихся об основных понятиях и аксиомах стереометрии; научить применять аксиомы и следствия из аксиом при решении стандартных задач логического характера, то есть задач, связанных с математическими обоснованиями; научить изображать точки, прямые и плоскости на проекционном чертеже при различном их взаимном расположении в пространстве.

Выделены требования к изучению темы: обучать учащихся построению плоскостей; организовывать изучение формулировок аксиом стереометрии и их следствий; обучать учащихся использованию математической символики; отрабатывать умение видеть принадлежность точек и прямых данной плоскости; формировать умение строить точку пересечения прямой и плоскости, линию пересечения плоскостей; формировать умение проводить соответствующие обоснования. Отмечается роль графических работ, представленных в задачнике [3], задания которых, во-первых, учитывают последовательность от простого к более сложному, во-вторых, помогают учащимся отрабатывать графическую культуру при изображении чертежа, умение грамотно применять математическую символику, самостоятельно вникать в условие задачи, получать практический опыт работы с основными геометрическими фигурами.

В статье Н. В. Кусачевой [6, С.26-33] обозначены три причины, из-за которых учащиеся испытывают затруднения в решении задач на построение сечений: построение сечений – многошаговый процесс, а отдельные шаги (нахождение прямой пересечения плоскостей; построение точки пересечения прямой и плоскости; выбор прямых и плоскостей, для которых имеет смысл искать точку пересечения; контроль правильности построения сечения) оказываются не отработанными учителями; не все учащиеся успевают следить за изменениями в построениях, не всегда им ясна последовательность, а позже, по полученному рисунку, трудно восстановить построение; учащимся не хватает ориентиров для руководства своими действиями при построении сечений. В текстах [2, 3] выделены отдельные шаги, показана динамика построения изображений. В статье обсуждаются 3 вопроса, позволяющих проводить анализ построений, проиллюстрированных в учебнике:1.Что строится на этом шаге? 2.Как выполняется построение? 3.Чем обосновано построение? Обсуждается возможность различных вариантов построения сечений для каждого из методов: последовательный переход с грани на грань; метод следов; метод внутреннего проектирования; использование теорем о параллельности. В статье Н. С. Маевской [6, С.34-39], посвященной развитию самостоятельности учащихся при доказательстве стереометрических теорем, представлена система учебных заданий по работе с доказательствами темы «Параллельность плоскостей» в учебниках [2, 3].

Выделены направления развития познавательной самостоятельности, предоставляющие учащимся возможность участвовать в планировании изучения темы и в подведении итогов по выполнению намеченного; самостоятельно осуществлять перенос старого учебного опыта в новые условия; осуществлять выбор − работать самостоятельно или воспользоваться определенной помощью; провести анализ встретившихся трудностей; самостоятельно подбирать задачи на применение изученного; привлекать общеучебные умения: сравнивать, использовать аналогию, обобщать, систематизировать и др.

В статье Е. В. Воронцовой [6, С.40-45] раскрываются особенности изучения темы «Расстояния в пространстве» в [2, 3]: при изучении каждой темы обсуждаются методы и приёмы отыскания расстояний в пространстве, что дает методологическую основу решения разнообразных задач; выделение методов нахождения расстояния между скрещивающимся прямыми (параллельных плоскостей; параллельных прямой и плоскости; ортогонального проектирования; векторно-координатный метод); использование понятия расстояния при изучении геометрических мест точек.

Отмечается роль комплексных заданий задачника [3], представленных в табличном виде для отработки различных умений, связанных с понятием расстояния. В качестве примера для методического самообразования приведем вопросы, завершающие статью о расстояниях в пространстве: 1. Каково место изучения расстояний в УМК Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича? 2. Какие методы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми продемонстрированы в статье? Какова последовательность шагов реализации каждого из методов? 3. Какую роль в выявлении шагов метода нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, представленного на рисунке-слайде, играют следующие вопросы: Что дано? Какая ставится задача? С выделения каких фигур начинается построение? Какая точка строится на втором шаге? Какой или какие перпендикуляры строятся в последующем построении? Какой вывод делается? 4. Какую роль в анализе готовых решений по применению методов нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми в конкретной задаче играют следующие вопросы: Что строится? Как строится? Как обосновывается построение? Какой отрезок является искомым и почему? На чем основано вычисление длины искомого отрезка (расстояния между скрещивающимися прямыми)? 5. Какую роль в выявлении шагов координатно-векторного метода и анализе готового решения играют следующие вопросы: Как выбирается система координат? Координаты каких точек и векторов находят на втором шаге? Модуль какого вектора является искомым? Какие условия помогли установить связь между координатами искомого вектора? Какие утверждения используются при вычислении модуля искомого вектора? 6. Укажите номера строк таблицы по нахождению расстояниями между прямыми в кубе с ребром *a*, при решении которых помогают вопросы: Есть ли плоскость, перпендикулярная одной из данных прямых и содержащая другую? Есть ли плоскость, параллельная одной из данных прямых и содержащая другую? Есть ли плоскость, перпендикулярная одной из данных прямых и не содержащая другую?

В статье В. Н. Щербаковой [6, С.46-50] представлен сравнительный анализ школьных учебников по теме «Векторы и в пространстве». Выделены утверждения, имеющиеся только в УМК[2, 3, 4, 5], показано их «участие» в различных задачах.

В статье О. И. Тюкачевой [6, С.50-56] выделены особенности темы «Многогранники», способствующие развитию пространственного мышления учащихся: глубоко содержательный теоретический материал, который излагается на научном, доступном и наглядном уровне; концепция изучения начальных и основополагающих вопросов стереометрии с помощью изображений многогранников; вывод формул вычисления объемов многогранников на основании принципа Кавальери через сравнение объемов позволяет изложить материал значительно проще, намного облегчая его восприятие, понимание и запоминание; использование комплексных заданий, в которых по единому условию формулируется ряд вопросов; использование заданий, в которых по данным в задаче условию требуется создать развертку многогранника и его бумажную модель; наличие заданий с формулировкой «может или не может быть…».

В резолюции конференции отмечается, что УМК по геометрии для 10-11 классов с углубленным и профильным изучением геометрии авторов Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича:

1) соответствует стандарту среднего (полного) общего образования по математике;

2) в основе концепции предлагаемого курса стереометрии лежат идеи формирования и развития конструктивно-пространственного воображения, а также таких качеств учащихся, как: интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации; гибкость и независимость логического мышления за счет большого объема заданий на построение фигур; дифференциации заданий по уровню сложности, вариативности условий при одном и том же заключении и наборот;

3) курс осуществляет логическое упорядочение свойств фигур, которые выступают в определенной логической связи, устанавливаемой системой определений, аксиом, теорем, предусматривает пропедевтику наиболее сложных теоретических обобщений, содержит дополнительный и справочный материалы;

4) теория курса строится, с одной стороны, как абстрактная дедуктивная геометрическая система, с другой стороны, во многом рассчитана на жизненное интуитивное построение реальности, в учебнике обеспечена доступность изложения;

5) уделено много внимания развитию у учащихся умения применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований, векторный, координатный) к решению задач и доказательству теорем;

6) особое место занимают задачи на построение сечений, а также задачи для индивидуальной творческой работы учащихся;

7) курс является самодостаточным и дает возможность подготовиться к итоговой аттестации по геометрии и приемным экзаменам в вузы;

8) курс предусматривает систематическое повторение планиметрии;

9) при изучении данного курса у учащихся повышается интерес к геометрии;

10) изучение курса стереометрии возможно после изучения планиметрии по любому учебнику планиметрии и в классах различного профиля.

В статье [1] приведены результаты исследований студентов в рамках их выпускных квалификационных работ. Важно было помочь студентам через собственный опыт осознать разницу между изучением математики в общеобразовательных и в профильных классах; повысить свой математический и методический уровень за счет углубления содержания материала; разработать дидактические материалы, которые могли бы помочь при обучении учащихся математике на профильном и/или углубленном уровне. Основой для проведения исследований был выбран УМК Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича.

Методические задания для студентов по анализу теоретического материала темы школьного учебника:

1. Изучите теоретический материал темы (выделите основные понятия темы, охарактеризуйте рассматриваемые в теме утверждения, установите связи между этими понятиями и утверждениями).
2. Разработайте математическую карту темы, отражающую логику ее теоретического материала. Предложите такое представление информации, чтобы: а) учащимся было легко выстроить рассказ об изученном в данной теме; б) были выделены структурные элементы темы; в) использовались словесный, символьный, образный способы представления информации.
3. Сравните разработанные вами математические карты с картой, предложенной преподавателем.

Математические карты первых пяти тем школьного курса геометрии 10 класса представлены на диске, сопровождающем журнал. В их разработке принимали участие студенты 5 курса (выпуск 2011 года).

Методические задания для студентов по работе с геометрической задачей:

1. Решите задачу. Предложите такой учебный диалог с учащимися по работе с данной задачей, который помог бы им самостоятельно преодолеть возможные затруднения при анализе условия задачи, поиске способа ее решения, при аргументации построений и утверждений.
2. Разработайте компьютерную презентацию, в которую включите текст условия задачи, учебный диалог с учащимися по работе с задачей, анимацию построений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Малова И. Е.* Подготовка будущего учителя математики к обучению геометрии учащихся профильных классов математической направленности //Математика в школе. – 2013. – № 9. – С.55-61.
2. *Потоскуев Е. В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: учеб.для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2011.
3. *Потоскуев Е. В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: учеб.для классов с углубл. и профильным изучением математики общеобразоват. учреждений. – М.: Дрофа, 2010.
4. *Потоскуев Е. В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2011.
5. *Потоскуев Е. В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: задачник для классов с углубл. и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2010.
6. *Проблемы, опыт, перспективы обучения учащихся* геометрии в профильных классах: по материалам областной научно-практической конференции /Под редакцией д.п.н. И. Е. Маловой. – Брянск: ИПКРО, 2008.

РОЛЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТВЕТАМИ В ФОРМИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ

Матиева Гулбадан
доктор физико-математических наук, профессор,
Ошский государственный университет
Кыргызстан, г. Ош, Gulbadan_57@mail.ru

Борбоева Гулниса Маматкановна
кандидат физико-математических наук, доцент
Ошский государственный университет
Кыргызстан, г. Ош, Borbo71@mail.ru

Аннотация. *Целью статьи является определение роли геометрических задач с многозначными ответами (полиответные задачи) в формировании пространственного мышления обучающихся. Выявлено, что решения полиответных задач формируют умения создания пространственных образов, распознавания, мысленного преобразования фигур, способствуют более глубокому восприятию комбинаций фигур, развивают способность анализировать, рассуждать, обосновывать мысли и умения рассмотрения с разных позиций не только геометрических, но и жизненных задач, находя всевозможные варианты ответов и пути их решения.*

Ключевые слова. *Геометрия, геометрические фигуры, полиответные задачи, пространственное мышление, распознавание фигуры, преобразование, конфигурация фигур.*

THE ROLE OF GEOMETRICAL TASKS WITH MULTIPLE-VALUED ANSWERS IN FORMATION OF SPATIAL THINKING

Matieva Gulbadan
Doctor of Physico-mathematical sciences, Professor, Osh State University
Kyrgyz Republic, Osh, Gulbadan_57@mail.ru

Borboeva Gulnisa Mamatkanovna
PhD of Physico-mathematical sciences, Osh State University
Kyrgyz Republic, Osh, Borbo71@mail.ru

Abstract. *The objective of this article is to determine the role of geometric tasks with multiple-valued (poly-answer tasks) in the formation of spatial thinking of students. As such tasks, in our opinion, push to consideration of the solution of tasks from the different parties, considering the various conditions allowing to find possible answers. It is revealed that the solutions of such tasks form the skills of creating spatial images, recognition, mental transformation of figures, contribute to a deeper perception of combinations of figures, develop the ability to analyze, justify thoughts and abilities of consideration from different positions not only geometric, but also life tasks, finding all sorts of answer choices and solutions.*
Keywords. *Geometry, geometric figure, poly-answer tasks, spatial thinking, figure recognition, transformation, configuration of figures.*

В современном обществе невозможно найти сферу деятельности, где от специалиста не требовалось бы пространственного мышления. Успешность специалиста в профессиональной деятельности зависит не только от его профессиональной подготовки, но и от уровня мышления.

Формирование пространственного мышления обучающихся является одной из основных целей в преподавании геометрии. Пространственное мышление необходимо для восприятия учебного материала курса геометрии, для решения различного рода практических и теоретических задач во многих сферах деятельности и в практической жизни.

Пространственное мышление − специфический вид мыслительной деятельности, которая необходима при решении задач, требующих ориентации в пространстве (как видимом, так и воображаемом), и основывается на анализе пространственных свойств и отношений реальных объектов или их графических изображений [5,с. 88].

В настоящее время проводимые реформаторские преобразования в школьной системе образования Кыргызской Республики привели к сокращению учебной нагрузки, в том числе уроков геометрии, черчения, труда и рисования (ныне последние три дисциплины обьединины в одну – “Технология”), которые более чем другие учебные дисциплины способствовали формированию логического и пространственного мышления учащихся. В связи с этим пространственное мышление обучающихся в настояшее время не формируется на должном уровне.

В работах [1], [4] рассмотрена роль пространственного мышления в профессиональной и повседневной жизни человека, показаны некоторые способы развития пространственного мышления студентов-математиков в процессе преподавания геометрии.

Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач.

В.А. Далингером для формирования пространственных представлений предлагается система задач на распознавание пространственных объектов в стандартных и нестандартных ситуациях, на развертки многогранников, на мысленное и графическое стереометрическое реконструирование и моделирование, а также задачи черчения на уроках геометрии [3].

А.В. Василенко выделяет четыре вида задач на развитие пространственного мышления учащихся, связанных с реальными объектами, их изображениями, моделями и др. [2]. И.М. Смирновой и В.А. Смирновым предложены «Задачи на распознавания сечений многогранников» [7], «Задачи на распознавания пространственных фигур» [10], задачи на тему «Поворот. Фигуры вращения» [8], направленные на формирование пространственного представления. Е. И. Санина и О.А. Гришина рассматривают задачи на комбинации пространственных фигур, позволяющие создать пространственные образы о стереометрических комбинациях[5].

В данной статье рассмотрим полиответные задачи (задачи с многозначными ответами), способствующие формированию пространственного мышления. Поскольку именно такие задачи, на наш взгляд, подталкивают к рассмотрению решения задач с разных сторон, учитывая всевозможные условия, позволяющие находить варианты ответов.

«Вызов» к теме «Взаимное расположение прямых в пространстве» примерно можно провести с помощью следующих задач, направленных на развитие пространственного представления и эвристическую деятельность обучающихся.

Задача 1 (распознавание фигур). Какие фигуры изображены на рис. 1 и какими свойствами они обладают?

Ответ этой задачи зависит от развитого геометрического воображения.

а) две пересекающиеся прямые на плоскости

б) три луча с общим началом на плоскости

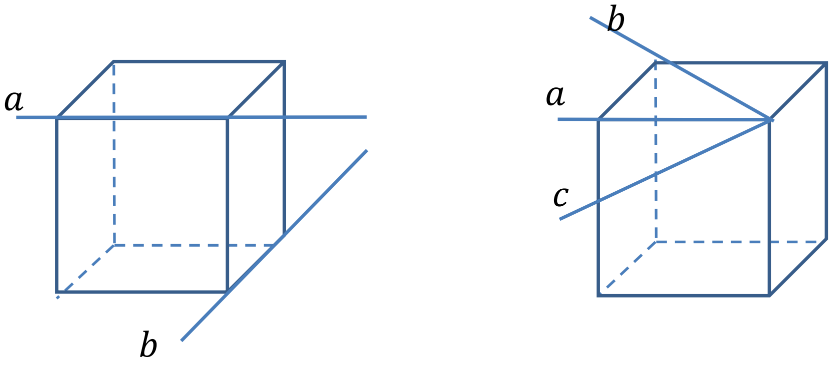
Рис. 1.

Учитель достигнет своей цели, если обучающиеся сами или с помощью его придут к следующим ответам:

а) две пересекающиеся прямые на плоскости (рис.1а); скрещивающиеся прямые в пространстве (рис.2 а).

б) три луча с общим началом на плоскости (рис.1.б); ребра трехгранного угла (рис. 2 б).

Необходимо обладать хорошим геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Учитель должен добиться того, чтобы обучающие сами смогли связать трудно воспринимающиеся пространственные конфигурации с конкретным вспомогательным геометрическим телом, например с параллелепипедом. Такая методика позволит «выйти в пространство». Пример решения этой задачи очень поучителен с позиций задач формирования и использования образного мышления. Самое главное − это воспитание потребности изучения взаимного



а) скрещивающиеся прямые

б) ребра трехгранного угла

Рис. 2

расположения геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

Задача 2 (мысленное преобразование заданного изображения).

Пусть PQ – средняя линия треугольника ABC.CH – высота треугольника CPQ (рис. 3). Сделав поворот треугольников PCH и QCH соответственно вокруг точек P и Q так, чтобы отрезки PC и PA, а так же QC и QBсовместились, установить в какую фигуру превратится данный треугольник ABC?

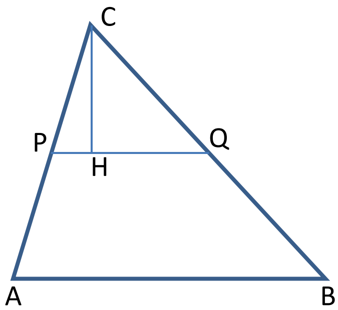
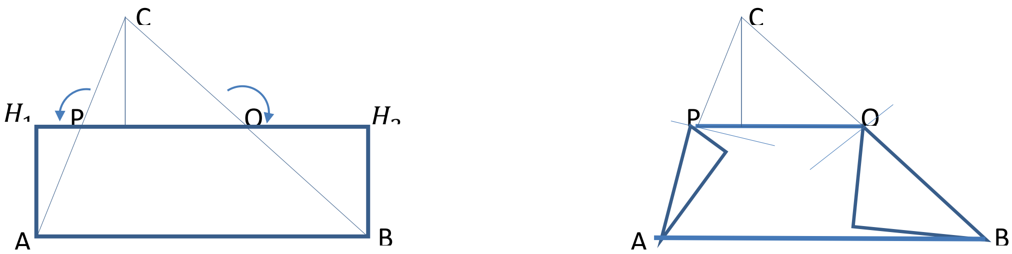


Рис. 3. Треугольник

Ответ. Прямоугольник. Трапеция (два решения).

Решение. В первом случае произведем мысленный поворот путем центральной симметрии (рис.4, а), а во втором случае с использованием осевой симметрии (рис. 4, б).



а) Поворот путем центральной симметрии

б) Осевая симметрия

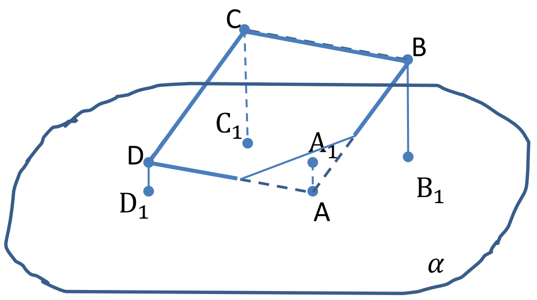
Рис. 4. Мысленное преобразование фигуры

Решение задачи предполагает умение осуществлять требуемые мысленные преобразования, как в пределах плоскости, так и с выходом из нее.

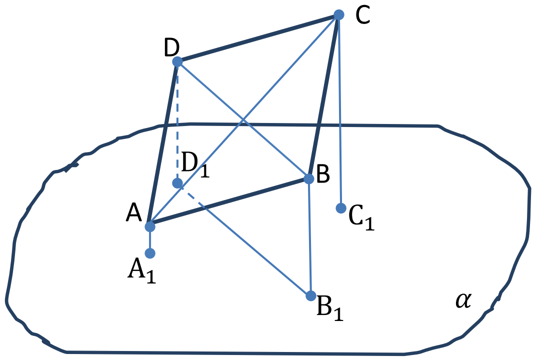
Задача 3 (расположение фигуры относительно плоскости). Расстояния от следующих друг за другом идущих вершин A, B и C параллелограмма $ABCD$ до плоскости α равны соответственно 1, 3 и 5. Найдите расстояние от вершины D до этой плоскости [9]. Ответ. 1.3.7.9 (четыре решения).

Решение. Ответ на поставленный вопрос зависит от расположения точек относительно плоскости.

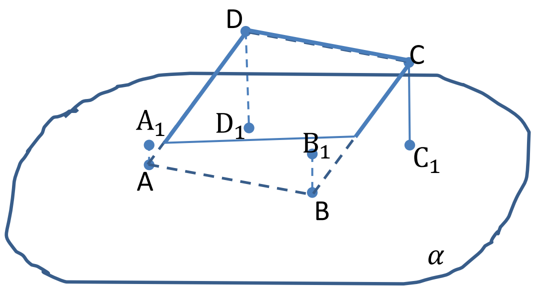
Решение задачи требует умения мысленного представления расположения фигур, способствует развитию способности анализировать.
$DD_1 = 1$ (рис.5 а); $DD_1 = 3$(рис.5 б); $DD_1 = 7$ (рис.5 в); $DD_1 = 9$(рис.5 г).



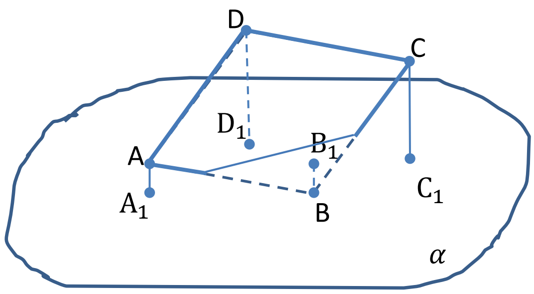
а) B, Cи D лежат по одну сторону, A –по другую от плоскости



б)A, B, C и Dлежат по одну сторону от плоскости



в) A и B лежат по одну сторону, C и D – по другую от плоскости



г) A, C и D лежат по одну сторону, B по другую от плоскости

Рис.5. Нахождение четвертой вершины параллелограмма

Задача 4 (комбинация пространственных тел). На плоскости лежат три шара, попарно касающихся друг друга. Радиусы r, 3r и 3r соответственно. Четвёртый шар касается первых трёх и той же плоскости. Найдите радиус четвёртого шара [9].Ответ. $\frac{3}{4}$r и 3r (два решения).

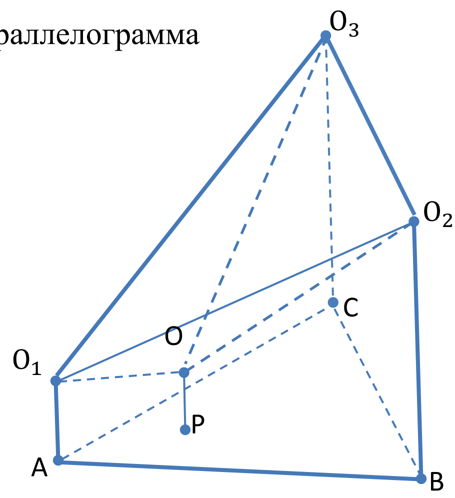


Рис. 6. Изображение касающихся три шара

Решение. Пусть O_1 – центр меньшего шара, O_2, O_3– центры двух других, A, B, C– точки касания их с плоскостью (Рис. 6). Допустим, что четвёртый шар с центром O касается той же плоскости в точке P. Если точка P лежит внутри треугольника ABC, то получим шар с радиусом $\frac{3}{4}$r; если лежит вне плоскости треугольника ABC, то шар с радиусом 3r.

Решение этой задачи способствует более глубокому восприятию комбинаций пространственных фигур в формировании пространственного мышления.

Итак, полиответные задачи, решаемые на уровне интуитивного познания, и определенным образом организованная работа с ними, способствуют развитию логического и пространственного мышления, а также стимулируют протекание интуитивных процессов.

Проведенный анализ решений рассмотренных задач позволяет заключить, что задачи с многозначными ответами формируют умения распознавания, мысленного преобразования фигур, способствуют более глубокому восприятию комбинаций фигур. Они также развивают способность анализировать, рассуждать, обосновывать мысли и формируют умения рассматривать с разных позиций не только геометрические, но и жизненные задачи, находя всевозможные варианты ответов и пути их решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Борбоева Г.М.* Роль метода параллельной проекции в развитии пространственного мышления студентов// Вестник КГУСТА. №2(52). Бишкек. 2016. С. 218-223.
2. *Василенко А.В*. Систематизация задач на развитие пространственного мышления учащихся // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2-1;
URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=17384
3. *Далингер В.А.* Методика обучения стереометрии посредством решения задач: учебное пособие для академического бакалавриата/ –2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство «Юрайт», 2017. 370 с.
4. *Матиева Г., Борбоева Г.М.* Решение задач на построение – как один из способов развития пространственного мышления студентов-математиков// Вестник КГУСТА. №2(52). Бишкек. 2016. С. 227-232.
5. *Методика обучения геометрии*: Учеб. пособие для студ. высш.пед. учеб. заведений /Под ред. В. А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия». 2004. 368 с.
6. *Санина Е. И., Гришина О.* А. Развитие пространственного мышления в процессе обучения стереометрии //Вестник РУДН. Серия: Психология и педагогика. 2013. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-v-protsesse-obucheniya-stereometrii
7. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Задачи на распознавание сечений многогранников //«Математика в школе» №2. 2019. С.11-17.
8. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Развитие пространственных представлений старшеклассников при изучении темы «Поворот. Фигуры вращения» //«Математика в школе»№5. 2016. С. 34-40
9. *Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. –М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. 400 с.: ил.
10. http://geometry2006.narod.ru

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛУ «ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ»

Михайлов Павел Никонович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
Россия, г. Стерлитамак, mihaylovpn@mail.ru

Михайлова Валентина Викторовна
кандидат педагогических наук, доцент
Стерлитамакский химико-технологический колледж
Россия, г. Стерлитамак, mikhailovavv@mail.ru

Аннотация. *В статье описан один из вариантов построения практических занятий по разделу «Основания геометрии» для направления «Педагогическое образование»,профиля «Математика».Сформулированы актуальные проблемы, связанные с новыми тенденциями развития образования.*

Ключевые слова: *практические занятия, педагогическое образование, математический факультет, основания геометриии.*

PRACTICAL EXERCISES ON THE SECTION «GEOMETRY BASES»

Mikhaylov Pavel Nikonovich
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor of algebra and geometry Department, Bashkir state university
Russia, Sterlitamak, mihaylivpn@mail.ru
Mikhaylova Valentina Viktorovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor
Sterlitamak Chemical and Technological College
Russia, Sterlitamak, mikhailovavv@mail.ru

Abstract. *The article describes one of the options for building practical classes in the section"Foundations of Geometry" for the direction "Pedagogical Education"", the profile "Mathematics". The current problems related to new trends in the development of education are formulated.*

Keywords: *Practical exercises, pedagogical education, faculty of mathematics, bases of geometry.*

Из отчетов Минобрнауки по результатам ЕГЭ видно, что большая часть учеников не справляются с заданиями по геометрии. Объясняется это многими причинами: цифровизация образования, мало часов, трудный предмет, плохое преподавание, для успешной сдачи ЕГЭ не обязательно решать задачи по геометрии и т.д. Можно привести много доводов, как подтверждающих эти причины, так и опровергающие их. С одной стороны во всех документах призывают о необходимости подготовки в вузах креативных людей, о развитии мышления, основным требованием остается подготовка к практической деятельности. С другой стороны, получается, что фундаментальные знания не нужны, финская школа – образец, которая учит практическим вещам. Чтобы не быть голословными, обратимся к программам по математическим дисциплинам для профилей «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» (МОАИС) и «Прикладная математика и информатика» (ПМИ), которые содержат следующие разделы: линейная алгебра и аналитическая геометрия, многомерная и дифференциальная геометрии. Геометрия кривых и поверхностей в евклидовом трехмерном пространстве. Вся математика: анализ, алгебра – все в ущемленном варианте по сравнению с программами предыдущих лет (следствие многоуровневой системы «бакалавриат» и «магистратура»). Одной из главных задач преподавательского корпуса остается сохранение фундаментальной подготовки выпускников в рамках выделенных часов.

Школьный курс геометрии, хотя и называют элементарной геометрией, представляет основу геометрии. Поэтому при подготовке учителей математики углубленное изучение оснований геометрии чрезвычайно важно. Если в единых программах для пединститутов изучение раздела «Основания геометрии» было обязательным, то теперь только в том случае, если доказать необходимость этого курса и включить его в перечень избранных вопросов.

Чаще всего, следуя программе и учебникам В.Т. Базылева, изучают в следующей последовательности: 1. Исторический обзор оснований геометрии, элементы геометрии Лобачевского. Геометрия до Евклида.

2. Общие вопросы аксиоматики. Системы аксиом Гильберта, Вейля, система аксиом школьного курса. Такая последовательность соответствует истории открытий, но как показывает практика, на наш взгляд не логична.

Изучая историю вопроса, в том числе «Начала» Евклида, возникает необходимость в их критике, но до изучения общих вопросов аксиоматики студент не имеет критериев оценки реализации аксиоматического метода. Поэтому целесообразно, вначале рассмотреть суть аксиоматического метода, отработать основные его понятия (аксиома, определение, доказательство), смысл и способы проверки требований (непротиворечивость, независимость, полнота) к системе аксиом и только после этого изучать различные аксиоматики. Реализации такого подхода способствует, с одной стороны интуитивное представление об аксиоматическом методе, сформированное в школьном курсе математики, с другой, − изучение к этому времени некоторых алгебраических структур в курсе алгебры.

Большой проблемой изучения «Оснований геометрии» является отсутствие хороших задачников. До недавнего времени такие задачи у известных авторов (Погорелов А.В., Александров А.Д, Егоров И.П. и др.) приводились лишь как примеры и упражнения после соответствующих разделов. Хорошую попытку устранить такой пробел, предпринят авторами Гусевой Н.И., Денисовой Н.С., Тесля О.Ю. в «Сб. задач по геометрии, часть 2. – М.: КНОРУС, 2012 г. – 528 с. Здесь представлен достаточно обширный задачный материал по общим вопросам аксиоматики, по системам аксиом Д. Гильберта, Г. Вейля, по неевклидовым геометриям. Особую ценность имеют вопросы к главе, обращающие внимание на важные моменты в изучении раздела; такие вопросы можно рекомендовать студентам для самопроверки.

Главный недостаток – их приведено мало и они не разбиты по темам. Благодаря сборнику преподаватели имеют возможность выбора задач в зависимости от целей занятия.

Основные трудности использования материала сборника при изучении оснований геометрии, на наш взгляд, сводятся к следующему: 1) отсутствию системы при изучении различных аксиоматик, 2) нет анализа действующих в школе учебников и используемых в них систем аксиом.

Как может выглядеть система по изучению системы аксиом?

1. Проверка выполнения требований, предъявляемых к системе аксиом. Доказательство или воспроизведение идей доказательства выполнения, или конструирование примеров, доказывающих невыполнение некоторых из требований. Например, так, как доказывается зависимость системы аксиом школьного курса или зависимость аксиом Г. Вейля в учебнике Егорова И.П. Основания геометрии. М.: Просвещение, 1984.

2. Решить задачи на формулировку определений; выделение иерархии понятий в рассматриваемой системе аксиом. Здесь же важно сформулировать, что значит определить что-то, повторить возможные конструкции определений.

3. Решить последовательно различные задачи на доказательство утверждений. Продемонстрировать, как строится геометрия: от доказательства простейших к более и более сложным теоремам.

4. Обсудить отношение студентов к рассматриваемой аксиоматике.

Для активной работы студентов по первому пункту необходимо предварительно отработать критерии требований к системам аксиом.

Поучительно продемонстрировать это на следующей простой **задаче:**

Даны два множества, назовем их «точки» и «прямые». Элементы этих множеств находятся в отношении «принадлежности», если выполнены следующие аксиомы:

A_1. Каковы бы не были две различные точки, существует прямая, которой они принадлежат.

A_2. Каковы бы ни были две различные точки, существует не более одной прямой, которой они принадлежат.

A_3. Какова бы не была прямая, существует, по крайней мере, одна точка, ей принадлежащая.

A_4. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

Доказать, что: 1) система аксиом непротиворечива; 2) каждая из аксиом не зависит от других; 3) система аксиом неполна.

Заметим, что много интересных моделей различных аксиом можно найти в теории графов. Наряду с дисциплиной «Математическая логика», «Основания геометрии» и в вузовском курсе по математике, пожалуй, имеют возможность объяснить студентам: Чем отличается правдоподобное рассуждение от доказательства? Что означает выражение «более строгое доказательство»? Несколько иной подход к изучению основ геометрии изложен в работе[1].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.*Шабаева А.Ф.* Изучение оснований геометрии на практических занятиях по геометрии со студентами направления «Педагогическое образование» //Колл. монография «Преподавание математических и методических дисциплин в вузе в современных условиях» под. ред. П.Н. Михайлова. Стерлитамак: СФ БашГУ, 2018. – С. 197-225.

АКТУАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Орлов Владимир Викторович
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры методики обучения математике и информатике РГПУ им. А.И. Герцена
Россия, г. Санкт-Петербург, vlvo@mail.ru

Аннотация: *в статье в историко-генетическом контексте показаны направления развития школьного геометрического образования на современном этапе его развития.*
Ключевые слова: *геометрия, обучение геометрии, самостоятельная познавательная деятельность.*

CURRENT TRENDS OF DEVELOPMENTGEOMETRIC EDUCATION

Orlov Vladimir Viktorovich
doctor of pedagogical Sciences, Professor,Professor of the Department of methods of teaching mathematics and Informatics, Herzen State Pedagogical University
Russia, Saint Petersburg, vlvo@mail.ru

Abstract: *in the article the directions of development of school geometric education at the present stage of its development are shown in the historical and genetic context.*
Keywords: *geometry, teaching geometry, independent cognitive activity.*

Существенная роль геометрии как элемента научной системы и как школьного учебного предмета предопределена историей развития цивилизации и историей развития математики: исторически первыми понятиями математики являются число и фигура. Этим подчеркивается как прикладное значение геометрии, так и ее роль в построении и исследовании современной естественнонаучной картины мира. Изучение геометрических тел как идеальных моделей объектов окружающего мира предполагало с одной стороны изучение их границ, чаще всего, плоских фигур, а затем линий (известная схема: тело – поверхность тела – линия – точка). С другой стороны, изучение тел и фигур потребовало изучение отношений: равенства, подобия, параллельности и др., и числовых характеристик объектов: объемов, площадей, периметров. Так постепенно и складывалось содержание геометрии как научной системы, а затем и учебного предмета. Накопление фактологии поставило вопрос о ее научной организации, породившей аксиоматическое построение геометрии как научной системы, а развитие системы обучения математике вызвало обсуждение подходов к построению геометрии как самостоятельного учебного предмета.

Систематическое обучение математике в рамках государственной системы образования в России началось со школы Математических и навигацких наук, где геометрический материал был представлен в рамках единого курса математики через разнообразные задачи прикладного характера. Ученикам надлежало усвоить решение конкретной задачи и применить выученную последовательность действий в аналогичных ситуациях.

С 1714 года в поддержку школе математических и навигацких наук в России стали открываться цифирные школы, где в четвертом классе предлагался для изучения геометрический материал, рассматривались элементы плоской тригонометрии, а во второй половине XVIII века геометрия выделилась в самостоятельный учебный предмет, структура которого складывалась под влиянием «Начал» Евклида и была представлена тремя разделами: *лонгиметрией* (геометрией линий); *планиметрией* (геометрией плоских фигур); *солидометрий* (геометрией тел). В конце XVIII века в учебниках геометрии стали появляться доказательства теорем, не всегда точные и аккуратные (например, у М.Е. Головина). Содержание курса геометрии для гимназий и училищ в основном сложилось в первой половине XIX века у Ф.И. Буссе, а наиболее полно было представлено позже в «Геометрии в объеме гимназического курса» А.Ю. Давидова (39 изданий по 1922 год).

В названных учебниках, как и в более поздних (А.Ф. Малинин, А.П. Киселев), не просматривалась аксиоматическая основа организации учебного материала, поскольку они были написаны до «Оснований геометрии» Д. Гильберта, но явно просматривалась евклидовская традиция, следование которой в обучении геометрии было немного нарушено появлением пропедевтических курсов геометрии (Шаррельман и др.). Наиболее яркие пропедевтические курсы того периода были созданы в начале XX века С.И. Шохор-Троцким и А.Р. Кулишером. В советский период следует упомянуть пропедевтический курс геометрии Р.В. Гангнуса и Ю.О. Гурвица (Начальные сведения по геометрии, 1933 г.), написанный к их систематическому курсу. После этого пропедевтических курсов в чистом виде не было, геометрический материал разного объема включался в курс математики. Исключение составляли лишь экспериментальные учебные пособия (Г.Г. Левитас, Н.С. Подходова и др.).

Вторым нарушением традиций Евклида при обучении геометрии можно считать реализацию идеи фузионизма. Все пропедевтические курсы геометрии, естественно, носили фузионистский характер. В разное время в разных учебниках планиметрии содержался раздел, посвященный многогранникам и телам вращения (Н.Н. Никитин, например), материал по стереометрии, например, параллельность плоскостей, был включен в первые издания учебников геометрии А.Н. Колмогорова, А.Ф. Семеновича, Р.С. Черкасова.

В настоящее время эта традиция в определенной мере продолжается в учебниках А.Д. Александрова и др., где планиметрические факты иллюстрируются на объемных фигурах. Отметим, что в различных экспериментальных пособиях по геометрии недавнего времени также была на различном уровне воплощена идея фузионизма (В.А. Гусев, В.В. Орлов и др.). Включение в систематический курс геометрии элементов тригонометрии и аналитической геометрии также можно рассматривать в качестве нарушения евклидовской традиции. Хотя, понятно, что тогда эти вопросы не были известны.

Серьезным нарушением можно считать предпринятую А.Н. Колмогоровым попытку построения школьной геометрии на идее геометрических преобразований в логике общемирового движения за реформу математического образования «Евклид должен уйти!», но такой подход не прижился в отечественной школе, и все вернулось к традиционной логической организации учебного материала.

Итак, мы можем сформулировать вывод о содержании и логической организации школьного курса геометрии:

–содержание систематического курса геометрии в целом сложилось более 150 лет назад;

–оно отражает потребность в познании окружающего мира в логике математики для жизни;

– обеспечивает возможность продолжения математического образования на последующих ступенях обучения;

– логически выстроено в традициях Евклида, что позволяет показать построение геометрии как научной системы.

Содержание не подвергнется в обозримом будущем радикальным изменениям. Речь должна идти о реструктуризации содержания в следующем направлении: широкий объем геометрического материала *в начальной школе и 5-6 классах* позволит ученику лучше понимать окружающий мир, успешно подготовиться к самостоятельной познавательной деятельности при изучении систематического курса геометрии.

В *систематическом курсе* материал должен быть организован по схеме: геометрические тела – плоские фигуры как элементы тел, их свойства и числовые характеристики – объемные фигуры, их свойства.

Отметим, что подобная структура позволяет естественным образом реализовать идею фузионизма.

Свое место в содержании должны занять элементы аналитической геометрии, поскольку они напрямую связаны с курсом высшей математики, хотя при ее изучении потребуется и «чисто геометрическая фактология», как, например, при решении **задачи:** *написать уравнение плоскости, проходящей* *через точку* $M(2;-1;1)$ *и перпендикулярной плоскостям* $4x-y+3z=6$ *и* $x+y+z=3$ при решении которой нужно знать не только различные уравнения плоскости, но и свойства перпендикулярности плоскостей, благодаря которым, нормальный вектор искомой плоскости будет лежать на линии пересечения двух данных. Отметим, что данная задача имеет не один способ решения, и умение осуществлять поиск решения задач, сформированное при изучении математики в школе, сыграет свою положительную роль и на следующей ступени обучения.

Каким бы прекрасным ни были содержание курса и его логическая организация, эффективное обучение невозможно без реализации современных методических подходов. *Методическая практика* (передача математических знаний от субъекта к субъекту) возникла практически одновременно с возникновением математики. Говоря современным языком, на протяжении очень долгого времени реализовывалась информационная модель обучения, хотя были и исключения. Прообраз компьютерной модели обучения был представлен М.Е. Головиным, ланкастерский метод обучения математике перенес на отечественную почву Ф.И. Буссе. Серьезное внимание методике обучения геометрии стали уделять с середины XIX века. (А.Н. Острогорский). К концу века заговорили об учете психологических особенностей школьника при обучении математике, стала формироваться возрастная психология, появились опирающиеся на ее результаты подготовительные курсы геометрии. В советский период педологами (Л.С. Выгодским, П.П. Блонским и др.) также уделялось определенное внимание развитию ребенка при обучении математике, но основательно к этому вопросу применительно к основной и старшей школе вернулись лишь в восьмидесятые годы XX века (И.С. Якиманская и др.).

Концепция личностно-ориентированного обучения предполагала опираться на субъектный опыт ученика и выстраивать для него индивидуальную образовательную траекторию. Учебники геометрии для школы реализовывали информационную модель обучения, что не способствовало включению опыта школьника в процесс обучения и реализацию самостоятельной деятельности в процессе освоения геометрического содержания. Однако принятая несколько лет назад Концепция развития математического образования в России ориентирует всех на широкое включение самостоятельной познавательной деятельности ученика в освоение предмета, для чего становится необходимым учить школьника этой деятельности на математическом (геометрическом) содержании. Учебники не содержат соответствующих материалов, и эта деятельность целиком ложится на плечи учителя. Ученика следует учить стратегиям поиска решения задач и основным методам решения геометрических задач, вооружить его методологическим знаниями о структуре определений, теорем, аксиоматическом построении геометрии и т.п., упражнять его в самостоятельной деятельности. Еще раз повторим, что соответствующие задания, как и образцы реализации стратегий, примеры должны быть представлены в учебниках. Типология таких заданий разработана, дело лишь за их использованием в обучении. Обратим внимание, что сказанное в полной мере относится и к изучению высшей математики, где ситуация с самостоятельной деятельностью студентов ничуть не лучше.

Итак, сделаем краткие выводы. 1. Содержание курсов геометрии для школы и вуза и их логическая организация сложились в ходе исторического развития системы образования, отражает потребности общества в целом и конкретного ученика и не подвергнется радикальным изменениям.

2. Изменения должны коснуться структуры изучения геометрического материала: широкий объем геометрических сведений в 1-6 классах, тела – плоские фигуры – тела в систематическом курсе геометрии 7-11 класса в соединении с историко-методологической линией и линией аналитической геометрии с реализацией идеи фузионизма.

3. Самостоятельная познавательная деятельность ученика должна стать ведущей при изучении геометрии, что должно повлечь определенные изменения, как в учебниках, так и в организации обучения на основе специального вида заданий и широкой электронной поддержки на различных ступенях обучения.

ПОДГОТОВКА БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ К ОБЕСПЕЧЕНИЮ МОТИВАЦИОННОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Родионов Михаил Алексеевич
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информатика и методика обучения информатике и математике», Пензенский государственный университет
Россия, г. Пенза, do7tor@mail.ru

Аннотация. *В статье анализируются возможности подготовки учителя математики к актуализации мотивационной направленности учебного процесса. Рассматриваются условия включения мотивационного компонента в систему профессионально-педагогической подготовки студенто, раскрываются этапы такого включения. При этом особое внимание уделяется овладению будущими учителями математики педагогическими умениями по конструированию и актуализации мотивационно насыщенных педагогических ситуаций*.
Ключевые слова: *профессионально-педагогическая подготовка будущих учителей математики, обеспечение мотивационной направленности обучения математике, мотивационно-насыщенная педагогическая ситуация.*

TRAINING FUTURE TEACHER TO ENSURING MOTIVATIONAL DIRECTION OF TRAINING IN MATHEMATICS

Rodionov Mikhail Alekseevich
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department "Informatics and Methods of Teaching Informatics and Mathematics", Penza State University,
Russia, Penza, do7tor@mail.ru

Abstract. *The article analyzes the possibilities of preparing a mathematics teacher to actualize the motivational orientation of the educational process. The conditions of inclusion of the motivational*

component in the system of professional and pedagogical training of students are considered, the stages of such inclusion are revealed. At the same time, special attention is paid to mastering by future teachers of mathematics pedagogical skills in the design and updating of motivationally saturated pedagogical situations.
***Key words**: professional and pedagogical training of future teachers of mathematics, ensuring the motivational orientation of teaching mathematics, motivationally saturated pedagogical situation.*

Одним из основных направлений модернизации школьного математического образования, как известно, является реализация направленности обучения на полноценную актуализацию мотивационного компонента учебной деятельности. Однако, в учебно-методической литературе мотивация либо представляется лишь как отдельный этап изучения той или иной дидактической единицы, либо, напротив, рассматривается только с «общепредметных» позиций, не предусматривая сколько-нибудь серьезного технологического наполнения. В частности, вне зоны специального внимания авторов научно-методических и учебно-методических работ оказался характер соответствия уровня профессиональной мотивации учителей и уровня учебной мотивации их учеников. В большинстве исследований, зачастую изначально предполагается наличие тесной корреляции между указанными видами мотивации, в то время как в школьной практике обучения математике мы часто встречаемся со случаем, когда, например, даже «горящий на работе» квалифицированный учитель далеко не всегда может «расшевелить» своих учеников, подобрав адекватные методические средства, которые бы гарантированно привлекли их к продуктивной учебной деятельности [1, 2, 4, 8].

Указанные обстоятельства в определенной мере осложнили возможность естественного включения мотивационного компонента в систему профессионально-педагогической подготовки студентов педвузов. Возможность такого включения определяется созданием условий для непосредственного формирования у них положительной мотивации к своей будущей профессионально-педагогической деятельности, с одной стороны, и овладения педагогическими умениями по конструированию и актуализации мотивационно насыщенных педагогических ситуаций – с другой. В числе таких условий можно указать:

- непрерывный и поэтапный характер процесса подготовки студентов к реализации мотивационной направленности учебной деятельности школьников, который включает в себя психолого-педагогическую, методическую и специальную подготовку студентов к рассматриваемому виду педагогической деятельности и органично вписывается в общий процесс подготовки будущих учителей в рамках педагогического вуза;
- наличие специального методического обеспечения студентов, опирающегося на учет особенностей содержания каждого этапа их подготовки к реализации мотивационной направленности учебной деятельности;
- адекватную проекцию теоретической составляющей подготовки студентов к процессу формирования и развития учебной мотивации школьников в плоскость практической реализации, начиная с деятельности

воспроизведения известных формулировок и теоретических схем и заканчивая конструированием мотивационно насыщенных учебных ситуаций в режиме относительно свободной познавательной позиции;

- полноценный учет потребностно-мотивационных факторов, характерных для математической деятельности (практическая, эстетическая, творческая потребности, потребность в доказательстве, потребность в емких и точных языковых средствах), в соответствии с каждым из которых определяются основные педагогические стратегии и тактики организации учебной работы со студентами на занятиях и педагогической практике.

Сама подготовка студентов к реализации мотивационной направленности учебной деятельности может рассматриваться с двух позиций:

1) как целостная подструктура всей системы профессионально-педагогического образования,

2) как непрерывный динамический процесс.

В рамках первого подхода в системе подготовки будущих учителей к реализации мотивационной направленности процесса обучения школьному куру математики можно выделить следующие взаимосвязанные и взаимообусловленные *компоненты:*

мотивационный – личностное отношение будущих учителей к профессии в целом и заинтересованность в мотивационном обеспечении процесса обучения математике;

содержательный – знания о теоретических основах организации методической деятельности по формированию и развитию учебной мотивации школьников, об основных направлениях и способах ее успешной реализации;

операциональный – сформированность соответствующих профессиональных умений и навыков, опыт реализации творческой деятельности по организации методической работы в данном направлении.

Данные компоненты положены в основу критериальной диагностической базы при организации экспериментальной работы, в соответствии с которой распределение студентов по уровням их готовности к реализации мотивационной направленности обучения математике в школе осуществляется на основании специально выработанных критериев оценки сформированности этих компонентов

Второй подход дает возможность выделить этапы процесса подготовки будущих учителей математики к реализации мотивационной составляющей учебного процесса в школе, раскрыть цели, определить содержание, методы и формы организации каждого из них.

Первый этап – *базовый.* На этом этапе, с одной стороны, происходит начальная локализация мотивационных установок студентов в пространстве их будущей профессионально-педагогической деятельности. С другой стороны, в процессе изучения математических, психолого-педагогических и методических дисциплин, а также на основе личного опыта приходит осознание необходимости целенаправленного формирования и развития мотивации учебной деятельности школьников. Именно на базовом этапе в процессе изучения цикла психолого-педагогических дисциплин происходит первоначальное знакомство студентов с исходными понятиями теории учебной мотивации (мотивами, потребностями, интересами, целями и т.д.), а также с основными общепедагогическими подходами к ее формированию. Особое внимание здесь должно уделяться различным трактовкам самого понятия мотивации учебной деятельности и вопросам ее целенаправленного развития, по-разному решаемым в контексте той или иной образовательной технологии.

Второй этап – *теоретический.* На этом этапе вопросы мотивационного обеспечения процесса обучения школьников математике должны находить адекватное отражение при изучении базового курса теории и методики обучения математике, причем, как в лекционном его материале, так и в практической части.

Что касается лекционных занятий, то здесь можно выделить два основных направления работы.

1) Первое из них предполагает обязательное включение в программу изучения курса вопросов, тесно связанных с проблемой учебной мотивации и путей ее формирования. Причем выделенные вопросы должны органично вплетаться в темы отдельных лекций, не разбивая логики построения курса. Например, вопросы, касающиеся мотивации доказательных рассуждений могут естественным образом включаться в раскрытие основных этапов изучения теорем, а мотивация поисковой деятельности тесно связана с методикой работы с математическими задачами [3, 5, 6, 9].

2) Второе направление подготовки студентов – это демонстрация самим преподавателем различных приемов и средств мотивационного воздействия в ходе изложения материала, которые студенты могут взять себе на вооружение в дальнейшем.

Широкие возможности в этом плане предоставляет учебный материал частных методик. Так, изучая вопрос развития функциональной линии в курсе алгебры, обычно рассматриваются различные подходы к построению графиков функций. При этом преподавателю целесообразно акцентировать внимание студентов на целесообразность «появления» каждого нового способа построения графиков при переходе из класса в класс: табличного способа (построение «по точкам») в 7 классе, метода геометрических преобразований в 8-9 классах, предварительного исследования функции с помощью производной в 10-11 классах. При этом будущие учителя должны увидеть, что основным мотивационным фактором для школьников должно быть осознание ими объективной практической потребности в расширении имеющегося арсенала способов построения графиков, возникающей в связи с недостаточной применяемостью предыдущего способа для построения более сложных графиков и, как следствие этого, его недостаточной универсальностью.

На практических и лабораторных занятиях по теории и методике обучения математике усиление внимания к мотивационной составляющей процесса обучения математике достигается путем включения в учебный процесс практических заданий специального вида. Например, на занятии по методике изучения теорем студентам в качестве домашнего задания предлагалось на примере любой теоремы из школьного курса геометрии разработать различные подходы, реализующиеся на этапе мотивации работы с ней. В результате может быть предложен целый ряд отличных от традиционного приемов мотивации изучения теорем, каждый из которых обладает различным дидактическим и развивающим потенциалом и определяет логику развития содержания на основе реализации различных методов обучения.

Раскрытие и дальнейшее обоснование этой логики служит предметом обсуждения всех студентов на следующем занятии.

Огромный потенциал для формирования мотивационно-ценностной составляющей математической деятельности учащихся имеет работа с задачами, предполагающими несколько способов решения [5, 6, 9].

Например, доказательство теоремы о площади трапеции, основная линия рассуждения, как известно, традиционно сводится к выводу формулы площади трапеции через сумму площадей треугольников, на которые она разбивается любой своей диагональю. После разбора способов доказательства на занятии, опирающихся на использование других фигур, студентам предлагается предложить вариант соответствующей организации поисковой работы школьников, подобрав вопросы стимулирующего характера.

В результате учащиеся могут предложить несколько альтернативных способов разбиения трапеции (параллелограмм и треугольник, прямоугольник и два треугольника и др.). Предложенные варианты реализуются с помощью соответствующих дополнительных построений, подробно рассматривается и озвучивается один из них по группам, а один из остальных предлагается в качестве домашнего задания.

Центральным звеном данного этапа является разработанный нами спецкурс для студентов «Развитие познавательного интереса и формирование положительной мотивации учебной деятельности учащихся в процессе обучения математике», включающий в себя лекционные и практические занятия.

В рамках этого курса целенаправленно рассматриваются основные возможности формирования и развития учебной мотивации школьников в процессе обучения математике, исходя из специфики данного предмета; разбираются основные методы, приемы и средства такого формирования применительно к практическому, эвристическому, дедуктивному и эстетическому аспекту математической деятельности, происходит совершенствование практических навыков и умений студентов в организации педагогической деятельности по мотивационному обеспечению учебного процесса.

Основной упор на практических занятиях делается на разборе и демонстрации практических самостоятельных заданий, подготовленных в аудитории или дома: обыгрывание фрагментов уроков, обсуждении результатов анализа учебников, разработке компьютерных презентаций. В ходе совместного обсуждения выбираются лучшие из предложенных разработок, оговаривается возможность и оптимальные условия их реализации с точки зрения реальной школьной практики [7].

Среди видов практических заданий, предназначенных для выполнения студентами в рамках спецкурса можно отметить задания на выявление и сопоставление мотивационного потенциала различных учебников по математике, подготовку мотивационно насыщенных фрагментов работы на уроке на основе использования той или иной технологии обучения; моделирование работы по рациональной стимуляции поиска пути решения математических задач. При выполнении подобных заданий студенты поочередно выступают в роли учителя и школьника, что впоследствии позволяет им корректно спрогнозировать и оценить возможные перспективы использования рассматриваемых приемов в той или иной учебной ситуации.

Третий, *практический,* этап подготовки будущих учителей к актуализации мотивационного компонента обучения школьному курсу математике реализуется, прежде всего, в ходе прохождения студентами педагогических практик в школе, а также в процессе их начальной научно-исследовательской деятельности в рамках подготовки курсовых и дипломных работ.

Данный этап носит в значительной мере рефлексивный характер. Именно здесь появляется возможность для приобретения и осознания студентами практического опыта педагогической деятельности по формированию и развитию учебной мотивации учащихся в реальной школьной практике, приобщение будущих учителей математики к самостоятельному и творческому подбору освоенного мотивационного инструментария с последующим переосмыслением, самоанализом и коррекцией собственного опыта его использования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Родионов М.А.* Мотивация учения математике и пути ее формирования. Монография.- Саранск: МГПИ им. М.Е. Евсевьева, 2001.- 252 с.

2. *Родионов М.А.* Формирование поисковой мотивации в процессе обучения математике: Учебное пособие для учителей и студентов.– Пенза: ПГПУ, 2001.– 58с.

3. *Родионов М.А., Гусева Е.В.*Организация рефлексивного поиска пути решения математической задачи на основе деятельностно-процессуального подхода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. Педагогика. №4 (28). 2013. С.205-214.

4. *Родионов М.А., Графова О.П.* Формирование мотивации учения математике в школе: Учебное пособие. – Пенза: ПРООО «Знание» России, 2005.- 148 с.

5. *Родионов М.А., Марина Е.В.*Развивающий потенциал математических задач и возможности его актуализации в учебном процессе: Учебное пособие для студентов и учителей математики. - Пенза: Изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2010. -260 с.

6. *Родионов М.А., Марина Е.В.*Формирование вариативного мышления школьников при решении задач на построение: Учебное пособие. - Пенза: Изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2006. - 96с.

7. *Родионов М.А., Храмова Н.Н., Костромитина Е.В.* Руководство по организации самостоятельной работы студентов-заочников физико-математического факультета (теория и методика обучения математике): Учебное пособие для учителей и студентов.- Пенза: ПГПУ, 2007.- 119 с.
8. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студ. мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
9. *Rodionov M., Velmisova S.*Construction of Mathematical Problems by Students Themselves // AIP Conference Proceedings 1067 (1), 221-228.

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Санина Елена Ивановна
доктор педагогических наук, профессор кафедры математики, физики и методики их преподавания
ГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет»
Россия, г. Армавир, e-mail:esanmet@yandex.ru

Мозговая Мария Александровна
старший преподаватель кафедры математики, физики и методики их преподавания
ГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет»
*Россия, г. Армавир*e-mail: mozgovaya_mari@mail.ru

Аннотация. *С позиции психологии, формирование у школьников современных научных представлений и понятий о пространстве – одна из важнейших задач интеллектуального развития учащихся. Целенаправленная работа по развитию пространственного мышления учащихся должна пронизывать весь курс геометрии средней школы, основой является требование с первых уроков геометрии выстраивать четкое соответствие между словесными определениями геометрических понятий и их графическими образами.*
Формирование соответствующих навыков по созданию графических образов начинается с первых уроков систематического курса геометрии в основной школе. Главным действующим объектом геометрии является фигура, а главным средством обучения рисунок, чертеж, т. е. графическая модель.
Ключевые слова: *пространственное мышление, графические образы, навыки, задачи на проекционном чертеже.*

METHODS OF FORMING GRAPHIC IMAGES IN THE PROCESS OF LEARNING GEOMETRY IN HIGH SCHOOL

Sanina Elena Ivanovna
doctor of pedagogical Sciences, Professor of the Department of mathematics, physics and methods of teaching, Institute of applied Informatics, mathematics and physics,
ARMAVIR state pedagogical University»
Russia, Armavir, esanmet@yandex.ru

Mozgovay Maria Alexandrovna
senior lecturer, Department of mathematics, physics and methods of teaching, Institute of applied Informatics, mathematics and physics, Armavir state pedagogical University»
Russia, Armavir, mozgovaya_mari@mail.ru

Abstract. *From the point of view of psychology, the formation of students ' modern scientific ideas and concepts about space is one of the most important tasks of intellectual development of students. Purposeful work on the development of spatial thinking of students should permeate the entire course of geometry of high school, the basis is the requirement from the first lessons of geometry to build a clear correspondence between the verbal definitions of geometric concepts and their graphic images. The formation of appropriate skills to create graphic images begins with the first lessons of the systematic course of geometry in the primary school. The main active object of geometry is a figure, and the main means of learning is a drawing, a drawing, i.e. a graphic model. In the construction of planimetric drawings laid the foundations of graphic skills required in solving stereometric problems.*
Keywords: *spatial thinking, graphic images, skills, tasks on the projection drawing.*

Специфика геометрического содержания математической подготовки в школе требует от учащегося овладения умениями и навыками, связанных с необходимостью математического, логически обоснованного, графического, символического, словесного оформленного решения задач геометрической составляющей основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике. Проблема обучения решению геометрических задач, становится для учителя математики приоритетной в системе подготовки выпускника средней школы к ЕГЭ по математике.

Обучению геометрии посвящены исследования А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, А. В. Василенко, Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, В.В. Орлова, Е. В. Потоскуева, Н.С. Подходовой, В.И. Рыжика, И.М. Смирновой, Р. С. Черкасова, Н.В. Четверухина и др.

Решение школьной геометрической задачи, как планиметрической, так и стереометрической, подразумевает выполнение определенной последовательности действий: прочтение словесного условия, перевод описанной геометрической конструкции в воображаемый графический образ, изображение этой конструкции на чертеже (от руки или с помощью инструментов). Одновременно прописывание в краткой записи данных задачи (частичный анализ условия), на основе анализа условия составление плана решения, реализация этого плана с выполнением обоснования доказательных рассуждений и необходимых вычислений (синтез), исследование полученного результата [4]. Значительная часть этих действий прямо связана с уровнем развития пространственного мышления учащегося. Помимо естественного жизненного опыта ребенка развитие пространственного мышления происходит в период обучения и, прежде всего, на уроках геометрии за счет целенаправленно методически грамотно организованного учебного процесса.

С позиции психологии, как отмечала И.С. Якиманская, формирование у школьников современных научных представлений и понятий о пространстве – одна из важнейших задач интеллектуального развития учащихся [8].

Целенаправленная работа по развитию пространственного мышления учащихся должна пронизывать весь курс геометрии средней школы, основой является требование с первых уроков геометрии выстраивать четкое соответствие между словесными определениями геометрических понятий и их графическими образами.

«В психологии пространственное мышление понимается как процесс создания пространственных образов и установления отношения между ними путем оперирования самими образами и их элементами» [3].

Долгое время психологи считали наглядно-образное мышление более низким в сравнении со словесно-логическим, а изучение математики способствующим развитию абстрактного мышления. Анализ учебных материалов по математике показывает, что, игнорируя осознание полноценного мысленного образа, сразу происходил переход от определения понятий к оперированию знаками. В результате большинство учащихся формально запоминали определение понятий и оперирование ими, а также их свойства и испытывали трудности при изучении данной дисциплины. Это привело к тому, что на современном этапе развития психолого-педагогических наук проблема формирования и развития образного мышления становится приоритетной.

Анализ психолого-педагогических исследований, показал, что понятие пространственное мышление ученые связывают с такими понятиями как «пространственное воображение», «пространственное восприятие». Эти понятия и связи раскрываются в трудах Б.Г. Ананьева, А.Н. Леонтьева, И.С. Якиманская, В.Н. Литвиненко и других ученых при исследовании механизмов и видов процессов мышления, восприятия, воображения, представления [2, 5, 8].

И.С. Якиманская отмечает, что для механизма пространственного мышления «содержанием является оперирование образами, их преобразование, причем, нередко длительное и многократное. В этот процесс вовлекаются образы, возникающие на различной графической основе, поэтому в пространственном мышлении происходит постоянное перекодирование образов, то есть переход от пространственных образов реальных объектов к их условно-графическим изображениям; от трехмерных изображений к двумерным и обратно» [8].

И.Ф. Шарыгин утверждает, что «геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного метода познания мира…» и «главным действующим лицом Геометрии должна быть фигура…, а главным средством обучения рисунок, картинка», следовательно, эта самая «картинка» должна соответствовать всем требованиям теории и методики [7].

Формирование соответствующих навыков по созданию графических образов начинается с первых уроков систематического курса геометрии основной школы в 7 классе. Практически каждый школьник к этому времени из пропедевтического курса геометрии и собственного жизненного опыта имеет представление, как выглядит, например, геометрическая фигура «треугольник». Именно визуальное восприятие этой геометрической конструкции здесь выходит на первый план. Не погружаясь в тонкости математического определения понятия, важно четко выстроить в сознании учащегося соотношение между понятиями треугольник, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, равносторонний треугольник. Учитель с необходимостью должен следить за точным соотнесением термина с графической иллюстрацией, то есть с графическим образом. Недопустима подмена всех вариантов изображения треугольника изображением равнобедренного или равностороннего треугольника.

В процессе отработки навыков построения геометрических конструкций на плоском чертеже закладываются очень важные, отстраненные во времени негативные последствия при переходе к пространственным конструкциям. Формально в школьных учебниках геометрии присутствуют некоторые разделы, посвященные теоретическим основам построения проекционного чертежа, но они мало эффективны для практической работы. Кроме того, в некоторых современных учебниках, используемых в школах страны, имеются изображения, искажающие пространственную конструкцию. В иллюстративном материале к определению пирамиды представлены изображения, которые ещё в середине XX века в рекомендациях учителю математики приводились в качестве примера методически недопустимых.

Покажем на примере построении *изображения правильного шестиугольника* механизм оперирования образами и их преобразованием (рис. 1). В этот процесс вовлекаются образы, возникающие на различной графической основе, поэтому в пространственном мышлении происходит постоянное перекодирование образов, то есть переход от пространственных образов реальных объектов к их условно-графическим изображениям. Используя свойства аффинных отображений, можно свести изображение правильного шестиугольника к следующим шагам построения:

1. Строим произвольный параллелограмм BCEF с диагоналями – изображение прямоугольника $\overline{B}\overline{C}\overline{E}\overline{F}$ с диагоналями.

2. Обозначим $O = FC \cap BE$ .3. Строим прямую $l : O \in l, l \,//\, BC, l \,//\, FE$.

4. Отложим на l $AO = DO = BC$.

5. $ABCDEF$ - изображение правильного шестиугольника.

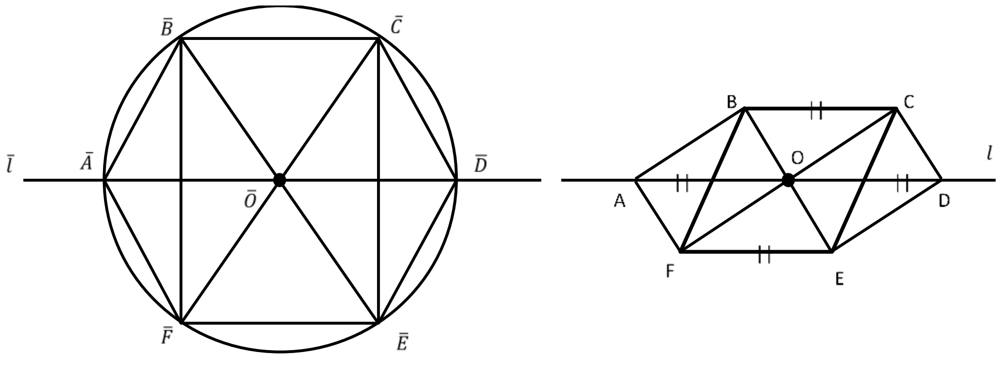


Рис. 1

Таким образом, основой создания стереометрических образов является точное формирование графических образов геометрических понятий, в первую очередь, при изучении планиметрии. Именно, в начале систематического курса геометрии, становится очевидным значительные различия в степени развитости у учащихся способности восприятия и оперирования геометрическими образами [6]. Даже в 10 классе можно обнаружить ученика, который не воспринимает изображение треугольной пирамиды как аналог (модель) пространственной конструкции, а видит чертеж как плоский набор треугольников. Для учителя математики с необходимостью возникает проблема дифференцирования.

Одно из положений ФГОС ООО (п. 11) состоит в том, что «Предметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образованияс учётом общих требований Стандарта и специфики изучаемых предметов, входящих в состав предметных областей, должны обеспечивать успешное обучение на следующей ступени общего образования».

Таким образом, обучение геометрии в основной школе обеспечивает не только освоение планиметрии, но и не может строиться без учета в перспективе изучения стереометрии (имея в виду наиболее распространённую в настоящее время структуру школьного предмета геометрия, который разделен на планиметрию, изучаемую в основной школе и стереометрию в старшей).

Учитель математики основной школы, решая свои плановые и методические задачи, не должен забывать о том, что планиметрия с её аксиоматикой, теоремами различных типов, схемами логических рассуждений в дальнейшем обучении станет основой изучения стереометрии. Это касается не только теоретических знаний, но и приобретенных навыков построения геометрического чертежа, графической грамотности, развития геометрического воображения.

Решение планиметрических и стереометрических задач особенно осложняется необходимостью выполнения следующего алгоритма: перевод словесного описания геометрической ситуации в условии задачи в воображаемое представление стереометрической конструкции и построение двумерного изображения этой конструкции, выполняемой по законам параллельного проектирования с одновременным частичным анализом условия задачи и дальнейшего её решения.

Одной из основных причин непонимания геометрических конструкций является недостаточная графическая подготовленность учащихся к решению планиметрических задач, что, в итоге, сказывается и на умении решать стереометрические задачи. Предпосылки к этому непониманию закладываются уже в начале изучения систематического курса геометрии. Присутствовавший ранее в программе средней школы курс черчения теперь отсутствует, и если этот курс позволял подготовить учащихся к построению стереометрических чертежей, то теперь эта работа погружена в курс геометрии.

Таким образом, одной из важнейших составляющих геометрической подготовки ученика является отработка умений и навыков построения чертежа, адекватного условию задачи.

Такое положение с решением геометрических задач ставит перед учителем математики методическую проблему анализа ситуации, причин затруднений учащихся и проблему поиска способов устранения недостатков в геометрической подготовке учащихся. И.Ф. Шарыгина отмечал, что главным действующим объектом геометрии является *фигура*, а главным средством обучения *рисунок, чертеж*, т. е. *графическая модель* [7]. При построении планиметрических чертежей закладываются основы графических навыков, необходимых при решении стереометрических задач.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Знание теоретических основ построения наглядных изображений пространственных фигур и овладение соответствующими графическими умениями является необходимым условием успешного решения геометрических и, в частности, стереометрических задач. Этот результат достигается при обязательном формировании графических образов геометрических понятий. Однако, уровень овладения старшеклассниками умениями построения правильного и наглядного чертежа в подавляющем большинстве случаев недостаточен. Одной из причин этого является отсутствие систематической и продуманной работы по формированию графических умений учащихся на уроках геометрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.*Александров, А.Д.* Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред. шк. /А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.
2.*Ананьев, Б.Г.* Избранные труды по психологии. Т.2.Развитие и воспитание личности / Б.Г. Ананьев. – С-П.: Изд. Санкт-Петербургского университета, 2004. – 288 с.
3. *Глейзер, Г.Д.* Развитие пространственных представлений школьников при изучении геометрии / Г.Д. Глейзер. – М.: Педагогика, 1972. – 423 с.
4. *Гурова, Л.Л.* Процессы понимания в развитии мышления // Вопр. философии. – 1986. – №2. – С. 126-137.
5. *Леонтьев, А. Н.* О путях исследования восприятия / А.Н. Леонтьев, под. ред. проф. А.Н. Леонтьева — В сб.: Восприятие и деятельность. М.: Изд-во МГУ, 1976. — 320 с.
6. *Хакимов, Г.Ф.* Формирование и развитие динамических пространственных представлений на уроках черчения: дис. канд. пед. наук. – М.,1982. – 240 с.
7. *Шарыгин, И.Ф.* Нужна ли школе 21-го века Геометрия? / И.Ф. Шарыгин // Математическое просвещение. – 2004. - № 8. – С. 37-52.
8. *Якиманская, И.С.* Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

О НАУЧНОСТИ И ДОСТУПНОСТИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Смирнов Владимир Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики, Московский педагогический государственный университет,
Россия, г. Москва, v-a-smirnov@mail.ru

Смирнова Ирина Михайловна
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры элементарной математики, Московский педагогический государственный университет,
Россия, г. Москва, i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация. *В статье рассматривается вопрос о взаимосвязи научности и доступности в обучении геометрии в старших классах. Сравниваются два учебника геометрии, входящих в Федеральный перечень учебников.*
Ключевые слова: *научность, доступность, обучение, геометрия.*

ABOUT SCIENCE AND ACCESSIBILITY IN TEACHING GEOMETRY

Smirnov Vladimir Alekseevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Elementary Mathematics, Moscow State Pedagogical University,
Russia, Moscow, v-a-smirnov@mail.ru

Smirnova Irina Mikhailovna
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Elementary Mathematics, Moscow State Pedagogical University,
*Россия, г. Москва,*i-m-smirnova@yandex.ru

Abstract. *The article discusses the relationship between science and accessibility in teaching geometry in high school. Two geometry textbooks included in the federal list of textbooks are compared.*
Keywords: *science, accessibility, teaching, geometry.*

Как известно, принцип научности обучения математике заключается в обязательности соответствия содержания и методов обучения уровню и требованиям математики как науки в её современном состоянии.

А принцип доступности обучения математике заключается в учёте возрастных и индивидуальных особенностей учащихся, в том, чтобы изучаемый материал по своему содержанию и объёму был посилен для учащихся [2].

Применительно к обучению геометрии в школе принцип научности предполагает выполнение следующих требований:

1. Использование общепринятого математического языка.
2. Правильность изображений геометрических фигур.
3. Строгость определений геометрических понятий.

В случае если строгое определение понятия выходит за рамки школьного курса геометрии, то об этом следует открыто говорить учащимся.

4. Точность формулировок свойств и теорем.

В случае если точная формулировка свойства или теоремы выходит за рамки школьного курса геометрии, то об этом следует говорить учащимся.

5. Строгость доказательств свойств и теорем.

В случае если строгое доказательство свойства или теоремы выходит за рамки школьного курса геометрии, то об этом следует говорить учащимся, а приведённые в этом случае рассуждения не следует называть доказательством.

Принцип доступности предполагает освоение учащимися геометрического материала, при котором учащиеся могут самостоятельно:

1) формулировать определения вводимых понятий, изображать геометрические фигуры, соответствующие этим понятиям;

2) формулировать изученные свойства и теоремы, иллюстрировать их рисунками;

3) доказывать изученные свойства и теоремы, отвечать на дополнительные вопросы, связанные с доказательствами;

4) применять изученные определения, свойства и теоремы для решения задач.

Заметим, что принципы научности и доступности не противоречат друг другу. Наоборот, строгое определение, строгие формулировки и доказательства более понятны, чем формулировки и рассуждения, в которых математический язык и математические формулировки и доказательства заменяются на неясные рассуждения без достаточных обоснований.

Если мы хотим научить учащихся математике, правильно формулировать определения, свойства и теоремы, правильно изображать геометрические фигуры, проводить правильные доказательства свойств и теорем, решать задачи на доказательство, то мы должны сочетать принципы научности и доступности в обучении геометрии.

В настоящей статье мы рассмотрим соответствие принципам научности и доступности учебники геометрии [1,3,4].

I. **Определение многогранника.** В учебнике [1] понятие многогранника определяется в третьей главе после рассмотрения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. *Многогранником называется поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело.*

Это определение неточно. Нужно требовать, чтобы многоугольников было конечное число.

Для определения геометрического тела вводятся понятия внутренней и граничной точек фигуры, ограниченной и связной фигур.

Точка *M* называется граничной точкой фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая её саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, та и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется её границей.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется внутренней точкой фигуры. Она характеризуется тем, что достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре.

Фигура называется ограниченной, если её можно заключить в сферу.

Фигура называется связной, если любые две её точки можно соединить непрерывной линией, целиком содержащейся в данной фигуре.

Геометрическим телом называется ограниченная связная фигура в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причём сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его поверхностью и говорят, что поверхность ограничивает тело.

Эти определения не вполне соответствуют принципам научности и доступности. Поясним сказанное.

1. В определении граничной точки используются слова «сколь угодно близко к ней». Они не объясняются и не являются строго математическими.

2. В определении граничной точки используются слова «достаточно близкие к ней точки». Они не объясняются и не являются строго математическими.

3. В определении ограниченной фигуры используются слова «можно заключить в сферу». Они не объясняются и не являются строго математическими.

4. В определении связной фигуры используются слова «непрерывной линией». Что это такое не объясняется. Кроме того, данное определение является определением линейно связной фигуры. Определение связной фигуры другое.

5. Определение геометрического тела неверное. Нужно требовать не связность фигуры, а связность её внутренней области. На рисунках 1, 2 приведены примеры пространственных фигур, которые подходят под данное определение тела, но не являются телами.

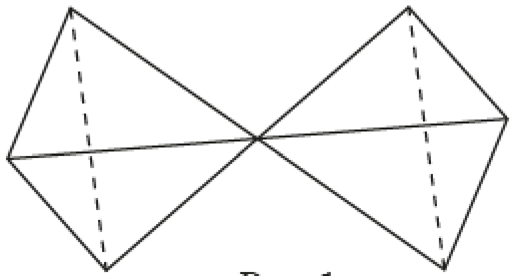


Рис. 1

На рисунке 1 изображено два тетраэдра с общей вершиной, а на рисунке 2– два куба с общим ребром.

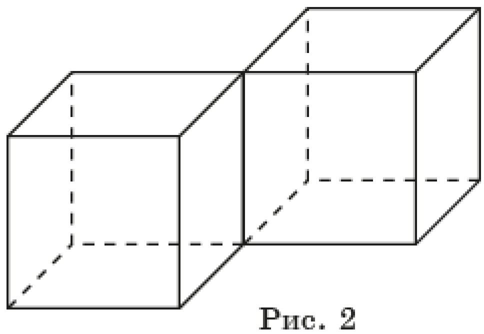


Рис. 2

Неясно, зачем в этом учебнике дано определение тела, поскольку оно нигде в дальнейшем не используется.

В учебнике [3] понятие многогранника определяется во втором параграфе в самом начале изучения стереометрии.

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Здесь же определяются основные многогранники: куб, параллелепипед, призма, пирамида.

Определение тела даётся в учебнике [4]. Для определения геометрического тела вводятся понятия внутренней и граничной точек фигуры, ограниченной и связной фигур. Все определения являются математически строгими и доступными для учащихся.

Точка M называется внутренней точкой фигуры F, если найдётся шар с центром в точке M, целиком содержащийся в фигуре F.

Точка M называется граничной точкой фигуры F, если любой шар с центром в точке M содержит как точки фигуры F, так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Множество всех граничных точек фигуры F называется границей этой фигуры.

Фигура F называется ограниченной, если найдётся шар, целиком содержащий эту фигуру.

Связная фигура, все точки которой внутренние, называется пространственной областью.

Объединение ограниченной пространственной области и её границы называется геометрическим телом.

Границу тела называют его поверхностью.

II. **Определение призмы.** По поводу определения призмы в учебнике [1] написано следующее. Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, соединяющие соответствующие вершины многоугольников, параллельны. Каждый из n четырёхугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots, A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 – по свойству параллельных плоскостей, пересечённых третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется призмой.

Это определение невозможно воспроизвести учащемуся. Оно содержит громоздкие обозначения, включает в себя элементы доказательства, ссылку на свойство параллельных плоскостей и подтверждающий пример.

Кроме того, данное определение использует понятие параллельных плоскостей, следовательно, даётся после изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Оно исключает использование призм для иллюстрации взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, решения задач на нахождение расстояний и углов. Конечно, это отражается на результатах обучения.

То же самое относится и к определению пирамиды в этом учебнике.

В учебнике [3] n-угольной призмой называется многогранник, две грани которого – равные n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы.

n-угольной пирамидой называется многогранник, одна грань которого – n-угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной.

III. **Определение параллелепипеда и тетраэдра.** В учебнике [1] считается, что параллелепипед является частным случаем призмы, а тетраэдр является треугольной пирамидой. На самом деле, это не так. У параллелепипеда, так же как и у параллелограмма, нет оснований, а у призмы есть. У тетраэдра, так же как и у треугольника, нет основания, а у пирамиды есть.

В учебнике [3] кубом называется многогранник, у которого шесть граней, и все они – равные квадраты. Параллелепипедом называется многогранник, у которого шесть граней, и каждая из них – параллелограмм.

IV. **Изображение сферы.** Рассмотрим учебник [1]. Изображения сферы на рисунках 159, 160, 163, 172 неверны. На рисунках 159, 160 оси координат изображены в параллельной проекции, а сфера в ортогональной. Так изображать нельзя. Оси координат нужно изображать в ортогональной проекции. На рисунке 163 куб изображён в параллельной проекции, а сфера в ортогональной. Так изображать нельзя. Куб нужно изображать в ортогональной проекции. На рисунке 172 неверно расположены полюса сфер, вписанных в цилиндр и конус.

Очень хорошо, что при рассмотрении вопроса об изображении сферы в учебнике [4] указываются типичные ошибки и даются правильные изображения.

V. **Объём параллелепипеда.** Вывод формулы объёма прямоугольного параллелепипеда в учебнике [1] занимает 1,5 страницы и являетсяслишком длинным и сложным для понимания и воспроизведения учащимися.

В частности, оно содержит следующий текст. «Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$.

Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать».

Этот текст не является математическим. Что означают слова: неограниченно увеличивать число n; число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым; число $a'_n b'_n c'_n$будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$.

Таких определений в математике нет. Есть определения предела последовательности, бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Ими и нужно пользоваться, если мы изучаем математику. Конечно, они выходят за рамки школьного курса математики. Но выходом из этого положения не является использование нематематического и непонятного языка.

Например, в учебнике [4] при выводе формулы объёма прямоугольного параллелепипеда используется принцип Кавальери. Это позволяет избежать использования, так называемого, «предельного перехода», что делает изложение материала вполне доступным для учащихся.

VI. **Объёмы тел.** Вывод формулы объёма цилиндра в учебнике [1] использует, так называемый, предельный переход и имеет те же недостатки, что и вывод формулы объёма прямоугольного параллелепипеда.

Там же выводы формул объёмов наклонной призмы, пирамиды, конуса, шара используют понятие интеграла и не являются доступными для учащихся.

При выводе формулы объёмов призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара в учебнике [4] используется принцип Кавальери. Это позволяет избежать использования «предельного перехода» и интеграла, что делает изложение материала вполне доступным для учащихся.

Таким образом, видим, что учебник геометрии [1] не вполне отвечает принципам научности и доступности, которым отвечают учебники геометрии [3, 4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Атанасян Л.С.* и др. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – 22-е изд. – М.: Просвещение, 2018.
2. *Колягин Ю.М. и др*. Методика преподавания математике в средней школе. Общая методика: учебн. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1975.
3. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений(углублённый уровень). – 6-е изд. – М.: Дрофа, 2010.
4. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений(углублённый уровень). – 6-е изд. – М.: Дрофа, 2010.

В день чествования юбиляра с 75-летием:
Потоскуева Тамара Николаевна, профессор Потоскуев Евгений Викторович,
профессор Смирнов Владимир Алексеевич
(г. Тольятти, ТГУ, 26 ноября 2014 г.).

ОСВОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПОСРЕДСТВОМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА МОДЕЛИ КЭЛИ–КЛЕЙНА

Ястребов Александр Васильевич
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа
Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского
Россия, г. Ярославль, alexander.yastrebov47@gmail.com

Аннотация. *В статье представлена система компьютерных инструментов, которые позволяют осуществлять построения базовых объектов на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского. С педагогической точки зрения обсуждается один из способов использования построенных инструментов: первичное проведение построения, то есть эксперимента, с его последующим теоретическим осмыслением.*
Ключевые слова: *геометрия Лобачевского, модель Кэли–Клейна, компьютерный эксперимент.*

MASTERING OF LOBACHEVSKI GEOMETRY BY MEANS OF COMPUTER EXPERIMENTS ON CAYLEY–KLAIN'S MODEL

Yastrebov Alexander Vasilevich
doctor of pedagogical sciences, Professor, Professor of the Department of Calculus
Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinski
Russia, Yaroslavl, alexander.yastrebov47@gmail.com

Abstract. *A set of computer tools for drawing basic geometrical figures on Cayley–Klein's model of Lobachevski geometry is presented. A special way of using the instruments is discussed from a pedagogical point of view: initially, a student draws some geometrical figures, and further he formulates corresponding theoretical statements.*
Keywords: *Lobachevski geometry, Cayley–Klein's model, computer experiment.*

1. Система инструментов, типы пользователей и последовательность экспериментально-теоретических действий

В магистерской диссертации [1][1] на базе интерактивной математической среды (ИМС) GeoGebra была построена система из 13 компьютерных инструментов, которые позволяют легко выполнять базовые построения на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского.

Для иллюстрации понятия «инструмент» опишем процесс построения инструмента ***Прямая***[2] в среде GeoGebra.

1) Построить окружность по центру O и точке Z.

2) Скрыть точки O и Z.

3) Провести евклидову прямую AB, располагая точки A и B внутри круга.

4) Найти точки C и D пересечения прямой с окружностью.

5) Провести отрезок CD.

6) Скрыть прямую AB.

---

[1] Автор статьи является научным руководителем автора диссертации.

[2] В дальнейшем обозначения новых инструментов будем писать полужирным курсивом и использовать шрифт ***Arial Narrow.*** Обозначения стандартных инструментов GeoGebra будем писать полужирным шрифтом **Times New Roman.**

7) Скрыть точки C и D.

В результате получится нужная нам фигура: хорда без концов, то есть прямая на модели Кэли–Клейна. Такая длинная серия действий объединена нами в один инструмент ***Прямая,*** который действует просто: 1) активировать абсолют; 2) указать две точки внутри него.

Список разработанных инструментов является вполне естественным и даже банальным. Первые три инструмента позволяют строить линейные объекты: ***Прямая, Луч, Отрезок.*** Два других инструмента связаны с понятием параллельности: ***Луч, параллельный данному*** и ***Параллельная прямая (по направлению).*** Четыре следующих инструмента относятся к понятию перпендикулярности: ***Перпендикуляр к прямой, Перпендикуляр к лучу, Перпендикуляр к отрезку, Серединный перпендикуляр.*** Еще два инструмента связаны с построениями: ***Середина*** (отрезка) и ***Биссектриса*** (угла). Наконец, два последних инструмента позволяют производить измерения: ***Расстояние, Мера угла.***

Педагогические возможности этих инструментов были представлены автором на нескольких конференциях [2–4]. Объектом обсуждения упомянутых работ были следующие явления: неприменимость (или ограниченная применимость) обычной геометрической интуиции к анализу фигур в геометрии Лобачевского, возможность организации сравнительного исследования двух геометрий и самостоятельное обнаружение студентом специфических явлений и фигур геометрии Лобачевского. При этом подразумевалось, что пользователем созданных инструментов является студент педагогического вуза, который изучает основания геометрии в рамках базового курса геометрии и, следовательно, геометрию Лобачевского и ее модели.

В данной статье рассматривается принципиально иная ситуация, поскольку с созданными инструментами работает *другой* пользователь – ученик старших классов, который осваивает геометрию Лобачевского в процессе занятий кружка.

Вполне естественно, что разные по возрасту и по уровню математической подготовки «изучатели» будут по-разному использовать обсуждаемые инструменты. Для студентов характерно доминирование, временно́е и содержательное, теоретических положений. Действительно, сначала студент узнает определение прямой на модели Кэли–Клейна, а затем с помощью инструмента ***Прямая*** строит прямую, благодаря чему возникает визуализация теоретически определенного объекта. Стачала студент узнает определение перпендикуляра к прямой на модели Кэли–Клейна, а затем с помощью инструмента ***Перпендикуляр к прямой*** строит перпендикуляр, благодаря чему возникает визуализация другого теоретически определенного объекта. Обобщенно говоря, построения *иллюстрируют* теорию.

Для школьников мы предлагаем другую последовательность экспериментально-теоретических действий, которая, в определенном смысле, приближена к историческому пути возникновения геометрии. Например, воспользовавшись инструментом ***Прямая***, школьник видит, что прямой на модели Кэли–Клейна является открытая хорда. Построив вторую прямую и перемещая ее разными способами, школьник видит, что существуют *три типа* взаимных расположений различных прямых, *три, а не два*, как мы привыкли в евклидовой геометрии. Обобщенно говоря, *осмысление* результатов эксперимента *рождает* теоретические положения.

Ниже мы покажем, что временна́я первичность экспериментальных действий по отношению к теоретическим обладает определенными достоинствами и, на соответствующем этапе, способствует формированию адекватных представлений о математике в целом. Впрочем, первичность теоретических действий также обладает значимыми, но другими, достоинствами.

2. От эксперимента к теории. Ниже мы представим несколько заданий, которые достаточно полно представляют разрабатываемую нами методику работы с компьютерными инструментами.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими соглашениями.

1) Точкой на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского называется точка внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Для краткости данную окружность будем называть абсолютом.

2) Направлением на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского называется точка на абсолюте.

Всю дальнейшую информацию о модели Кэли–Клейна, а значит и о геометрии Лобачевского, можно извлечь, производя действия с изучаемыми инструментами.

Задание 1. Выберите инструмент ***Прямая***, активируйте абсолют и укажите две точки внутри него. Опишите в «житейских» или школьных терминах тот объект, который у вас получился.

Обсуждение. Самостоятельно или с минимальной помощью учителя школьник-экспериментатор видит, что построенная фигура похожа на хорду абсолюта без ее концов, то есть на открытую хорду. Так он самостоятельно или почти самостоятельно придет к следующему определению.

Определение. Прямой на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского называется открытая хорда абсолюта.

Задание 2. Выберите инструмент ***Прямая*** и постройте еще одну прямую на модели Кэли–Клейна. Каким может оказаться взаимное расположение двух различных прямых?

Обсуждение. Чисто логическое рассуждение говорит о том, что две различные прямые либо имеют общие точки, либо не имеют их. Построение показывает, что в первом случае общая точка является единственной. При этом прямые не имеют общих направлений.

Во втором случае целесообразно сосредоточиться на понятии направления. Две различные прямые без общих точек либо имеют общее направление, либо не имеют его. Построение показывает, что две различные прямые без общих точек могут иметь не более одного общего направления.

Итак, было бы целесообразно закрепить определенные термины за *тремя* типами взаимного расположения прямых:

А) две различные прямые имеют общую точку;

Б) две различные прямые без общих точек имеют общее направление;

В) две различные прямые не имеют ни общих точек, ни общих направлений.

Школьник-экспериментатор видит, что уже первое, простейшее построение выявляет некое различие между двумя геометриями. Это вполне естественно, потому что отсутствие различий между двумя геометриями сделало бы одну из них ненужной.

Задание 3. Дайте имена типам А, Б, В взаимного расположения двух прямых.

Обсуждение. В определенном смысле задание 3 о присвоении имен носит гуманитарный характер и не относится к области математики. С другой стороны, математика на всех уровнях насыщена терминами, назначение которых состоит в том, чтобы раскрывать суть описываемых явлений. В нашем случае присвоение имен может оказаться как совсем простой, так и нетривиальной задачей. Например, случай А на модели Кэли–Клейна выглядит в точности так же, как и в евклидовой геометрии, поэтому построенные прямые естественно назвать пересекающимися. В случае Б построенные прямые на модели Кэли–Клейна отнюдь не выглядят параллельными, однако с чисто логической точки зрения их целесообразно считать таковыми. Действительно, если две различные прямые евклидовой геометрии имеют общее направление, то они называются параллельными, поэтому естественно использовать то же самое имя в новой для школьника геометрии. В случае В школьник не имеет ни визуальной, ни логической, ни психологической опоры для выбора имени. Возможные термины типа «суперпараллельные» или «сверхпараллельные» отражают только факт отсутствия параллельности и даже скрывают суть явления. Суть останется скрытой до тех пор, пока не будут выявлены два факта: 1) наличие общего перпендикуляра к двум прямым, находящимся в позиции В; 2) минимальность отрезка общего перпендикуляра среди всех отрезков, соединяющих две точки на двух прямых. Только тогда может появиться адекватный термин «расходящиеся прямые». Заметим, что система авторских инструментов в сочетании со стандартными инструментами ИМС GeoGebra позволяет легко построить общий перпендикуляр и выявить минимальность длины отрезка.

По мере выполнения различных построений у школьника-экспериментатора будет накапливаться опыт использования как стандартных, так и авторских инструментов. Естественно использовать этот опыт для формулировки более сложных заданий.

Задание 4. Выполните следующие построения. 1) С помощью инструмента ***Прямая*** постройте прямую. 2) С помощью стандартного инструмента **Точка** постройте точку вне прямой. 3) С помощью инструмента ***Луч, параллельный данному*** постройте два луча, параллельные прямой в разных направлениях. 4) С помощью инструмента ***Перпендикулярная прямая*** опустите перпендикуляр из построенной точки на исходную прямую. 5) С помощью инструмента ***Мера угла*** измерьте углы между перпендикуляром и лучами. Прокомментируйте полученные результаты и поставьте новые задачи.

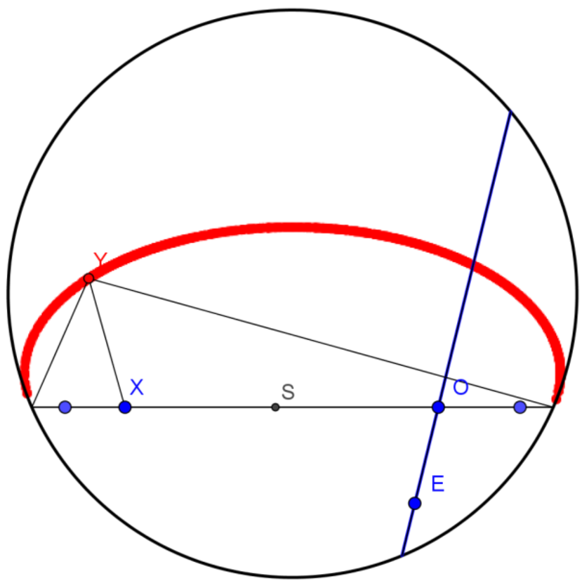
Обсуждение. Выполнив построение 3, экспериментатор увидит, что через точку вне прямой можно провести две прямые, параллельные данной. (Это в очередной раз демонстрирует существенные различия между двумя геометриями.) После построения 3 можно было бы проводить наблюдения о строении центрального пучка прямых в связи с исходной прямой, однако мы предпочитаем перейти к построению 4.

Построение 4 показывает, что в большинстве случаев перпендикуляр к прямой выглядит, как наклонная, и только в отдельных специальных случаях выглядит привычным для нас образом, то есть как евклидов перпендикуляр. Можно было бы проводить дальнейшие эксперименты, призванные объяснить причины таких различий, однако мы предпочитаем перейти к построению 5.

Построение 5 показывает, что проведенный перпендикуляр делит угол между двумя лучами пополам. Этот результат можно одновременно трактовать и как неожиданный, и как вполне естественный. С одной стороны, ничто не предсказывало такого результата, да и расположен перпендикуляр отнюдь не так, как должна была бы располагаться биссектриса с нашей «евклидовой» точки зрения. С другой стороны, фигура, состоящая из исходной прямой и двух лучей, является, образно говоря, «псевдотреугольником». Этот «псевдотреугольник» оказывается равносторонним просто потому, что все его стороны имеют бесконечную длину. Получается, что высота «псевдотреугольника» является его биссектрисой, что вполне естественно.

Дальнейшие наблюдения связаны с перемещением выбранной точки, которые легко выполнить с помощью стандартного инструмента **Перемещать.**

Прежде всего, оказывается, что равенство углов между перпендикуляром и каждым из лучей является динамически устойчивым феноменом, то есть не зависит от положения точки. Естественно, что ему нужно дать какое-то название, то есть в очередной раз решить гуманитарную задачу. Поскольку рассматриваемый угол образован перпендикуляром к прямой и параллелью к ней, то его можно назвать углом параллельности. Кроме того, даже грубое наблюдение показывает, что угол параллельности меняется в зависимости от расстояния между прямой и точкой. «Отодвигая» точку к абсолюту, мы видим, что угол параллельности сильно уменьшается, быть может, стремится к нулю.



«Придвигая» точку к прямой, мы видим, что угол параллельности увеличивается и стремится к 90°.

Наконец, возникает естественный вопрос: как будет меняться угол параллельности, если точка движется таким образом, что расстояние между нею и прямой не меняется?

Для нас важно, что в процессе выполнения весьма простых действий школьник-экспериментатор вплотную подошел к двум важным понятиям геометрии Лобачевского: понятию эквидистанты и к понятию функции Лобачевского. Разумеется, ни уравнение эквидистанты, ни формула функции Лобачевского не могут быть получены в результате чисто экспериментальных действий по использованию инструментов, однако в математике процесс постановки задач является не менее творческим, чем процесс их решения.

В заключение приведем рисунок, который иллюстрирует обсуждение задания 4. На нем изображена «горизонтальная» прямая и перпендикуляр OE к ней. На прямой выбрана движущаяся точка X и середина S отрезка OX. Построены центрально-симметричные образы точек O и E относительно S, то есть точки X и Y соответственно (прямые, участвующие в дополнительных построениях, скрыты). Очевидно, что при движении точки X вдоль прямой точка Y будет описывать эквидистанту высоты OE. Для данного конкретного чертежа при движении точки Yпо эквидистанте угол параллельности остается постоянным и равным 54.54°.

В качестве общего вывода следует сказать, что система компьютерных инструментов оказалась достаточно детализированной для того, чтобы продолжить ее дальнейшую разработку и приступить к созданию на ее основе методики изучения геометрии Лобачевского.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Кошелева, Л. Ю.* Применение интерактивной математической среды для изучения неевклидовых геометрий. – Диссертация, представленная на соискание квалификации магистра по направлению 44.04.01 Педагогическое образование, программа «Математическое образование в профильной школе». – Ярославль, 2019.

2. *Ястребов, А. В., Кошелева, Л. Ю.* О системе компьютерных инструментов для изучения геометрии Лобачевского // Классическая и современная геометрия: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) Москва: МПГУ, 2019. – С. 152–153.

3. *Ястребов, А. В., Кошелева, Л. Ю.* Система компьютерных инструментов для освоения геометрии Лобачевского // Статья (6 стр.) принята в Труды конференции 100-летие В. Т. Базылева (секция методики математики).

4. *Ястребов, А. В., Кошелева, Л. Ю.* Чертежные инструменты для геометрии Лобачевского: модель Кэли–Клейна // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (26–28 сентября 2019 г.). – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ. – 2019. – С. 314–317.

НОВАЯ ГОЛОВОЛОМКА 3Д ТАНГРАМ – КУБИК

Ажгалиев Урынбасар
кандидат педагогических наук, учитель высшей категории по математике,
Школа – гимназия №4 им. Ж. Жабаева.
Казахстан, г. Нур-Султан, namia86@mail.ru

Аннотация. *В статье описана авторская пространственная головоломка в виде куба, позволяющая в отличие от всех других головоломок собирать буквы русского, английского алфавитов и арабские (римские) цифры.*
Ключевые слова: *танграм, куб, буквы, исследовательская задача*.

NEW PUZZLE 3D TANGRAM-CUBE

Azhgaliev Urynbasar
candidate of pedagogical sciences, teacher of the highest category in mathematics,
school - gymnasium №4 named after Zh. Zhabaev,
Kazakhstan, Nur-Sultan, namia86@mail.ru

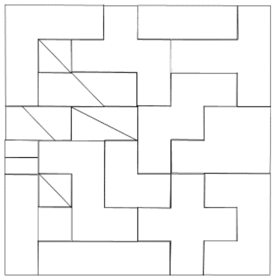
Abstract. *The article describes the author's spatial puzzle in the form of a cube, allowing the distinction from all other puzzles to collect letters of the Russion, Engish alphabets and Arabic (Roman) numerals.*
Keywords: *tangram, cube, letters, research, problem.*

В мире известны несколько десятков (возможно и сотен) пространственных головоломок. Самым известным из них является кубик Рубика. Имеется около десятка вариации этой головоломки в виде цилиндра, конуса, призм и т.д. Не отрицая внешней привлекательности этих игр, отметим их недостатки.

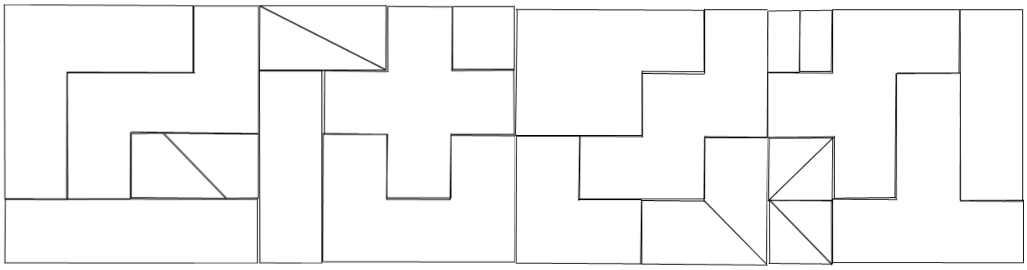
Во-первых, из них можно составить очень небольшое количество различных конфигурации. Например, есть головоломки, состоящие из двух элементов, которые позволяют составить только одну фигуру (допустим пирамиду). Другим крупным недостатком всех этих головоломок является их полная неприспособленность к решению учебных задач.

Нам удалось создать пространственную головоломку, которая обладает всеми достоинствами известных головоломок, т.е. из нее можно составить не только всевозможные пространственные геометрические конфигурации, но и буквы русского, английского (и не только) алфавитов и арабские (римские) цифры и составлять содержательные геометрические задачи.

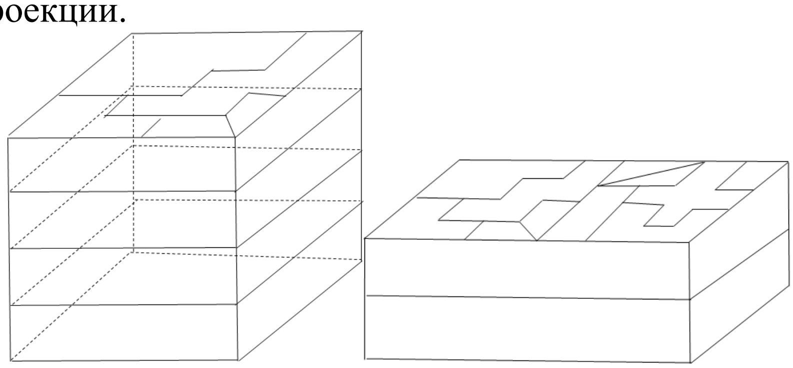
Другим немаловажным креативным достоинством нашей головоломки является то, что она позволяет составить большое количество плоскостных изображений, которые практически недоступны любым другим пространственным головоломкам. Прежде чем продемонстрировать возможности нашей головоломки расскажем о конструкции этой головоломки. Она состоит из 25 элементов, которые образуют квадрат. Приведем рисунок этого квадрата в ортогональной проекции (вид сверху).



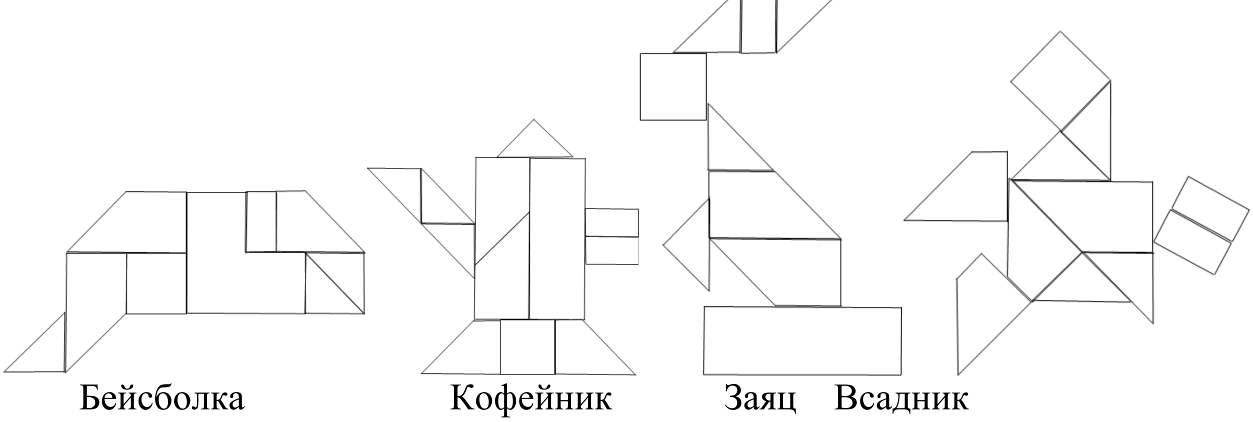
Для удобства рассуждений, сторону маленького квадрата берет за 2 единицы. Тогда весь квадрат будет 16x16. Толщину всех фигур тоже взяли как 2 единицы. Нами придуманы несколько способов составления куба и прямоугольного параллелепипеда. Самым простым на наш взгляд является составление четырех одинаковых квадратных слоев из всех приведенных фигур. Приведем рисунки этих слоев (вид сверху).



Приведем рисунки куба и одного из возможных прямоугольных параллелепипедов, используя рисунки четырех квадратов. Рисунки выполнены в параллельной проекции.

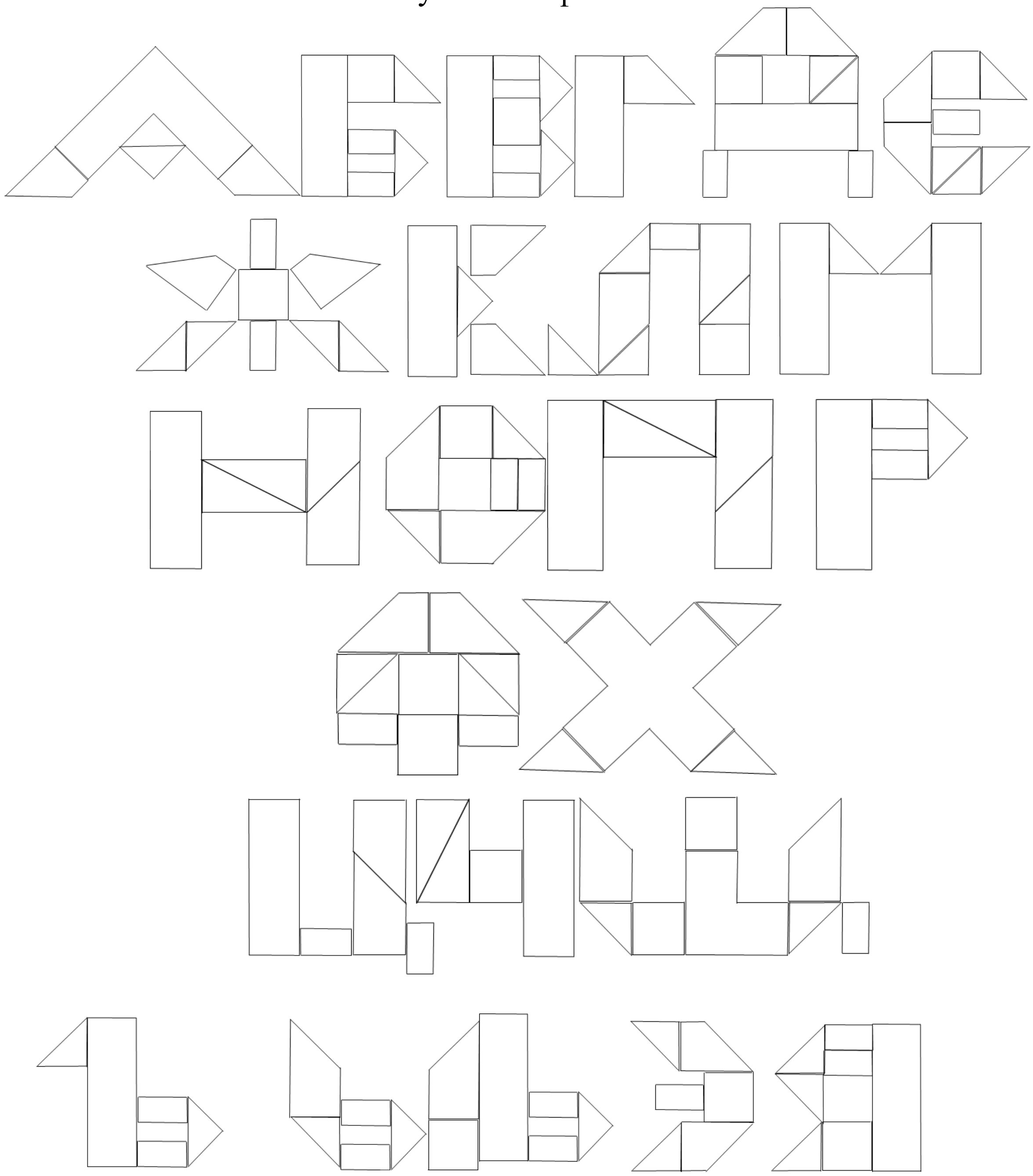


Приведем рисунки 4 различных силуэтов предметов домашнего обихода и других фигур.

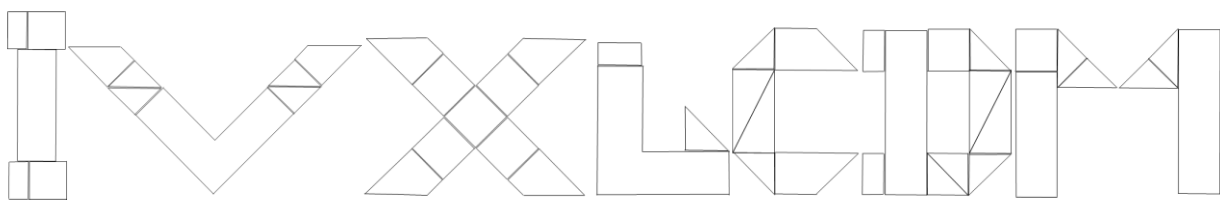


Бейсболка Кофейник Заяц Всадник

Русский алфавит

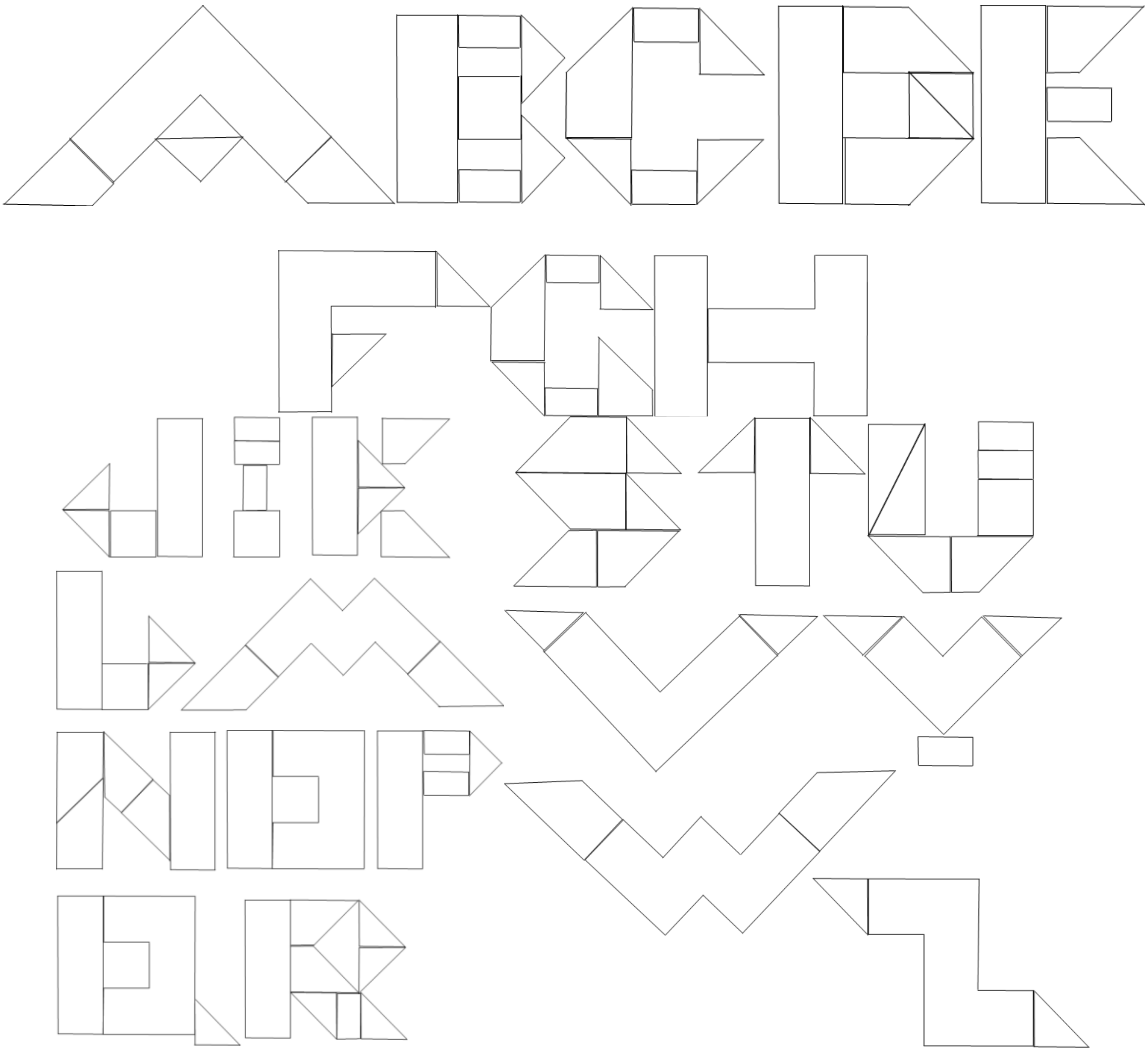


Римские цифры

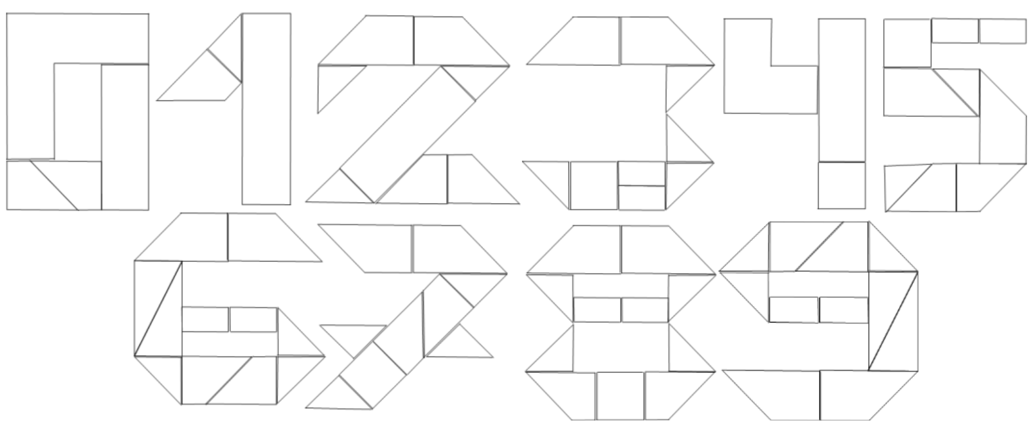


1 5 10 50 100 500 1000

Английский алфавит



Арабские цифры



Наша головоломка 3Д-танграм – кубик является естественным развитием и обобщением плоскостных китайских танграмов, придуманных китайцами 4-5 тысяч лет назад. *Ее можно одновременно рассматривать и как плоскостную, и как пространственную головоломку.* Начинать изучение головоломки можно в детских садиках, как для счета, так и для распознавания цвета, знакомства с простейшими геометрическими фигурами. Далее изучение головоломки можно продолжить с начальных классов вплоть до окончания школы.

Замечательной особенностью нашей головоломки является то, что она позволяет собирать все буквы русского, казахского и английского алфавитов и все цифры (как арабские, так и римские). Этой особенности нет ни в одной пространственной головоломке мира.

Головоломка может привлечь внимание любого человека, независимо от пола, возраста и социального положения. Ребенок может составить понравившуюся ему фигуру. Ученик или студент с исследовательскими наклонностями может дать свои решения оригинальных задач. Дизайнеров одежды эта игра может вдохновить на новые яркие разработки. Уличные оформители и художники могут создать доселе неизвестную рекламную продукцию. Специалисты, занимающиеся играми, могут создать новые оригинальные игры. Молодые родители могут отвлечь внимание свих детей от гаджетов. Думается, что данная головоломка является сильным подспорьем для умственного развития детей, возникновения неподдельного интереса к геометрическим понятиям и образцам. Это развивает пространственные представления, конструктивное мышление, комбинаторные способности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Ажгалиев У.* О танграме, позволяющем собирать буквы и цифры //Математика для школьника. -2017. - №1. - С.41-45.
2. Мартин Гарднер. Математические досуги. - М., 1972.
3. Кордемский Б.А. Удивительный квадрат. - М.: Столетие,1994.
4. Есимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. - М.:МЦНМО,2002.
5. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. 5-6 классы. - М.: Дрофа, 2013.

Постоянные участники наших Международных научных конференций – коллеги из Казахстана Ажгалиев У.А и Дыбыспаев Б.Д. в день 70-летия Е.В. Потоскуева (г. Тольятти, ТГУ, 26 ноября 2009 г.).

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Антонова Ирина Владимировна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование»,
Тольяттинский государственный университет,
Россия, г. Тольятти, I.Antonova2@tltsu.ru

Мухамбетова Ботагоз Жантлешовна
аспирант кафедры «Высшая математика и математическое образование»,
Тольяттинский государственный университет,
Казахстан, г. Уральск, abaibotagoz@mail.ru

Аннотация. *Статья посвящена проблеме реализации практической направленности обучения геометрии учащихся общеобразовательной школы.*
Ключевые слова: *практическая направленность обучения геометрии; прикладные задачи.*

IMPLEMENTATION OF THE PRACTICAL ORIENTATION OF GEOMETRY EDUCATION IN SECONDARY SCHOOLS

Antonova Irina Vladimirovna
candidate of pedagogical sciences, associate professor, associate professor of the department
«Higher Mathematics and Mathematical Education»
Togliatti State University,
Russia, Togliatti, I.Antonova2@tltsu.ru

Muhambetova Botagoz Zhantlechovna
post-graduate student of the Department of Higher mathematics and mathematical education
Togliatti State University,
Kazakhstan, Uralsk, abaibotagoz@mail.ru

Abstract. *The article is devoted to the problem of the implementation of the practical orientation of teaching geometry to students in secondary schools.*
Keywords: *practical orientation of learning geometry; applied tasks.*

В требованиях ФГОС среднего общего образования к результатам освоения основной образовательной программы по математике обучающимися общеобразовательной школы указано, что изучение предметной области «Математика» должно обеспечить сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления [20].

Проблеме реализации практической направленности обучения математике в общеобразовательной школе посвящены работы многих ученых-методистов.

Остановимся на результатах анализа некоторых исследований.

Г.И. Саранцев отводит практической направленности учебного материала одно из значительных мест в школьном математическом образовании, отмечая, что она напрямую связана с *мотивацией* познания школьника, мотивацией его содержания обучения, *эвристической составляющей математической деятельности* [14]. Ю.М. Колягин и В.В. Пикан указывают, что при *формировании нового понятия* в школьном курсе математике желательно учитывать тот факт, что первоначально с ним обучающиеся должны встретиться в *задачах практического характера* [11].

В выполненных ранее *диссертационных исследованиях* представлены пути и средства реализации прикладной направленности курса математики в основной школе *в условиях дифференциации обучения* (Т.А. Шашкова [22]); раскрыта *технология обучения решению практико-ориентированных задач в профильных школах* (Е.Н. Эрентраут [23]); описана *методическая система* реализации прикладной направленности обучения математике *в классах естественнонаучного направления* (В.П. Кизилова [10]); обоснована *методическая система* осуществления *преемственности реализации* прикладной направленности обучения математике в основной и старшей общеобразовательной школе (Н.В. Решетникова [12]) и др.

В методической литературе выделены *различные подходы* к понятию *практической направленности обучения*, которое либо отождествляют, либо не отождествляют с понятием прикладной направленности обучения школьников. Нами данные понятия отождествляются [2].

Е.В. Сухорукова под *прикладной направленностью* обучения математике понимает «реализацию содержательной и методологической связи школьного курса математики с практикой, что предполагает у учащихся наличие умений, необходимых для решения математическими средствами задач, возникающих на практике, то есть *прикладных задач;* для реализации прикладной направленности необходимо организовать обучение школьников *элементам моделирования*» [18, С. 90].

Ю.М. Колягин и В.В. Пикан [11] не отождествляют рассматриваемые понятия: *прикладная направленность* связывается ими с ориентацией содержания и методов обучения школьников на применение математики в технике и смежных науках, в профессиональной деятельности, в народном хозяйстве и в быту; *практической направленность* – с направленностью содержания и методов обучения на решение задач и упражнений на формирование у них навыков самостоятельной деятельности математического характера; в *реальном процессе обучения* математике школьников в общеобразовательной школе *прикладная и практическая направленность* обычно *функционируют совместно*.

Кроме того, наряду с термином *прикладные задачи* в различной методической литературе используются похожие по смыслу термины: «*задачи прикладного содержания*», «*практические задачи*», «*жизненно-практические задачи*». Так, Р.Н. Абаляев пишет, что *задачи с жизненно-практическим содержанием* - это такие задачи, сюжет и числовые данные которых взяты из жизни, из практики и которые характеризуются реальной постановкой вопроса; «*реальные задачи*» - это задачи, которые в большей степени соответствуют приложениям математики на практике [15, С. 246]. И.М. Шапиро [21] отождествляет по смыслу *задачи практического содержания* и задачи *прикладного характера*. Н.А. Терешин под прикладной задачей понимает «задачу, поставленную вне математики и решаемую математическими средствами»; при их решении используется *метод математического моделирования* [19, С. 6].

М.В. Егупова указывает, что *практико-ориентированные задачи* являются учебными прикладными математическими задачами – задачами, связанными с практическими приложениями математики, они служат двум основным целям: обучение математике через ее приложения; возможность обучения приложениям математики [8, С. 98].

Рассмотрим подробнее вопрос *практической направленности обучения геометрии* обучающихся общеобразовательной школы. В.И. Рыжик отмечает, что ученые математики, методисты и учителя неоднократно подчеркивали важность *связи геометрии и практики* [13, С. 10].

По мнению И.М. Смирновой и В.А. Смирнова, «*решение геометрических задач с практическим содержанием* позволяет усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии; выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближенные значения; повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии» [16, С. 4].

Под практикой в геометрии понимают: *практический опыт землемерных работ* (М.А. Знаменский, А.И. Шугар). Практика земле измерительных работ в школе, кроме своей практической ценности, имеет существенное значение в преподавании математики, так как дает более глубокое понимание ряда теоретических вопросов [9, С. 35]; *решение тренировочных геометрических задач отвлеченного характера*, сформулированных в математических терминах, то есть математических задач, которые (в такой формулировке) на практике не встречаются.

А.А. Столяр отмечает, что в связи с реализацией данного подхода в обучении математике наблюдается некоторый *отрыв теории от практики:* «в результате чего учащиеся приобретают некоторые навыки в решении довольно сложных математических задач, но оказываются бессильными перед простой задачей, возникающей вне математики, так как не умеют переводить ее в математическую» [17, С. 151];

В качестве *направлений реализации практической направленности геометрии* выделены [13, С. 10]: применение геометрических сведений; конкретное «рукоделие» – изготовление моделей, чертежей и т. д; формирование исходных понятий и методов на основе практики; построение геометрическими инструментами.

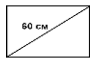
И.М. Смирнова и В.А. Смирнов определяют *типы геометрических задач с практическим содержанием – задачи на нахождение*: «расстояний с использованием теоремы Пифагора; углов; расстояний до недоступных объектов с использованием подобия; расстояний и углов с использованием табличных значений тригонометрических функций; площадей плоских и площадей поверхностей пространственных фигур; объемов пространственных фигур, а также задачи, сводящиеся к нахождению длин дуг окружностей» [16, С. 4].

Система практико-ориентированных задач, способствующих повышению уровня сформированности операционно-содержательного компонента процесса обучения школьников геометрии на примере вычисления площади параллелограмма, трапеции и др. представлена в статье [7].

Приведем *примеры прикладных задач* указанных выше типов.

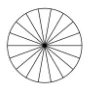
1. Задачи на нахождение расстояний с использованием теоремы Пифагора, при решении которых у обучающихся формируются знания о понятии прямоугольного треугольника; о теореме, устанавливающей соотношение между его сторонами.

Задача 1. «Отношение высоты к ширине экрана телевизора равно 0,75. Диагональ равна 60 см. Найти ширину экрана (Рис. 1)» [16, С. 10].



2. Задачи на нахождение углов, в процессе решения которых у школьников формируются знания о понятии угла, их видах и свойствах, о понятиях градуса и градусной меры угла, окружности и измерении углов, связанных с ней.

Задача 2. «Колесо имеет 18 спиц. Наудите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы (Рис. 2)» [6, С. 20].



3. Задачи, сводящиеся к нахождению длин дуг окружности. При их решении у обучающихся формируются знания о понятиях *длины окружности и ее дуги.*

Задача 3. «Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого – прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами (Рис. 3). Один бежит по дорожке, расположенной на 2 *м* дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут? (Примите $\pi \approx 3$)» [1, С. 202].

4. Задачи на нахождение расстояния до недоступных объектов с использованием подобия, при решении которых у школьников формируются знания о понятиях пропорциональных отрезков, подобных треугольников и признаках подобия, а также о понятии треугольника и его свойствах.

Задача 4. «Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м равна 2,5 м. Найдите высоту дерева» [5, С. 154].

5. Задачи на нахождение расстояний и углов с использованием табличных значений тригонометрических функций, в процессе их решения у обучающихся формируются знания о понятии синуса, косинуса и тангенса угла; о применении теоремы косинусов и теоремы синусов при решении задач.

Задача 5. «Лестница пожарной машины может быть выдвинута на 20 м, а ее крутизна может достигать 70º. Основание лестницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?» [1, С. 115].

6. Задачи на нахождение площадей плоских фигур и площадей поверхностей пространственных фигур, при решении данных задач у школьников формируются знания о понятии пространственной фигуры, а также о понятии площади фигуры и площади ее поверхности.

Задача 6. «Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр в зависимости от освещения от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличивается площадь поверхности зрачка?» [16, С. 56].

7. Задачи на нахождение объемов пространственных фигур, в процессе решения которых у школьников формируются знания о понятии пространственной фигуры, а также о понятии объема.

Задача 7.«Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 м^3 воздуха?» [6, С. 55].

Отметим, что отдельные аспекты реализации практической направленности обучения геометрии учащихся общеобразовательной школы, связанные с *формирование понятия площади*, описаны в статьях [3; 4].

Таким образом, для реализации практической направленности обучения математике, прежде всего, необходимо рассматривать практико-ориентированные задачи как средство подготовки бакалавров к педагогической деятельности – основному виду профессиональной деятельности, согласно требованиям ФГОС по направлению 44.03.01 Педагогическое образование.

В рамках дальнейшего исследования предстоит определить принципы отбора содержания практико-ориентированных задач и условия их включения в систему подготовки бакалавров к педагогической деятельности в качестве учителя математики в общеобразовательной школе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Александров А.Д.* Геометрия: Учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики/ А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2002. – 240 с.

2. *Антонова И.В.* К вопросу о практической направленности обучения математике в общеобразовательной школе// Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования: материалы XXI всероссийской (IX с международным участием) научно-практической конференции. – Самара. Изд-во: Самарский государственный социально-педагогический университет,2018. - С. 145-151.

3. *Антонова И.В., Бывшева Т.М.* К вопросу о методике введения понятия «Площадь» в курс геометрии основной школы// Научное отражение. - 2017. - № 5-6 (9-10). - С. 14-16.

4. *Антонова И.В., Жилкина Т.М*. Приемы и методы решения задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы// Математика и математическое образование: сборник трудов по материалам VIII межд. научн. конф. «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). – Тольятти. Изд-во ТГУ, 2017. - С. 215–219.

5. *Геометрия, 7-9:* Учеб. для общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. – 384 с.
6. *ГИА 2014. Математика. 9 класс.* Государственная итоговая аттестация (в новой форме). Типовые тестовые задания/ И.В. Ященко, С.А. Шестаков, А.С. Трепалин, А.В. Семенов, П.И. Захаров. – М.: Издательство «Экзамен», 2014. – 79 с.
7. *Дербеденева Н.Н., Дорофеев С.Н., Утеева Р.А.* Практико-ориентированные задачи как основа формирования мотивации у школьников к изучению геометрии в основной школе /Гуманитарные науки и образование. Т.10. №4. 2019 С. 36-42.
8. *Егупова М.В.* Практико-ориентированное обучение математике в школе. Учебное пособие для студентов педвузов. - М.: МПГУ, 2014. - 208 с.
9. *Знаменский М.А.* Землеизмерительные инструменты и работа с ними в средней школе. – Москва-Ленинград: Учпедгиз, 1933. – 39 с.
10. *Кизилова В.П.* Методическая система реализации прикладной направленности обучения математике в классах естественнонаучного направления: автореф. дисс. …канд. пед. наук. - Омск, 2009. - 22 с.
11. *Колягин Ю.М., Пикан В.В.* О прикладной и практической направленности обучения математике// Математика в школе. - 1985. - №6. - С. 27-32.
12. *Решетникова Н.В.* Преемственность реализации прикладной направленности обучения математике в основной и старшей школе: автореф. дисс. …канд. пед. наук. - Барнаул, 2009. - 23 с.
13. *Рыжик В.И.* Геометрия и практика// Математика в школе, 2006. – № 6. – С. 9-17.
14. *Саранцев Г.И.* Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. - Саранск: «Крас. Окт.», 1999. - 208 с.
15. *Современная методическая система методического образования*: коллективная монография/ Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др.; под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. - СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2009. - 413 с.
16. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрические задачи с практическим содержанием. – М.: МЦНМО, 2010. – 136 с.
17 *Столяр А.А.* Педагогика математики: Учеб. пос. для студ. физико-математических факультетов педагогических вузов. – Минск: «Вышэйшая школа», 1986. – 414 с.
18. *Сухорукова Е.В.* Прикладные задачи как одно из средств гуманизации школьного образования //Гуманизация математического образования в школе и ВУЗе: межвузовский сборник научных трудов. – Саранск: Мордовский пединститут, 1996. - С. 90-94.
19. *Терешин Н.А.* Прикладная направленность школьного курса математики: кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 96 с.
20. *Федеральный государственный образовательный стандарт* среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]. - Министерство образования и науки РФ. - М.: Просвещение, 2012. 52 с. - Режим доступа: https://минобрнауки.рф/documents/2365.
21. *Шапиро И.М.* Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 96 с.
22. *Шашкова Т.А.* Методические особенности реализации прикладной направленности курса математики основной школы: автореф. дисс. …канд. пед. наук. – М., 2005. - 20 с.
23. *Эрентраут Е.Н.* Практико-ориентированные задачи как средство реализации прикладной направленности курса математики в профильных школах: автореф. дисс. …канд. пед. наук. - Екатеринбург, 2005. - 24 с.

НЕОБХОДИМОСТЬ УСИЛЕНИЯ ВНИМАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ В ШКОЛЕ

Гайдаржи Георгий Харлампьевич
кандидат педагогических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии
и методики преподавания математики,

Шинкаренко Елена Георгиевна
кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии
и методики преподавания математики,
Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,
*Приднестровье, г. Тирасполь,*gaj5@yandex.ru

Аннотация. *В статье отражены некоторые результаты исследований НИЛ «Дидактика математики». Выявлены и сформулированы основные проблемы снижения качества геометрического образования, в первую очередь, из-за падения интереса к школьному геометрическому образованию. Подчеркивается необходимость обучения решению нестандартных заданий исследовательского характера, которые способствуют формированию ключевых компетенций обучаемых.*
Ключевые слова: *геометрическое образование, геометрическая зоркость, эвристические приемы, нестандартные исследовательские задания.*

THE NEED TO INCREASE ATTENTION TO GEOMETRIC EDUCATION IN SCHOOL

Gaydarzhi George Harlampievich
candidate of pedagogics, Professor of algebra, geometry and methods of teaching mathematics

Shinkarenko Elena Georgievna
candidate of pedagogics, associate Professor of algebra, geometry and methods
of teaching mathematics,
Pridnestrovian State University T.G. Shevchenko,
Transnistria, Tiraspol, gaj5@yandex.ru

Abstract. *The article reflects some results of the research of the Research Institute "Didactics of mathematics". Identified and formulated the main problems of reducing the quality of geometric education, primarily due to the decline in interest in school geometric education. The necessity of supplementing the system of tasks of school textbooks with non-standard tasks of a research nature is emphasized, training in the solution of which contributes to the formation of key competencies of students.*
Keywords: *geometric education, geometric vigilance, heuristic techniques, non-standard research tasks.*

Многие научно-методические публикации подчеркивают, что частые реформы в образовательном пространстве РФ и стран СНГ отрицательно повлияют на качество образования вообще и на геометрическое образование, в частности. Эта тенденция негативно сказывается на уровне дальнейшего профессионального образования. Наши научно-методические исследования в рамках НИЛ «Дидактика математики» позволили уточнить некоторые причины такого пагубного влияния «реформ».

Прежде всего, следует отметить, что в ряде случаев наблюдается неумелая организация процесса реализации требований современных государственных стандартов образования (ГОСТов). Педагоги не были готовы к таким радикальным изменениям парадигм, призывающим развивать каждого ученика, а подготовить их для такой работы не успели.

В результате реформ была повсеместно введена новая дисциплина «Информатика». И поскольку ее преподавание связано с чрезмерно увлекательной техникой, то оно, в какой-то степени, привело к снижению интереса к традиционному содержанию геометрии. Введение раздела «Элементы теории вероятностей и статистики», также потребовало выделения учебного времени. Реально ожидалось, что последует увеличение срока обучения в школе до 12 лет. Но это не произошло.

Исследование состояния геометрического образования в различных школах ПМР, показало, что привитие интереса к геометрическим знаниям ещё с начальной школы не дорабатывается, т.к. среди практических заданий на построение фигур редко встречаются развивающие конструктивные задания, которые включают учеников в активную деятельность и приучают их работать с чертежными инструментами.

Ощутимой причиной падения интереса к геометрическим знаниям является и недостаточная методическая подготовленность молодых педагогов к построению развивающего обучения. Заметно доминирует алгоритмический метод решения задач. Но в геометрии это не всегда уместно. Обучение решению геометрических задач требует иных подходов и, прежде всего, использование эвристических приемов. Непрерывное наблюдение и общение сотрудников НИЛ с учителями показало, что из-за того, что в арифметике и алгебре для решения целых групп однотипных задач эвристические приемы почти не используются, то необходимые учебные действия по обнаружению логических связей между данными и искомыми содержания задачи почти не затрагиваются, что тормозит логическое развитие учащихся, особенно необходимое для освоения геометрии. Сотрудники НИЛ на занятиях со слушателями курсов повышения квалификации учителей, на конкретных примерах показывали им, что владение эвристическими приемами и их использование ещё до изучения школьного курса геометрии позволяет активизировать поисково-познавательную деятельность учащихся. В конечном итоге это способствует формированию их универсальных учебных действий (УУД)

В связи с указанными недостатками в методической подготовке учителей математики в программу курсов повышения квалификации были включены вопросы разработки дополнительных нестандартных заданий. После организации экспериментального обучения математике в ряде школ ПМР был организован цикл учебно-методических семинаров для учителей математики с участием сотрудников НИЛ и учителей экспериментаторов, на которых особое внимание уделялось накоплению собственного опыта составления нестандартных задач. Среди демонстрируемых примеров нестандартных заданий по геометрии доминировали задачи на построение фигур с доказательством их существования.

Приведем несколько примеров задач, в решении которых разрабатываются навыки построений и навыки обоснований, приводящих к самостоятельному формулированию эвристик, используемых в решениях более сложных задач. Экспериментально было обосновано, что еще в начальной школе можно вводить понятия «угол», «смежные углы», «острый, прямой, тупой угол». Например, рассмотрим следующие задачи:

Задача№1. Из листа картона вырезать углы разных размеров. Сопоставив размеры полученных фигур, дайте им соответствующие названия.

Задача №2. Начертите на листе картона несколько окружностей и вырежьте круги. Разрежьте круги так, чтобы они были разделены на: 2 равные части; на 3 равные части; на 4 равные части; на 6 равных частей. Сопоставьте величины полученных фигур, наложив одну на другую так, чтобы совпали их вершины и одна из сторон.

Выполняя такие задания, надо обратить внимание учеников на то, что, сложив на парте разные углы с общей вершиной, может получиться, что сумма двух углов равна третьему углу. Так формируются понятия «больше», «меньше», «равно» с геометрическими фигурами. Перебирая свои и чужие фигуры, учащиеся могут интуитивно показать развернутый угол (полукруг); прямой угол (четверть круга); острый угол (пятая, шестая часть круга). Учитель обязан добиваться самостоятельных выводов от каждого ученика, и чтобы ученики получали удовольствие от участия в обсуждениях, не требуя давать определения новых понятий, но визуально должны научиться показывать нужные фигуры, по введенным понятиям (прямой угол, острый угол, тупой угол).

Следующий этап - встреча с чертежными инструментами: циркулем (для демонстрации развернутого угла), треугольником (для демонстрации прямого и острого углов). Далее младшие школьники могут работать с набором палочек для выполнения действий построения острого, прямого и тупого угла. При этом внешне эти уроки похожи на игру и потому ученики более раскованы и активны в деятельности, направленной на создание нужной фигуры.

Эта работа в младших классах, становится основой для построения развивающих занятий в 5-6 классах и далее при изучении геометрии (с 7-го класса), когда учащимся интересно заниматься конструктивными действиями для построения изучаемых геометрических фигур и обоснования истинности интуитивных выводов. Заметим, что, уже при изучении систематического курса геометрии, интерес к геометрическим знаниям также больше связывается с построением, чем с доказательством выводов. Поэтому наши экспериментаторы при изучении признаков равенства треугольников обращались к конструктивным задачам и опыту построения фигур, приобретенных ранее. Например, приведем задачу:

Задача №3. Можно ли построить треугольник, если известны две его стороны, длины которых равны 4дм и 3дм?

Анализируя задачу №3, учитель добивается от учащихся следующих выводов: по двум данным сторонам можно построить много треугольников, т.е. задача имеет множество решений. Но так как задача требует «построить треугольник», а не «треугольники», то ответ должен быть отрицательным; для получения одного треугольника в условии недостаточно данных. А какие «дополнительные условия должны быть добавлены в задаче» становится учебной проблемой. Пути решения ее связаны с фиксацией известных сторон. Появляются новые проблемы: «Можно ли фиксировать углом?», «Можно ли фиксировать третьей стороной?». Решение этих проблем приводит к новым знаниям «построения треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними» или «построения треугольника по трем известным сторонам». Формируется *первая эвристика*: «Для построения треугольника надо знать величины трех элементов треугольника».

Для проверки истинности эвристики дается контрпример №4, с помощью которого активизируется дальнейшая поисковая деятельность учеников.

Задача №4. Можно ли построить единственный треугольник, зная величины трех углов?

Учащиеся самостоятельно приходят к выводу, что таких треугольников тоже много. Следовательно, ответ – нельзя. Начинается новый поиск ответа на вопрос, а какое условие должно быть выдвинуто? Вывод: на размер треугольника влияют размеры сторон. Появляется новая проблема: «Можно ли построить треугольник по стороне и двум, прилежащим к ней углам».

Задача №5. Построить треугольник ABC, в котором AC = 8дм, угол BAC равен 35^0, а угол BCA равен 67^0.

После решения этой задачи формулируется *вторая уточненная эвристика*: «Треугольник можно построить, если известны 3 его элемента, хотя бы один элемент из которых должен быть линейным (длина стороны)». Но учитель вновь дает контрпримеры.

Задача№6. Построить треугольник ABC, в котором AB = 7дм, BC = 10дм, а угол ABC равен 230^0.

Задача№7. Построить треугольник ABC, в котором AC = 12дм, угол BAC равен 130^0, угол BCA равен 100^0.

Рассмотрение задач №6-7 приводит учащихся к выводу о необходимости уточнения и второй эвристики. Учитель представляет инициативу учащимся в формировании точных эвристик. Разыгрывается дискуссия по обсуждению вариантов точных эвристик для построения единственного треугольника в каждом случае. Далее закрепляются признаки построения треугольников и переходят к решению задач на построение частных видов треугольников: равностороннего, равнобедренного, прямоугольного. К этим упражнениям на построение наши экспериментаторы добавили свои нестандартные задания, решение которых предполагает построение с помощью чертежного треугольника.

Задача№8. Построить равнобедренный треугольник ABC, в котором известна сторона AC и один из его углов.

Задача№9. Построить прямоугольный треугольник ABC, в котором известна сумма катетов и один из острых углов.

Задача№10. Построить прямоугольный треугольник, в котором известна разность гипотенузы и меньшего катета при известном остром угле треугольника.

Задача№11. Построить прямоугольный треугольник, если известна разность его катетов и один острый угол.

Аналогичные нестандартные проблемные задания необходимо разрабатывать по многим темам. Их решение проходит с активным участием учащихся, с открытием новых знаний, многие из которых используются в последующих задачах как эвристики. Чтобы приучить учащихся к постоянной исследовательской деятельности на уроках геометрии учитель математики С.Н. Ламекина (экспериментатор НИЛ) старается создавать поисковую атмосферу своими нестандартными заданиями. Так, перед изучением темы «сумма внутренних углов выпуклого многоугольника», она предложила своим ученикам следующее задание.

Задача№12. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

К решению этой задачи учитель привлекла опыт учащихся по построению различных многоугольников. Перебирая многоугольники, учащиеся стараются обнаружить наличие внутренних острых углов, но у разных видов многоугольников разное количество острых углов. Например, у четырехугольников не более двух острых углов: прямоугольная трапеция содержит один острый угол, параллелограмм – 2, у квадрата, прямоугольника, у правильного шестиугольника нет острых внутренних углов. На экран проектируются выпуклые многоугольники разных видов и с разным числом внутренних углов. На основе этих изображений учащиеся выдвигают один ответ: «Наибольшее число - 3 острых угла только у выпуклого треугольника». Но это лишь гипотеза, которую надо доказать.

Опираясь на опыт соединения оторванных вершин плоского треугольника, учащиеся доказывают, что сумма внутренних углов треугольника равна 180^0, а потом получают сумму внутренних углов четырехугольника – 360^0, у правильного шестиугольника сумма углов 720^0, у выпуклого пятиугольника – 540^0, а у выпуклого n-угольника сумма углов равна $180^0(n-2)$.

Таким образом, учащиеся замечают *закономерности*: «Если внутренний угол многоугольника острый, то смежный с ним внешний угол при той же вершине будет тупым и наоборот», «Если внутренний угол прямой, то и соответствующий внешний угол - прямой».

Задача№13. Сколько острых внутренних углов у равностороннего треугольника, сколько их у прямоугольного или тупоугольного треугольника? Как это обосновать?

Идет активное обсуждение, после которого учащиеся уже без проверки с помощью контрпримеров не делают свои заключения. Так развивается геометрическая зоркость. Учащиеся даже не заметили, как в диалоге между собой и учителем пришли к необходимости знать сумму внутренних углов выпуклого многоугольника. На примерах правильных многоугольников они показали, что сумма внутренних углов треугольника 180^0 (т.е. 2 прямых угла), разделив на 3 вершины, получаем, что каждый угол меньше 90^0, т.е. острый. У квадрата сумма внутренних углов 360^0, т.е. каждый угол равен 90^0, острых углов нет. Приходим к выводу, что сумма внутренних углов многоугольника зависит от числа треугольников. Выводится общая формула суммы внутренних углов многоугольника с числом вершин (сторон) n.

Продолжая работать над решением составленных *исследовательских задач*, экспериментатор достигла хороших результатов в формировании у учащихся исследовательских компетенций. Ее ученики успешно стали использовать коллективно сформулированные *эвристики*: а) сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 4α; б) выпуклый четырехугольник, полученный путем соединения середины сторон равнобедренной трапеции отрезками прямых, есть ромб; в) если в треугольнике медиана $m_a = \frac{1}{2}a$, то этот треугольник прямоугольный, а основание медианы есть центр окружности, описанной около данного треугольника; г) медиана треугольника меньше его полупериметра; д) медиана $m_b < \frac{1}{2}(a+c)$; е) биссектриса любого треугольника располагается между высотой и медианой, проведенных из одной вершины.

Переход к применению сформулированной эвристики (в виде истинного предложения) называется приемом получения следствий, т.е. новых знаний. Заметим, что эвристика е) лежит в основе сложной задачи на построение и доказательство возможности построения треугольника по данным трем элементам треугольника: высоте, медиане, биссектрисе, проведенных из одной вершины треугольника. Эта задача является нестандартной исследовательской задачей. В заключение заметим, что решение более сложных нестандартных задач, решаемых с помощью сформулированных эвристик, можно выносить на внеклассные занятия по подготовке к участию в олимпиадах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гайдаржи Г.Х., Шинкаренко Е.Г.* Открытия и доказательства в основной школе. Актуальные проблемы дидактики реальных наук/ Материалы Международной научно-методической конференции. Кишинев: ТГПУ, 2013. –С. 43-53.

2. *Гайдаржи Г.Х., Дойбань М.Н., Шинкаренко Е.Г.* Обучение решению конструктивных задач в курсе планиметрии. Учебно-методическое пособие/ под ред. Гайдаржи Г.Х. – Тирасполь: РИО ПГУ, 2012. – 136 с.

3. *Гайдаржи Г.Х.* Дидактические аспекты реализации развивающего обучения в курсе школьной математики (на молд. языке) // UniversPedagogic. - №2(50). - 2016. -С.42-49.

4. *Гайдаржи Г.Х., Шинкаренко Е.Г.* Проблема развития интереса к геометрическому образованию в школе: Материалы Международной научно-практической конференции «Развивающий потенциал образовательной Web-технологии» /Науч.ред. С.В. Миронова, отв.ред. Напалков. - Арзамас: АФННГУ, 2018.-С.151-155.

5. *Гайдаржи Г.Х.* Формирование геометрической зоркости школьников/ Вестник ПГУ им. Т.Г. Шевченко. - №1(61). - 2019. – С. 46-52.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОЩАДЕЙ СЕЧЕНИЙ ТЕТРАЭДРА И ГЕКСАЭДРА, РАЗБИВАЮЩИХ ИХ НА РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ

Дыбыспаев Болатжан Дыбыспаевич
кандидат педагогических наук, педагог-мастер,
учитель математики школы-лицея №28
Казахстан, г. Нур-Султан, bolatzhand@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматриваются сечения правильных многогранников, которые разбивают их на равновеликие части. Для тетраэдра рассмотрены треугольные и четырехугольные сечения. В кубе рассмотрены параллелограммные, включая частные случаи, правильные и полуправильные шестиугольные сечения. Полученные результаты можно применять в практических целях.*
Ключевые слова: *сечения, фигура, равновеликость, правильный многогранник.*

ANALYSING AREAS OF CROSS SECTIONS OF TETRAHEDRONS AND HEXAHEDRONS DIVIDING THEM INTO VOLUME-EQUAL PARTS

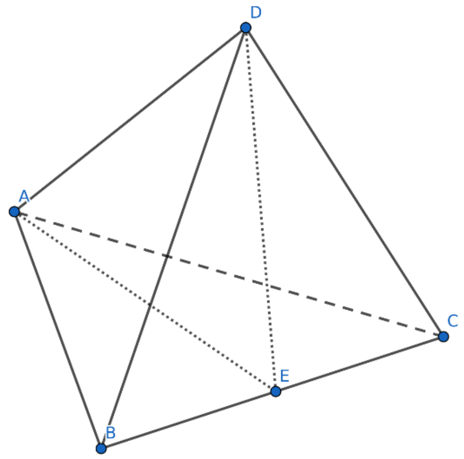
Dybyspayev Bolatzhan Dybyspayevich
candidate of pedagogical sciences, master-teacher, mathematics teacher,
school-lyceum №28
Kazakhstan, Nur-Sultan, bolatzhand@gmail.com

Abstract. *This article considers cross sections of regular polyhedrons which divide them into parts with equal volume. For tetrahedron – triangle and quadrangle cross-sections, for cubes – parallelogram cross-sections, including special cases with regular and non-regular hexagonal cross sections are considered. The results can be applied for solving practical problems.*
Keywords: *cross section, shape, equal volume, regular polyhedron.*

Построение сечения многогранников и вычисление их площади сечения получило широкое развитие, начиная с реформы школьного образования, связанного с именем академика А.М. Колмогорова. В школьных учебниках по геометрии в старших классах 70-х годов XX века даются основные методы построения сечения многогранников, такие как метод следа, внутреннее проектирование с использованием аксиом стереометрии.

В современных общеобразовательных школах число задач на построение сечений многогранников резко уменьшилось. Это конечно связано с уменьшением числа часов на геометрию. В классах с углубленным изучением математики, особенно в России, занимаются по учебникам профессора Е.В. Потоскуева, ныне работающего в Тольяттинском государственном университете. В его учебниках геометрии 10-11 классов, а также в отдельных исследованиях приведены многочисленные задачи различной сложности на построение сечений тел и вычисления площади сечения.

В настоящей статье мы связываем сечение многогранников с объемом. Для удобства мы рассматриваем только два правильных многогранника: четырехгранник и шестигранник, так как они чаще встречаются на практике. Кроме того, разбиение многогранника тесно связано с практическими задачами на максимум-минимум, поэтому мы рассматриваем возможные сечения тетраэдра и гексаэдра, вычисляя сечения, делящие их на равновеликие части. Среди площадей сечений выясняем наибольшее и наименьшее значение.

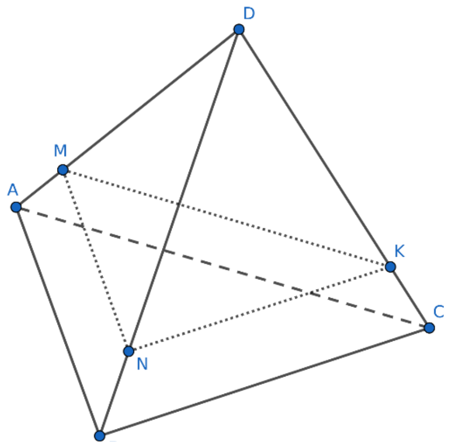


Пусть ABCD тетраэдр с ребром a. Известно, что плоскостями симметрии тетраэдра являются биссекторные плоскости, содержащие ребро тетраэдра. Рассмотрим один из них, содержащий ребро AD.

Пусть точка E - середина ребра BC. Тогда $\varDelta ADE$ разбивает тетраэдр на равновеликие части.

$S_{ADE} = \frac{1}{2} h \cdot H$, где h - высота основания, H - высота тетраэдра.

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} a^2\sqrt{2} = S_1$$

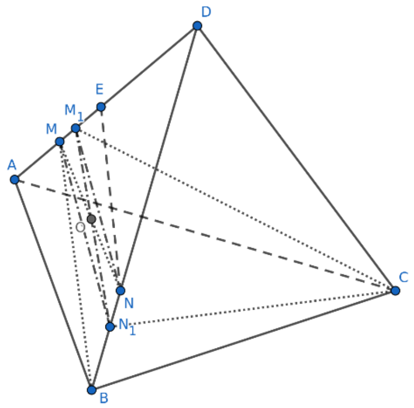


Рассмотрим сечение тетраэдра $ABCD$ параллельно основанию тетраэдра ($\varDelta ABC$). В сечении получим равносторонний $\varDelta MNK$. $M \in AD, N \in BD, K \in CD$.

Пусть сечение MNK разбивает тетраэдр на две равновеликие части. Так как $ABCD \propto MNKD$ и $\frac{V_{MNKD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2} = k^3$, $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - коэффициент подобия.

Тогда $MN = MK = NK = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot a$.

$$S_{MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}} = S_2$$



Рассмотрим случай, когда треугольное сечение непараллельно основанию делящее тетраэдр на две равновеликие части. Для простоты одну вершину треугольника поместим в вершину основания тетраэдра, а две другие на противоположных боковых ребрах.

Пусть $\varDelta MNC$ разбивает тетраэдр на равновеликие пирамиды, причем $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BD$.

Тогда $V_{MNCD} = V_{ABNMC} = \frac{1}{2} V_{ABCD}$. Так как высоты трех пирамид равны, то$S_{MND} = \frac{1}{2} S_{ABD}$.Обозначим $AM = BN$ через x. Тогда $MD = ND = MN = a - x$.

$\frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{1}{2} a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда$x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$.

Вычислим площадь равнобедренного $\varDelta MNC$ ($MC = NC$). Из $\varDelta BNC$ по теореме косинусов

$$NC^2 = a^2 + \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{2} - \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{2})a^2}{2}, \ MN = a - \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

точка – середина MN, CK – высота $\varDelta MNC$.

$$S_{MNC} = NK \cdot CK = \frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3a^2 - a^2\sqrt{2}}{2} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a^2\sqrt{11 - 4\sqrt{2}}}{8} = S_3$$

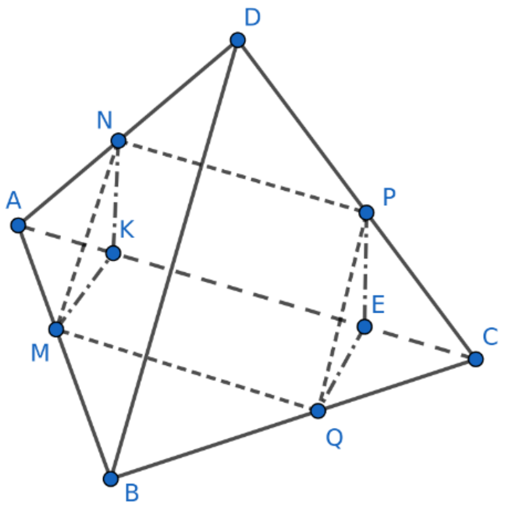
Рассмотрим случай, когда MN не параллельна AB. Выбирая на отрезке BN произвольную точку N_1, и проводя $NM_1 \parallel MN_1$, $M_1 \in MD$ получим трапецию MN_1NM_1, диагонали которой пересекаются в точке O. По свойству трапеции $S_{ABNM} = S_{MND}$, учитывая $S_{ABNM} = S_{MND}$ получим $S_{ABN_1M_1} = S_{N_1DM_1}$.

Таким образом, ΔN_1CM_1 разбивает тетраэдр на две равновеликие пирамиды.

Если точка N_1 совпадает с вершиной B, тогда точка M_1 окажется на середине ребра AD в точке E $(BM \parallel NE)$. ΔBCE является биссекторной плоскостью.

$S_{BCE} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Для всех положений точки N_1 на отрезке BN соответствует положение точки M_1 на отрезке ME, тогда сечения $N_iCM_{i(i=1,2,3,4\ldots)}$ разбивают тетраэдр на равновеликие части и $S_{NCM} < S_{N_iCM_i} < S_{BCT}$.



Из всех четырехугольных сечений разбивающие тетраэдр на равновеликие части рассмотрим только прямоугольное сечение.

Пусть $MNPQ$ искомый прямоугольник и $BM = x$, $MN = a - x$, $S_{NMPQ} = x(a - x)$.Для определения величины отрезка x воспользуемся условием:

$V_{AMNCPQ} = V_{MBQDNP} = \frac{1}{2}V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Определим объем призматоида $AMNCPQ$ разбив его на две равные пирамиды и призмы

$$V_{AMKN} = V_{CQEP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-x)^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(a-x)\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(a-x)^3\sqrt{2}}{24}$$

$$V_{MNKQPE} = \frac{1}{2}\frac{(a-x)^2 3}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot x = \frac{x(a-x)^2\sqrt{2}}{4}$$

$$V_{AMNCPQ} = \frac{(a-x)^3\sqrt{2}}{12} + \frac{x(a-x)^2\sqrt{2}}{4} = \frac{(a-x)^2(a+2x)\sqrt{2}}{12}$$

Имеем $\frac{(a-x)^2(a+2x)\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

$$(a-x)^2(a+2x) = \frac{a^3}{2}$$
$$x \approx 0.557875a$$

$$S_{MNPQ} = x(a-x) = 0.557578a \cdot 0.442125a = 0.246519a^2 = S_4$$

Сравним полученные площади сечений.

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = 0.353553a^2$$

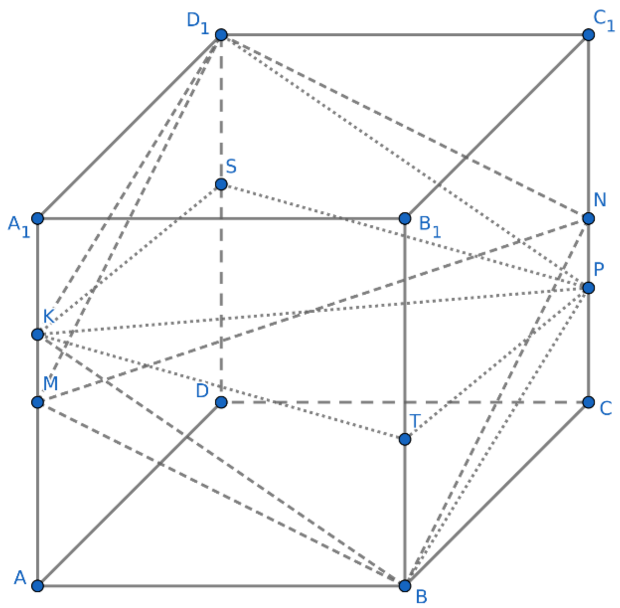
$$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}} = 0.272781a^2$$

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{11-4\sqrt{2}}}{8} = 0.288941a^2$$

$$S_4 = 0.246519a^2$$

$$S_4 < S_2 < S_3 < S_1$$

Перейдем к рассмотрению сечений куба, делящее куб на равновеликие части. Куб отличается от тетраэдра тем, что имеет центр симметрии. Поэтому сечения рассматриваемого типа должны проходить через центр симметрии. Среди прямоугольных сечений, включая квадрат, наибольшую площадь имеет диагональное сечение ($S = a^2\sqrt{2}$). Наименьшую площадь имеет квадрат ($S = a^2$).



Рассмотрим все параллелограммные сечения, включая ромб. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изображение куба. Точки M и N середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно, BMD_1N - ромб. $S_{BMD_1N} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Рассмотрим все параллелограммы с вершинами в точках B и D_1, представителем которых служит параллелограмм BKD_1P, где $K \in MA_1$, $P \in NC$, $MK = NP = x$. и $x \in [0, \frac{a}{2}]$

Для вычисления площади параллелограмма найдем модуль векторного произведения $\underline{MK}$ и $\underline{MP}$, для чего введем прямоугольную систему координат $BCAB_1$. В этой системе$B(0,0,0)$, $P(a, 0, \frac{a}{2} - x)$, $K(0, a, \frac{a}{2} + x)$.

$$\underline{BP}(a, 0, \frac{a}{2} - x)\ ;\ \underline{BK}(a, 0, \frac{a}{2} + x)\ ;\ [\underline{BP}, \underline{BK}] = (a(\frac{a}{2} - x), a(\frac{a}{2} + x), -a^2)$$

$$S_{BKD_1P} = |[\underline{BP}, \underline{BK}]| = \sqrt{a^2(\frac{a}{2} - x)^2 + a^2(\frac{a}{2} + x)^2 + a^4} = a\sqrt{2x^2 + \frac{3}{2}a^2}$$

Полученная функция, возрастающая при $x = 0$, $S_{min} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$,при $x = \frac{a}{2}$, $S_{max} = a^2\sqrt{2}$.

Таким образом, площади всех рассматриваемых параллелограммных сечений изменяются от площади ромба до площади диагонального сечения.

Рассмотрим представителя всех параллелограммных сечений вершин, которые расположены на боковых ребрах куба.

Рассмотрим параллелограмм $TKSP$, вершины которого расположены на боковых ребрах куба, являющийся представителем всех таких параллелограммных сечений ($T \in BB_1$ и $S \in DD_1$).

Обозначим BT через y. Так, $y \in [0;\frac{a}{2}]$, $MK = x$, $x \in [0,\frac{a}{2}]$.

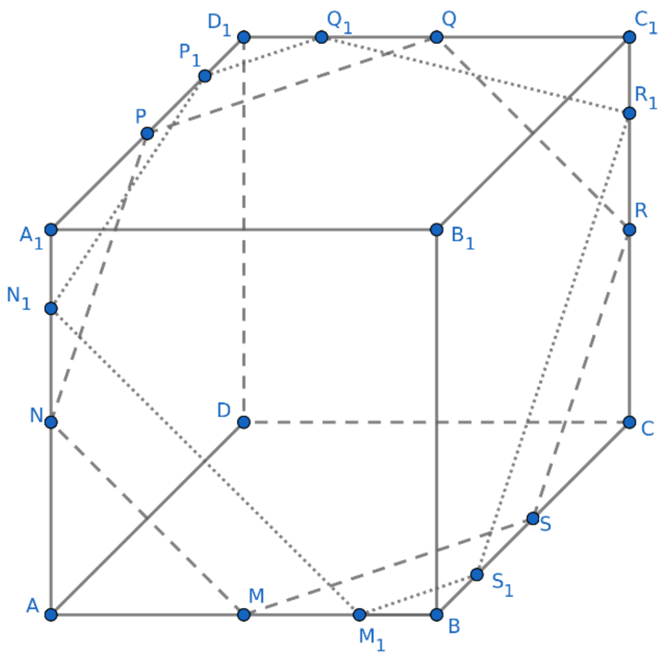
При $y = 0$, $x = 0$, $S_{TKSP} = S_{BMD_1N} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

При $y = 0$, $x = \frac{a}{2}$, $S_{TKSP} = S_{AA_1C_1C} = a^2\sqrt{2}$.

При $y = \frac{a}{2}$, $x = 0$, $S_{TKSP} = S_{kvadrat} = a^2$.

При $y = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, $S_{TKSP} = S_{BMD_1N} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Таким образом, площади всех параллелограммных сечений заключены в промежутке $[a^2; a^2\sqrt{2}]$.



Перейдем к рассмотрению шестиугольных сечений, делящие куб на равновеликие части.

Пусть $MNPQRS$ - правильный шестиугольник сечения.

$S_{MNPQRS} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ где a - ребро куба.

Другие шестиугольные сечения будут полуправильными.

Для простоты выберем шестиугольник $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ как показано на рисунке, обозначив, $BM_1 = A_1N_1 = x$, $x \in [0;\frac{a}{2}]$.

Вычислим площадь полуправильного шестиугольника.

Диагональ N_1R_1 разбивает шестиугольник на два равных четырехугольника.

Разбив один из них диагональю N_1S_1 на два треугольника и, используя векторное произведение векторов, площадь шестиугольника, выразим как функцию от x.

Найдем координаты опорных точек в системе $BCAB_1$, $S_1(x;0;0)$, $M_1(0;x;0)$, $N_1(0;a;a-x)$, $R_1(a;0;x)$.

$$S_{M_1N_1P_1Q_1R_1S_1} = 2S_{M_1N_1R_1S_1} = S_1 + S_2$$

$$S_1 = |[\underline{S_1M_1};\underline{S_1N_1}]| S_2 = |[\underline{S_1N_1};\underline{S_1R_1}]|$$

$$\underline{S_1M_1}(-x;x;0)$$

$$\underline{S_1N_1}(-x;a;a-x)$$

$$[\underline{S_1M_1};\underline{S_1N_1}](-x(a-x);-x(a-x);x(a-x))$$

$$S_1 = |[\underline{S_1M_1};\underline{S_1N_1}]| = \sqrt{x^2(a-x)^2 + x^2(a-x)^2 + x^2(a-x)^2} = x(a-x)\sqrt{3}$$

$$\underline{S_1N_1}(-x;a;a-x)$$

$$\underline{S_1R_1}(a-x;0;x)$$

$$[\underline{S_1N_1};\underline{S_1R_1}](ax;(a-x)^2+x^2;-a(a-x))$$

$$S_2 = \sqrt{a^2x^2 + (a-x)^4 + 2x^2(a-x)^2 + x^4 + a^2(a-x)^2}$$

$$S_1 + S_2 = x(a-x)\sqrt{3} + \sqrt{a^2x^2 + (a-x)^4 + 2x^2(a-x)^2 + x^4 + a^2(a-x)^2}$$

При $x = 0, S_1 + S_2 = a^2\sqrt{2}$,а при $x = \frac{a}{2} S_1 + S_2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Таким образом, площадь полуправильных шестиугольных сечений изменяется от площади правильного шестиугольника до площади диагонального сечения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Дыбыспаев Б.Д.* Задача на исследование сечений куба. Материалы "Таймановские чтения - 2010", г. Уральск. – С. 59-63.
2. *Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И.* Геометрия 9-10. – М.: Просвещение, 1978. - 254 с.
3. *Потоскуев Е.В.* Геометрическая поэма. – Тольятти: Издательство ТГУ, 2014. - 382 с.

АНАЛОГИЯ КАК СРЕДСТВО ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Евелина Любовь Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения,
Самарский государственный социально-педагогический университет,
Россия, г. Самара, evelina.evelina-ln@yandex.ru

Бурых Полина Александровна
студент 4 курса факультета математики, физики и информатики
Самарский государственный социально-педагогический университет,
Россия, г. Самара, burykhpolina@yandex.ru

Аннотация. *Внимание авторов статьи сосредоточено на одном из основных приемов обучения геометрии - аналогии. В статье представлена логика изложения курса геометрии с применением аналогии как при изучении плоских, так и пространственных объектов.*
Ключевые слова: *обучение геометрии; аналогия; аналогия в изучении фигур на плоскости и в пространстве.*

ANALOGY AS A MEANS OF STUDY GEOMETRY IN HIGH SCHOOL

Evelina Lyubov Nikolaevna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor of the Department of physics, mathematics and teaching methods, Samara state social and pedagogical University,
Russia, Samara, evelina.evelina-ln@yandex.ru

Burykh Polina Aleksandrovna
4th year student of the faculty of mathematics, physics and Informatics
Samara state social and pedagogical University,
Russia, Samara, burykhpolina@yandex.ru

Abstract. *The attention of the authors is focused on one of the main methods of teaching geometry - analogy. The article presents the logic of the presentation of the geometry course using analogy both in the study of plane and spatial objects.*
Keywords: *learning geometry; analogy; analogy in the study of figures on the plane and in space.*

Геометрия относится к одному из самых сложных для изучения в школе разделов математики. Об этом говорят результаты выпускных экзаменов по математике за курс девятилетней школы и результаты Единого государственного экзамена в 11 классах. Однако, в соответствии с историческими данными, геометрия появилась раньше всех других математических наук, геометрические объекты были доступными и одними из наиболее удобных средств описания и познания окружающего мира. Чем же вызвано такое недопонимание геометрии школьниками? Следует отметить, что ни один из разделов школьного курса математики, кроме геометрии, не носит названия систематического. Мы изучаем с учащимися алгебру, арифметику, теорию вероятностей и математическую статистику в адаптированном к школе виде. Объекты и отношения всех перечисленных разделов формально не определяются, отсутствует систематическое изложение основ этих наук, сведения представлены в упрощенной форме, наиболее приближенной для понимания и применения в стандартных ситуациях. Даже характер олимпиадных задач не требует строгих формальных знаний этих разделов. Другая картина наблюдается в геометрии. Начиная с 7 класса, учеников знакомят с аксиоматическим методом изложения геометрии: имеется набор основных неопределяемых понятий; формулируются их свойства в форме аксиом; другие понятия и отношения формально определяются; свойства этих понятий и отношений устанавливаются путем доказательства со ссылкой на аксиомы и ранее доказанные факты. Путь установления истины в геометрических предложениях не очевиден, так как в качестве отправного тезиса можем использовать разные утверждения. Более того, нередко в процесс решения вступают совсем не очевидные из условия дополнительные фигуры. Как помочь школьнику ориентироваться в этом разнообразии фактического материала, сформировать умение осознанно выбирать нужные тезис и аргумент в качестве доказательства. Эта проблема становится основной для учителя математики, который заинтересован в успешности действий своих учеников, который стремится превратить математику в доступное орудие познания мира.

Одним из эффективных способов такого освоения основ науки является аналогия. Аналогия – форма умозаключения, когда на основании сходства двух предметов, явлений в каком-либо отношении делается вывод об их сходстве в других отношениях [1]. Аналогия позволяет устанавливать связи между предметами и явлениями, не обязательно относящимся к одному классу объектов, и через выявление сходства и различия между известными и изучаемыми понятиями раскрываются новые факты, истинность которых затем устанавливается на основе известных из логики правил вывода.

Заметим, что аналогия применяется как при введении отдельных понятий и отношений между ними, так и при изучении их свойств и признаков. Аналогию часто используют в изложении системы фактов об отдельных геометрических фигурах и их совокупности. Кроме того, аналогия становится доступным средством изучения новых разделов на основе сходных известных фактов. Проиллюстрируем сказанное примерами. К первым основным фактам в планиметрии относят сведения о точках, прямых, отрезках, лучах и углах. Появляются понятия: внутренние и внешние точки отрезка/ внутренняя и внешняя область угла; мера отрезка – длина отрезка/ мера угла – величина угла. Заметим, что действия с мерами отрезков и углов осуществляются на основе известных действий над скалярными величинами.

Следующими объектами изучения геометрии в школьном курсе становятся многоугольники, для которых также наиболее приемлемым средством усвоения новых сведений становится сравнение и аналогия: путем выявления сходства и различия между видами многоугольниками познается сущность каждого из них, что приводит к сознательному многостороннему их исследованию. Более того, при переходе к многоугольнику с большим числом сторон и углов всякий раз проводится линия сравнения с известными многоугольниками, чтобы более ощутимыми стали сходства и различия между ними.

Устанавливая условия равенства треугольников, мы обращаемся к частным ситуациям, чтобы путем сравнения и аналогии выделить наиболее доступные пути для формулировки признаков равенства.

Расположение геометрических фигур на плоскости мы связываем с наличием или отсутствием у них общих точек. При этом количество общих точек позволяет вводить новые отношения между ними: прямые пересекаются или параллельны; сколько треугольников образуется при пересечении прямой со сторонами треугольника; прямая является касательной к окружности или пересекает ее; фигуры оказываются вписанными или описанными относительно одна другой и другие. Каждый новый установленный факт в геометрии дает основания переносить этот факт в другие условия и ставить вопрос о наличии или отсутствии его в новых условиях. Таким образом, рождаются новые задачи, решение которых приводит к другим новым фактам. Так, в процессе доказательства свойств серединных перпендикуляров к сторонам треугольника мы приходим к доказательству факта пересечения высот треугольника.

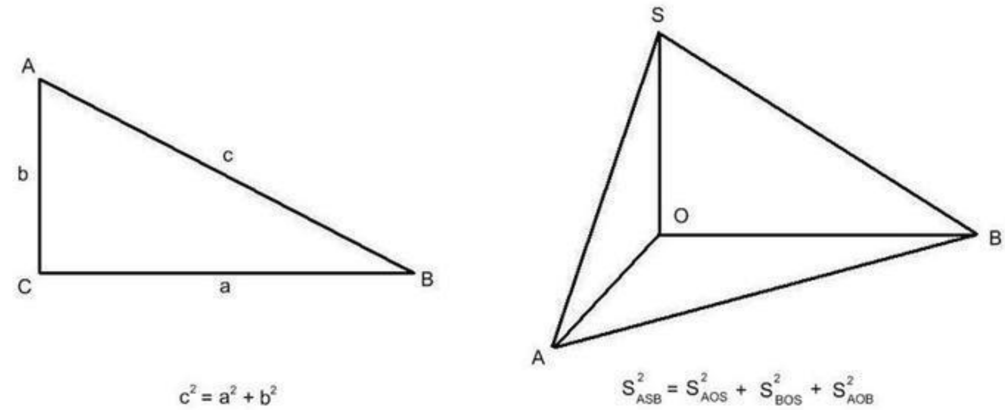
Понятие о подобных треугольниках становится более доступным школьникам, если оно вводится на основе аналогии путем их сравнения с равными треугольниками, так при этом в большей степени выявляются сходства и различия в таких треугольниках.

Выход в пространство при изучении геометрии осуществляется также на основе сравнения уже знакомых объектов на плоскости и в пространстве, а также благодаря способности устанавливать аналогии между различными объектами. Так, изучение тем «Параллельность в пространстве» и «Перпендикулярность в пространстве» осуществляется по одной схеме: взаимное расположение объектов, параллельность (перпендикулярность) прямых/прямой и плоскости/ двух плоскостей. В процессе их рассмотрения появляются новые определения, устанавливаются факты существования объектов, выясняются их свойства и признаки.

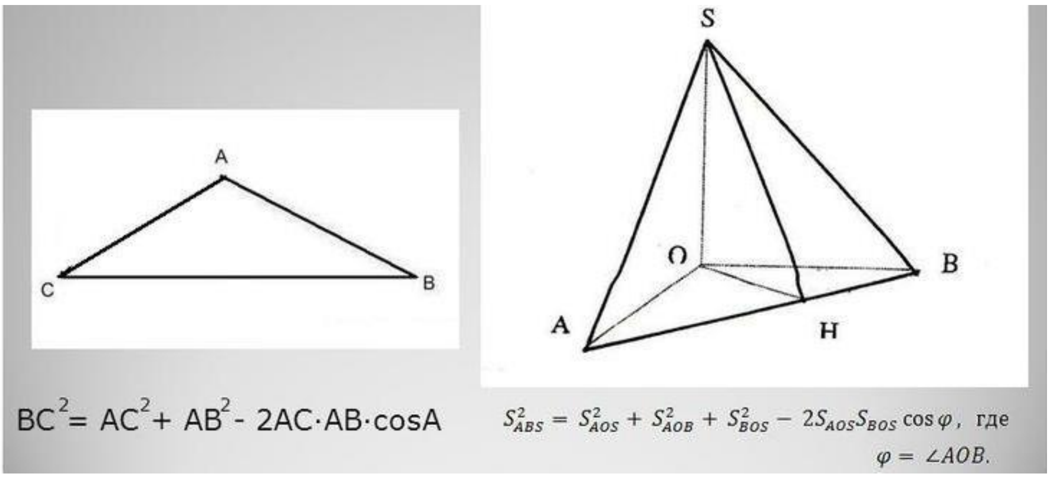
Переходя к изучению многогранников, обращаем внимание школьников на следующие факты: треугольник на плоскости аналогичен тетраэдру в пространстве, так как на плоскости две прямые линии не могут образовать ограниченную фигуру, а три могут образовать треугольник. В пространстве три плоскости не могут образовать ограниченное тело, а четыре могут образовать тетраэдр. Отношение треугольника к плоскости такое же, как отношение тетраэдра к пространству, поскольку и треугольник, и тетраэдр ограничены минимальным числом простых ограничивающих элементов. И вновь применяем аналогию.

Таким же образом мы можем рассматривать как аналогичные фигуры параллелограмм и параллелепипед. Действительно, перемещаем отрезок или многоугольник параллельно самому себе в направлении прямой, пересекающей содержащую его прямую или плоскость, и первый опишет параллелограмм, а второй – параллелепипед. Последний пример интересен еще с точки зрения выявления разных аналогий. Аналогия, особенно не полностью выясненная аналогия, может иметь не один смысл. Так, сравнивая плоскую и пространственную геометрию, была установлена аналогия между треугольником на плоскости и тетраэдром в пространстве, а затем – между треугольником и пирамидой. Обе аналогии полезны, каждая имеет значение в своем месте. Между плоской и пространственной геометрией можно установить несколько аналогий. [2]

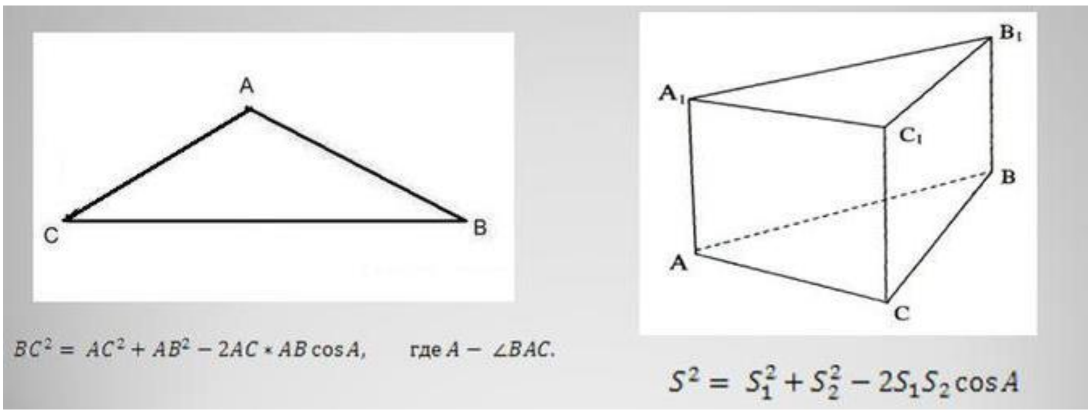
1. Теорема Пифагора: прямоугольный треугольник и тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин



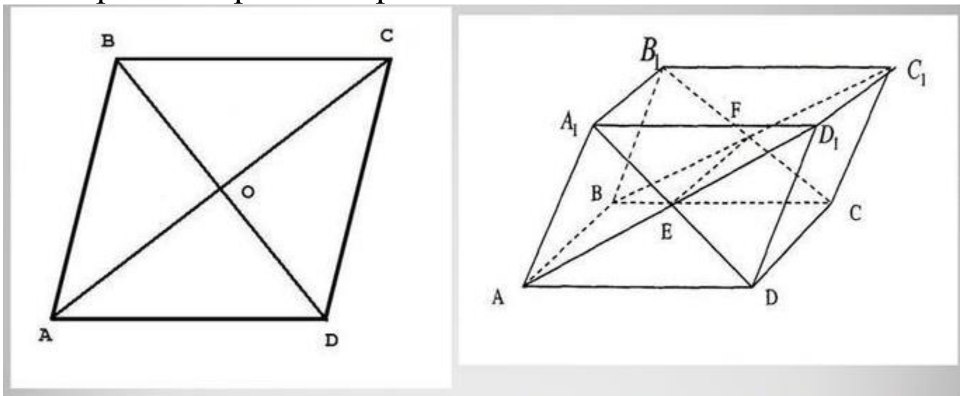
2. Теорема косинусов: а) треугольник и тетраэдр, одно из боковых ребер которого перпендикулярно противолежащей грани



б) треугольник и прямая треугольная призма



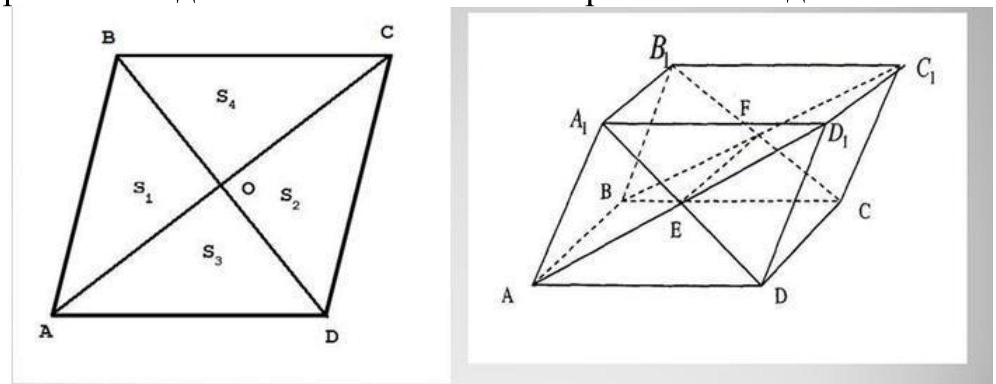
3. Свойство диагоналей и сторон параллелограмма /диагональных сечений и граней параллелограмма



$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

$$S^2_{ABC_1D_1} + S^2_{A_1B_1CD} = 2(S^2_{ABB_1A_1} + S^2_{ABCD})$$

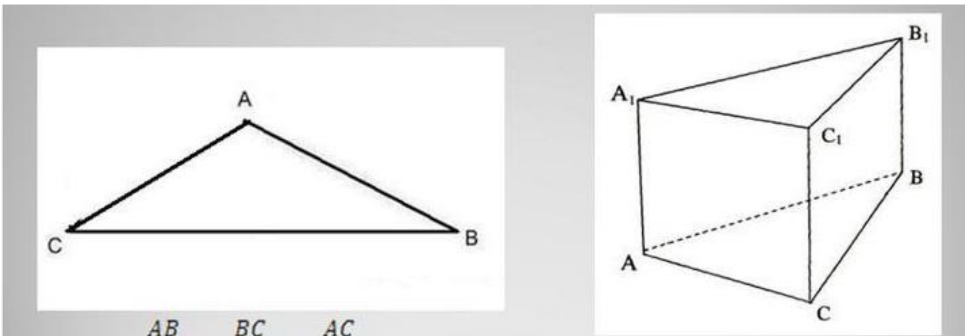
4. Свойство площадей треугольников, образованных при пересечении диагоналей параллелограмма и объемов призм, образованных при пересечении диагональных сечений параллелепипеда



$$S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

$$V_{AA_1EBB_1F} \cdot V_{DD_1ECC_1F} = V_{ADEBCF} \cdot V_{A_1D_1EB_1C_1F}$$

5. Теорема синусов: треугольник и треугольная призма



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{S_{BCB_1C_1}}{\sin A} = \frac{S_{ABA_1B_1}}{\sin C} = \frac{S_{ACA_1C_1}}{\sin B}$$

Кроме того, всем известная формула площади многоугольника, через радиус вписанной в него окружности может быть легко перенесена в пространство, когда требуется найти объем многогранника, в который вписана сфера.

Получаем следующую аналогию: $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r_{вп.}$ и $V_n = \frac{1}{3} S_n \cdot r_{вп.}$, где S_n, P_n, V_n соответственно площадь и периметр многоугольника в первом случае, и объем и площадь поверхности многогранника во втором случае.

Положение точки в пространстве однозначно может быть определено с помощь трех чисел − координат. Это утверждение является следствием того факта, что пространство, в котором мы живем, является трехмерным. После подробного изучения декартовых координат на прямой и на плоскости, построение системы пространственных координат легко провести по аналогии.

Решение многих геометрических задач можно также выполнить с помощью аналогии. Приведем примеры

Задание 1. Используя прием аналогии сформулируйте и докажите свойства равнобедренного треугольника и равнобедренной трапеции.

Задание 2. У равных треугольников соответственные медианы равны. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для биссектрис и высот.

Задание 3. Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны. Сформулируйте аналогичные утверждения для других элементов равнобедренного треугольника и докажите их, используя прием аналогии.

Задание 4. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины. Используя прием аналогии докажите равенство треугольников по медиане и двум углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

Задание 5. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для равностороннего треугольника.

Подобные задачи помогают школьникам самостоятельно находить способы решения задач, а главное, подмечать аналогию в новых фигурах и самим открывать их свойства. Овладение аналогией как приемом мышления позволяет ученику глубже проникнуть в суть изучаемых математических понятий, осознанно оперировать этими понятиями и находить им применение, в первую очередь, внутри самой математики, а затем и за ее пределами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Словарь русского языка: В 4-х т. / РАН, Ин-т лингвистич. исследований; Под ред. А. П. Евгеньевой. — 4-е изд., стер. — М.: Рус. яз.; Полиграфресурсы, 1999.
2. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА НАГЛЯДНОСТИ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Иванюк Мария Евгеньевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физики,
математики и методики обучения,
Самарский государственный социально-педагогический университет
Россия, г. Самара, ivanyuk.maria@yandex.ru

Аннотация. *В статье рассматривается реализация принципа наглядности различными средствами:с помощью ИКТ, мобильных приложений стереочертежей.*
Ключевые слова: *принцип наглядности, мобильные приложения в математике, обучение геометрии.*

IMPLEMENTATION OF THE PRINCIPLE OF VISIBILITY IN LESSONS OF GEOMETRY IN THE CONDITIONS OF EDUCATION INFORMATIZATION

Ivanyuk Maria Evgenievna
supervisor – candidate of pedagogical sciences, associate professor, the chair of physics,
mathematics and methods of teaching,
Samara State University of Social Sciences and Education
Russia, Samara, ivanyuk.maria@yandex.ru

Abstract. *The article discusses the implementation of the principle of visualization by various means: with the help of ICT, mobile applications stereo.*
Keywords: *visual principle, mobile applications in mathematics, geometry training.*

Информационные технологии становятся неотъемлемой частью всех сфер жизни любого человека, в том числе и обучающихся, которые сегодня существенно отличаются от своих предшественников. В школу пришли «дети – зрители», которые растут и учатся в условиях максимально интегративного и визуализированного представления информации. Поэтому обучение будет тем эффективнее, чем более технологично, наглядно и объемно будет организована подача учебного материала.

В процессе обучения математике целесообразно использовать различные наглядные средства. Наглядность как одна из составных частей обучения математике хорошо реализуется при изучении геометрии. Одним из способов реализации принципа наглядности является использование специальных программных средств. Выделим наиболее известные в среде учителей *программные средства* «Живая математика», «Математический конструктор», «GEONExT», «GEOGEBRA». *Программы* «GEONExT» и«GEOGEBRA» - свободно распространяемые программные продукты. Каждая из этих программ дает возможность построения *динамических чертежей*, тем самым на уроках возможна организация следующих форм работы: фронтальная работа с готовыми динамическими чертежами; демонстрация задач на построение; проведение эксперимента; выполнение самостоятельных работ в программах.

В настоящее время бурно развиваются *мобильные математические приложения*. Рассмотрим некоторые из них

Мобильное приложение Euclidea: геометрическое построение с помощью циркуля и линейки (Рис.1).

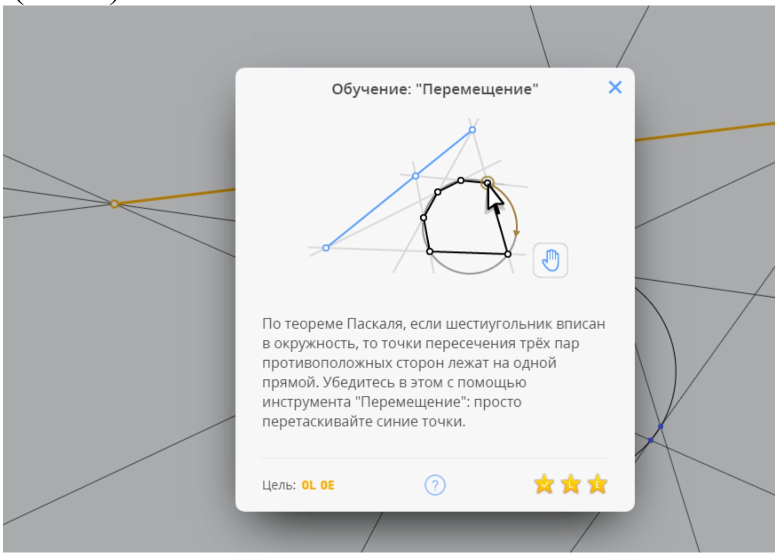


Рис.1.

Данное приложение представляет собой интерактивный сборник задач по геометрии на построение. Задачи имеют 11 уровней сложности и 10 инструментов необходимых для решения задач на построения на плоскости. Построение производится пользователем на экране смартфона, правильно выполненное
построение позволяет перейти на следующий уровень.

Следующее *мобильное приложение*, позволяющее решать геометрические задачи, *Пифагория*: геометрия на клетчатом поле (Рис.2). Это приложение охватывает задачи из *следующих тем*:

- длина, расстояние, площадь;
- углы и треугольники;
- биссектрисы, медианы, высоты, серединные перпендикуляры;
- теорема Пифагора;
- окружности и касательные;
- параллелограммы, квадраты, ромбы, прямоугольники и трапеции;
- симметрия, отражение, вращение.

Все фигуры изображены на клетчатом поле, как в тетради.

Приложение XSection: сечение многогранников. Это приложение представляет собой интерактивный тренажер по стереометрическим задачам. Он позволяет обучать работе с изображениями многогранников, линий и плоскостей. Приложение содержит все необходимые сведения по теории, а забытые определения учащийся может посмотреть в словаре; охватывает все темы школьного курса стереометрии. Кроме того, дает возможность для учащимся потренироваться перед контрольной или экзаменом. Приложение не позволит построить невозможную фигуру, например, «пересечь» скрещивающиеся прямые (типичная ошибка при построении сечений на бумаге).

Необходимо отметить, что наряду с компьютерными средствами обучения, другие средства наглядности отнюдь не отходят на второй план. Перед педагогами стоит непростая задача: не ограничиться каким-либо одним средством наглядности, а по мере возможностей использовать их разумное сочетание, итогом которого будет являться желаемый результат.

Рис.2.

Рис.3.

Построение *разверток стереометрических фигур*. В решении этого вопроса помогут *стереоскопические чертежи*, которые дают возможность при изучении стереометрии значительно увеличить количество фигур, дающих в зрительном восприятии объемное изображение.

Изучение стереометрии с использованием стереоскопических чертежей, которые позволяет учащимся детально рассмотреть изучаемую фигуры, уточняя ее общую конструкцию и выделяя существенные признаки. При изучении основных геометрических тел и их свойств учащиеся не всегда легко и правильно понимают структуру пространственных фигур по чертежам. Здесь стереоскопический чертеж совместно с объемной моделью, окажет учащемуся значительную помощь в освоении стереометрии. Подробные рекомендации о построении *стереочертежей* были представлены Г.А. Владимирским в работе «Построение стереоскопических проекций геометрических фигур» в 1937 г., а в 1963 г. был создан альбом[1] (Рис.3). Альбом до сих пор вызывает неподдельный интерес у учащихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Владимирский Г.А.* Альбом стереочертежей по геометрии. – М.: Просвещение, 1963.

2. *Обучение геометрии с использованием возможностей* GeoGebra [Текст]: учебно-методическое пособие/ [О. Л. Безумова и др.]; Федеральное гос. автономное образовательное учреждение высш. проф. образования "Северный (Арктический) федеральный ун-т им. М.В. Ломоносова. - Архангельск: КИРА, 2011. - 138 с.

РОЛЬ ЭСТЕТИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ КАК СРЕДСТВА ПОВЫШЕНИЯ ЛОГИКИ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Кожабаев Кайыржан Габдуллович
доктор педагогических наук, профессор РАЕ
Даутов Айбек Омирбекович
PhD докторант, по специальности «Математика»
Алип Айбек Алипович
Магистр по специальности «Математика»
Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова,
Казахстан, г. Кокшетау, d.abeke@mail.ru

Аннотация. *В данной статье рассматривается один из методических подходов к решению классических задач по курсу геометрии. Особенность данной статьи заключается в применении таких качеств, как: логическое мышление, культурная роль личности, на основе которых геометрическая задача выглядела бы эстетически. Использование в геометрии элементов эстетики и логики способствует развитию умений и навыков каждого обучаемого.*
Ключевые слова: *учебно-воспитательный процесс, эстетическая организация на уроках геометрии, интегративный подход, критерий развития, логическое мышление.*

THE ROLE OF AESTHETIC EDUCATION AS A MEANS OF IMPROVING LOGIC IN GEOMETRY LESSONS

Kozhabaev Kayyrzhan Gabdullovich
doctor of pedagogical Sciences, Professor of RAE
Dautov Aibek Omirbekovich
PhD student, specialty "Mathematics"
Alip Aibek Alipovich
Master's degree in Mathematics»
Kokshetau state University named after sh. Ualikhanov,
Kazakhstan, Kokshetau, d.abeke@mail.ru

Abstract. *This article discusses one of the methodological approaches to solving classical problems in the course of geometry. The peculiarity of this article is the application of such qualities as: logical thinking, cultural role of personality, on the basis of which the geometric problem would look aesthetically. The use of elements of aesthetics and logic in geometry contributes to the development of skills and abilities of each student.*
Keywords: *educational process, aesthetic organization in geometry lessons, integrative approach, criterion of development, logical thinking.*

Каждый человек способен эмоционально воспринимать мир, чувствовать красоту природы. Но не каждый может перевести свои эмоции в сферу геометрической части объекта, прийти к созданию иллюстративного образа. Способность видеть красоту имеет не только тот, кто духовно воспитан, но и обладает фантазией, мышлением, логическим воображением. Обучаемый, владеющий вышеперечисленными свойствами, сможет создавать свои суждения, а также делать высказывания к той или иной задаче.

В настоящее время широко применяется термин «задача» как в жизни, так и в науке. Этим термином обозначаются многие и весьма различные понятия, но на сегодняшний день нет точного определения понятия «задача».

В широком смысле задача рассматривается как проблемная ситуация с явно заданной целью, которую необходимо достичь каким-либо результатом. В более узком смысле задачей также называют саму эту цель, данную в рамках проблемной ситуации, то есть то, что требуется сделать. Задача является проблемной ситуацией, которая выражается с помощью знаков естественного или научного языка, что считается, если субъект при выполнении какой-либо деятельности на своём пути встречает трудности, то в результате возникает проблемная ситуация. Значит, проблемная ситуация – это не просто трудности, возникающие на пути субъекта, а его желание и стремление их устранить [1].

Величайшая трудоспособность и волевое напряжение, мобилизация всех духовных, эмоциональных и интеллектуальных сил, сосредоточена на стремлении к глубокому проникновению, в сущности, времени, в котором мы живем. В таком случае, геометрические задачи должны отвечать не только на вопросы геометрии, но и на коренные социальные, политические, моральные вопросы времени, то есть быть универсальным духовным феноменом эстетической жизни [2].

Геометрия неизбежно влияет на развитие интеллекта, логики, творческих способностей, культуру обучающихся. Обращаясь к геометрическому чертежу, нужно понять, что это не просто изображение, он участвует в нашей жизни, помогает формировать нравственные качества обучающихся. Занимаясь чертежами геометрии, изображениями, можно сделать вывод, что они влияют на развитие творческих способностей, воспитания, формируя логическо-эстетическое представление, восприятие. Именно во взаимоотношениях геометрических построений и геометрических чертежей удовлетворяются очень важные моменты, иллюстрирующие присутствие прекрасного и чисто человеческие потребности, чрезвычайно важные для роста всесторонней, эстетически гармоничной и духовно развитой личности в становлении нашего общества.

Основным средством обучения геометрии, являются, задачи. Поэтому представляется, что эстетическое воспитание в процессе обучения геометрии целесообразно проводить, опираясь, в первую очередь, именно на решение задач. Такая точка зрения согласуется с пересмотром характера действенности эстетического воспитания, происшедшим в последние годы. Большинство методистов и педагогов отказались от созерцательного взгляда на эстетическое воспитание в пользу его активно-действенного понимания. Проведение эстетического воспитания во взаимосвязи и единстве, с процессом обучения стало рассматриваться как необходимое условие успешного усвоения программного материала [3]. Говоря об эстетическом воспитании, подразумевают, что развитие творческо-логических способностей является его составной частью. Если осуществлять эстетическую интерпретацию математических понятий, то это будет способствовать:

–повышению интереса к предмету «Геометрия»;

–сознательному усвоению геометрического материала;

–психолого-педагогическому воздействию во благо всесторонне развитой личности;

–стимулированию творческого отношения к изучаемому предмету и к миру красоты.

Важнейший принцип эстетического воспитания или обучения – активность субъекта. Таким образом, роль эстетического воспитания и логики нацелена на пробуждение инициативы и предприимчивости обучающихся, на логическое развитие критического и образного мышления, на преодоление изживших себя иждивенческих настроений и всемерное возвышение нравственных понятий. Судьба каждого учащегося, вплетаясь в судьбу педагога, зависит от его собственных усилий, воли, стремлений, настойчивости, трудолюбия, а также укрепления нравственно-духовной стабильности в обществе.

Потверждение укрепления нравственно-духовной стабильности преподавания математики, в том числе, и ценности геометрических построений, их безупречной красоты, соблюдения эстетических приоритетов и т.д., безусловно оговаривает английский математик и философ Альфред Прейнсгейм в статье «Ценность и мнимая неценность математика» [4].

Многие профессиональные математики и философы настаивают на несомненности существования эстетического потенциала математики, хотя эти утверждения по большей части опираются лишь на эмоционально-чувственную или интеллектуально-интуитивную очевидность, поэтому у непрофессионалов возникает иногда сомнение или недоверие к подобным утверждениям. «…прекрасные черты» математики проявляются по-разному [5].

Традиционным методическим принципом преподавания геометрии постсоветского и настоящего времени в школах является принцип линейности изложения теории. Этот принцип предполагает последовательное изложение учебного материала, начиная с описания неопределяемых понятий, формулировки аксиом и строгого доказательства теорем и описания приложений соответствующей математической теории [6]. Значит, сущность планиметрических и стереометрических задач состоит в том, чтобы показать основы и принципы, делающие геометрию необходимой частью профессиональных знаний как важной составляющей человеческой культуры.

Полагаясь на идеи ученых по выявлению развития эстетического потенциала в обучении математике, попробуем раскрыть суть использования эстетики и логики на примере геометрического построения одной задачи.

Проблема эстетических и логических форм обучения как средства воспитания учебного процесса, имеет свои результаты, если в раскрытии потенциала логики можно определить значимость внедрения эстетики в процесс освоения предмета «Геометрия», познать красоту решения задач, выявить пути реализации практической работы «Одна задача – несколько решений» [7].

Путем формирования эстетических форм обучения может быть сконструировано звено по обобщению и закреплению знаний, умений и навыков на примере одной задачи. Таким образом, согласно практической деятельности обучающихся можно выявить те или иные звенья понимания геометрической простоты, то есть эстетический потенциал логического представления при решении одной задачи различными способами. Приведем пример.

Задача. Постройте квадрат *ABCD*, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых *k; n; t*.

Решение. I способ. Очевидно, что окружность с центром в *A* радиуса *AB* пересекает прямую *k* в точке *K* такой, что $\angle BKD$=45°(вписанный, равен половине угла *BAD*) – рис.1. Тогда из произвольной точки $K \in k$ проводим луч под углом 45°к этой прямой. Он пересечет *t* в вершине *D*. Серединный перпендикуляр к отрезку *KD* позволит получить вершину $A \in n$. Дальнейшее очевидно.

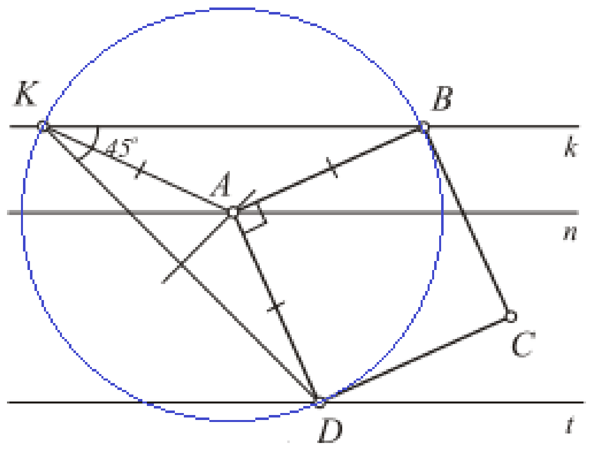


Рис. 1. *Наглядный чертеж логического построения*

II способ – классический. При повороте вокруг точки $A \in n$ на 90°, например, по часовой стрелке, вершина *B* перейдет в вершину *D*. Тогда прямая k_1– образ прямой *k* при таком повороте вокруг точки *A* – пересечет прямую *t* в вершине *D*.

Причем *AD* – сторона искомого квадрата – рис.2.

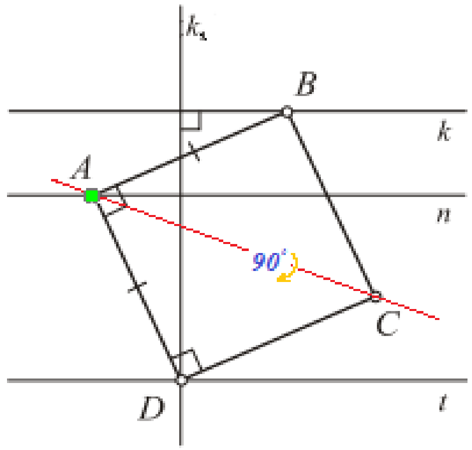


Рис. 2. *Классический чертеж логического построения*

III способ. Полагаясь на построение рисунков 1 и 2, внесем изменения в квадрат *ABCD* – дополнительные чертежи, что $\Delta ABE = \Delta DAF$ – по гипотенузе и острому углу. Отложив *AF=BE* (*BE* – расстояние между *к* и *n*) и проведя из *F* перпендикуляр к прямой *t*, получим вершину *D* – рис.3.

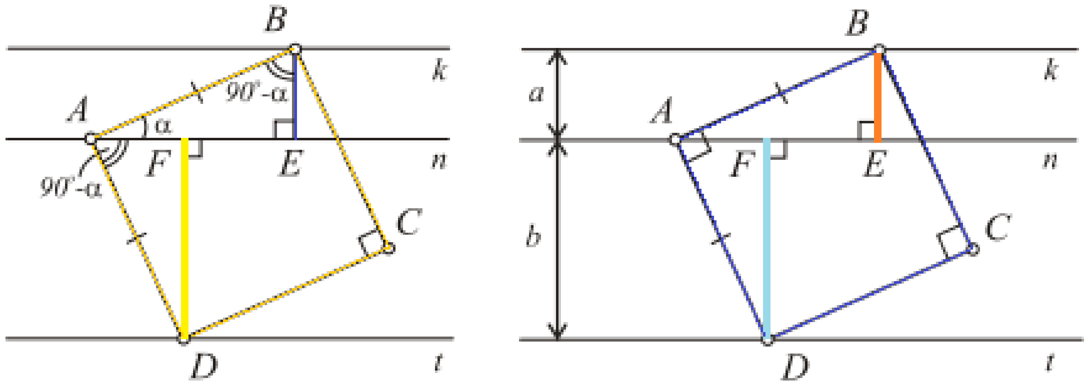


Рис. 3. Дополнительный чертеж логического построения

В каждом из предложенных доказательств одной задачи, получен один и тот же результат с позиций ее красоты, эстетической ценности, способствующий формированию понятий геометрической иллюстрации, которая является одной из важнейших составляющих в процессе логического представления познавательной деятельности обучающихся.

Итак, решение одной задачи несколькими наглядно-визуального представления геометрическими построениями показывает, что существенным компонентом форм эстетического обучения и логического рассуждения как средства воспитания учебного процесса по геометрии, является овладение знаниями, связанными с пониманием творческого подхода к красоте.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Фридман Л.М.* Как научиться решать задачи: пособие для учащихся / Л. М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1984.

2. *Даутов А.О. и др.* Решение математических задач с применением программных продуктов в процессе эстетического воспитания для студентов сельскохозяйственных специальностей // Поиск. – 2019, №3. С. 177-187.

3. *Фирстова Н.И.* Эстетическое воспитание при обучении математике в средней школе: Учебное пособие. – М.: Прометей, 2013. 128 с.

4. *Нысанбаев А Н.* Духовно-ценностный мир народа независимого Казахстана: проблемы и перспективы // Под общ. ред. З.К. Шаукеновой. – Алматы: Институт философии, политологии и религиоведения КН МОН РК, 2015. – 274 с.

5. *Далингер В.А., Даутов А.О.* Обучение математике с использованием информационно-коммуникационных технологий как средство развития мышления и эстетического воспитания учащихся //НОУ ВПО «Сибирский институт бизнеса и информационных технологий». – 2019, №2 (30). С. 11-16.

6. *Кожабаев К.Г.* О развитии мышления учащихся в процессе обучения математике // Современные наукоемкие технологии. –2016, №5, часть 3.

7. *A. Dautov, Al. Aktayeva, K. Kozhabaev* [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanio.ru/media/ 369619 – Aesthetic education: the Process of teaching mathematics with the Application of Information-Communicative Technologies.

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ НА УРОКАХ ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЗНАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

Кошелева Наталья Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование», Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, cavva01@mail.ru
Павлова Елена Сергеевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование», Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, pes1978_26@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются способы представления математической информации на уроках обобщения и систематизации знаний при изучении курса геометрии в общеобразовательной школе.*
Ключевые слова: *способы предоставления информации, графические схемы, таблицы.*

METHODS OF PRESENTING INFORMATION IN LESSONS GENERALIZATION AND SYSTEMATIZATION OF KNOWLEDGE IN THE STUDY OF GEOMETRY IN SCHOOL

Kosheleva Natalia Nikolaevna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, associate Professor of " Higher mathematics and mathematical education», Togliatti state University
Russia, Togliatti, cavva01@mail.ru
Pavlova Elena Sergeevna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, associate Professor of «Higher mathematics and mathematical education», Togliatti state University
Russia, Togliatti, pes1978_26@mail.ru

Abstract. *The article discusses the ways of presenting mathematical information in the lessons of generalization and systematization of knowledge in the study of geometry at school.*
Keywords: *methods of providing information, graphic schemes, tables.*

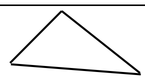
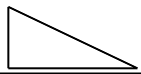
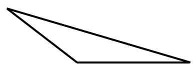
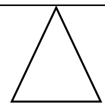
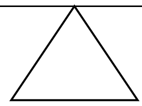
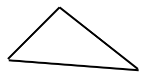
Обобщение и систематизация знаний обучающихся является важнейшей составляющей процесса обучения математике. В теории обучения математике авторы классификации системы уроков, выделяют тип урока, направленный на систематизацию и обобщение новых знаний по изучаемой теме. Без уроков обобщения и повторения изученного ранее, процесс усвоения школьниками нового учебного материала считается не полностью завершенным [6]. На данных уроках проговариваются и записываются ключевые понятия и законы, выявляются закономерности, основные теории и ведущие идеи, устанавливаются причинно-следственные связи и отношения между важнейшими явлениями, процессами, событиями, усваиваются широкие категории понятийных систем и наиболее общие закономерности [8]. Наиболее устоявшейся схемой получения знаний долгое время являлось трио *«Услышал – запомнил – пересказал».*

Системно-деятельностный подход рекомендует перейти к принципиально новому алгоритму, в котором главная роль отводится ученикам. Наиболее оптимальной систематизация знаний будет только тогда, когда начнет реализовываться по схеме: «самостоятельно добыл – осмыслил – запомнил –представил свою мысль – применил знание на практике» [9]. Для представления информации на уроках геометрии данного типа лучше всего подходят графики, сводные таблицы, алгоритмы, инфографические материалы, дающие наиболее общее и детализированное представление об изученной теме [6].

Рассмотрим различные способы представления учебной информации на обобщающих уроках повторения по геометрии, которые помогают представить изучаемую тему в виде системы знаний.

На уроках геометрии информацию очень удобно преподносить учащимся с помощью таблицы. Математическая информация, которая предлагается в таком виде имеет логичную структуру, понятна и очень наглядна для понимания, восприятия [2] . Пример представления информации в виде таблицы или схемы (Рис.1) на обобщающем уроке геометрии по теме "Треугольники".

Таблица 1. Пример табличного способа представления информации

		Тип треугольника	Особенности	Графическая интерпретация
По углам	1	Остроугольный треугольник	Все углы острые	
	2	Прямоугольный треугольник	Один угол равен 90^0	
	3	Тупоугольный треугольник	Один угол тупой	
По сторонам	1	Равнобедренный треугольник (Равносторонний треугольник)	Две стороны равны	
			Все стороны равны	
	2	Разносторонний	Все стороны имеют разные длины	

Денотатный граф предназначен для вычленения из текста существенных признаков ключевого понятия [3]. Он позволяет представить сложные темы с использованием ключевых слов. Например, на уроке геометрии при систематизации знаний по теме: "Признаки равенства треугольников" информацию можно представить в виде графа (Рис.2).

На данном графе в верхнем прямоугольнике основная тема - признаки равенства треугольников. В заголовках нижних прямоугольников - ключевые слова, которые раскрывают содержание основного понятия, в самих прямоугольниках - конкретизация каждой теоремы. Данная схема визуально раскрывает все три теоремы о равенстве треугольников, позволяет школьникам быстрее усвоить пройденный материал, искать общее и различия в трех признаках.

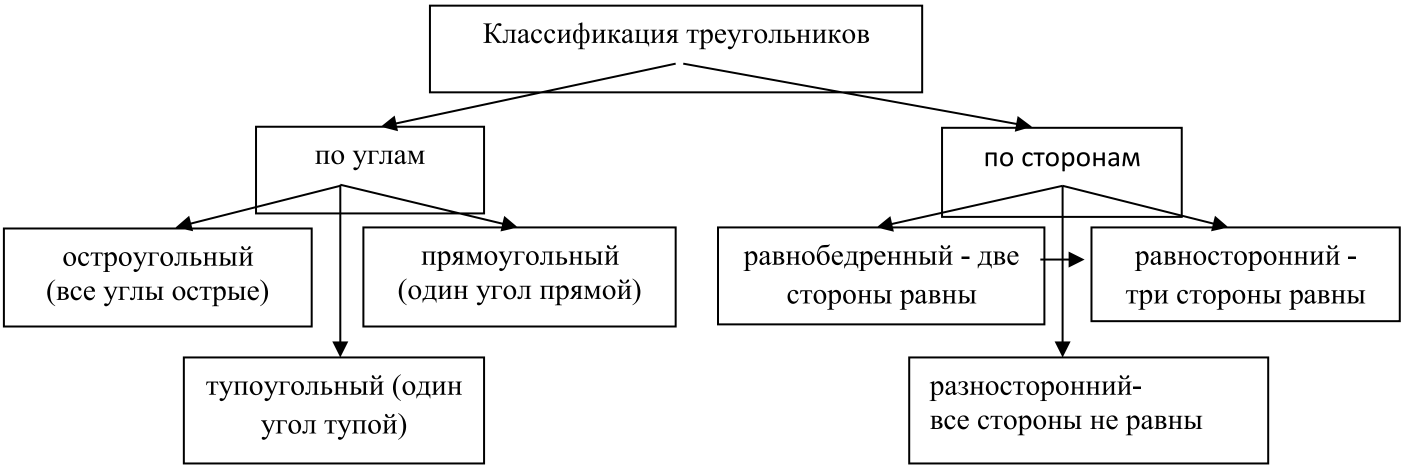


Рис 1. Пример графического способа представления информации

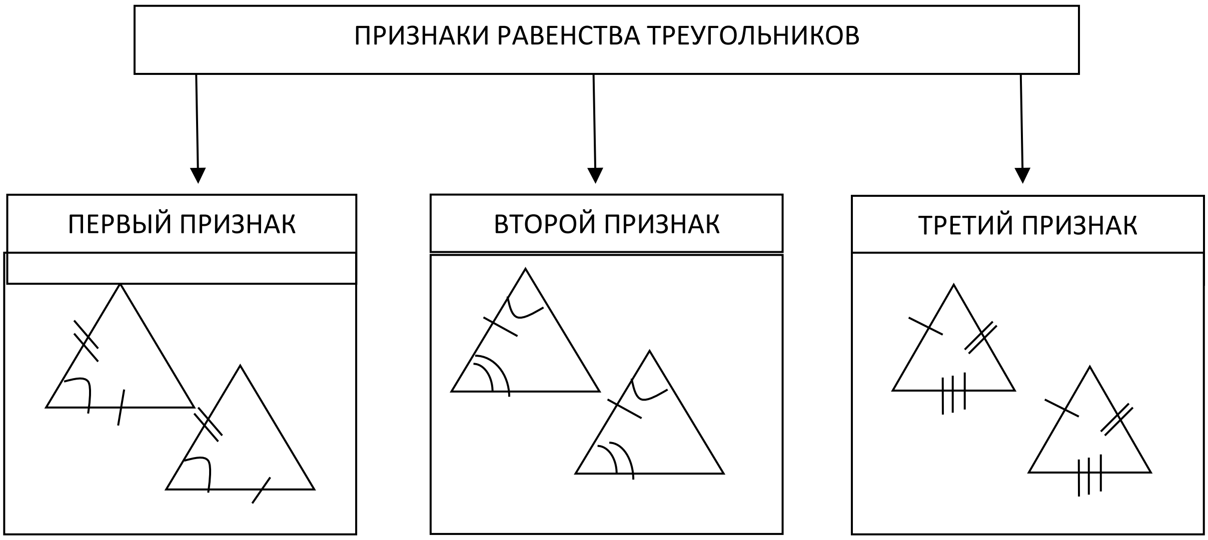


Рис 2. Пример денотатного графа

Графическая схема «Рыбьи косточки» помогает структурировать процесс обучения, идентифицировать возможные причины проблемы. Записи должны быть краткими, представлять собой ключевые слова или фразы, отражающие суть явления [3,4]. Например, такая схема позволяет отличать многогранники от круглых тел. Применима на первых уроках стереометрии.

Графики, схемы, таблицы выгодно отличаются от других способов подачи информации на уроках. Они более структурированы и систематизированы, делают информацию наглядной, доступной для восприятия учащимися и зрительного запоминания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Атанасян, Л. С.* Геометрия 7-9. — 13-е изд. [Текст] / Л. С. Атанасян, В, Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина. - М.: Просвещение, 2003.

2. *Блох А.Я., Гусев В.А. и др.* Методика преподавания в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 2007.
3. *Интернет-обучение:* технологии педагогического дизайна / Под редакцией кандидата педагогических наук М. В. Моисеевой. – М.: Издательский дом «Камерон», 2004. 224 с.
4. *Култаева Д.Ч.* Использование дидактических материалов при обучении математике для развития математических способностей учащихся // Проблемы педагогики, 2016. № 2 (13). С. 36-40.
5. *Мордкович А.Г.* О некоторых проблемах школьного математического образования / Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. Красноярск, 14– 15 ноября 2013 г. / отв.ред. Л.В. Шкерина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. университет им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2013.
6. *Оганесян В.А., Колягин Ю.П. и др.* Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. – М.: Просвещение, 1990.
7. *Самостоятельная работа учащихся*. Сборник. / Под. ред. Б.П. Есипова - М. : ВЛАДОС, 1995. - 544с.
8. *Темербекова, А.А.* Методика обучения математике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – СПб : Лань, 2015. – 512 с.
9. *Усова, А.В.* Формирование у учащихся общих учебно – познавательных умений в процессе изучения предметов естественного цикла. - Челябинск, 1997.- 533с.

О СООТНОШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ТЕСТАХ ОГЭ И ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Липилина Вера Васильевна
кандидат педагогических наук, доцент
Тольяттинский государственный университет
Россия, Самара, lipil@rambler.ru

Аннотация. *В данной статье анализируются результаты ОГЭ и ЕГЭ в Самаре и Самарской области в 2019 году. Анализ проводится в соответствии с методическими традициями предмета и особенностями экзаменационной модели по предмету (например, по группам заданий одинаковой формы, по видам деятельности, по тематическим разделам).*
Ключевые слова: *ГИА, результаты, геометрические и алгебраические задачи, изображение пространственных фигур, геометрическая интуиция.*

ON THE CORRELATION OF GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROBLEMS IN THE TESTS OF THE UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

Lipilina Vera Vasilevna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor
Togliatti state University
Russia, Samara, lipil@rambler.ru

Abstract. *The material in this article may be useful to teachers of mathematics in preparing students for the GIA. The analysis is carried out in accordance with the methodological traditions of the subject and the features of the examination model for the subject (for example, for groups of tasks of the same form, for types of activities, for thematic sections).*

Keywords: *GIA, results, geometric and algebraic problems, image of spatial figures, geometric intuition.*

Анализируя данные о результатах ОГЭ по математике учащихся 9 классов можно сделать следующие выводы: доля участников, не преодолевших порог в 2019 году, увеличилась по сравнению с показателем 2018 года (на 1,0%); сравнивая результаты 2018 и 2019 годов, можно отметить, что в 2019 году сократилась доля участников, которые получили оценки «4» и «5».

Таблица 1

	2018 г.		2019 г.	
	чел.	%	чел.	%
Получили «2»	685	2,6	1014	3,6
Получили «3»	8684	32,5	11298	40,4
Получили «4»	12056	45,2	11599	41,5
Получили «5»	5276	19,8	4062	14,5

Учащиеся более успешно, чем в прошлые годы, решают задачи с реальным содержанием, вероятностно-статистические задачи. В последнее время учителями мало уделяется внимания отработке навыков решения заданий на последовательности и прогрессии (решают чуть более 21 % учащихся), а эти навыки используются в дальнейшем при решении текстовых задач с экономическим содержанием, логических задач в ЕГЭ. По-прежнему, остаются проблемы с геометрическими заданиями.

Краткая характеристика КИМ по предмету

Первое задание во всех вариантах на нахождение значения числового выражения, действия с дробями вызвало затруднение у почти 20 % школьников: $\left(\frac{1}{13}-2\frac{3}{4}\right)\cdot 26$, учащиеся не умеют привести дроби к одному виду, например, от смешанной к неправильной, или привести к одинаковому знаменателю. *Со вторым заданием* на оценивание оптимального выбора в реальной ситуации 17,5 % не справились. *Третье задание* на умение ориентироваться на координатной прямой и поиск нужной точки также оказалось несложным.

В четвертом задании проверялось умение выполнять преобразования алгебраических выражений вида $\frac{(2\sqrt{10})^2}{160}$, ошибки были допущены из-за незнания свойств степени, 26,4% не выполнили это задание. *Задание пятое* на умение читать графики и диаграммы реальных зависимостей, видеть зависимости между величинами, с ним справилось большинство девятиклассников, затруднения вызвало это задание у 17,7%. В *шестом задании* вида: решите уравнение $x^2 = 5x$, в ответ запишите меньший из корней. Основными ошибками было сокращение на x и потеря одного из корней, как раз меньшего. Средний процент выполнения, к сожалению 56,4 %. *Седьмое задание*, несмотря на то, что оно было связано с реальными свойствами рассматриваемых объектов, вызвало затруднение у 24,1 % школьников, которые недостаточно владеют понятием проценты. *В восьмом задании* на анализ реальных числовых данных, представленных в таблицах, диаграммах проблемы возникли у 24,2% девятиклассников. Возможно, ошибки допускались из-за недостаточно четкого изображения диаграммы. *Девятая вероятностная задача* была несложной, на применение классической формулы вычисления вероятности, однако 16,6 % школьников с этой задачей не справились. Ситуация с вероятностными задачами повторяется из года в год. В ближайшее время предполагается усиление стохастической линии и поэтому учителям необходимо уделять больше внимания подготовке к решению задач такого типа, усвоению теории вероятностей.

В десятом задании проверялось умение строить и читать графики функций, чем 35,8 % школьников этим умением не владеют. Это больше, чем в прошлом году. Недостаточно сформирована функциональная грамотность.

Одиннадцатое задание было на прогрессии или последовательность, ошибки здесь были в основном вычислительного характера. Не справились 21,2% девятиклассников. Выполнение *двенадцатого задания*, где требовалось найти значение алгебраического выражения при заданном значении параметра, вызвало большие затруднения у 54,4% учащихся, ошибки заключались в основном в незнании формул сокращенного умножения, в выполнении тождественных преобразований и вычислительных ошибках при подстановке значения параметра.

При выполнении практических расчетов по формулам в *тринадцатом задании* допускались вычислительные ошибки или наблюдалось неумение выразить искомую переменную. Кроме того с этой задачей связано большое недоразумение: ключи ответов этой задачи в четырех вариантах были неверными! *Задание № 14* на решение системы неравенств выполнили лишь около 60% учащихся, на 10% меньше, чем в прошлом году. Для того чтобы выделить правильный ответ, необходимо было решить систему, а не просто выбрать номер ответа. Ошибки были не только в неверном представлении интервала решения, но и в неумении решать системы неравенств.

Наибольшие затруднения вызвали *геометрические задачи* и в первой части, и во второй. Для получения тройки необходимо было решить не менее двух геометрических задач первой части.

Задача № 15 описывала реальную ситуацию на языке геометрии, необходимо было к ней применить известные геометрические понятия и теоремы. Справились 78,9 % у школьников.

В задаче № 16 необходимо было применить элементарные знания тригонометрических соотношений в треугольнике, свойства геометрических фигур. Справились 71,4%, лучший результат, чем в прошлом году.

Задача №17. Периметр треугольника равен 56, одна из сторон равна 19, а радиус вписанной в него окружности равен 5. Найдите площадь этого треугольника. Эта задача вызвала серьезные затруднения у 61,6%

школьников, скорее всего из-за недостаточно сформированных умений применять знания к решению таких задач.

Несколько провокационным было условие *задачи №18:* Основания трапеции равны 3 и 9, а высота равна 5. Найдите среднюю линию этой трапеции. Здесь лишняя данная величина высоты. Справились 78,3 % школьников.

В девятнадцатой задаче геометрическая фигура могла быть изображена на клетчатой бумаге. С нею справились большинство 95,9% школьников.

В задаче № 20 при выборе верных рассуждений ошибки допускались в силу не владения основными понятиями планиметрии. Только 50,3 % выполнили это задание правильно.

Необходимо повышенное внимание к геометрии, к теоретической планиметрии в школе не только учеников, но в первую очередь учителей!

К решению заданий второй части «Алгебра» приступали не более 25 % школьников.

В 21 задаче: Решите уравнение $x\left(x^2+2x+1\right)=6(x+1)$. Ошибки допускались из-за неумения раскладывать на множители многочлен в уравнении, потере корней. Правильно выполнили это задание 18,6% школьников.

Проблемы при решении *задания № 22* заключались в неумении учащихся строить простейшие математические модели по тексту задачи, в неумении вычислить дискриминант квадратного уравнения разложением на простые множители, в неумении исследовать и отбирать корни, удовлетворяющие условию задачи. Только 7,5 % учащихся справились с этой задачей. Текстовые задачи также есть в первой части тестов ЕГЭ.

Задание № 23 проверяло умение строить графики элементарных функций с предварительным исследованием их свойств. Если на графике отсутствовали выколотые точки, график признавался построенным неверно.

С этим заданием справились менее 6,3 % учащихся. Умение решать такую несложную задачу с параметром, показывает математическую грамотность школьника.

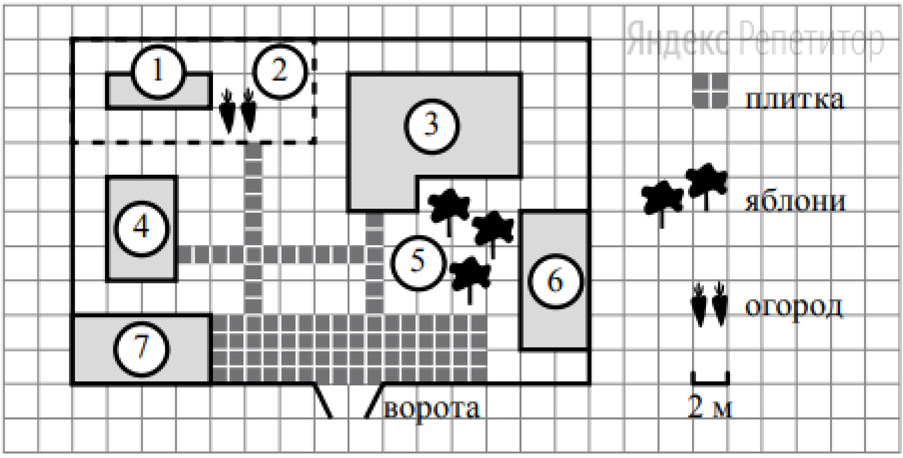
Задачи модуля «Геометрия» № 24-26 решили не более 28% школьников. Причем, если задача №24 в основном была решена приступившими к её решению (22,1 %), то задача №25, требующая логической грамотности и доказательных рассуждений, вызвала большие затруднения, ее решили лишь 6,3 % учащихся.

Задача №26 требовала, конечно, достаточно развитого логического мышления, навыков и умений поиска нестандартных приемов. Справились 0,4 % девятиклассников.

Таким образом, средний балл за ОГЭ по математике в 2019 году – 3,7.

В контрольно-измерительных материалах (КИМ) ОГЭ 2020 по математике включен новый блок заданий (1-5), ориентированных на практическое применение изученного материала. Все эти задания раньше были распределены по блоку №1, а в 2020 году были собраны в один специальный раздел. Поэтому средний балл в 2020 году может оказаться еще ниже.

В первой части заданий (их всего 20) первые 5 будут заданиями нового формата. На эти 5 заданий будет предложена одна схема местности с подробным описанием. Прочитайте внимательно текст и выполните задание. *На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево, 33-й Поперечный пер., д. 1313 (сторона каждой клетки на плане равна 22 м).*



Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота. При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7.7. Площадь, занятая гаражом, равна 3232 кв. м. Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2).2). Перед жилым домом имеются яблоневые посадки. Все дорожки внутри участка имеют ширину 11 м и вымощены тротуарной плиткой размером 11м×1×1м . Между баней и гаражом имеется площадка площадью 6464 кв. м, вымощенная такой же плиткой. К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

1. Задание направленно на ориентирование по план-схеме.

2. Задание в данном примере потребует от вас посчитать, сколько упаковок плиток вам нужно будет купить. Для этого нужно будет сосчитать кол-во плиток на план схеме, а затем разделить на кол-во плиток, которое вмещается в одну упаковку. Если получится дробное значение, то необходимо прибавить к целому числу единицу.

3. Найти площадь какого-либо строения. Площади 1,4,6,7 зданий находятся путем перемножения ширины и длины. Площадь 3 здания находится путем вычисления площади 2-х прямоугольников, а затем эти площади суммируются. В таком задании важно перевести площадь в клетках в площадь в метрах. Или сначала перевести длину и ширину в метры, а затем получить готовый ответ.

4. Найти ближайшее расстояние между 2-мя зданиями. Например, расстояние от 1 здания до 4 составляет 4 метра. Если нам требуется узнать расстояние от 7 до 3 здания, то мы можем сделать это 2-мя способами: измерить длину линейкой или воспользоваться теоремой Пифагора (представив треугольник). Для гурманов можно ввести систему координат и найти длину вектора, но это конечно явно лишнее.

5. Арифметическое задание, выполняется в несколько действий. Требуется рассчитать, какая покупка будет наиболее выгодной.

Процент успешного выполнения заданий данного типа составляет около 50%, исходя из данных сайтов, на которых есть тренировочные тесты.

Учитывая невысокий процент и новизну этих заданий, необходимо усилить внимание к задачам реального, практического содержания. Среди задач практико-ориентированного блока могут быть задачи и более сложные.

Например:1.4. Хозяин дома для строительства гаража взял в банке кредит 210 000 руб. на год под 12% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

1.5. Хозяин дома после выплаты кредита решил открыть вклад, чтобы оплатить обучение сына в вузе через 3 года. Он положил в банк 1 млн. руб. под 5% годовых. Какую сумму сможет забрать хозяин дома через 3 года? А это уже задачи экономического содержания, подготавливающие к решению аналогичных задач в тестах ЕГЭ (№17).

Краткая характеристика результатов решения геометрических задач ЕГЭ в 2019 году

Задание	% выполнявших	% выполнения
Задания базового уровня первой части, уровень усвоения 50%		
3	88	94,3
6	65	73,5
8	57	48,3
Задания повышенного уровня		
14	16	
16	2,5	

Задание №3: проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, знание геометрических фактов и понятий умение вычислять длину отрезка на клетчатой бумаге. *На клетчатой бумаге с размером клетки1х1изображён треугольник ABC . Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B .*

Задание №6: проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами - на применение свойств описанного четырехугольника. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 98 градусов, угол CAD равен 44 градуса. Найдите угол ABD.*

Ответ дать в градусах.

Задание № 8: проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами - на нахождение объемов конуса и цилиндра с равными радиусами основания и высотами, применение формулы боковой поверхности. *Цилиндр и конус имеют общие основания и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна* $3\sqrt{2}$. *Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.*

Задание № 14: На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды ABCD отмечены точки M и N соответственно, причём AM:MB = CN:NB =1:2. Точки P и Q - середины рёбер DA и DC соответственно. а) Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости. б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

*Задание №16:*Точка E – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O. а) Докажите, что CO=KO.б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD,если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции ABCD.

Результаты профильного экзамена указывают на необходимость дальнейшего развития геометрических заданий, стимулирующих доказательно-логическую линию школьной математики. Анализируя результаты решения геометрических заданий с кратким ответом, следует отметить, что выпускники хорошо справились с задачей 3 (94,3%), и хуже выполнили стереометрическую задачу 8 (48,3%). По сравнению с прошлым годом разрыв в результатах выполнения планиметрических и стереометрических задач существенно сократился. По-прежнему остается низким уровень стереометрической подготовки выпускников.

МЕТОДИЧЕСКИЙ И ЭСТЕТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗАДАЧИ ОБ ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Мельников Роман Анатольевич
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,
Россия, г. Елец, roman_elets_08@mail.ru

Сафронова Татьяна Михайловна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,
Россия, г. Елец, stm657@mail.ru

Черноусова Наталия Вячеславовна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,
Россия, г. Елец, chernousovi@mail.ru

Аннотация. *В статье раскрыт методический и эстетический потенциал задачи об окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, выполнен анализ содержания школьных учебников геометрии, рассмотрены актуальные проблемы, связанные с методическими подходами к решению геометрических задач.*
Ключевые слова: *окружность, прямоугольный треугольник, ромбоид, школьный курс математики.*

METHODOLOGICAL AND AESTHETIC POTENTIAL OF THE PROBLEM ABOUT THE CIRCLE IN THE RECTANGULAR TRIANGLE

Melnikov Roman Anatolyevich
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Mathematics and Methods of its Teaching Department, Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets, roman_elets_08@mail.ru

Safronova Tatyana Mikhailovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Mathematics and Methods of its Teaching Department, Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets, stm657@mail.ru

Chernousova Natalia Vyacheslavovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Mathematics and Methods of its Teaching Department, Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets, chernousovi@mail.ru

Abstract. *The article discloses the methodological and aesthetic potential of the problem of a circle inscribed in a right triangle, analyzes the contents of school geometry textbooks, discusses current issues related to methodological approaches to solving geometric problems.*
Keywords: *circle, right triangle, rhomboid, school math course.*

Успех школьного математического образования зависит от многих факторов, одним из которых, достаточно важных на наш взгляд, является содержание образования, а конкретнее, содержание и структура школьных учебников.

В настоящее время в российских школах в 7-9 классах наиболее распространены учебники геометрии Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, И.Ф. Шарыгина. Отметим, что достаточно широко используются и другие учебники: А.В. Берсенева, Н.В. Сафоновой; И.М. Смирновой, В.А. Смирнова; С.А. Козлова и др; под редакцией В.А. Садовничего; под редакцией В.Е. Подольского. Все названные учебные пособия соответствуют федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования и рекомендованы к использованию Министерством просвещения России – включены в Федеральный перечень учебников, однако при этом вызывают неоднозначное отношение у ученых, методистов и школьных учителей математики. Одни дают положительные отзывы, отмечая найденные подходы авторов к изложению геометрического материала, другие – диаметрально противоположно считают эти же учебники совершенно непригодными для школы.

Одних исследователей привлекают возможности для развития мышления учащихся, других – предложенный строгий аксиоматический подход.

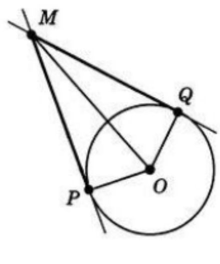
Выполняя анализ содержания указанных выше наиболее распространенных школьных учебников геометрии, авторы настоящей статьи задались целью исследовать конкретный и достаточно важный вопрос – предлагается ли в учебниках рассмотрение задачи об окружности, вписанной в прямоугольный треугольник (*), а также показать методический и эстетический потенциал этой задачи. Представим результаты сравнительного анализа в виде следующей таблицы (Табл. 1).

Таблица 1

Сравнительный анализ учебников геометрии для учащихся общеобразовательных школ

Учебник для 7-9 классов «Геометрия» [1]	Учебник для 7-9 классов «Геометрия» [5]	Учебник для 7-9 классов «Геометрия» [6]
Теоретический материал и вводимые понятия, имеющие отношение к задаче (*), последовательность их изучения		
7 класс: - треугольник; - биссектриса угла треугольника; - окружность; - прямоугольный треугольник. 8 класс: - касательная к окружности; - свойства биссектрисы угла; - вписанная окружность. 9 класс: - окружность, вписанная в правильный многоугольник; -формулы для вычисления радиуса вписанной окружности ($S = \frac{1}{2}Pr;\ r = Rcos\,\frac{180^0}{n}$).	7 класс: - треугольник; - биссектриса угла; - биссектриса угла треугольника; - прямоугольный треугольник; - окружность; - окружность, вписанная в треугольник; 9 класс: - формула для вычисления радиуса вписанной окружности треугольника ($r = \frac{2S}{a+b+c}$)	7 класс: - треугольник; - окружность; - биссектриса угла треугольника; - прямоугольный треугольник; - касательная к окружности. 8 класс: - касательные к окружности, выходящие из одной точки; -вписанная окружность треугольника.
Теоремы и утверждения, имеющие отношение к задаче (*), последовательность их изучения		
8 класс: - «*Теорема о свойстве касательной к окружности.* Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания» [1]. - доказывается утверждение: «Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с	7 класс: - «*Теорема.* Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис» [5].	7 класс: - «*Теорема 3.8 (характеристическое свойство касательной к окружности).* Через точку окружности проходит единственная прямая, касающаяся окружности. Эта прямая перпендикулярна соответствующему радиусу» [6]. - После решения задачи № 6 из пункта «Построение

прямой, проходящей через эту точку и центр окружности» [1]. - «*Теорема обратная теореме о свойстве касательной (признак касательной)*» [1]. - «*Теорема о биссектрисе угла*. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон» [1]. - «*Следствие 1 из теоремы:* геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри неразвернутого угла и равноудаленных от сторон угла, является биссектрисами этого угла» [1]. - «*Следствие 2 из теоремы:* биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке» [1]. - точка пересечения биссектрис называется замечательной точкой. - «*Теорема об окружности, вписанной в треугольник*. В любой треугольник можно вписать окружность» [1].		касательной к окружности»: «Дана окружность, у которой указан центр, и точка A вне этой окружности. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся данной окружности» [6] дается утверждение: «касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны» [6]. 8 класс: - «*Теорема 5.11 (существование вписанной окружности).* У каждого треугольника существует единственная вписанная окружность» [6].
I.Замечания		
Не даются определения понятий «центр описанной окружности», «радиус описанной окружности», понятия поясняются с помощью рисунка в ходе доказательства теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и утверждения о том, что в треугольник можно вписать только одну окружность.		8 класс: В ходе доказательства теоремы 5.11 сообщается: «Центр любой окружности, вписанной в угол ABC, лежит на его биссектрисе. Две … биссектрисы пересекаются в точке …, которая равноудалена от сторон треугольника ABC и является центром вписанной в него окружности» [6].
II. Наличие формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$, ее вывод.		
нет	нет	Есть формула в тексте задачи № 855.
III. Наличие задачи (*)		
Нет	9 класс: Задача № 47 к пункту «Формулы для радиусов вписанной и описанной	8 класс: Задача № 855 к пункту «Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора»:

	окружностей треугольника»: «Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой» [5].	«Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле: $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$» [6].
IV. «Полезные» задачи из учебников		
8 класс: Задачи к пункту «Описанная окружность»: «№ 693. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 *см*, радиус равен 4 *см*; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 *см* и 12 *см*» [1]. «№ 694. Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов равна m» [1].	7 класс: Задача № 16 (1) к пункту «Касательная к окружности». «Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных MP и MQ равны» [5].  	8 класс: Задача № 632 к пункту «Вписанная окружность треугольника»: «Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен p-c, а радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжения катетов, равен p, где p – полупериметр, c – гипотенуза треугольника.

Авторы статьи считают, что вопрос о нахождении радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, следует рассматривать, как теорему, а не как задачу, мелькнувшую в череде решаемых задач.

Раскроем методический потенциал задачи (*):

1. Знание факта, что центр окружности, вписанной в любой треугольник, находится в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, раскрывает потенциал понятия «биссектриса» внутреннего угла треугольника. Отметим что, название этой точки – «инцентр» («ин» означает «внутри»), в настоящее время вышло из обращения. Эта точка всегда находится внутри треугольника, в отличие от центра описанной около треугольника окружности, которая может находиться ещё и вне треугольника, а также на одной из его сторон (в случае прямоугольного треугольника).

2. Знание формулы $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ и способа её доказательства.

3. Если из инцентра провести три радиуса r, то образуются три четырехугольника. Каждый из радиусов будет перпендикулярен соответствующей стороне треугольника в силу того, что стороны треугольника

являются касательными к окружности, вписанной в него (прослеживается связь с темами «Касательная к окружности», «Четырёхугольники»). Полученные четырехугольники обладают тем свойством, что у каждого из них есть по две пары смежных равных сторон. Один из них, очевидно, окажется квадратом, а два других представляют особый интерес (см. рис.1). Каждый из двух оставшихся четырёхугольников называется ромбоидом. Связь этой задачи с понятием «ромбоид» раскрывает её эстетический потенциал.

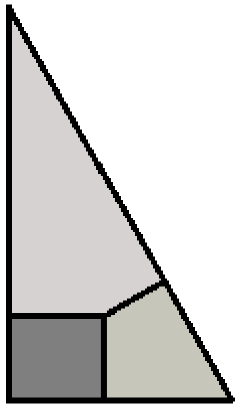


Рис.1

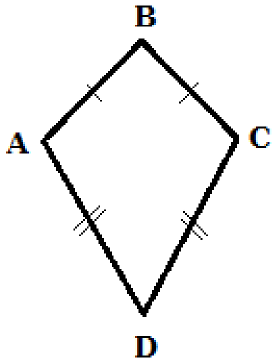


Рис.2

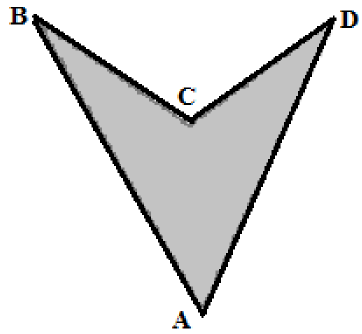


Рис.3

Теоретический материал, связанный с понятием «ромбоид» не входит в содержание ни одного из современных школьных учебников геометрии, хотя не секрет, что составители заданий профильного уровня ЕГЭ по математике неоднократно предлагали задачи, решение которых опирается на знание свойств этой фигуры.

«*Ромбоидом* (*дельтоидом*) называется четырёхугольник, который имеет две пары равных смежных сторон. *Иначе*: ромбоидом называется четырехугольник, у которого две стороны, прилежащие к одной вершине, попарно равны»[4, с.254](см. рис. 2).

Следует подчеркнуть, что ромбоид может быть выпуклым (рис. 2) или невыпуклым (рис. 3).

Приведём примеры задач, при решении которых придётся иметь дело с прямоугольным треугольником и/или ромбоидом.

Задача 1.Дан треугольник, стороны которого $a{=}4\sqrt{3}, \mathrm{b}=4, \mathrm{c}=8$. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в этот треугольник, к радиусу окружности, описанной около ромбоида, главная диагональ которого является большой частью одной из биссектрис этого треугольника (см. рис.4).

Задача 2. «В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *BM* и *CN* . Оказалось, что точки *B, C, M* и *N* лежат на одной окружности. а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный. б) Пусть *P* — точка пересечения биссектрис треугольника *ABC* . Найдите площадь четырёхугольника *AMPN* , если *MN* :*BC = 2* : *5*, а *BN =14*»[3].

Задача 3.«В основании правильной пирамиды *PABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру. а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°. б) Найдите площадь сечения пирамиды» [2]. В условии задачи 2 говорится о произвольном треугольнике, поэтому, начав анализировать данные, учащиеся выполнят построения, приводящие к решению пункта а) задачи 2 (см. рис. 5).

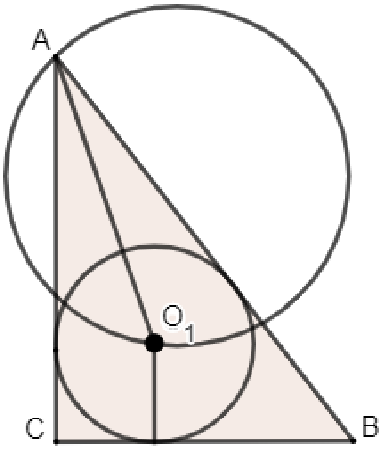


Рис. 4.

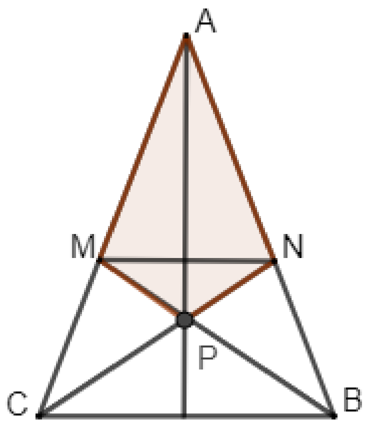


Рис.5

Доказательство основано на равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу (дугу *MN*). Но для решения пункта б) рациональнее перерисовать рисунок, чтобы воспользоваться доказанным в пункте а) – треугольник АВС равнобедренный (см. рис. 5). И тогда решение задачи сводится к вычислению площади ромбоида *AMPN*.

Возможно ли решить задачи без этого материала? Конечно, можно. Так, например, большинство школьников решают задачу 3, выражая площадь четырёхугольника *AMPN* либо как сумму площадей треугольников *MAN* и *MPN*, либо как разность площадей треугольника *ABC* и многоугольника *CMPNB*. Однако, это приводит к нерациональному распределению времени на ЕГЭ в связи с долгими вычислительными шагами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Атанасян, Л.С.* Геометрия. 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2018.- 384.
2. *ЕГЭ 2019* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru.
3. *ЕГЭ 2019* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://yagubov.ru/ege.
4. *Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.* Совершенствование математической подготовки будущих учителей математики при изучении элементарной геометрии // Сборник трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 27-29 ноября 2014 г. Под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2014. – С. 254-257.
5. *Погорелов, А.В.* Геометрия. 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2019.- 240.
6. *Шарыгин, И.Ф.* Геометрия. 7-9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Дрофа, 2018.- 464.

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Палфёрова Сабина Шехшанатовна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинский государственный университет, Sabina.palf@mail.ru

Кузнецова Ольга Александровна
кандидат педагогических наук, доцент
кафедры «Высшая математика и математическое образование»,
Тольяттинский государственный университет, oly--2009@yandex.ru

Крылова Светлана Александровна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование»,
Тольяттинский государственный университет,
Россия, г. Тольятти, svetlanatlt2008@yandex.ru

Аннотация. *В статье раскрывается значимость организации проектной деятельности учащихся при обучении геометрии в общеобразовательной школе.*
Ключевые слова: *проект, проектная деятельность, геометрия.*

PROJECT ACTIVITY OF STUDENTS IN TRAINING GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOL

Palfyrova Sabina Shehshanatova
candidate of pedagogical sciences, associate professor, associate professor
«Higher mathematics and mathematical education»,
Togliatti State University, Sabina.palf@mail.ru
Kuznetsova Olga Alexandrovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Engineering,
Togliatti State University, oly--2009@yandex.ru
Krylova Svetlana Alexandrovna
candidate of pedagogical sciences, associate professor, associate professor
«Higher mathematics and mathematical education»,
Togliatti State University, *Russia, Togliatti*, svetlanatlt2008@yandex.ru

Abstract. *The article reveals the importance of organizing students' project activities when teaching geometry in secondary schools.*
Keywords: *project, project activity, geometry.*

В Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года отмечено, что «в основу развития системы образования должны быть положены такие принципы проектной деятельности, реализованные в приоритетном национальном проекте "Образование", как открытость образования к внешним запросам, применение проектных методов…» [1].

Проектные технологии на уроках и внеурочной деятельности представлены в работе [6]. Работа над проектами «позволяет обучить учащихся формулировать проблему, находя пути ее решения, находить и ранжировать информацию, применять полученную информацию для решения поставленных задач, позволяет развивать исследовательские умения, коммуникабельность, сотрудничество, способствует повышению личной уверенности каждого участника проектного обучения» [7].

Осуществляя проектную деятельность, реализуется совместная работа обучающихся, «целью которой является объединение всего коллектива, а именно: образование между участниками проекта отношения взаимной ответственности; сознательное использование различных форм и способов представления данных; умение наглядно представлять имеющийся материал и организовать продуктивную содержательную коммуникацию; контроль за деятельностью выполнения проекта осуществляется участниками проекта» [8].

Содержание школьного курса геометрии, в полной мере предоставляет возможности для проектного метода обучения. Примеры различных проектов по геометрии для обучающихся 7-11 классов представлены в научно-методической литературе. Отметим некоторые из них. В статье Е.Ю. Куприенко [3] дана характеристика историко-методологических проектов и разработаны проекты «Задача Кеплера» и «Квадратура параболы по Архимеду» для учащихся старших классов. В бакалаврской работе М.В. Николаевой [5], выполненной под руководством Р.А. Утеевой в 2016 г., разработаны проекты по теме «Вписанные и описанные окружности»: *«Теорема Птолемея»; «Замечательные точки треугольника», мини-проект «Точка Торричелли»;* практико-ориентированный проект «*Центроискатель*».

В Тольяттинском государственном университете, дисциплина «Проектная деятельность» включена в учебные планы бакалавров 1-4 курсов [2], а для магистров математического образования разработан специальный курс [4]. В докладе будут представлены примеры проектов по геометрии для старшеклассников и студентов 1-2 курсов в рамках дисциплины «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации* на период до 2020 года от 17.11.2008, утв. расп. прав. РФ. – *Режим доступа*: http://www.smolin.ru/odv/reference-source/pdf/progr-2020_total.pdf.

2. *Кузнецова О.А.* О средствах и методах формирования математической культуры у магистров математического образования /Математика и математическое образование: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура».–Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. С. 98-103.

3. *Куприенко Е.Ю.* Историко-методологические проекты по геометрии для учащихся старших классов / Геометрия и геометрическое образование: сб. трудов Межд. науч. конф. «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 70-летию В.А. Гусева), 22-25 ноября 2012 г. /под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2012. – С. 253-256.

4. *Куприенко Е.Ю.* Курс по выбору «Методика организации проектной деятельности учащихся по математике» для магистров математического образования / Математика и

математическое образование: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» −Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. С. 136-141.
5. *Николаева М. В.* Методика организации проектной деятельности учащихся при изучении темы "Вписанные и описанные окружности" в курсе геометрии основной школы: Выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа). Тольятти: ТГУ, 2016. http://hdl.handle.net/123456789/749 Режим доступа: https://dspace.tltsu.ru/
6. *Новикова Т.* Проектные технологии на уроках и внеурочной деятельности// Народное образование. – 2000.- № 7.
7. *Пахомова Н.Ю.* Метод учебного проекта в образовательном учреждении: пос. для учителей и студентов педагогических вузов/ Н.Ю. Пахомова. − М.: АРКТИ, 2003. – 192 с.
8. *Человек, субъект, личность в современной психологии*// Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию А.В. Брушлинского: в 3-х томах/ Ответственные редакторы: А.Л. Журавлев, Е.А. Сергиенко. 2013. Том 2. – *Режим доступа*: http://ipras.ru/engine/documents/document5484.pdf.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕТРАДИЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Панишева Ольга Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры
высшей математики и методики преподавания математики,
Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко,
Украина, г. Луганск, panisheva-ov@mail.ru

Овчинникова Марина Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике, Гуманитарно-педагогическая академия (филиал)
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
Россия, г. Ялта, m_ovchinnikova@ukr.net

Аннотация. *В статье описана методика использования нетрадиционных заданий, используемых на разных этапах знакомства обучающихся с формулами площадей геометрических фигур. Задания составлены с учетом рекомендаций психологов по улучшению запоминания учебного материала и повышению эффективности работы мозга и направлены на предотвращение возникновения типичных ошибок.*
Ключевые слова: *площади геометрических фигур, нетрадиционные задания, образная память.*

USING OF NON-TRADITIONAL TASKS BY STUDYING AREAS OF FLAT FIGURES

Panisheva Olga Viktorovna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Methodology of methods of teaching Mathematics
T. Shevchenko National University
Ukraine, Lugansk, panisheva-ov@mail.ru

Ovchinnikova Marina Viktorovna
candidate of pedagogical sciences, associate professor, associate professor of Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics
Academy of the Humanities and Pedagogics (branch) V. I.Vernadsky Crimean Federal University
Russia, Yalta, m_ovchinnikova@ukr.net

Abstract. *The article describes the methodology of using non-traditional tasks used at different stages of students' acquaintance with the area formulas of geometric shapes. The tasks are made taking into account the recommendations of psychologists to improve the memorization of educational material and increase the efficiency of the brain and are aimed at preventing the occurrence of typical errors.*
Key words: *squares of geometric figures, unconventional tasks, figurative memory.*

Геометрические знания и умения, геометрическая культура и развитие являются сегодня профессионально значимыми для многих современных специальностей, для дизайнеров и конструкторов, для рабочих и ученых. Целевой потенциал геометрии, по мнению И.Ф. Шарыгина, «охватывает необычайно широкий ареал, включает в себя чуть ли не все мыслимые цели образования» [5].

Методика изучения площадей в средней школе была предметом исследования Г. Бевза, Л. Ерганжиевой, М. Казаковой, И. Кушнира, М. Мацкина, З. Турлаковой, И. Шарыгина, и др.

Анализ теоретических исследований и собственный опыт работы со школьниками показывает, что достаточно большая часть обучающихся испытывает трудности при изучении темы «Площади фигур». Основные ошибки, которые допускают обучающиеся 5-9 классов, следующие: путают формулы периметра и площади, употребляя одну вместо другой; используют формулы, относящиеся к другой фигуре, например, вычисляют площадь параллелограмма, пользуясь формулой площади прямоугольника; выбирают нужную формулу, но вместо значения одних элементов фигуры подставляют в нее значение других, например, вместо длины высоты подставляют значение для боковой стороны; используют неверные единицы измерения; неправильно переводят одни единицы в другие.

Не претендуя на создание отдельной концепции изучения площадей фигур, предлагаем серию разработанных нами нетрадиционных заданий, основная цель которых – предостеречь от возникновения типичных ошибок, помочь школьникам лучше усвоить формулы для вычисления площадей плоских фигур. Эти задания не только развивают логическое и алгоритмическое мышление школьников, но и используют ресурсы образного мышления обучающихся, способствуют развитию их креативности.

Среди используемых нами заданий имеются задания пропедевтического характера, задания, способствующие самостоятельному выводу формул площадей, задания, направленные на лучшее запоминание и припоминание формул, задания, используемые с целью обобщения и систематизации знаний. Рассмотрим типы этих заданий подробнее.

У учащихся начальных классов, где школьники впервые используют термин «площадь», понятие о площади формируется как о той части плоскости, которую занимает фигура. Первые вычисления они проводят, подсчитывая количество единичных квадратов в предложенной фигуре. Этот опыт подсчета площадей можно использовать при актуализации знаний о площадях фигур на пропедевтическом этапе – в 5-6 классах.

Так, например, предлагаем игровые задания на клетчатой бумаге.

Задание 1. Игра проводится в парах. На клетчатой бумаге рисуется игровое прямоугольное поле, каждый игрок рисует своим цветом. Два игрока по очереди проводят единичные отрезки на сетке произвольного размера. Отрезки можно добавлять только в начало или конец змейки. Тот игрок, кто вынужден построить цикл, вычисляет площадь внутри получившейся замкнутой фигуры, его противник – оставшуюся часть игрового поля. Побеждает тот, чья площадь оказалась больше.

Задание 2. Морской бой. Игра ведется по правилам традиционного морского боя. Только после того, как расчерчено поле и расставлены корабли, игрокам дается на игру всего 1-2 минуты. После этого предлагается сосчитать площадь всех «подбитых» кораблей, выразив их в тетрадных клеточках.

Задание имеет продолжение – теперь нужно построить фигуру такой же площади, но чтобы она имела как можно меньший периметр, а затем как можно больший. Побеждает не тот, кто подбил больше кораблей, а тот, кто смог построить такую фигуру. Здесь не оговаривается, что фигура должна быть обязательно прямоугольной формы, поэтому остается простор для творчества – фигура может быть и ступенчатой, и треугольной формы.

Отметим, что площади в этих заданиях вычисляются в клеточках. Поэтому логично продолжить каждое задание, предложив выразить эту же площадь в квадратных сантиметрах или миллиметрах. Это тем более важно, что обучающиеся значительно чаще, чем при работе с линейными величинами, испытывают затруднения при переводе одних единиц площади в другие.

Для акцентирования внимания на различии величин «периметр» и «площадь» используем задания на геометрическом планшете. Это наглядное пособие представляет из себя дощечку с размещенными в узлах клеточек канцелярскими кнопками, на которых с помощью резинок можно моделировать различные геометрические фигуры.

Задание 3. Предлагаем изобразить квадрат и выполнить с ним различные манипуляции. Например, одну из сторон преобразовать в ломаную выпуклостью вниз, а затем ответить на вопрос, как изменились периметр и площадь фигуры после этого преобразования. После этого перед обучающимися ставится задача так изменить первоначальный квадрат, чтобы его периметр не изменился, а площадь уменьшилась.

Психологи утверждают, что запоминание учебного материала, в том числе и достаточно большого количества обязательных формул для вычисления площадей фигур, будет более успешным, если в процесс усвоения включается как можно большее число органов чувств – кроме зрения и слуха, осязание, например. В арсенале эйдетики – науки о запоминании с помощью образов – есть упражнения, когда материал, подлежащий запоминанию, пишется пальцем на разных на ощупь поверхностях, например, покрытых пшеном, наждачной бумагой, ватой, бархатом, спичками и пр. Такие осязательные дощечки изготавливаются самими учащимися. После знакомства с формулами для прямоугольника им предлагается написать ее на прямоугольной поверхности, покрытой наждачной бумагой. Вывели формулу для площади треугольника – пишем ее на треугольном листе, покрытом мягким материалом. Для параллелограмма – на деревянном параллелограмме из спичек. Затем предлагается закрыть глаза и представить те ощущения пальцев, которые испытывали при написании площадей разных фигур. Срабатывает тактильная память, появляется связь зрительного и осязательного канала информации [1].

Такую же цель – включить в запоминание разнообразные органы чувств – преследует упражнение найти с закрытыми глазами на ощупь фигуру, площадь которой произносит вслух учитель или другой ученик. Такие задания используются именно для коррекции трудностей в обучении, их эффективность подтверждена психологами, в частности Е. Семерницкой [1, С.410].

По мнению Н.С. Подходовой, человечность науки выражается «во все более частом использовании образов, живых метафор, ... делающих понятия видными... Эти изменения в науке должны найти отражение и в образовании» [4, С.177]. Опираясь на авторитетное мнение ученого, мы предлагаем школьникам увидеть и пощупать величину площади, наглядно показать, как получается та или иная формула.

Так, еще Архимед предложил оригинальный способ приблизительного измерения площади плоской фигуры. Для этого нужно вырезать фигуру из некоторого материала и взвесить ее на весах. Затем из того же материала вырезать единицу площади (квадрат со стороной, равной единице), ее также взвесить. Затем разделить результат первого взвешивания на результат второго. Такие манипуляции можно проделать на уроке с использованием современных электронных весов. Несколько задач на вычисление площадей фигур с помощью взвешивания значительно разнообразят ход урока, повысят интерес к нему даже у «слабых» учеников, так как отличаются оригинальностью и простотой. Затем результат проверяется вычислением по формулам.

Формулу для вычисления площади прямоугольника обучающиеся знают еще из начальной школы. Опираясь на нее, можно практическим путем получить формулу для вычисления площади треугольника, выполняя нехитрые упражнения по разрезанию фигур и их дальнейших комбинаций. У каждого ученика на парте есть прямоугольный лист картона, чертежные инструменты и ножницы. Предлагается разрезать прямоугольник по диагонали, сравнить полученные части наложением и сделать вывод о связи площади прямоугольного треугольника с площадью исходного прямоугольника.

Затем треугольники предлагается приложить друг к другу катетами, и обратить внимание, что площадь полученной фигуры остается такой же, как площадь исходного прямоугольника. Осталось выяснить, чем в этом случае для треугольника являются отрезки a и b (длина и ширина прямоугольника). Так получаем формулу для вычисления площади произвольного треугольника. Учащиеся явно видят, откуда в формуле площади треугольника берется ½.

Таким же способом можно провести «вывод» формулы для параллелограмма, проведя в нем высоты, отрезав один из получившихся треугольников и расположив его у противоположной стороны фигуры.

При организации такой деятельности необходимо подчеркнуть, что вывод, построенный только на наглядных зрительных соображениях, не всегда бывает правильным. Убедиться в этом обучающиеся могут в результате выполнения следующих заданий.

Школьникам предлагается сформировать три группы по интересам. *Первой группе* предстоит измерять длины сторон и высоту имеющихся фигур, после чего занести полученные данные измерений в таблицу. *Второй группе* предлагается составить задачи по данным таблицы, *третьей группе* –решить составленную одноклассниками задачу и проверить ответ, проведя измерение.

Подчеркнуть тот факт, что в геометрии не всегда верны выводы, сделанные на основе рисунка или других наглядных соображений, можно, предложив в качестве домашнего задания с последующим разбором на уроке решение разного рода геометрических софизмов, стимулирующих активную мыслительную деятельность обучающихся.

Одно из правил деятельности нашего мозга гласит, что мы лучше усваиваем ту информацию, которая более интересна и необычна. Нетрадиционной для урока математики формой предъявления заданий являются насыщенные образами и метафорами математические сказки. Приведем пример одной из них.

Страх высоты[3, С. 51]. На одной плоской равнине был разбит чудесный сад, в котором вместе с людьми жили и геометрические фигуры. Круглое озеро, многоугольные полянки и клумбы, аккуратно постриженные деревья и кусты в форме шаров и конусов. Днем они радовали глаза посетителей, а ночью изучали свои свойства и делились тем, что слышали от людей. Построили в том саду и качели для детей, сиденье которых сделали в форме трапеции. Подошла к качелям мама с ребенком, но ребенок закапризничал и не захотел кататься:

– Я боюсь высоты! – заявил он маме. И мама увела ребенка на круглую карусель. Ночью молоденькая трапеция рассказала об этом случае своим подружкам. Они все вместе запомнили, что высота – это то, чего боятся люди. Значит, и им не мешало бы ее остерегаться. Вот однажды ближе к осени садовник поручил всем геометрическим фигурам сада подсчитать свои площади – ему нужно было знать количество укрывного материала для сада, чтобы защитить его от зимних холодов. Ночью все фигуры сосчитали свою площадь – и круг, и квадрат, и прямоугольник, и параллелограмм, и даже все треугольники. Только трапеция не смогла справиться с заданием. На вопрос «Почему?» она повторила услышанную ею от ребенка фразу: «Я боюсь высоты. А мою площадь без высоты не сосчитать!». Садовник покачал головой, но не стал бранить трапецию. На другой день подошел к трапеции мальчик постарше. Он с радостью взобрался на качели, раскатался сильно-сильно и с восторгом прокричал своей маме: – Мама, высота – прекрасна! У меня просто дух захватывает! Здесь такой обзор!– Высота – прекрасна, – повторила за мальчиком наша трапеция. И к следующему утру без всякого страха подсчитала свою площадь. А вот что было бы, если бы этот мальчик не пришел? Как она бы справилась с заданием? Ответьте еще и на такой вопрос: по каким формулам считали свои площади квадрат, прямоугольник, параллелограмм и треугольник, если они не использовали высоту.

Последние исследования психологов показывают, что наш мозг функционирует более эффективно при наличии активных физических нагрузок.

Были проведены эксперименты, когда испытуемым предлагалось слушать лекцию по математике, находясь на беговой дорожке [2]. В условиях традиционной организации обучения в школе двигательная активность на уроке математики сведена к минимуму. Чтобы восполнить недостаток двигательной активности, мы предлагаем школьникам задания, в которых необходимо перемещаться по классу. Эти перемещения не бесцельные, они являются составляющими выполнения заданий. Например, некоторые формулы развешены в самых неожиданных местах кабинета – на шкафу, цветочных горшках, на подоконнике и т.д. Ученику после прочтения условия задачи необходимо найти нужную формулу, а затем записать решение на доске.

Другим заданием, в котором необходимо одновременно и двигаться, и думать, может стать такое. Паре учеников предлагается стать рядом на одной линии и выбрать фигуру, площади которой им нужно будет называть, например, параллелограмм и треугольник. Игроки по очереди делают шаг, сопровождая его формулой для вычисления площади своей фигуры. Можно называть формулы для частных случаев – для прямоугольника или равностороннего треугольника, указывая, для какой фигуры называется формула. Побеждает тот, кому удалось пройти дальше. Такие задания соревновательного плана проводятся на уроках обобщения и систематизации знаний.

Таким образом, в разработанной нами серии заданий присутствуют задания на клетчатой бумаге, геометрические софизмы, задания из арсенала эйдетики, улучшающие запоминание включением большего числа органов восприятия, задания на разрезание и взвешивание, увеличивающие наглядность восприятия формул площадей, задания, предъявляемые в нетрадиционной форме математической сказки, задания игрового соревновательного характера, предполагающие двигательную активность и другие. Такие упражнения наравне с дидактической функцией выполняют и мотивационную, повышая интерес к урокам геометрии. Их эффективность обоснована соответствием правилам наилучшего функционирования мозга, использования эйдетических образов для запоминания и припоминания учебного материала. Разработка системы заданий такого типа по каждой из тем геометрии и экспериментальная проверка их результативности является предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Антощук Е.* Знакомьтесь, ваша память/ Е. Антощук. – К.: Вирій, 2005. – 110 с.
2. *Медина Д.* Правила мозга: что стоит знать о мозге вам и вашим детям/ Джон Медина: пер. с англ. К. Ивановой. –М.: Манн, Иванов и Фербер, 2014. – 304 с.
3. *Панишева О.В.* Геометрия после уроков: тайны и загадки геометрических фигур/ О.В. Панишева, А.В. Логинов. – Феникс, 2018. – 128 с.
4. *Подходова Н.С.* Теоретические основы построения курса геометрии 1-6 классов: Дисс. докт. пед. наук. - СПб., 1999. – 387 с.
5. *Шарыгин И.Ф.* Нужна ли школе 21-го века Геометрия? [Электронный ресурс]. –Режим доступа:http://www.shevkin.ru/stat-i-podrobnee/i-f-shary-gin-nuzhna-li-shkole-21-go-veka-geometriya/.

О ВЫЧИСЛЕНИИ УГЛОВ И РАССТОЯНИЙ

Потоскуев Евгений Викторович
кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры «Высшая математика и математическое образование»,
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти

Аннотация. *В статье, используя стереометрические задачи различного уровня сложности, акцентируется внимание на необходимость аргументаций при их решении.*
Ключевые слова: *тетраэдр, скрещивающиеся прямые.*

ABOUT CALCULATION OF ANGLES AND DISTANCES

Potoskuev Evgeny Viktorovich
candidate of physical and mathematical sciences, professor,
Department of Higher Mathematics and Mathematical Education,
Togliatti State University
Russia, Togliatti

Abstract. *Using stereometric problems of various difficulty levels, the article discusses the need for argumentation when solving them.*
Keywords: *metrahedron, crossinglines.*

В школьных учебниках по геометрии для 10-11 классов, принятых в нашей стране, последовательно, на основании нескольких аксиом излагается школьный курс стереометрии, как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным (профильным) изучением математики. При этом геометрия изучается не как наука, а как учебный предмет: наряду с логической строгостью рассуждений, большое значение имеет использование принципа наглядности. Особенно необходимо пользоваться рисунками при изучении школьной стереометрии, так как верные и наглядные рисунки помогают «увидеть» содержание того или иного геометрического факта, проиллюстрировать суть понятия, представить то, о чем идет речь в аксиоме, теореме, задаче.

Многолетний опыт работы в 10-11 классах различной профильной направленности, укомплектованных учащимися с различными уровнями математической подготовки, свидетельствует о том, что начинать «вхождение» в курс стереометрии целесообразно с обзора многогранников, с которыми к этому времени учащиеся уже встречались в основной школе и на практике. При этом оправдывает себя концепция изучения начал стереометрии в задачах, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра, параллелепипеда, призмы, пирамиды. Такие задачи обладают конструктивностью и содержательностью, а рассуждения учащихся при их решении становятся доступными и естественными, что, в свою очередь, приводит к сознательному и эффективному формированию конструктивных пространственных представлений у большинства начинающих изучать стереометрию.

Кроме того опыт работы приводит к глубокому убеждению: *с самых первых уроков изучения, как планиметрии, так и стереометрии, необходимо вырабатывать у учащихся привычку аргументированно обосновывать утверждения логического, конструктивного и вычислительного характера, возникающие при доказательстве теоремы и решении задачи.* Если такой привычки учащийся не приобретет на начальном этапе изучения геометрии, то в будущем его решение геометрической задачи будет состоять лишь из одних вычислений, а в записи решения этой задачи будет присутствовать «алгебра и арифметика», но «конструктивно-логическая, собственно геометрия» будет отсутствовать. Такое решение задачи невозможно признать полноценным. *Необходимо выработать понимание учащимися, что аргументированные объяснения шагов первоначального и дополнительного построений изображения фигур составляют своеобразный анализ решения геометрической задачи и* «открывают путь» к её решению.

К сожалению, геометрическое образование в сегодняшней российской средней школе не может не вызывать определенную озабоченность и тревогу. Наблюдается довольно тревожная картина: внедряются тесты - с ответами без объяснения решений (читай - уничтожения логической составляющей мышления); в «рабочих тетрадях» внедряются рисунки к задачам - для «сокращения времени» решения задачи. А на самом деле, внедряется «псевдотворчество», «псевдоразвитие» пространственного воображения, логического мышления, геометрически грамотной речи и графической культуры.

Разумеется, можно, и методически оправдано, в качестве иллюстрационного материала использовать готовые чертежи, так называемые «полуфабрикаты» в «рабочих тетрадях». Однако *не следует увлекаться «рабочими тетрадями» и интерактивной доской, так как их использование автоматически уничтожает творческую составляющую геометрического мышления*: учащиеся при изучении геометрии перестанут творить, превратятся в рабов этих «рабочих тетрадей» и интерактивных досок. Именно рабочая тетрадь, интерактивная доска играют роль опасного соседа при изучении геометрии, поэтому «дружба» с ними требует «чуткого, внимательного и бережного» отношения. В учебном процессе (*подчеркнем, в учебном процессе*) учащийся должен все тренировочные процедуры проделать сам. (Не следует путать учебный процесс и использование компьютерных технологий в научно-исследовательской, производственной практике). Дедуктивный метод изложения геометрии (в сочетании с наглядностью), логическая последовательность геометрических теорем, логика теоретических обоснований, методы и факты геометрических исследований и открытий – всё это создает удивительно цельный и гармоничный мир геометрии, способствует эстетическому воспитанию человека.

Обоснования геометрических комбинаций, которыми учащийся оперирует при доказательстве теоремы и решении задачи, естественным образом способствуют развитию и повышению культуры его речи в силу такого объективного фактора, как требование корректно словесно обосновывать любое геометрическое утверждение или его отрицание. Поэтому обучение языку геометрии является одной из важнейших целей математического образования, интеллектуального развития творческой личности. Причем, *хорошее геометрическое образование, пространственное воображение, логическое мышление и умение аргументированно обосновывать возникающие утверждения, необходимы не только математику, но и инженеру, и экономисту, и дизайнеру, и юристу, и программисту, а также специалистам многих и многих других профессий.*

В данной статье речь идёт о методике решения *проблемы развития пространственного воображения, графической культуры, логического мышления и умений аргументированно обосновывать возникающие утверждения* при изучении важной темы курса стереометрии ***«Углы и расстояния в пространстве»*** *в 10–х классах с углублённым (*профильным) изучением математики. Изучение теорем осуществляется с соблюдением «принципа доступности» и сопровождается решением системы задач, подобранных по принципу «от простого – к сложному», и соответствующими рисунками с соблюдением «принципа наглядности».

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите угол между плоскостями AD_1C и AB_1C.

Решение. Плоскости AD_1C и AB_1C пересекаются по прямой AC, которая служит ребром образованного при этом пересечении двугранного угла $D_1(AC)B_1$ (Рис.1). Обозначим: $\angle D_1(AC)B_1=\varphi$. В задаче, сначала необходимо построить линейный угол рассматриваемого двугранного угла.

Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам, поэтому отрезки OB_1 и OD_1 – медианы треугольников соответственно AB_1C и AD_1C (Рис.2). Так как, кроме того, эти треугольники - равносторонние (почему?), то $OB_1\perp AC$ и $OD_1\perp AC$. Это означает, что $\angle B_1OD_1=\varphi$– линейный угол двугранного угла $\angle D_1(AC)B_1$. Найдем величину угла φ.

Проведем перпендикуляр B_1K из вершины B_1 на плоскость AD_1C (точка K– основание этого перпендикуляра). Тетраэдр B_1ACD_1 является правильным: все его ребра равны $\sqrt{2}$, как диагонали равных единичных квадратов – граней куба. Тогда точка K является центром окружности, описанной около правильного треугольника ACD_1 (почему?), причем $K \in OD_1$ (почему?). А так как медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то $OK = \frac{1}{3} OD_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

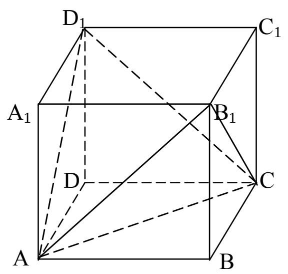


Рис 1.

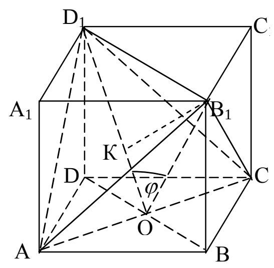
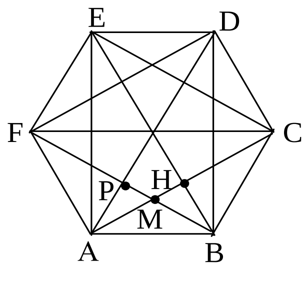


Рис.2.

В правильном ΔB_1AC со стороной, равной $\sqrt{2}$, находим: $B_1O = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (как медиана ΔB_1AC). Таким образом, имеем: $B_1K \perp (ACD_1)$, $OD_1 \subset (ACD_1) \Rightarrow B_1K \perp OD_1$(по определению прямой, перпендикулярной плоскости) $\Rightarrow \Delta B_1OK$ – прямоугольный ($\angle B_1KO = 90^o$). В этом треугольнике находим: $\cos\varphi = OK:B_1O = \frac{\sqrt{6}}{6} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = arccos\frac{1}{3}$. *Ответ*: $arccos\frac{1}{3}$.

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостями A_1B_1C и BC_1D_1.

Указание. Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить её нижнее (или верхнее) основание - правильный шестиугольник ABCDEF (Рис.3), сторона которого равна 1. Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии.



Решение. Это задание следует отнести к уровню повышенной сложности: для успешного решения задачи ученик должен обладать достаточно высоким уровнем пространственного воображения и графической культуры, умениями аргументированного объяснять необходимо возникающие утверждения со ссылками на соответствующие теоремы.

Рис.3.

Найдем синус угла между плоскостями A_1B_1C и BC_1D_1 (Рис.4).

Обозначим: $\angle((A_1B_1C);\ (BC_1D_1)) = \beta$. Прежде всего, ученик должен «увидеть» двугранный угол, который образуется при пересечении заданных плоскостей A_1B_1C и BC_1D_1. Замечаем: $P = B_1C \cap BC_1$; $K = CF \cap BE$ (Рис.5).

Тогда $(A_1B_1C) \cap (BC_1D_1) = KP$ - ребро двугранного угла B(KP)C, образованного плоскостями A_1B_1C и BC_1D_1. Теперь будем строить линейный угол этого двугранного угла и найдем его величину.

Обозначим: точка H - середина ребра BC, тогда $BC \perp KH$. Точка $P = B_1C \cap BC_1$ – центр квадрата $BCC_1B_1 \Rightarrow BC \perp PH$. Тогда $BC \perp (KPH)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow BC \perp KP$ (почему?).

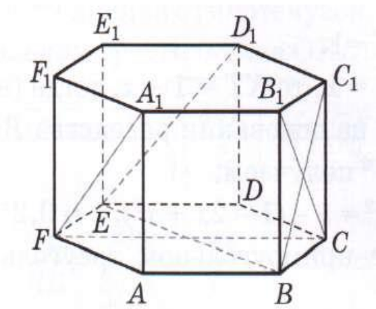


Рис.4.

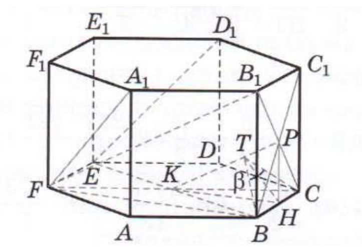


Рис.5.

Пусть плоскость, проходящая через прямую BC перпендикулярно ребру PK двугранного угла B(KP)C, пересекает это ребро в точке T. Тогда $\angle BTC$ – линейный угол двугранного угла B(KP)C, т.е. $\angle BTC = \angle((A_1B_1C);\ (BC_1D_1)) = \beta$. Найдем $\sin\beta$.

Имеем: точка K – середина диагоналей CF и BE основания призмы, равных 2, поэтому CK= BK =1. Аналогично, точка P – середина диагоналей B_1C и BC_1 боковой грани этой призмы, равных $\sqrt{2}$, поэтому BP = CP = $0{,}5\sqrt{2}$. Тогда: $\Delta BPK = \Delta CPK$ (по трем сторонам)$\Rightarrow$ BT = CT, где BT и CT - высоты (почему?) этих треугольников, проведенные к их общей стороне PK.

Замечаем, что отрезок PK - средняя линия ΔCB_1F, поэтому PK = 0,5 B_1F. В прямоугольном ΔB_1BF с катетами BF $=\sqrt{3}$ и B_1B =1 находим: $B_1F = \sqrt{BF^2 + B_1B^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, значит, PK =1.

Если TP = x, то KT = 1-x, тогда (в ΔBPK) на основании $BP^2 - PT^2 = BK^2 - KT^2$ получаем: $0{,}5 - x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2)$, откуда x = 0,25 =TP.

Теперь в прямоугольном ΔBPT находим: $BT = \sqrt{BP^2 - PT^2} = \sqrt{(0{,}5\sqrt{2})^2 - 0{,}25^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Далее в равнобедренном ΔBCT: $\angle BTH = \dfrac{\beta}{2}$, при этом $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{BH}{BT} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Тогда $\sin\beta = 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2} = 2\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. *Ответ*: $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

Задача 3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1. 1**)** Найдите расстояние между прямыми A_1B и AF_1. 2) Какую наименьшую площадь может иметь ΔA_1BP, если P - точка прямой

F_1A? *Решение*. 1) Имеем: $A_1B \subset (A_1AB)$, $AF_1 \cap (A_1AB) = A \notin A_1B$ (Рис. 6)$\Rightarrow$ прямые A_1B и AF_1 скрещиваются (*по признаку скрещивающихся прямых*). Найдем расстояние между этими прямыми.

Замечаем: $BC \parallel AD$; $AC \parallel FD$ и $AC = FD$. Учитывая $FD = F_1D_1$, $FD \parallel F_1D_1$, получаем: $AC = F_1D_1$, $AC \parallel F_1D_1 \Rightarrow ACD_1F_1$–параллелограмм $\Rightarrow$ $AF_1 = CD_1$, $AF_1 \parallel CD_1$. Тогда из параллельностей $BC \parallel AD$, $AF_1 \parallel CD_1$ следует: $(F_1AD) \parallel (A_1BC)$

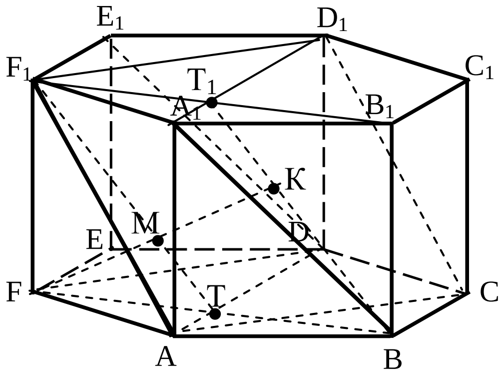


Рис. 6.

(*Почему*?). Так как точки $T = AD \cap BF$ и $T_1 = A_1D_1 \cap B_1F_1$ являются серединами противоположных сторон прямоугольника BB_1F_1F, то $F_1T \parallel T_1B$, $F_1T =$
$= T_1B$, где $F_1T = (B_1BF) \cap (F_1AD)$, $T_1B =$
$= (B_1BF) \cap (A_1BC)$.

Далее, имеем: $BF \perp AD$, $B_1B \perp AD$ (Рис.6) $\Rightarrow$ $(B_1BF) \perp AD$ (*по признаку перпендикулярности прямой и плоскости*) $\Rightarrow$ $(B_1BF) \perp (F_1AD)$ (*по признаку перпендикулярности двух плоскостей*). Значит, прямая, проведенная через точку F перпендикулярно (F_1AD), расположена в (B_1BF) и пересекает параллельные прямые F_1T и T_1B в некоторых точках соответственно M и K. Тогда $FM = MK$ (*по теореме Фалеса, учитывая* $FT = TB$), при этом, $MK = \rho((F_1AD); (A_1BC))$. А так как: $A_1B \subset (A_1BC)$; $F_1A \subset (F_1AD)$; $MK \perp (F_1AD)$, то $\rho((F_1AD); (A_1BC)) =$
$= \rho((F_1A); (A_1B)) = MK$.

Найдем длину перпендикуляра $MK = FM$. В прямоугольном ΔF_1FT, с катетами $F_1F = 1$ и $FT = 0{,}5BF = 0{,}5\sqrt{3}$, находим: $FM = \dfrac{F_1F \cdot FT}{\sqrt{F_1F^2 + FT^2}} = \dfrac{1 \cdot 05.\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (0.5\sqrt{3})^2}}$
$=$
$= \dfrac{1 \cdot 05.\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} = MK$. Таким образом, $\rho(AF_1; A_1B) = MK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

2)Теперь найдем наименьшую площадь, которую может иметь ΔA_1BP, где P– точка прямой F_1A?

Площадь треугольника A_1BP с данным основанием A_1B и вершиной $P \in F_1A$ принимает наименьшее значение при наименьшем удалении вершины $P \in F_1A$ от прямой A_1B, то есть при условии равенства высоты треугольника A_1BP кратчайшему расстоянию между скрещивающимися прямыми A_1B и F_1A, которое, в свою очередь, равно длине их общего перпендикуляра. Проведем $PH \parallel MK$, $PH = MK$ ($P \in F_1A$, $H \in A_1B$) (Рис.7). Тогда: $PH \perp A_1B \Rightarrow PH$– наименьшая высота ΔA_1BP. Значит, наименьшая площадь этого треугольника равна:

$$S_{\Delta A_1BP} = \frac{1}{2} \cdot A_1B \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$ *Ответ*: **1)** $\frac{\sqrt{21}}{7}$; **2)** $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

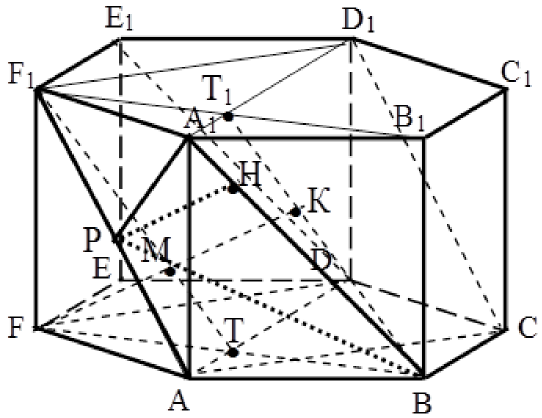


Рис.7.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Учебник. – М.: Дрофа, 2019.
2. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2019.

СИСТЕМА ОЗНАКОМЛЕНИЯ С ФРАКТАЛАМИ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Рогановский Николай Максимович
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры методики преподавания математики, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Республика Беларусь, г. Могилев, geometr@tut.by

Рогановская Елена Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры методики преподавания математики, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Республика Беларусь, г. Могилев, geometr@tut.by

Аннотация. *Статья посвящена отбору и методике изложения фракталов на факультативных занятиях в средней школе.*

Ключевые слова: *фрактал, размерность фрактала, методическая схема изучения фракталов, интуитивные представления о геометрических фракталах.*

THE SYSTEM OF ACQUAINTANCE WITH FRACTALS FOR SECONDARY SCHOOL PUPILS

Roganovski Mikalai Maksimovich
doctor of pedagogical Sciences, Professor, Professor of methods of teaching mathematics Department, Mogilev state F. Kuleshov University,
Republic of Belarus, Mogilev, geometr@tut.by

Roganovskaya Elena Nikolaevna
Candidate of pedagogical Sciences, Docent, Docent of methods of teaching mathematics Department, Mogilev state F. Kuleshov University,
Republic of Belarus, Mogilev, geometr@tut.by

Abstract. *The article deals with the selection and methods of outline of fractals at open classrooms in secondary school.*
Key words: *fractal, fractal dimension, methodical scheme of fractal study, intuitive understanding about geometrical fractals.*

Понятие фрактал (лат. fractus – дробленый, разделенный) было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных самоподобных структур. Самоподобная фигура – фигура, которую: «можно было разбить на N частей, каждая из которых может быть получена из целой фигуры с помощью преобразования подобия с коэффициентом r (в сочетании со смещением или преобразованием симметрии)» [1, с. 25]. Разнообразие фрактальных объектов привело к расширенной трактовке самоподобия, его стали понимать достаточно широко как повторение фрагментов, лишь приближенно связанных с геометрическим подобием, или не связанных с ним вовсе. С учетом этого широкое распространение получила такая общенаучная трактовка фрактала: *фрактал – это структура, состоящая из фрагментов, которые в каком-то смысле подобны целому*. Оказалось, что с помощью многократного повторения достаточно простых частей, подобных между собой, можно образовать сложные фрактальные объекты, которые далеко не всегда поддаются описанию на языке евклидовой геометрии или классического математического анализа. Больше того, обнаружилось, что все мироздание насыщено фрактальными объектами и то, что ранее относилось к хаосу, считалось не регулярным, не предсказуемым и не поддавалось изучению, на самом деле таковым не является и может быть изучено при помощи фракталов.

В исследовательском плане фракталы примечательны тем, что информация о части фрактала дает информацию о фрактале в целом. Например, по современной фотографии некоторой звездной галактики можно описать с помощью её фрактальной модели, какой вид она имела в прошлом, и как она будет выглядеть в будущем. Существенное значение имеет повторяемость подобных частей, их число, изменение размеров. Обращают внимание на себя и следующие слова в определении Мандельброта: «… в каком-то смысле подобны целому». Эти слова означают, что фрактал не обязательно связан с подобием евклидовой геометрии и больше того «подобие», может иметь различную математическую и нематематическую интерпретацию. Фракталы задают новое направление в математике, естествознании, космологии, технике, медицине, живописи и т.д., по существу, – в любой области знания [2], [3]. Универсальность понятия фрактала столь велика, что породила настоящую революцию в науке и в настоящее время вплотную подвела к необходимости выяснения значения этого понятия для школьных курсов математики, информатики и естествознания, к необходимости разработки конкретного содержания их и методики изложения. К настоящему времени выделены *геометрические, алгебраические, стохастические фракталы и мультифракталы.*

Примеры математических фракталов: множество Кантора, кривая Коха, функции Пеано, Больцано, Вейерштрасса и др. Широкое распространение в науке фракталы получили после их компьютерной визуализации. Современное состояние теории фракталов подготовлено усилиями многих ученых, работавших в 1875–1925 годы (Кантор, Пуанкаре, Жюлиа, Хаусдорф, Фату и др.). Уделяется большое внимание размерности различных объектов, в частности, размерности Хаусдорфа-Безиковича (т. 5, с. 779). Именно это определение было принято Мандельбротом в уже упомянутой работе в качестве основного математического определения [1, с. 10]: «Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича для которого строго больше его топологической размерности».

Знакомство с фракталами надо начинать с самоподобия и размерности фракталов – их существенных характеристик, уделяя внимание, прежде всего, наглядному истолкованию, подкрепляя его затем необходимыми вычислениями.

Размерность Хаусдорфа-Безиковича. Самое популярное определение размерности для стандартных геометрических объектов таково: размерность пространства или объекта это число независимых переменных (координат), которые необходимы для определения положение точки в этом пространстве или объекте. Все стандартные (и некоторые фрактальные) объекты имеют целочисленные размерности: 0, 1, 2, 3 и т.д. Например, размерность броуновского движения равна 2. Однако, теперь известно и большое разнообразие объектов, размерность которых не является целой, а имеет промежуточные, дробные значения. К примеру, размерность береговой линии $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$ (такая же, как у кривой Коха).

Существует несколько способов подсчёта размерности фрактальных объектов. Самым простым и распространённым является способ, созданный математиками Ф. Хаусдорфом и А. Безиковичем. Размерность фрактала, подсчитанную предлагаемым ниже способом, называют размерностью Хаусдорфа-Безиковича и обозначают буквой *D*. Нахождение размерности фрактала по методу Хаусдорфа-Безиковича основано на идее его покрытия или маленькими отрезками, или квадратами, или треугольниками, или кругами, или кубами и т.д. – что больше подходит в каждом конкретном случае. Естественно, что чем меньше будут эти небольшие фигуры, тем больше их потребуется, чтобы полностью покрыть фрактал.

Определение. *Размерность Хаусдорфа-Безиковича* – это число D, к которому стремится отношение $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}}$ при $e \to 0$, где N – число фигур, с помощью которых осуществляется покрытие фрактала, e – линейный размер этих фигур.

Сравнение топологической размерности и размерности Хаусдорфа-Безиковича представлено в таблице 1.

Методическая схема изучения геометрических фракталов:

1. Построение геометрического фрактала: Задать основу фрактала – исходную геометрическую фигуру. Задать некоторый закон преобразования основы, приводящий к образованию частей основы. Это преобразование применить к образовавшимся частям основы, приводящее к образованию новых частей, подобных предыдущим. Данное преобразование применять все к новым и новым частям и так (теоретически) до бесконечности.

2. Изучение свойств геометрического фрактала: (основное свойство). Найти размерность фрактала, сравнить его размерность с размерностью обычной геометрической фигуры, или с размерностью других фракталов. Если фрактал является линией, то найти длину фрактальной линии, или площадь ограниченной ею фигуры для n-го шага построений, для $n \to \infty$. Проверить, является фрактальная линия гладкой, или в каждой своей точке имеет излом. Является ли фрактал ограниченной фигурой, какие размеры имеет ограничивающая его фигура (внутри которой он расположен). Возможно, представляет интерес найти расстояние между наиболее характерными точками фрактала, закономерность их изменения в бесконечном процессе его образования. Возможно, ли изменяя данный фрактал, получить новый фрактал. Выяснить, представляет ли интерес рассмотрение мультифрактала, являющегося, например, объединением двух фракталов в один фрактал. С какой целью?

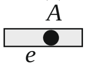
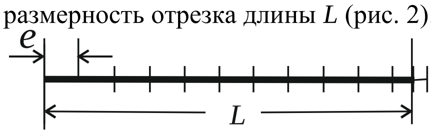
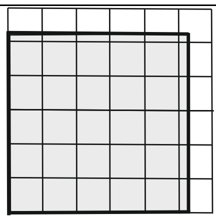
Геометрические фракталы – это фракталы, которые строятся обычными средствами евклидовой геометрии и поэтому они являются самыми наглядными. Наиболее простым из них является множество Кантора. Принцип построения множества Кантора используется при построении многих других геометрических фракталов. Он основан на последовательном удалении по определенному правилу частей исходной фигуры (основы): вначале у данной фигуры, затем у оставшихся частей фигуры, и так до бесконечности. Последний признак и отличает их от обычных геометрических построений, которые совершаются в конечное число шагов. Рассмотрим примеры.

Множество Кантора (канторова пыль). Классическое множество Кантора, или канторова пыль, названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 году.

………… *Рис. 4*

Этот фрактал (рис. 4) строится на основе отрезка, из которого на первом шаге удаляется треть из центра, на втором – трети из оставшихся двух отрезков и т.д., до бесконечности. Объясните, почему множество Кантора является фракталом. То, что получается в результате, больше похоже на бесконечное множество изолированных друг от друга точек – «точечную пыль» (поэтому этот фрактал называют ещё «канторовой пылью»). Но и на отрезок эта пыль не похожа – в ней «дырка на дырке». Можно предположить, что размерность такого объекта лежит в промежутке между 0 и 1.

Таблица 1

Определение размерности обычным способом	Вычисление размерности по способу Хаусдорфа-Безиковича
1. . Точка. **Её размерность равна 0, потому что для определения положения точки «внутри неё» не нужно вообще никаких переменных – точка всего одна, никаких вариантов её положения нет.**	Найдем размерность точки. Чтобы покрыть точку достаточно взять один  Рис. 1 сколь угодно малый отрезок e, или узенький отрезок длины e(рис. 1). Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln 1}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{0}{\ln\frac{1}{e}} = 0$. Так как искомое отношение остается постоянным (равным 0) при любом e (в том числе и при $e \to 0$), то полученное отношение стремится к 0. Поэтому D = 0. Тем самым подтвердили, что размерность точки по способу Хаусдорфа-Безиковича такая же, как и при нахождении её обычным способом.
2. 2. Отрезок. **Размерность отрезка равна 1, так как для определения положения точки внутри отрезка потребуется всего одна переменная.**	Найдем размерность отрезка длины L (рис. 2). Ясно, что какое бы e мы  Рис. 2 не взяли, чтобы покрыть весь отрезок, нужно в качестве N(числа таких отрезков) взятьчисло, не меньше L/e. Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln L}{\ln\frac{1}{e}} + 1$. При $e \to 0$, первое слагаемое тоже стремится к нулю, а рассматриваемое отношение стремится к 1. Получаем, что D = 1. Тем самым подтвердили, что размерность отрезка по способу Хаусдорфа-Безиковича такая же, как и при нахождении её обычным способом.
3. 3. Квадрат. **Размерность квадрата равна 2, так как для определения положения точки внутри квадрата необходимы уже две независимых переменных (две координаты)**	 Рис. 3 Найдем размерность квадрата со стороной, равной L (рис. 3). Как и выше, для покрытия стороны квадрата надо взятьне меньше L/e отрезков. Тогда для покрытия данного квадрата надо взять не меньше $\left(\frac{L}{e}\right)^2$ квадратов со стороной, равной e. Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln\left(\frac{L}{e}\right)^2}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{2\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}} = 2\left(\frac{\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}}\right)$. По пункту 2, дробь, на которую умножается 2, при $e \to 0$ стремится к 1, а рассматриваемое отношение стремится к 2. Получаем, что D = 2. Тем самым подтвердили, что способ Хаусдорфа-Безиковича и обычный способ дают одну и ту же размерность квадрата.

Если считать, что исходный отрезок имеет длину 1, то на 1-м этапе (n = 1) образуется 2 отрезка длины 1/3, на 2-м этапе (n = 2) – 4 отрезка длины 1/9.

Вообще, на n-м этапе мы имеем 2^n отрезков, имеющих длину $\frac{1}{3^n}$. Такой же возьмем длину отрезка покрытия: $e = \frac{1}{3^n}$. Составим искомое отношение: $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Так как это отношение постоянно при любом шаге, то при $e \to 0$ оно стремится к $\frac{\ln 2}{\ln 3}$, и поэтому искомая размерность множества Кантора равна$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$. Как видно, размерность «канторовой пыли» больше 0 (правда, не настолько больше как предполагали), но меньше 1, т.е. меньше размерности обычного отрезка.

Замечание к способу нахождения размерности. Полученный результат $D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.для размерности множества Кантора свидетельствует о том, что к нему можно прийти сразу на основании первого этапа (для n = 1). Для этого этапа число частей N= 2, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{3}$. *Как изменяется длина исходного отрезка*? Пусть длина исходного отрезка равна 1. На первом шаге построений получаем два отрезка, сумма их длин равна 2/3, на втором шаге построений получаем четыре отрезка, сумма их длин равна $(2/3)^2$, на третьем шаге сумма длин маленьких отрезков будет равна $(2/3)^3$, …, на n шаге $(2/3)^n$. Сумма длин полученных отрезков неограниченно уменьшается и при $n \to \infty$ стремиться к 0. Длина одного отрезка на n шаге построений равна $(1/3)^n$и при $n \to \infty$ стремиться к 0. Суммарная длина выброшенных отрезков равна 1.

Дополнительные задания: а) Можно ли утверждать, что множество Кантора имеет ось симметрии? центр симметрии? б) Можно ли утверждать, что каждая точка канторовой пыли является концом какого-то из отрезков, получающегося при её построении? в) Несколько видоизменим Канторово множество. Допустим, что на каждом шаге построений выбрасывается пятая центральная часть каждого отрезка. Получим ли мы таким образом новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа-Безиковича; г) Видоизменим процесс образования множества Кантора таким образом: вместо деления отрезка в отношении 1:1:1 воспользуемся золотым сечением φ:1:φ. Получим ли мы, таким образом, новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа-Безиковича.

2. *Кривая Коха* – фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом. Построение кривой Коха показано на рисунке 5. Охарактеризуйте последовательность построений. Почему кривая Коха удовлетворяет определению фрактала?

Докажем, что размерность кривой Коха $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$. Для покрытия кривой на каждом шаге её построения будем использовать отрезки, которые получаются на этом шаге. При таком покрытии просто находятся N и e из определения размерности по Хаусдорфу-Безиковичу. Для n = 1 получаем $N_1 = 4$,

$e_1 = \frac{1}{3}$; для n = 2 получаем $N_2 = 4^2$, $e_2 = \frac{1}{3^2}$; для n = 3 получаем $N_3 = 4^3$, $e_3 = \frac{1}{3^3}$; …, для n получаем $N_n = 4^n$, $e_n = \frac{1}{3^n}$; тогда $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 4^n}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Это отношение не зависит от n, а потому при $n \to \infty$ ($e \to 0$) будем иметь $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

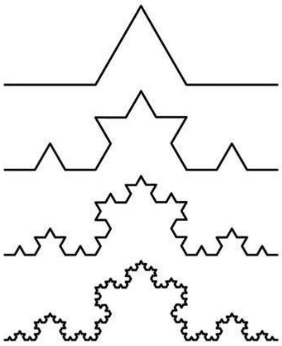


Рис. 5

Как видно, кривая Коха «оправдывает» свое название «кривая»: по размерности она ближе к обычным одномерным линиям, нежели к двумерным фигурам.

Замечание к способу нахождения размерности. Убедитесь, что к выводу размерности $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ можно прийти на основании первого шага построения кривой Коха. Для этого этапа число частей N= 4, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{3}$

Как изменяется длина исходного отрезка? Найдем длины ломаных при заданной длине исходного отрезка a = 1 и некоторого числа последовательных построений. Длина ломаной для n = 1 равна $4/3$, для n = 2 равна $16/9$, для n= 3 равна $(4/3)^3$, для произвольного n равна $(4/3)^n$ и при $n \to \infty$ длина ломаной $l_n \to \infty$. Это означает, что кривая Коха имеет бесконечную длину. Наглядно видно, что кривая Коха «вся» состоит из изломов. Больше того, она имеет излом в каждой своей точке. Но что это значит? Ведь мы видим, что она состоит из маленьких отрезков, а в точках отрезка нет изломов. В самом деле, на каком-то шаге построений изломы будут не в каждой точке получаемой ломаной. Все дело в том, что кривая Коха – это не ломаная, получаемая на каком-то конечном шаге её построения, а результат бесконечного процесса, когда $n \to \infty$. При этом условии, действительно, в каждой точке кривой Коха будет излом.

Дополнительные задания: а) Установите, что кривая Коха – ограниченная фигура и её можно расположить внутри прямоугольника. Найдите минимальные размеры этого прямоугольника; б) Имеет ли кривая Коха ось симметрии? в) Может ли кривая Коха иметь самопересечения? г) Если кривую Коха построить на сторонах равностороннего треугольника в его внешнюю область, то получим «снежинку Коха», постройте её; д) Несколько видоизменим процесс образования кривой Коха: вместо деления отрезка в отношении 1:1:1 воспользуемся золотым сечением φ:1:φ. Получим ли мы таким образом новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа-Безиковича.

3. *Треугольник Серпинского* («салфетка Серпинского») – фрактал, один из аналогов множества Кантора, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Его построение показано на рисунке 6.

Треугольник Серпинского не является сплошной плоской фигурой (белые части выбрасываются и их будет становиться все больше и больше, в любом сколь угодно малом черном треугольнике будет белая «дырка»).Можно смело предположить, что его размерность будет меньше обычного двумерного треугольника и иметь какое-то промежуточное значение между 1 и 2.

Рис. 6

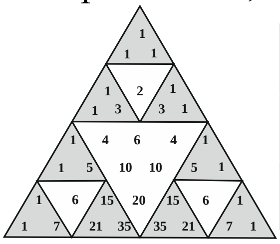
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

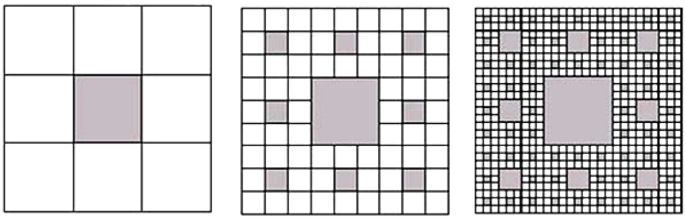
Найдем размерность Хаусдорфа для треугольника Серпинского. Пусть вначале имеем треугольник единичной площади. На 1-м этапе (n = 1) имеем 3 треугольника площадью 1/4, на 2-м этапе (n = 2) – 9 треугольников площадью 1/16 и т.д. Вообще, на n-м этапе мы имеем: 3^n треугольников, имеющих площадь $\frac{1}{4^n}$. Для расчета размерности будем покрывать черную область фигуры треугольными плитками именно такой площади, какой получаются треугольники на каждом этапе. Они хорошо подходят для этой цели и при стремлении номера этапа к бесконечности, их площадь стремится к 0. При этом линейный размер (длина стороны) e этих покрывающих треугольников будет пропорционален квадратному корню из их площади (для простоты, пусть e *равно* квадратному корню) и тоже стремиться к 0: $e = \sqrt{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2^n}$. Составим искомое отношение: $\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Как и выше, получаем, что данное отношение не зависит от n и поэтому при $n \to\infty$ ($e \to 0$) искомая размерность $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$. Итак, размерность Хаусдорфа-Безиковича для треугольника Серпинского действительно лежит в промежутке между 1 и 2, причем этот треугольник больше «тяготеет» к двумерной фигуре.

Замечание к способу нахождения размерности. Убедитесь, что к выводу размерности $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ в этом случае также можно прийти на основании первого шага построения кривой Коха. Для этого этапа число частей N= 3, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{2}$.

4. *Треугольники Серпинского и Паскаля*. Если в треугольнике Паскаля все нечётные числа покрыть сером фоне, а чётные – белым, то образуется треугольник Серпинского (рис. 7). 5. *Квадрат Серпинского* – фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским. (рис. 8).

Исходный единичный квадрат разбивается на девять квадратов и удаляется квадрат, находящийся в центре (белые квадраты остаются, из них образуется фрактал, дырки имеют черный цвет); с оставшимися восьмью квадратами повторяются эти же действия и т.д. «Дырявый» квадрат превращается в своеобразное «геометрическое решето», но черные ячейки быстро уменьшаясь, делаются настолько плотными, что по размерности квадрат Серпинского, возможно, приближается к обычной двумерной фигуре.





$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

Рис. 7 $\qquad$ Рис. 8

Визуально можно заметить, что квадрат Серпинского менее «дырявый», чем треугольник Серпинского. Поэтому вправе ожидать, что его размерность будет не намного меньше размерности обычного двумерного квадрата. Вычисления показывают, что это действительно так. Установим, что размерность Хаусдорфа-Безиковича квадрата Серпинского равна: $D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89$.

Покрытие для квадрата Серпинского будем образовывать из его собственных квадратов (на каждом шаге его построения). Для $n = 1$ получаем $N_1 = 8$, $e_1 = \frac{1}{3}$; для $n = 2$ получаем $N_2 = 8^2$, $e_2 = \frac{1}{3^2}$; $n = 3$ получаем $N_3 = 8^3$, $e_3 = \frac{1}{3^3}$; …, для n получаем $N_n = 8^n$, $e_n = \frac{1}{3^n}$; тогда $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 8^n}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 8}{\ln 3}$. Это отношение не зависит от n, а потому при $n \to \infty$ ($e \to 0$) будем иметь $D = \frac{\ln 8}{\ln 3}$.

Последовательность площадей частей квадрата Серпинского. В связи с этим фракталом учащимся полезно предложить следующее *задание:* записать последовательность площадей остающихся частей квадрата, из которых образуется фрактал. С помощью вычислений приходим к следующей последовательности (нумерация шагов начинается с момента выполнения первой итерации): $8/9$, $(8/9)^2$, $(8/9)^3, \ldots, (8/9)^n, \ldots$ Видно, что при $n \to \infty$ «остаточная» площадь квадрата $S_n \to 0$, что характерно для линии. Налицо двойственность: с одной стороны фрактал похож на линию ($S_n \to 0$), С другой стороны, его размерность близка к размерности обычной двумерной фигуры.

6. *Пифагорово дерево* – впервые построил А. Е. Босман (1891– 1961) (рис. 9).Зададим основу фрактала (в виде «домика» – квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника), но из нее ничего выбрасываться не будет. Напротив, эта основа повторяется до бесконечности с уменьшением её масштаба.

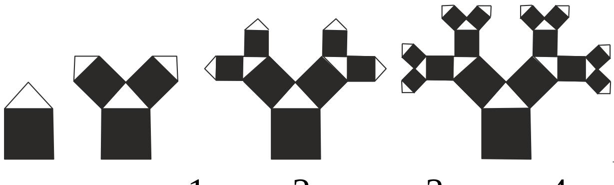


Рис. 9

$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $n = 4$

В строящейся фигуре хорошо просматривается комбинация из прямоугольного треугольника и трех квадратов, построенных на его сторонах. Эта комбинация называется «пифагоровыми штанами», по этой причине данный фрактал называется «дерево Пифагора».

Можно высказать предположение, что этот фрактал сильно похож на двумерную фигуру евклидовой плоскости, составленную из квадратов и равнобедренных прямоугольных треугольников, хотя и выглядит внешне необычно. Итак, рискнем сделать предположение о том, что размерность Пифагорова дерева равна 2. Для определения размерности воспользуемся первым этапом. Для него число частей N= 2 (один квадрат и один треугольник), коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{1/\sqrt{2}}$ (1 – сторона квадрата, а $1/\sqrt{2}$ – сторона катета равнобедренного прямоугольного треугольника).

Предположение оправдывается: $D = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{1}{1/\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{\ln 2}{\ln\sqrt{2}} = \dfrac{\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = 2.$

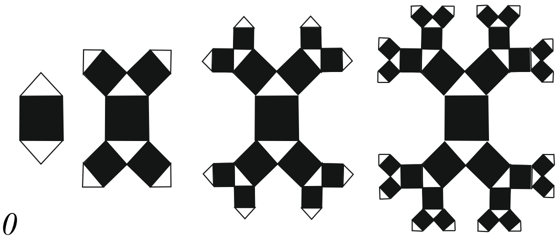


Рис.10

Дополнительное задание: а) Допустим, что предыдущий фрактал будем наращивать не только сверху, но и снизу (рис. 10). Останется ли он после этого фракталом? Изменятся ли его свойства? б) Установите, что существует, по крайней мере, один прямоугольник, стороны которого параллельны самому большому квадрату, охватывающий Пифагорово дерево полностью. Найдите такой прямоугольник наименьшей площади.

Вопрос о включении фракталов в основной курс математики средней школы пока является преждевременным. А вот ознакомление с фракталами на факультативных занятиях, спецкурсах в лицеях, для организации учебно-исследовательской работы учащихся, через вузовские курсы математики и информатики – весьма перспективно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Мандельброт, Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

2. *Балханов, В.К.* Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления / отв. ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета. 2013. – 224 с.

3. *Божокин, С.В.* Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ РЕСУРСОВ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Торебек Ерлан Жандарбекулы
докторант кафедры «Математика»
Аширбаев Нургали Кудиярович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
Мадияров Нурлыбай Кокешович
кандидат педагогических наук, доцент
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова
Казахстан, г.Шымкент, ank_56@mail.ru

Аннотация. *Дидактические возможности использования компьютерных ресурсов в решающей мере зависят от правильной организации учебной работы учащихся. Используя программно-педагогические средства, учитель обязан в каждом конкретном случае определять, в каком порядке целесообразнее их применение во время урока так, чтобы стимулировать мыслительную деятельность школьников.*
Ключевые слова: *процесс обучения геометрии, компьютерные ресурсы, стереометрия, учитель математики*

DIDACTIC OPPORTUNITIES OF USING COMPUTER RESOURCES IN TEACHING THE GEOMETRY OF STUDENTS OF SENIOR PUPILS SECONDARY SCHOOLS

Torebek Erlan Zhandarbekuly
doctoral student of the department "Mathematics"
Ashirbaev Nurgali Kudiyarovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Madiyarov Nurlybay Kokeshovich
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor
South Kazakhstan State University named after M. Auezova
Kazakhstan, Shymkent, ank_56@mail.ru

Abstract. *The didactic possibilities of using computer resources to a decisive extent depend on the correct organization of the educational work of students. Using software and pedagogical tools, the teacher is obliged in each case to determine in what order it is more expedient to use them during the lesson so as to stimulate the mental activity of schoolchildren.*
Keywords: *geometry learning process, computer resources, stereometry, mathematics teacher*

В Послании «Новые возможности развития в условиях четвертой промышленной революции» от 2018 года первого Президента Республики Казахстан Н.А.Назарбаева отмечается в качестве одной из важнейших задач следующая: «Необходимо усилить качество преподавания математических и естественных наук на всех уровнях образования. Это важное условие для подготовки молодежи к новому технологическому укладу. Содержательность обучения должна гармонично дополняться современным техническим сопровождением. Важно продолжить работу по развитию цифровых образовательных ресурсов, подключению к широкополосному Интернету и оснащению видеооборудованием наших школ».

В стратегическом плане развития страны до 2020 года указано, что электронное обучение является приоритетным направлением радикальной модернизации образования в направлении информатизации системы образования.

Действительно, одной из актуальных проблем современной теории и методики обучения математике является выявление возможностей компьютерных ресурсов в повышении качества математического образования школьников и разработка методики их применения при обучении в общеобразовательной школе.

Геометрия – одна из древних наук. Источники, дошедшие до нас из глубины веков, доказывают, что люди использовали геометрические факты в 2000 годы до н.э. Геометрия как наука сформировалась в древней Греции в VII-II в.в. до н.э. Проблемы обучения геометрии, проблемы методики обучения геометрии начались с времен Евклида, Архимеда и т.д. и находились в поле зрения ученых и педагогов различных стран и народов.

Новый этап в общем развитии педагогической науки, особенно геометрии, поставил перед человечеством задачу совершенствования преподавания и методики обучения. Проблема методики преподавания геометрии в общеобразовательной школе сегодня особенно актуальна в связи с внедрением информационных технологий. Широкое использование электронно-вычислительной техники в сфере образования дает возможность совершенствовать и повышать эффективность учебно-воспитательной работы, обеспечивать результативность педагогического процесса. При этом неизбежны изменения в стиле мышления, формах и методах всех видов учебной деятельности, а поэтому появляются определенные преимущества и в то же время - определенные проблемы. Их можно условно определить как проблемы системы педагог - учащиеся - информационные технологии. Изучение этих проблем в настоящее время занимает одно из центральных мест в теории и практике обучения.

В этой связи процесс образования требует внесения определенных корректив в стратегию использования компьютерных ресурсов в качестве средства обучения, а также в разработку соответствующих учебных программ и методику их использования.

Необходимо четко дифференцировать потребности и возможности использования информационных технологий как средств обучения (воспитания, развития) на каждой ступени целостной системы непрерывного образования. В системе дошкольного воспитания и в младших классах школы − это преимущественно компьютерные игры; далее информационные системы выступают в роли консультанта и тренажера; на последующих ступенях − это справочник и экзаменатор; на уровне профессионального обучения − партнер в решении конкретных учебных и производственных задач (в процессе курсового и дипломного проектирования) . Очевидно, при таком подходе существенно возрастает роль психолого-педагогических исследований, дифференцированных с учетом конкретных целевых установок компьютерного обучения, возрастных особенностей .

На современном этапе функционирование целостной системы непрерывного образования и управление этой системой немыслимо без использования информационных технологий. Вычислительная техника используется для достижения определенных целей (повышение производительности труда, облегчение условий труда, превращение труда в творческий процесс и т.д.). Использование информационных технологий в учебном процессе является настоятельной необходимостью современного общества. Компьютерная поддержка учебного процесса является продолжением и развитием многолетнего процесса внедрения технических средств в учебный процесс.

Применение компьютерных ресурсов в процессе обучения позволяет уменьшить нагрузку на преподавателя, улучшить качество преподавания, делает учебный процесс творческим и обоюдоинтересным. Применение компьютерных ресурсов в учебном процессе осуществляется в трех формах: как тренажер, как репетитор, выполняющий определенные функции за преподавателя, как устройство, моделирующее определенную среду и действия специалистов в ней. Наибольшие перспективы открываются при использовании информационных технологий в обучении для целей имитационного моделирования, которое создает условия для развития мышления, для формирования способностей к принятию решения. Работа с компьютерными средствами более эффективна тогда, когда она проходит в диалоговом режиме, обеспечивающем индивидуализацию обучения. Особенно эффективно сказывается использование компьютерных обучающих программ на уроках стереометрии.

Дидактические возможности использования компьютерных ресурсов в решающей мере зависят от правильной организации учебной работы учащихся. Используя программно-педагогические средства, учитель обязан в каждом конкретном случае определять, в каком порядке целесообразнее их применение во время урока так, чтобы стимулировать мыслительную деятельность школьников. В этой связи необходимо соблюдать дидактические требования к использованию компьютерных ресурсов:

1. Правильный выбор учебного материала (темы) для представления в компьютерном варианте. Не всякий вопрос стереометрии подается информатизации. Многие темы школьного курса геометрии требуют комплексного изложения. Здесь могут потребоваться предварительные объяснения учителя, работа с учебником, со средствами обучения (модели, таблицы и пр.).

2. Всякой работе с компьютерными обучающими программами должна предшествовать обстоятельная вступительная беседа учителя. Учащимся

следует определить порядок работы за компьютером, выписать на доске необходимую справочную информацию работы с клавиатурой, обратить внимание на основные вопросы изучаемого материала .

3. В процессе компьютерных занятий учителю нужно наблюдать за работой учащихся, спрашивать отдельных из них, как они понимают изучаемые вопросы. Если некоторые ученики будут встречаться с затруднениями, оказывать им помощь.

4. Работа за компьютером ни в коем случае не должна занимать весь урок (в соответствии с санитарно- гигиеническими нормами). Её нужно сочетать с другими формами и методами обучения.

Серьезное внимание нужно обращать на выработку у школьников умения самостоятельно осмысливать и усваивать новый материал с использованием информационных технологий.

Учитель заранее должен четко определить ход работы с компьютерными средствами обучения, чтобы "исследовательские" усилия школьников были целенаправленными и сосредоточены на решение основных вопросов изучаемой темы.

Наряду с неоспоримыми благами компьютер преподносит и целый спектр никогда не встречавшихся ранее проблем, решение которых невозможно без глубокой теоретической проработки. Необходимо четко дифференцировать потребности и возможности использования компьютера как средства обучения на каждой ступени целостной системы непрерывного образования.

Недостаточность обеспеченностью компьютерной техникой, низкая компьютерная грамотность подавляющего большинства учителей общеобразовательных школ, недостаточная поддержка программным обеспечением заметно ограничивает использование компьютерных технологий в учебном процессе и, в частности, при обучении стереометрии в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Таким образом, информатизация образования, внедрение в учебный процесс новых информационных технологий и подготовка соответствующих педагогических кадров относятся к приоритетным направлениям в области образования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Назарбаев Н.А.* Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства. Послание народу Казахстана. Астана. 14 декабря 2012 г.

2. *Марюков М.Н.*Использование компьютерных технологий при изучении геометрии в школе / / Педагогическая информатика. - №2. - 1998. - С. 21-28.

3. *Роберт И.В.*Влияние тенденций информатизации, массовой, глобальной коммуникации современного общества на профессиональное образование. // Ученые записки ИИО РАО. 2004. – Вып. 12. – С.3-14.

4. *Жайдақбаева Л.К.* Негізгі мектепте планиметрия курсын ақпараттық технология негізінде жетілдіру әдістемесі// автореф. Пед.ғыл.дисс. Алматы, Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, 2009.-156б.

5. *Абдуалиева М.А.* Болашақ математика мұғалімінің электронды дидактикалық құрал-жабдықтарды қолдануға әдіснамалық білімдерін қалыптастыру дис.... PhD:6D010900. – Шымкент, 2018. – 185б.

ORGANIZATION OF TEACHING GEOMETRY USING COMPUTER RESOURCES IN GENERAL EDUCATION SCHOOLS

Torebek Erlan Zhandarbekuly
doctoral student of the department "Mathematics"
Rakhymbek Dosymkhan
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor
Abdualiyeva Marzhan Amirbekovna
PhD Doctor, senior teacher
South Kazakhstan State University named after M. Auezova
Kazakhstan, Shymkent, Abdualieva82@mail.ru

Abstract. *The article is based on the basic principles of the organization of geometry teaching with the use of information technology at the general education school.*
Keywords*:* *geometry learning process, computer resources, stereometry, mathematics teacher.*

ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ РЕСУРСОВ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛАХ

Торебек Ерлан Жандарбекулы
докторант кафедры «Математика»
Рахымбек Досымхан
доктор педагогичских наук, профессор
Абдуалиева Маржан Амирбековна
PhD, старший преподаватель
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова
*Казахстан, г.Шымкент***,** Abdualieva82@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены основные принципы организации обучения геометрии с использованием компьютерных ресурсов в общеобразовательной школе.*
Ключевые слова: *процесс обучения геометрии, компьютерные ресурсы, стереометрия, учитель математики.*

The study of the definition of "lesson" in the major literature on didactics, methodology and pedagogical technologies implements the work of the whole, logically completed part of the educational process with students of the same age and level of preparation. It is characteristic of the following symptoms:

− Availability of specific education, upbringing and development goals.

− Selection of the specific training material and levels of its development in accordance with the set objectives.

− Achieving the set goals by selecting suitable training tools and methods.

− Organization of appropriate educational activities of students.

The content of the lesson is selected according to the objectives. It is clarified with the help of curricula, textbooks and methodological tools.

In order to achieve the goals set out in the actual material, the appropriate teaching tools and methods are used. The effectiveness of their choice is inaccessible to the traditional and non-traditional, general and specific teaching methods. Each type of learning tool, approach, and methodologies corresponds to the type of organization that is defined by the relationship between teachers and students.

Intensive introduction of personal computer systems will allow them to be used as an effective learning tool. However, the use of information technology in teaching mathematics at the general education school requires special attention.

In order to use all the advantages of the information technology in comparison with the book, there is a need to develop a new methodology of the learning process (or at least recent improvements). The main problem of teaching informatics is the creation of dialogue-training programs. The teacher continues to be the principal leader and organizer of mathematics teaching. The computer is a powerful new teaching and learning appliance that significantly increases labor productivity both by the teacher and by the individual. In the middle of the teacher and the machine, there is a symbiosis in which everyone can do the job. The leading role remains in the teacher. The main role of information technology in the learning process is the expansion of student communication with the student. Therefore computer teaching program offers a range of elementary learning functions and it is desirable for the teacher to concentrate on more complex services. For example, interpretation of complex transformations, important mathematical regularities, and some logical judgments.

Information technology gives the opportunity to work with the best teachers and to teach their students the ways of individual learning. Therefore, our methodology of our teaching informatization has some of the latest advances in traditional teaching methods. It is important to remember the special role of mathematical problems in the process of teaching geometry. Often, it is presented for didactic purposes, not in the interests of interrogation. Therefore, the problem of solving the problem is that the computer can not be used as a "decisive" report.

Everyone who has started to use the computer as a learning tool faces a serious problem - sooner or later - lack of teaching software. Programs are not based on the needs of the learning process, but on the basis of the programmer's qualifications, ie the "program-methodology" scheme. In fact vice versa: methodology - learning model - script - algorithm - should be a program.

"Pupils' Learning Activities can be divided into two main types: the general goals of learning, the promotion and justification of individual goals, the formation of incentives for teaching, the acquisition of new information, the processing of skills, skills and abilities. comprehensive educational and cognitive; controlling the student's academic performance in all its forms and at all stages of the learning process, evaluating the results of pupils' work, accounting their pupils, correcting their educational activities, and so on. understand-and-evaluate".

The main goals of the student control and evaluation activity are: activation of educational and cognitive activity; self assessment of the level of methods of study and cognitive activity and its results;cause the students to interact with each other; providing information to learners for self-planning of the new material development.

Instruments, methods and types of control-evaluation activities that contribute to the development of diagnostic, educational and educational, developmental and managerial activities of the students and have a positive impact on the field of motivation:

1) requirements for transparency, accuracy and fairness at each stage of knowledge, skills and abilities;

2) a level approach to evaluate the results of academic work due to complexity of educational activities and refusal to evaluate intermediate results in the development of educational material;

3) evaluation of the final development results by adding only positive results;

4) active involvement of students in self-analysis and self-evaluation of their educational and cognitive activity;

5) independence of pupils in choosing the pace of progress in learning material and the end result.

Purpose of this system of students' estimation of assessment is purposeful, selective selection of educational content at different stages of training. In each study topic, the system of key questions and calculations that is mandatory for all students is particularly apparent. Each lesson will have its own structure and structure. The lesson includes structured elements: lessons components, stages. The lesson is a set of different variants of interaction between elements of the teaching, which arises in the learning process and ensures its targeting.

The concept of didactic tasks, which is defined as the expected outcome of each stage of the lesson, focuses on the student's immediate area of development. There are various ways to choose the basic structural elements of the lesson. Depending on their content, there will be different levels of integrity of the lesson. The general didactic structure of the lesson is characterized by the following components: up-to-date knowledge and methods of action; formation of new knowledge and actions; with the help, ie, the formation of qualifications. In addition to demonstrating the original learning, the relevance of initial and new knowledge to the continuity of communication, application of initial knowledge in new situations, their duplication, etc. predictions.

The second component of the general didactic structure of the lesson provides the discovery of new concepts, the acquisition of new knowledge and pupils' learning and thinking, and their formation. Use of new knowledge and methods of professional development, their generalization and systematization, their practical application, etc. available through.

By analyzing the peculiarities of the use of computer tools and the didactic structure of the lesson in the teaching of mathematics in the general education school, it is possible to note the following types of lessons which are of utmost importance to use information technology: 1. Tutorial on the study of the material. 2. Lessons on the use of knowledge and skills. 3. Classification of knowledge and generalization of knowledge. 4. Lesson on verification and correction of knowledge and skills. 5. Lessons learned. 6. Practicum lesson. 7. Business Game Lesson.

Conducting such classes is related to the pre-development of the training material for the creation of dialogue programs.

It is desirable to separate the training material into smaller parts so that each part can be placed on the monitor screen, and the student should be able to answer long-term questions quickly enough to think over long texts. The program must have a control and learning element and a trained readout element. For each of these questions, we will consider three options: when the answer is correct; when it is wrong; The student does not know what to do and does not answer.

In the first case, a computer training program is called positive reinforcement and called a new task. In the second and third cases, first aid is provided, and the student is then allowed to continue his or her own work. If the pupil responds incorrectly or relies on help, he or she will be offered more help and then again be given the opportunity to act independently. This cycle can be repeated, as needed, by gradually increasing support until all the issues are solved. When a complete screening solution appears on the screen, the student must copy it to his / her notebook. In this case, the program provides a new, pupil report, similar to the calculation that has been solved. In this way, the material used is checked. If the report is used to verify knowledge and skills, it is clear that the scenario for the computer requires the student to use the information and to evaluate what kind of mistakes he / she has made. All this allows us to keep track of the students' knowledge and to evaluate the learning process.

The support provided in private segments should be pedagogically viable, with no formal, educational objectives. This makes it possible for students to point out the right channel. Information technology is not always needed at the time of learning; only all students need to actualize or master a certain part of knowledge, skills, and are required to have the same training, work speeds. Information technology can not be used when sharing knowledge with similar extracts and making it more difficult to implement.

First of all, the training program allows each of you to independently solve the problem. If the pupil is unable to work independently, he / she will receive a sufficient amount of time to undertake the actions he / she does. In the collective learning, this condition is usually broken. Each member of the team does not know how to take the first step in solving the problem, but rather promotes the classroom. Information technology helps not only the pupil, but also the teacher, especially in tracking students' knowledge. Controls also provide students with the knowledge and skills they have acquired, as well as the continuing control over the knowledge they need to master after completing the work, significantly reducing the time spent on the student being absorbed. When the main part of the class is engaged in a computer-based learning program, the teacher's strength and focus are exempt from the work with students who need additional explanations or more complicated reporting. There is also a program for incentives for dialogue and training programs. First of all, it is recommended that the student be given a repeat lesson before putting the price. Knowing this, the student takes the first "passage" of the passage with great care, and tries to master everything to get the best score during the second "passage".

In the process of dialogue, the computer is emotionally inaccurate to students' mistakes. It releases the pupil from fear and compression, and sometimes releases psychological discrepancies to the lowest level among pupils and teachers. Until computerization, two important types of children's activities in school are: training and play suddenly. The game was, as usual, forbidden, and forced students to read. Now, information technology has the capability of coordinating learning with the game and making the learning process even more enjoyable.

The complexity of the problem of introducing principles and methods of activization of cognitive activity of students using information technologies was considered: complexity of registration of dialectical contradictions underlying each of the methods of learning development; non-researched criteria and boundaries of formalized and non-formalized; controlling the student's cognitive process without strict algorithm. It is important to keep the creative mechanism of problem learning in its computer version. In the 10th and 11th grades it is necessary to provide conditions for the use of information technologies in the teaching of geometry, taking into account the impact of pupils' psychology and mentality.

The results of the use of information technology in the educational activities of senior pupils are analyzed and the reason for using geometry is that the use of information technology in educational activities is one of the conditions for increasing self-employment and, consequently, the activity of students. This is: Learners' active and motivated approach to the learning process; encourage students to work independently and actively; Systematization of control over educational process at all stages of the class; conscious attitude to the learning process; increasing the amount of educational information; in general learning skills.

The basic principles of organization of geometry teaching using information technologies in the general education school are based. The lesson is the basic type of organization of teaching geometry in the school with its features: availability of educational, educational and developmental goals; Selection and development of training materials; selection of teaching aids and methods; organization of appropriate educational activities of pupils. We discussed the structural elements of the lesson, the didactic components of the lesson. The choice of classroom lessons is based on the use of information technology.

LIST OF REFERENCES

1. *Maryukov M.N.* The use of computer technology in the study of geometry at school / / Pedagogical informatics. - No. 2. - 1998 .-- S. 21-28.

2. *Robert I.V.* The influence of trends in informatization, mass, global communication of modern society on vocational education. // Scientific notes of IIO RAO. 2004. - Issue. 12. - C.3-14.

3. *Ashirbayev N.K.*, *Torebek Y.Z.*, *Abdualiyeva M.A.*,*Madiyarov N.K.* Approaches to Teaching Geometry in Kazakhstan Schools Using Information Computer Resources for Educational Purposes. Scopus, Web of Science, European Journal of Contemporary Education. E-ISSN 2305-6746, 2018,7(3):DOI: 10.13187/ejced.2018.3.566, P. 566-580

4. *D. Thyer, J. Maggs*. Teaching Mathematics to young children. - London - New York: Uolt, Rinehart & Winston Ltd, 1971. - 365 c.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Усаева Айслу Шакиевна
Почетный работник общего образования Российской Федерации,
учитель высшей категории, учитель математики и информатики,
Николаевский филиал МКОУ «СОШ с. Солянка»,
*Россия, г. Астрахань,*usaeva.aislu@yandex.ru

Аннотация. *В статье обосновывается необходимость раннего изучения геометрии, анализируется курс наглядной геометрии для начальной школы и для младших классов средней школы, приводятся методические рекомендации из опыта реализации непрерывного геометрического образования.*
Ключевые слова: *непрерывность геометрического образования, курс наглядной геометрии.*

ON THE CONTINUITY OF GEOMETRIC EDUCATION IN SECONDARYSCHOOL

Usaeva Ayslu Sagievna
Honorary Worker of General Education of the Russian Federation,
teacher of the highest category, teacher of mathematics and computer science,
Nikolaev branch of MKOU " SOSH S. Solyanka»,
*Russia, Astrakhan,*usaeva.aislu@yandex.ru

Abstract. *The article substantiates the need for early study of geometry, analyzes the course of visual geometry for primary school and for the lower grades of secondary school, provides guidelines from the experience of implementing continuous geometric education.*
Keywords: *continuity of geometric education, course of visual geometry.*

В основу Концепции модернизации российского образования положены определенные, четко осознаваемые принципы. Назовем некоторые из них, не претендуя на полноту и завершенность перечня: всеобщность, непрерывность математического образования на всех ступенях средней школы; гуманизация; дифференциация и индивидуализация математического образования; усиление геометрической составляющей, преемственность и перспективность обучения математике; усиление практической направленности обучения математике.

Остановимся только на одном из них – непрерывности математического образования, в плане изучения геометрии в средней школе. Геометрия давно и прочно вошла в систему общего образования, так что исторические ссылки, подкрепляющие этот тезис, излишни. Цели и результаты обучения геометрии не ограничиваются рамками предмета, они намного более ценны и широки.

Принципиальным тормозом в деле геометрического образования является установившееся за многие годы положение системы обучения геометрии в школе, состоящее в том, что она изучается, начиная только с VII класса.

Хорошо известно, какой огромный путь в своем интеллектуальном развитии проходит ребенок в первые пять-шесть лет своей жизни [3].

Геометрический опыт шестилетнего ребенка настолько многогранен, что если говорить о развитии наглядно-геометрических представлений, то изучение геометрии в школе немногое может к нему добавить. Ребенок дошкольного возраста многое знает, многое умеет делать руками. Ему доставляют огромное удовольствие занятия геометрическими играми, упражнениями, буквально все, что связано с геометрией (рисование, конструирование, лепка и т.п.). Именно на этот возраст приходится пик, если можно так сказать, геометрической активности ребенка.

Эти особенности позволяют сделать вывод о том, что, начиная с 1 класса целесообразно знакомить учащихся с максимально разнообразным набором геометрических фигур, как плоских, так и пространственных. Необходимо сочетать комплексное использование средств наглядности с активной деятельностью школьников по конструированию геометрических фигур (из палочек, бумаги, проволоки, пластилина), которая потом перерастает в попытки сделать изображения.

Логика геометрической части программы по математике для I-V классов прочитывается легко: подготовить ребят к сложному систематическому курсу геометрии. Но остановившись на уровне знакомства с терминологией и с примитивными построениями, программа не использует в полной мере непосредственный интерес к геометрической деятельности в этом возрасте, ни богатый геометрический опыт детей, не ставит в качестве цели − развитие их геометрической интуиции. Как и следовало ожидать, включение элементов геометрии в программу младших классов привело к утрате ряда факторов, содействовавших развитию у школьников логического мышления, что отрицательно сказалось на процессе изучения систематического курса геометрии.

Следует отметить, что к 12-13 годам, когда ученик приступает к изучению геометрии, его непосредственный интерес к геометрии уже на излете. К сожалению, школьный учебник возбудить интерес к предмету не в состоянии: требования к систематическому изложению накладывают свой отпечаток независимо от выбранного в учебнике подхода – более аксиоматического или более наглядного. И это испытание разочарованием от первой встречи со школьной геометрией для многих определяет все дальнейшее их отношение к предмету.

Для реализации непрерывного изучения геометрии в нашей школе проводятся совместные заседания учителей математики и начальных классов. С целью усиления геометрической составляющей учителям начальных классов советуем реализовать взаимосвязанное изучение свойств плоских и пространственных фигур. При знакомстве с понятием площади, решать не только прямые, но и обратные задачи. Например, найти сторону квадрата, если он имеет ту же площадь, что и прямоугольник данного периметра, для прямоугольника известной площади определить возможные стороны.

В настоящее время уже существуют отдельные авторские коллективы, которые практически обеспечивают непрерывную линию школьного геометрического образования [4].На практике мы модифицируем предложенный курс таким образом.

На *первом этапе обучающиеся* знакомятся: с примерами плоских фигур – квадратом, прямоугольником, треугольником, окружностью; с примерами объемных – кубом, конусом, параллелепипедом, шаром; с симметрией.

На *втором этапе* учащиеся совершенствуют навыки графического изображения фигур. На качественно новый уровень поднимается измерительная деятельность учащихся. Учащиеся начинают выявлять связи между фигурами, общие свойства, родовые отношения. Эти знания пока имеют фрагментарный характер. Но уже формируется способность учащихся анализировать чертежи фигур, расширяется запас терминов.

На *третьем этапе* приоритетным направлением становится формирование метрических представлений. На этом этапе моделирование включает в себя практически все приемы конструктивно – геометрической деятельности.

Дедуктивное построение школьной геометрии, с одной стороны, представляет собой неоценимый по важности материал для развития логического мышления учеников, а с другой – создает разрыв между психологической готовностью ребенка успешно осваивать на пропедевтическом уровне мир пространственной геометрии и теорией стереометрии. Такой разрыв объективно диктует некоторое отступление от строгого дедуктивного изложения курса геометрии в школе.

При подходе к реализации непрерывного изучения геометрии используем в своей работе фрагменты занятий для внеурочной работы по теме: «Симметрия и их приложение», которые можно найти в книгах [1], [2].

Таким образом, программа непрерывного изучения геометрии и ее реализация демонстрируют один из вариантов обеспечения преемственности в обучении геометрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.*Аммосова Н.В.* Общие проблемы развития творческой личности школьника 5-6 классов при обучении математике: Методические рекомендации. – Астрахань: АОИУУ, 2005.

2. *Аммосова Н.В.* Развитие творческой личности школьника при обучении математике: Учебное пособие. – Астрахань: Издательство АИПКП, 2006.

3.*Возрастные и индивидуальные особенности* образного мышления учащихся/Под ред. И.С. Якиманской. –М., 1996.

4. *Долбилин Н.П., Шарыгин И.Ф.*О курсе наглядной геометрии в младших классах. – М.: Дрофа, 1994.

УРОВНИ СФОРМИРОВАННОСТИ СИСТЕМНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ В КУРСЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Шило Надежда Григорьевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры социальной работы,
Новосибирский государственный педагогический университет,
Россия, г. Новосибирск, shilo_ng@mail.ru

Аннотация. *В данной статье представлены уровни сформированности системности геометрических знаний учащихся средней школы на основе анализа уровней усвоения знаний, критериев их сформированности и аспектов учебно-образовательного процесса*
Ключевые слова: *воспроизводящий, конструктивный и творческий уровни сформированности системности геометрических знаний*; образовательный, воспитательный и развивающий аспекты учебно-образовательного процесса

LEVELS OF SYSTEMATIC GEOMETRY KNOWLEDGE BUILDING OF STATE SECONDARY SCHOOL PUPILS

Shilo Nadezda Grigorievna
candidate of pedagogical science, associate professor, associate professor
of the Social Work department, Novosibirsk State Pedagogical University,
Russia, Novosibirsk city, shilo_ng@mail.ru

Abstract. *The article says about levels of systematic geometry knowledge building of state secondary school pupils based on the analysis of levels of building knowledge, criteria of their building and aspects of educational and training process.*
Keywords: *reproducing, constructive and creative levels of systematic geometry knowledge building; training, educative and developmental aspects of educational and training process.*

С целью определения уровней сформированности системности геометрических знаний учащихся средней общеобразовательной школы предварительно рассмотрим следующие три уровня *знаний* учащихся с точки зрения их систематизированности:

–уровень *фрагментарных* знаний. Он характеризуется знанием отдельных компонентов системы. Отсутствует понимание учащимися места элементов в системе; необходимые связи между элементами системы.

–уровень *частичной систематизации.* Он является промежуточным между первым и третьим уровнями. При этом учащихся не систематизируют свои знания в обобщенном виде, но систематизируют их на уровне конкретных представлений;

– уровень *систематизированных знаний.* Это наиболее высокий уровень. Он характеризуется пониманием целостности системы, пониманием места отдельных элементов в системе, наличием необходимых связей между элементами системы.

Будем считать, что *система геометрических знаний сформирована*, если учащийся понимает ее системообразующую основу, место элементов в системе и наиболее важные связи между ними. Так, системообразующей основой геометрии является дедуктивный метод ее построения и изложения. Элементами этой системы являются понятия (их определения), аксиомы и теоремы.

Для конкретизации уровней сформированности системности геометрических знаний учащихся средней общеобразовательной школы проанализируем общепризнанные в дидактике и педагогике (Д. Н. Богоявленский, П. Я. Гальперин, И. Я. Лернер, Н. А. Менчинская, Т. И. Шамова и др.) *три уровня усвоения знаний*:

− *воспроизводящий* (репродуктивный), основная функция которого состоит в актуализации опорных знаний учащихся, в установлении взаимосвязей между новыми и ранее изученными понятиями, фактами.

В роли методических принципов, позволяющих качественно проанализировать рассматриваемый материал, на первый план выдвигаются:

а) принцип значимости для усвоения нового материала;

б) принцип прочности знаний выдвигаемых вопросов.

− *конструктивный* (продуктивный или частично-поисковый), который должен обеспечить усвоение целой системы или цикла понятий, изучаемых в течение длительного времени и составляющих содержание достаточно обширных разделов программы. Основным принципом реализации данного уровня является принцип систематичности знаний;

− *творческий (*исследовательский), способствующий тематическому обобщению системы основных понятий и фактов.

Методическими положениями усвоения учебного материала по окончании его изучения являются: а) принцип целостности; б) принцип структурности; в) принцип иерархичности; г) принцип динамичности.

Будем полагать, что указанные уровни усвоения знаний являются уровнями сформированности системности геометрических знаний учащихся, и в соответствии с ними выделим *критерии* их сформированности в виде определенных умений:

–определять понятие через указание рода и видового отличия, отличать существенные признаки от второстепенных, находить общие признаки у ряда объектов;

–устанавливать межпонятийные связи (отношения), используя круги Эйлера;

– классифицировать изучаемые объекты по выделенным признакам (основаниям);

–составлять «родословную» теорем; различать свойства понятий от признаков, т.е. определять необходимые и достаточные условия;

– устанавливать причинно-следственные связи между теоремами, аксиомами и теоремами, теоремами и их следствиями;

– устанавливать взаимосвязь понятий и суждений в рамках, как отдельного учебного раздела, так и всего курса учебного предмета;

–представлять теоретический материал в целом, понимать дедуктивный метод построения геометрии.

Итак, рассмотрим все три уровня сформированности системности геометрических знаний учащихся средней школы с учетом критериев их сформированности.

Образовательный аспект

1. *Воспроизводящий уровень*: указывают признаки понятий, но не отличают существенные признаки от второстепенных; имеют представление о родовидовом строении понятий, суждений, выполняют его по образцу; устанавливают по шаблону межпонятийные связи (круги Эйлера); ситуативно различают равнозначные, подчиненные, противоположные и противоречащие суждения; имеют расплывчатые представления о следствиях, свойствах и признаках; примерно устанавливают базисные суждения (теоремы, свойства, признаки); могут с помощью учителя подводить объект под понятие на основе признаков; непосредственно по образцу делают умозаключения, применяют правила вывода; эпизодически приводят примеры (чаще из учебника или изложения учителя); затрудняются устанавливать внутри предметные и межпредметные связи

2. *Конструктивный уровень*: знают существенные признаки понятий, отличают основные признаки от второстепенных, до пускают незначительные неточности при их перечислении; строят «Древо Порфирия» и «родословную» теорем при помощи учителя; при содействии учителя определяют межпонятийные связи (круги Эйлера); понимают сходства и различия между равнозначными, подчиненными, противоположными и противоречащими суждениями; при установлении различия между следствиями, свойствами и признаками нуждаются в помощи учителя; при помощи учителя устанавливают базисные суждения (теоремы, свойства, признаки); с помощью учителя подводят объект под понятие на основе признаков; делают умозаключения, применяют правила вывода при незначительной помощи учителя; приводят единичные примеры для подтверждения сказанного (чаще всего из учебника); устанавливают только ближние внутри предметные и межпредметные связи.

3. *Творческий уровень*: знают существенные признаки понятий, могут последовательно их перечислить; умеют самостоятельно строить «Древо Порфирия» для понятий, а так же «родословную» теорем; объясняют и устанавливают межпонятийные связи (тождества, подчинения, соподчинения и т.д.); явно устанавливают сходства и различия между равнозначными, подчиненными, противоположными и противоречащими суждениями; умеют различать следствия, свойства, признаки; самостоятельно устанавливают базисные суждения; подводят объект под понятие на основе признаков или при осмысленном сравнении с другими объектами; при помощи умозаключений умеют выводить новые знания; при помощи умозаключений умеют выводить новые знания; приводят необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно установленные; устанавливают внутри и межпредметные связи.

Воспитательный аспект

(наличие у ученика настойчивости, воли, организованности и инициативности)

1. *Воспроизводящий уровень*: ситуативно проявляют самостоятельность в установлении причинно- следственных связей; пытаются вникнуть в логическое строение учебного предмета; проявляют чаще всего ситуативный интерес, связанный с новизной познавательного объекта, интерес быстро возникает и быстро исчезает в определенных ситуациях.

2. *Конструктивный уровень*: эпизодически проявляют самостоятельность в установлении причинно- следственных связей; при содействии учителя или учебника представляют логическое строение учебного предмета; проявляют познавательный интерес, связанный со стремлением глубже ознакомиться с явлениями, познать связи между ними, расширить свои знания.

3. *Творческий уровень*: проявляют самостоятельность в установлении причинно- следственных связей; ясно осознают логическое строение учебного предмета; проявляют устойчивый интерес к теоретическому осмыслению изучаемых объектов и к процессу учебно-познавательной деятельности.

Развивающий аспект

1. Воспроизводящий уровень:

– при *сравнении* излагают мысли об одном понятии, потом о другом;

–при *анализе* выделяют внешние, очевидные стороны и свойства объектов;

– *обобщают* на конкретном примере; не владеют умением *выделять главное* в достаточной мере; ситуативно устанавливают линейные связи (связи следования) в учебном материале (чаще по учебнику) и строят одномерно-линейные связи по образцу; имеют представление о линейно-структурных связях; линейные связи изложения учителя (учебника) учебного материала идентичны линейным связям изложения (развертывания) учеником; эпизодически проводят типологию, классификацию, вообще упорядоченность между понятиями и суждениями; испытывают затруднение при установлении иерархии знаний, а также качественно новых связей и отношений между ними; целостное представление теоретического материала отсутствует.

2. *Конструктивный уровень*: производят сравнение понятий, но не по всем необходимым признакам; анализируют внешние и скрытые стороны и свойства объектов; затрудняются при анализе связей и отношений; обобщают на основе типичного, но не всегда последовательны; при выделении главного в учебном материале нуждаются в помощи учителя; наблюдается стремление к установлению линейных связей в учебном материале, и при поддержке учителя строят одномерно-двумерно-линейные связи; пытаются установить линейно-структурные и собственно-структурные связи между понятиями и суждениями при помощи учителя; предложенные линейные связи в сознании ученика преобразуются в объемные (структурно-содержательные), далее в линейные связи изложения, которые могут быть не одинаковы с предложенными; проводят типологию, классификацию, упорядоченность между понятиями и суждениями при помощи учителя; устанавливают частичную иерархию знаний и

качественно новых связей и отношений между ними; целостное представление обнаруживают при содействии учителя.

3. *Творческий уровень*: производят сравнение понятий по системе существенных признаков отличия и сходства, с указанием цели и вывода; при анализе выделяют не только внешние, но и скрытые стороны и свойства, связи и отношения; логично обобщают по системе существенных признаков; умеют выделять главное в учебном материале; осмысленно устанавливают линейные связи учебного материала и умеют самостоятельно устанавливать линейно-структурные и собственно-структурные связи между понятиями и суждениями; предложенные линейные связи в сознании ученика преобразуются в объемные и далее в линейные связи изложения (не обязательно идентичные с предложенными); умеют самостоятельно выявлять типологию, классификацию, упорядоченность между понятиями и суждениями; умеют самостоятельно устанавливать иерархию знаний и качественно новых связей и отношений между ними; имеют целостное представление учебного материала, адекватно научной теории.

Таким образом, уровни сформированности системности геометрических знаний учащихся являются важнейшим фактором повышения эффективности и оптимизации геометрического образования в средней школе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Шило Н. Г.* Формирование системности знаний учащихся на заключительном этапе решения геометрических задач /Автореферат дис. на соискание ученой степени кандидата педагогических наук специальность 13.00.02 – теория и методика обучения математики /М.: МПГУ, 1997.− 17 с.

2. *Шило Н. Г.* Дидактические аспекты формирования системности в деятельности учителя в процессе обучения // Актуальные проблемы математики, информатики и образования. – М.: МПГУ, 2007. – 386 с. С. 378 –382

3. *Шило Н. Г.* Актуализация системно-деятельностного подхода в процессе образования / Сборник трудов VI Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 24-26 апреля 2013 г.) / под общ. ред. Р. А. Утеевой. – Тольятти: ТГУ, 2013. – 319 с.: обл. С.205– 209.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕМЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Гераськин Михаил Иванович
доктор экономических наук, кандидат технических наук, профессор,
заведующий кафедрой математических методов в экономике,
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева
(Самарский университет), geraskin.mi@ssau.ru
Клентак Анна Сергеевна
кандидат технических наук, доцент кафедры теплотехники и тепловых двигателей,
Самарский университет, anna_klentak@mail.ru
Клентак Людмила Стефановна
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математических методов в экономике,
Самарский университет, liudmila_klentak@mail.ru
Россия, г. Самара

Аннотация. *В статье на примере практического занятия показана возможность для развития способности к самоорганизации и самообразованию у современных студентов технического вуза. Практические и лабораторные занятия позволяют продемонстрировать прикладной характер геометрии, линейной алгебры, линейного программирования. Данная проблема актуальна в связи с модернизацией отечественного образования в период перехода к профильному обучению.*
Ключевые слова: *профильное обучение, геометрия в высшей школе, междисциплинарные связи.*

METHODICAL ASPECTS OF THE EMPLOYMENT ON THE THEME “GEOMETRIC INTERPRETATION AND GRAPHIC SOLUTION OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS”

Geras'kin Mikhail Ivanovich
doctor of economic Sciences, candidate of technical Sciences, Professor, head of the Department of mathematical methods in Economics, Samara national research University named after academician S. P. Korolev (Samara University), geraskin.mi@ssau.ru
Klentak Anna Sergeevna
candidate of technical Sciences, associate Professor of the Department of heat engineering and heat engines, Samara University, anna_klentak@mail.ru
Klentak Lyudmila Stefanovna
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor of mathematical methods in Economics, Samara University, liudmila_klentak@mail.ru
Russia, Samara

Abstract. *In the article on the example of a practical employment on the theme "Geometric interpretation and graphical solution of linear programming problems" the possibility for the development of the ability to self-organization and self-education of modern students of a technical University is shown. Practical and laboratory classes allow you to demonstrate the applied nature*

of geometry, linear algebra, linear programming. This problem is relevant in connection with the modernization of domestic education during the transition to specialized education.
Key words: *specialized education, geometry in higher education, interdisciplinary communications.*

«Как свидетельствует продолжительный опыт обучения математике студентов технического вуза, математическая подготовка является важнейшим условием формирования конкурентоспособного выпускника технического профиля на современном рынке труда», – считает д.п.н. Г.М. Ильмушкин [4]. Математическое образование должно учитывать и будущую профессиональную деятельность. Необходимость осознания внутрипредметных и междисциплинарных связей обуславливается не только содержанием математического образования, но и потребностями профессиональных и специальных дисциплин.

В этой связи, академик РАН Ф. В. Гречников и профессор Д. М. Козлов отмечают: «Обеспечение ключевых для экономики страны высокотехнологических и потенциально конкурентоспособных отраслей машиностроения инженерными кадрами, способными внести заметный вклад в перевод отраслей на инновационный путь развития возможно за счет укрепления фундаментального компонента подготовки в течение всего срока обучения». «Поскольку фундаментальный компонент подготовки реализуется на протяжении всего срока обучения, то это означает, что фундаментальный компонент включен в содержание каждой учебной дисциплины» [5]. Вместе с тем, основа фундаментального компонента подготовки закладывается при изучении, прежде всего математики, в том числе геометрии.

Базовые геометрические знания весьма необходимы для изучения дисциплины «Линейное программирование» студентами 1 курса бакалавриата по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика», особенно при изучении темы «Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования (ЗЛП)». Обратимся к учебным пособиям «Линейное программирование» [1] и «Линейное программирование. Выполнение расчетов в табличном процессоре Excel» [2]. В первом из них приводятся краткие сведения из теории линейного программирования, а также представлены разработанные практические занятия по изучаемой дисциплине. Во втором предложены разработки лабораторных занятий.

Основной задачей высшего учебного заведения, как было отмечено выше, является выпуск квалифицированных конкурентоспособных специалистов, способных к инновационной деятельности, самоорганизации, самообразованию и саморазвитию [3]. Разработанные практические и лабораторные занятия ориентированы на активные методы овладения знаниями: сформулирована проблема, самостоятельно анализируются пути ее решения для нахождения оптимального результата и доказательства его верности.

Рассмотрим методику проведения практических занятий по дисциплине «Линейное программирование» на примере заявленной выше темы, использующей базовые знания, как планиметрии, так и стереометрии. Самостоятельная подготовка к практической и лабораторной работам позволяет продемонстрировать прикладной характер разделов геометрии и поэтому приобретает особое значение в период перехода к профильному обучению.

В начале занятия сообщается тема, в которой четко прослеживается междисциплинарная связь полученных в средней школе базовых знаний по геометрии, а также изучаемой студентами в первом семестре университета курса «Линейная алгебра» и дисциплины «Линейное программирование», преподаваемой во втором семестре. Затем перед студентами ставятся образовательная и развивающая цели практического занятия (5 минут).

Образовательная: углубить знания о геометрической интерпретации и графическом решении линейных неравенств и систем линейных неравенств на плоскости и в пространстве и привить умения использовать эти знания при решении ЗЛП.

Развивающая: способствовать развитию компетенций ОК-7 (способность к самоорганизации и самообразованию), ОПК-2 (способность находить организационно-управленческие решения и готовность нести за них ответственность) и ОПК-3 (способность работать с ПК как средством управления информацией) [6]

Цель лабораторной работы: освоение технологии графического решения задач линейного программирования в табличном процессоре Excel.

Образовательная цель достигается различными путями. Как считают, в частности, Л. Ю. Сергиенко и П. И. Самойленко, «главными их них являются наиболее оптимальное сочетание методов и средств обучения в конкретных условиях, подбор примеров и задач, способствующих развитию познавательной самостоятельности учащихся и интереса к предмету, выбор активизирующих приемов и т.д.» [7]. Включение в проведение практического занятия изучения элементов лабораторной работы по данной теме способствует достижению более продуктивного ее выполнения в пределах установленного времени.

Обеспечение занятия.

1. Учебные пособия [1,2]. 2. Персональный компьютер. 3. Чертежные инструменты.

Методические рекомендации. Вид занятия: комбинированное. Обобщение и систематизация базовых знаний, умений, навыков по графическому решению систем линейных уравнений и неравенств, изучение графического метода решения ЗЛП и его геометрическая интерпретация, развитие перечисленных выше компетенций.

План занятия (2 урока продолжительностью 1 час 30 минут с перерывом).

1. Проверка домашнего задания. Раздать тетради с предыдущим домашним заданием и прокомментировать его выполнение. Выборочно собрать 5-10 работ с текущим домашним заданием (5 минут).

2. Повторение опорных знаний студентов по следующим вопросам: а) провести исследование линейного уравнения и дать его геометрическую

интерпретацию (обратить внимание на связь с базовым курсом школьной геометрии).

В качестве примера можно рассмотреть уравнения, приводимые к линейным [7]: $\frac{6x}{3x-1} = \frac{2x+1}{x}$ и $|x - 17| = 1$

б) вспомнить виды линейных уравнений и записать уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (обратить внимание на связь с дисциплиной «Линейная алгебра», изучаемой в первом семестре) (10 минут).

В качестве примера можно рассмотреть уравнение: $3x - 6y = 12$.

в) провести исследование решения системы линейных неравенств и дать его геометрическую интерпретацию (обратить внимание на связь с базовым курсом школьной геометрии) (10 минут).

В качестве примера можно рассмотреть следующие системы неравенств [1]:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 3. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$$

3. Изучение нового материала (совместно со студентами) (10 минут).

а) по учебному пособию [1] изучить стр. 40-44.

б) по учебному пособию [2] изучить стр. 35-41.

4. Ответить на контрольные вопросы (совместно со студентами) (7 минут): а) дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования; б) в какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения? в) какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции? г) на чем основан графический метод решения задачи линейного программирования? д) как определить по рисунку, имеет задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в $\pm\infty$? е) какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?

5. Подведение итогов первого академического часа пары (3 минуты).

6. Решение упражнений для самоконтроля (совместно со студентами) (25 минут).

В качестве примера можно рассмотреть задания 7.1 и 7.2 учебного пособия [1], в которых требуется найти графическим методом оптимальный план ЗЛП и дать его геометрическую интерпретацию:

$$7.1\ F_{min} = -2x_1 + 5x_2 \text{при} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24. \end{cases} \text{и } x_1 \le 0, x_2 \le 0.$$

$$7.2\ F_{max} = 3x_1 - 2x_2 \text{при} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28. \end{cases} \text{и } x_1 \le 0, x_2 \le 0.$$

7. Ознакомление с содержанием лабораторной работы как доказательной базы, порядком ее выполнения и требованиями к отчету и их обсуждение.

Возможность самостоятельной проверки найденного на практическом занятии решения (5 минут).

8. Применение знаний при решении типовых примеров и задач (7 минут).

В качестве примера можно рассмотреть любое из аналогичных заданий 7.3 - 7.6 учебного пособия [1], взять на проверку 5 работ.

9. Подведение итогов занятия (3 минуты).

10. Домашнее задание (5 минут). Учебное пособие [1]: п.8-9. Учебное пособие [2]: п.3. Решить оставшиеся задания из 7.3 - 7.6 и задачу 8 из пособия [1]. Выполнить домашнюю контрольную работу по теме: «Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования». Задание представлено в учебном пособии [1] на стр. 47.

Таким образом, в данной статье предлагается вариант планирования и проведения практического занятия, в процессе которого решается широкий круг задач: учебно-воспитательные задачи, обеспечение занятия средствами обучения, подбор учебного материала и выбор конкретной методики обучения. Разработанные практическое занятие и лабораторная работа, проводимые по данной теме, позволили продемонстрировать студентам связь геометрии, линейной алгебры и линейного программирования и их прикладной характер. Рассмотренная методика проведения практического занятия позволяет организовать аналогично самостоятельное изучение студентами всего учебного материала, обсуждение в группах полученных результатов, а также самостоятельный контроль усвоения знания, отработку умений и развитие ключевых компетенций ФГОС ВО.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гераськин, М. И.* Линейное программирование: учеб. пособие / М. И. Гераськин, Л. С. Клентак; под общ. ред. Л. С. Клентак – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 104с.

2. *Гераськин, М. И.* Линейное программирование. Выполнение расчетов в табличном процессоре Excel: учеб. пособие / М. И. Гераськин, Л. С. Клентак – Самара: Изд-во СГАУ, 2012. – 148с.

3. *Гречников, Ф. В.* Самоорганизация самостоятельной работы студентов. Пути совершенствования: монография / Ф. В. Гречников, Л. С. Клентак – Самара. Изд-во СНЦ РАН. 2018. - 164с.

4. Ильмушкин, Г. М. Особенности математического образования студентов вуза в современных условиях подготовки конкурентоспособного специалиста технического профиля // Известия Самарского научного центра РАН. Социальные, гуманитарные, медико-биологические науки. 2019. Т. 21, № 67. С. 16 – 21.

5. *Инновационные подходы в подготовке* специалистов для высокотехнологического машиностроения: монография / Ф. В. Гречников [и др.] – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. 188 с.

6. *Портал Федеральных государственных* образовательных стандартов высшего образования [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://www.fgosvo.ru

7. *Сергиенко, Л. Ю.* Планирование учебного процесса по математике: учеб.-метод. пособие для преподавателей сред. спец. учеб. заведений / Л. Ю. Сергиенко, П. И. Самойленко – М.: Высш. шк., 1987. – 424с.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ I СТУПЕНИ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Гостевич Татьяна Васильевна
кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой методики преподавания математики
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
*Беларусь, г. Могилев,*kafedra_mpm443@mail.ru
Лещенко Лариса Васильевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры методики преподавания математики,
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова,
*Беларусь, г. Могилев,*kafedra_mpm443@mail.ru

Аннотация. *В статье обосновывается необходимость осуществления геометрической подготовки студентов специальности «Начальное образование», описываются активные формы обучения студентов в процессе изучения учебных дисциплин и разработанных спецкурсов.*
Ключевые слова: *геометрическая подготовка,I ступень общего среднего образования.*

ABOUT GEOMETRIC TRAINING OF FUTURE TEACHERS I STAGE OF GENERAL SECONDARY EDUCATION

Gostevich Tatyana Vasilyevna
candidate of pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics Teaching Methods, Mogilev State A. Kuleshov University
Belarus, Mogilev, kafedra_mpm443@mail.ru
Leshchenko Larisa Vasilyevna
candidate of pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics Teaching Methods, Mogilev State A. Kuleshov University
Belarus, Mogilev, kafedra_mpm443@mail.ru

Abstract. *The article substantiates the need for geometric training for students of the specialty "Primary Education", describes the active forms of student learning in the study of academic disciplines and developed special courses.*
Keywords: *geometric training, I stage of general secondary education.*

В настоящее время система начального математического образования в Республике Беларусь находится в состоянии реформирования: обновляются цели, содержание, технологии обучения, причем центральное место в этом процессе занимает личность школьника. К современному обучению предъявляются требования не только передачи готовых знаний, формирования соответствующих умений и навыков, но и развития личности ребенка. Последнее становится возможным, если методы и средства обучения будут разрабатываться с учетом психологических особенностей ученика, а перспективы дальнейшего развития учащихся будут задаваться с опорой на имеющиеся достижения. Начальное образование – это фундамент общего среднего образования, а впоследствии и профессионального образования. Его характер, содержание, методы и формы во многом определяют судьбу человека, его будущую жизнь.

Младший школьный возраст является наиболее благоприятным для целенаправленного формирования личности ребенка, для развития его образных и логических компонентов мышления, интеллектуальных и творческих способностей. Поэтому ведущей целью математического образования в I—IV классах в Республике Беларусь является развитие личности учащегося средствами учебного предмета «Математика».

Основу начального курса математики составляет линия чисел и арифметических действий над ними. Линия величин, алгебраический и геометрический материал являются сопутствующими для арифметического материала. Важной задачей геометрической пропедевтики является развитие у младших школьников пространственных представлений в процессе знакомства с геометрическими фигурами (точка, прямая, угол, многоугольник и др.) и геометрическими телами (куб, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар), формирования практических умений, связанных с построением фигур и измерением геометрических величин.

К сожалению, школьная практика показывает, что на уроках математики не уделяется должного внимания целенаправленному развитию геометрического мышления младших школьников. Основной акцент делается на запоминание и воспроизведение учебного материала. Следует также отметить, что чаще всего геометрические фигуры используются в качестве средства обучения и реже в качестве объекта изучения. При ознакомлении учащихся с геометрическими фигурами учителя делаютакцент на развитие у школьников умений измерять и находить длины отрезка и ломаной, периметр многоугольника, площадь геометрической фигуры с помощью палетки, вычислять площадь прямоугольника по длинам его сторон, т.е. на формирование измерительных и вычислительных навыков.Это приводит к тому, что развитие геометрического мышления в значительной мере идет стихийно. В результате при изучении систематического курса геометрии учащиеся испытывают большие трудности, их интерес к предмету постепенно угасает.

Одной из причин такого положения, по нашему мнению, является низкий уровень геометрической подготовки в вузе будущих учителейIступени общего среднего образования. В последние годы особенно видны пробелы в знаниях первокурсников по геометрии. У большинства из них не сформирована система геометрических понятий, они не знают их свойств, отношений между понятиями, допускают грубые ошибки в определениях геометрических понятий; лишь незначительная их часть знает определения некоторых геометрических фигур. Многие первокурсники не могут доказывать теоремы, строить умозаключения, делать выводы, выполнять элементарные построения на плоскости, не умеют правильно изображать геометрические тела и др. Заметим, что абитуриенты, поступающие на специальность «Начальное образование», на централизованном тестировании не сдают математику.

При традиционной системе подготовки в вузе не удается ликвидировать пробелы в геометрических знаниях студентов. Эффективность формирования у младших школьников геометрического мышления во многом зависит от уровня геометрической подготовки самого учителя, его методической грамотности, качества планирования учебных и факультативных занятий и умелого их проведения. Учитель также должен ориентироваться в содержании геометрии на второй ступени общего среднего образования, чтобы правильно сформировать элементарные геометрические представления у младших школьников. В связи с этим в вузе необходимо совершенствовать геометрическую подготовку будущих учителей первой ступени общего среднего образования.

В образовательном стандарте по математике для учреждений высшего образования геометрическая фигура на плоскости и в пространстве является центральным понятием. Согласно действующей учебной программе учреждения высшего образования по учебной дисциплине «Математика» для специальности «Начальное образование» студенты изучают раздел «Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве» во втором и третьем семестрах. Они должны знать определения и свойства геометрических фигур на плоскости, многогранников и круглых тел; основные задачи на построение геометрических фигур; уметь изображать на плоскости призму, пирамиду, шар, цилиндр, конус. На изучение этого раздела отводится 26 аудиторных часов. В дальнейшем при изучении учебной дисциплины «Методика преподавания математики и практикум по решению задач» студенты изучают раздел «Методика изучения элементов геометрии в начальном курсе математики» в объеме 8 аудиторных часов. Таким образом, анализ образовательного стандарта, учебных программ по общепрофессиональным дисциплинам позволяет увидеть, что геометрическому материалу отводится незначительная роль в методико-математической подготовке учителя, его содержание не обеспечивает возможности для понимания студентами основных идей современной геометрии, в том числе и школьной.

В учебный план подготовки студентов специальности «Начальное образование» включены дисциплины, обеспечивающие подготовку студентов к преподаванию математики в школе: введение в математику, логика, математика, методика преподавания математики и практикум по решению задач.

На кафедре методики преподавания математики учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова» накоплен определенный опыт по разработке комплексного подхода к изучению этих дисциплин и его практического применения в учебном процессе. Преподавателями кафедры были изучены образовательные стандарты и типовые программы по данным дисциплинам и на их основе разработаны учебные программы. Благодаря проделанной работе, система дисциплин, обеспечивающих методико-математическую подготовку будущих учителей

I ступени общего среднего образования, характеризуется взаимосвязью и преемственностью между отдельными ее звеньями. Учитывая слабую геометрическую подготовку многих первокурсников, во все перечисленные выше дисциплины включены разделы, содержащие геометрический материал.

На первом курсе для студентов дневной формы получения высшего образования был введен факультатив «Введение в математику». Основной целью факультатива является формирование математической грамотности студентов посредством содержания, подготавливающего к изучению профессиональных дисциплин. В содержание факультатива включен раздел «Геометрические преобразования (виды, определения, свойства, построение образов)», имеющего целью не только обобщить и систематизировать у первокурсников геометрические знания и умения, но и дать глубокие теоретические знания по геометрическим преобразованиям с формированием навыков геометрических построений. В дальнейшем, при изучении геометрического материала в учебной дисциплине «Математика» студенты уже не испытывают трудностей при построении геометрических фигур на плоскости; при изображении пространственных фигур на плоскости и построении их разверток.

Преемственность логико-математической подготовки понимается не только как расширение знаний, но и как единство терминологии, символического языка. В паре «логика-математика» логика выступает как основа изучения теоретико-множественных вопросов, алгебраического и геометрического материала математического курса. При изучении в логике таких разделов как «Понятие», «Суждение», «Умозаключение» и «Доказательство» студентам предлагаются различные задания, содержащие геометрический материал. Например, при определении понятий, знакомстве с явными и неявными определениями рассматриваются и определения в математической теории. Студентам предлагается проанализировать действующие учебники по математике для первой ступени общего среднего образования и выписать явные определения геометрических понятий, между геометрическими понятиями установить родовидовые отношения и др. В математике осуществляется углубление геометрических знаний, строится система геометрических понятий.

Логика и математика создают теоретические основы изучения всех вопросов учебной дисциплины «Методика преподавания математики и практикум по решению задач». Они являются фундаментом методической подготовки будущего учителя. При знакомстве с содержанием раздела «Методика изучения элементов геометрии в начальном курсе математики» применяются как традиционные формы проведения практических и лабораторных занятий, так и занятия в виде мастер-классов учителей, применяющих инновационные технологии в обучении элементам геометрии или презентаций проектов, созданных студентами, с их оценкой экспертами. Тематика проектов разнообразна: «Из истории возникновения и развития геометрии», «Основные геометрические формы», «Зарождение геометрии».

На практических занятиях большое внимание уделяется формированию у студентов умений проводить логико-дидактический анализ действующих учебников; анализу геометрических заданий и упражнений, включенных в учебники; разработке фрагментов конспектов уроков по изучению геометрического материала с использованием мультимедийных презентаций, электронных средств обучения: тренажеров, интерактивных упражнений; планированию и проведению внеклассных занятий по развитию геометрического мышления младших школьников [4, 5]. Как правило, лабораторные работы по методике преподавания математики проводятся на базе филиала кафедры. Студенты имеют возможность в реальном учебном процессе видеть, как учитель объясняет учащимся конкретный геометрический материал.

Особое значение в системе геометрической подготовки студентов занимают спецкурсы: «Методы решения нестандартных задач», «Современные тенденции совершенствования начального математического образования» и дисциплины по выбору: «Методика формирования логического мышления младших школьников» [1], «Технология проектного обучения на уроках и во внеклассной работе по математике» [5], помогающие студентам развивать свои познавательные способности, повышать творческую активность. Их содержание и методика проведения постоянно корректируется с учетом требований дидактической целесообразности; профессиональной ориентированности; содержательной наполненности и межпредметной взаимосвязи. При проведении практических занятий студентам предлагаются разработанные системы геометрических заданий и упражнений, выполнение которых способствует повышению уровня их геометрической подготовки. Данные спецкурсы и дисциплины по выбору предлагаются студентам как дневной, так и заочной форм получения высшего образования.

С учетом требований, предъявляемых к геометрической подготовке студентов, были разработаны новые учебно-методические материалы по геометрии [2, 6]. Их предназначение состоит в том, чтобы обеспечить учебный процесс как целостность, т. е. в единстве целей обучения; содержания; дидактического процесса; организационных форм обучения. Разработанные материалы размещаются в виртуальной образовательной среде MOODLE. Студенты могут самостоятельно ознакомиться с материалами лекций, практических занятий, выбрать нужный уровень сложности, выполнить тесты, что способствует дифференциации и индивидуализации процесса обучения геометрии.

Важное место среди форм работы студентов, включенных в учебный процесс, занимает исследование при написании курсовых или дипломных работ. Преподавателями кафедры разработаны темы курсовых и дипломных работ по изучению математического материала, в том числе и геометрического. Студентам, защитившим курсовые работы на высокие отметки, предлагается продолжить работу по той же тематике при написании дипломной работы. Целью дипломной работы является систематизация теоретических знаний и практических навыков по учебной дисциплине и применение их для решения определенных практических задач, овладение основами экспериментальной работы. В качестве примера приведем темы дипломных работ за последние три года: «Интеллектуальное развитие учащихся в процессе формирования геометрических понятий и представлений в 1–4 классах», «Использование моделей геометрических объектов в начальном курсе математики», «Логико-дидактический анализ системы геометрических понятий I ступени общего среднего образования», «Формирование конструктивных и измерительных компетенций у младших школьников при изучении геометрического материала», «Использование информационно-коммуникационных технологий при изучении геометрического материала в 1–4 классах». Дипломная работа студента представляет собой работу, логически связанную, аргументированную, и достаточно полно раскрывающую указанную тему. Результатом исследования является новое знание, которое носит характер личного субъективного открытия для каждого студента-исследователя [3].

Таким образом, геометрическую подготовку будущих учителей I ступени общего среднего образования определяют систематичность, непрерывность и разумное применение современных технологий, методов и приемов обучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гостевич Т.В.* Методика формирования логического мышления младших школьников при обучении математике: методические рекомендации к практическим занятиям по спецкурсу. – Могилев: МГУ имени А.А. Кулешова, 2002. 32 с.

2. *Гостевич Т.В.* О разработке учебно-методических материалов по геометрии для студентов педагогического факультета. / Т.В. Гостевич, Л.В. Лещенко / Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 27–29 ноября 2014 года / под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Из-во ТГУ, 2014. С. 50–53.

3. *Гостевич Т.В.* Исследовательская работа в системе методико-математической подготовки студентов педагогического факультета / Т.В. Гостевич, Л.В. Лещенко / Матеріали міжнародної навуково-методичної конференції «Проблеми математичної освіті» (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4–5 червня 2015 р. – Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. С. 309–310.

4. *Гостевич Т.В.* Подготовка будущих учителей к использованию электронных образовательных ресурсов в практико-ориентированном обучении математике в I–IV классах / Т. В. Гостевич, Л. В. Лещенко // Романовские чтения – 13 : сборник статей Международной научной конференции, посвященной 105-летию МГУ имени А. А. Кулешова, Могилев, 25–26 октября 2018 г. / под общ. ред. А. С. Мельниковой. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2019. С. 247–248.

5. *Лещенко Л.В.* Обучение студентов методике осуществления проектной деятельности при обучении математике во II—IV классах/ Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич // Современное образование : мировые тенденции и региональные аспекты : сборник статей IV Международной научно-практической конференции, 9 ноября 2018 года, г. Могилев / редкол. : М.М. Жудро [и др.] ; под общ. ред. Т.И. Когачевской. – Могилев : МГОИРО, 2018. С. 325–327.

6. *Математика: элементы геометрии*: учебно-методические материалы / составители: Т.В. Гостевич [и др.]. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2016. 52 с.

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ГЕОМЕТРО-ГРАФИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Евсеева Елена Геннадиевна
доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Донецкий государственный университет
ДНР, г. Донецк, e.evseeva@donnu.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены подходы к модернизации геометро-графической подготовки современного инженера. Предложен интегрированный курс начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии, отражающий профессиональную направленность геометро-графической подготовки студентов технического университета.*
Ключевые слова: *геометро-графической подготовки, начертательной, аналитической и дифференциальной геометрия; подготовка будущего инженера.*

NEW APPROACHES TO GEOMETRO-GRAPHIC PREPARATION OF TECHNICAL UNIVERSITY STUDENTS

Evseeva Elena Gennadievna
Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics
Donetsk State University
DPR, Donetsk, e.evseeva@donnu.ru

Abstract. The article discusses approaches to the modernization of the geometric-graphic training of a modern engineer. An integrated course of descriptive, analytical, and differential geometry is proposed, which reflects the professional orientation of the geometric-graphic training of students of a technical university.
Key words: geometric-graphic preparation, descriptive, analytical and differential geometry; training of the future engineer.

Говоря о геометро-графической подготовке, в первую очередь, возникает ассоциация с начертательной геометрией. Это справедливо и связано с тем, что более двух веков она была основой технического образования, так как ее положения позволяли инженерам выражать свои творческие мысли и визуально представлять свои изобретения в виде двумерных проекций в плоскости чертежа, что позволило реализоваться многим творческим задумкам и находкам.

В последние годы большое количество научных работ посвящено проблеме совершенствования геометро-графической подготовки студентов технического университета. Так, В.А. Рукавишников считает, что главной прогностической целью системы геометро-графической подготовки инженера является формирование пространственно-конструктивного мышления, включающего в себя владение визуально-образным геометрическим языком и компьютерными технологиями геометрического моделирования инженерных объектов [5]. Ж.А. Пьянкова доказывает необходимость формирования готовности студентов оперировать пространственными объектами в процессе изучения геометро-графических дисциплин [7]. В работе А.В. Полковой рассматривается формирование методической модели современного геометро-графического образования студентов технического вуза на основе фреймового представления знаний [6]. М.А. Егорова рассматривает методические особенности интеграции геометро-графических и профессиональных знаний студентов технических направлений на примере интегрированного курса «Геометро-графическая подготовка и инженерные основы специальности Машины и аппараты пищевых производств»[3].

В то же время, основа успешного усвоения студентами начертательной геометрии закладывается при изучении раздела «Аналитическая геометрия» курса высшей математики, изучаемого в техническом университете. При изучении этого раздела, прежде всего, формируются очень важные для будущего инженера умения: классифицировать геометрические объекты по их математическому описанию или графическому образу; описывать математически геометрические объекты по их изображению и характеристикам; мысленно манипулировать пространственными объектами, что способствует развитию важной для будущих инженеров мыслительной способности - пространственного мышления.

В работе [1] нами рассмотрена методика формирования образного мышления студентов технического университета при обучении математике, в которой ведущее место отводится вопросам формирования визуально-графических умений с использованием пакетов компьютерной математики. Действительно, сегодня во времена уникальных 3Д-возможностей компьютерной графики представления объемных объектов реального мира в виде виртуальных трехмерных электронных моделей, острая необходимость в технологии построения плоских проекций ушла на второй план, оставаясь лишь средством документирования реализуемых проектов. Поэтому, классическое содержание начертательной геометрии, как учебной дисциплины, в современных условиях становится не актуальным и справедливо подвергается критике.

Однако отказаться от науки, не проявившей каких-либо внутренних или внешних противоречий, и имеющей огромный гуманитарный потенциал было бы неправильно. Правильнее было бы выявить внутренние возможности начертательной геометрии, как современной науки, профессионально значимой для компетентности и личностного развития будущего инженера, и попытаться найти рациональное, современное ее содержание и технологии, актуальные в том числе, для формирования мировоззрения и адекватного отражения окружающего нас геометрического мира. В том числе в изучении и применении геометрических положений и свойств к виртуальной реальности, так активно сегодня развиваемой и применяемой. При этом следует внимательно рассмотреть возможность и перспективы слияния методов начертательной и аналитической геометрии.

Классический курс начертательной геометрии традиционно начинается темой «Методы проецирования», где рассматриваются вопросы возможностей и правил отображения пространственных объектов на плоскость чертежа. Данная тема остается актуальной, так как чертеж еще сохраняет позиции документа, отражающего информацию, необходимую для создания и контроля проектируемого изделия, объекта. Кроме того, пакеты САПР позволяют реализовывать как ортогональные, так и перспективные проекции, поэтому знания ортогонального и центрального проецирования необходимы и должны сохраниться в учебном курсе. Относительно разделов учебного курса, в которых рассматриваются такие понятия, как «точка», «прямая», «плоскость», вопросы их взаимного расположения, а также тема «Кривые линии», то очевидно, что здесь уже нет необходимости подробно рассказывать об октантах, проекциях и свойствах проекций. Теперь данные темы должны рассматриваться в аспекте основных понятий и положений о размерностях данных геометрических объектов и размерностях условий их взаимного расположения с применением методов конструктивных отображений пространств различных размерностей друг на друга.

Тема «Метрические задачи» содержала сведения о возможных способах и методах определения метрических характеристик, заданных на чертеже ортогональными проекциями геометрических фигур, и метрики пространственных отношений между ними. Сегодня данные характеристики, выражаемые линейными и угловыми величинами, легко определяются непосредственно по самой виртуальной 3D-модели с помощью простой функции «Измерить», и нет крайней необходимости определять их по проекциям. Поэтому тема «Метрические задачи» во времена, когда пространственные объекты могли быть изображены только своими проекциями на плоскости, была весьма актуальной и работа с комплексными чертежами была невозможна без знания этой важной темы. Сегодня острая необходимость в изложении данной темы отпала и может быть предложена к рассмотрению при наличии дополнительных учебных часов.

В традиционном курсе начертательной геометрии тема «Поверхности» содержала знания об образовании поверхностей, состоящие из сведений об определителе поверхности и самом способе ее образования. Такой наглядно-эмпирический подход в классическом курсе начертательной геометрии был направлен лишь на предоставление информации в основном об ортогональных проекциях поверхностей, их свойствах и особенностях. Тема «Поверхности» является одной из основных тем курса, и поэтому она должна сохраниться, но в ней должна появиться доказательная база состава определителя, т. е. должно объясняться и доказываться, что и при каком условии должно входить в состав определителя поверхности и на что это может повлиять. Кроме того, такой подход к теме «Поверхности» позволяет с доказательным обоснованием подойти и к теме «Пересечение поверхности плоскостью», относящейся к разделу «Позиционные задачи» со стороны понимания: «Почему в каждом конкретном случае результатом пересечения будет та или иная линия?».

Тема «Позиционные задачи» в традиционном курсе содержала информацию о способах нахождения проекций линии (точек) пересечения геометрических объектов. Как правило, данная тема вызывала у студентов сложность понимания. Возникавшие затруднения заключались в том, что на лекциях объяснялись способы построения проекций результатов пересечения, но совершенно не уделялось внимания виду и форме получаемых результатов пересечения. Дело в том, что главной задачей при изучении темы «Позиционный задачи» было научить студентов возможным способам нахождения проекций линий пересечения на комплексном чертеже. Современные графические автоматизированные системы, благодаря функции 3D-моделирования, обладают этой способностью, когда при создании геометрических объектов, результат их пересечения определяется явным образом на экране дисплея, а при получении с виртуальной модели ассоциативных проекций изображения линии (точек) пересечения определяются автоматически. Поэтому нет более необходимости в подробном изучении способов определения проекций линий пересечения объектов пространства. Инновационный подход к изучению материала о пересечении геометрических объектов должен состоять в исследовании получающихся в результате пересечения линий, в анализе возможных случаев пересечения одних и тех же объектов при изменении их взаимного расположения.

В качестве примера, который может быть предложен студентам как при изучении аналитической, так и начертательной геометрии, рассмотрим построение методом сечений гиперболического параболоида, задаваемого уравнением: $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$ (1)

Решение осуществим с помощью пакета символьной математики Wolfram Mathematica [3]. Методика визуализации графических объектов в этой программной среде описана нами в работе [2].

Найдем сечение поверхности, задаваемой уравнением (1) и плоскостью YOZ. Сечение будет описываться системой уравнений: $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{6}=z. \end{cases}$ (2)

Построим в среде Wolfram Mathematica сечение, описываемое системой (2). Для этого запишем следующие выражения:

$a1 := ParametricPlot3D[\{\{0,0,v\},\{0,v,0\},\{v,0,0\}\},\{v,-6,6\},$
$PlotRange \to \{\{-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\},\{-6,6\},\{-2,6\}\}];$
$a2 := ParametricPlot3D[\{\{v,0,0\},\{0,v,0\},\{0,0,v,\},\{0,v,6\},$
$\{0,-6,v+6\},\{0,6,v+6\},\{0,v/3,2/3\},\{0,-2,(v+6)/18\},$
$\{0,2,(v+6)/18\},\{0,v\,2/3,8/3\},\{0,-4,(v+6)2/9\},$
$\{0,4,(v+6)\,2/9\}\},\{v,-6,6\},PlotRange \to \{\{-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\},$
$\{-6,6\},\{-2,6\}\},\{-6,6\},\{-2,6\}\}];$
$a3 := ParametricPlot3D[\{\{v,0,0\},\{0,v,0\},\{0,0,v\},\{0,v,6\},$

$\{0, -6, v\ +\ 6\}, \{0, 6, v\ +\ 6\}, \{0, v/3{,}2/3, \}, \{0, -2, (v\ +\ 6)/18\},$
$\{0, 2, (v\ +\ 6)/18, \}, \{0, v\ 2/3{,}8/3, \}, \{0, -4, (v\ +\ 6)2/9\},$
$\{0, 4, (v\ +\ 6)\ 2/9, \}, \{0, v, v\text{^}2/6\}\}, \{v, -6, 6\},$
$PlotRange \to \{\{-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}, \{-6{,}6\}, \{-2{,}6\}\ \}, \{-6, 6\}, \{-2, 6\}\}];$
$a4 :=\ ParametricPlot3D[\{\{v, 0, 0\}, \{0, v, 0\}, \{0, 0, v\},$
$\{0, v, v\text{^}2/6\}\}, \{v, -6, 6\}, PlotRange\ \to\ \{\{-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}, \{-6{,}6\}, \{-2{,}6\}\ \},$
$\{-6, 6\}, \{-2, 6\}\} Show[a1, a2, a3, a4],$
где $a1$ – формирование системы координат с нужными параметрами (используя функцию ParametricPlot3D), $a2$, $a3$, $a4$ – сечение плоскостью YOZ, функция $Show[graphics, options]$дает возможность построить поверхность с дополнительными опциями. Полученное изображение показано на рис. 1 *а*).

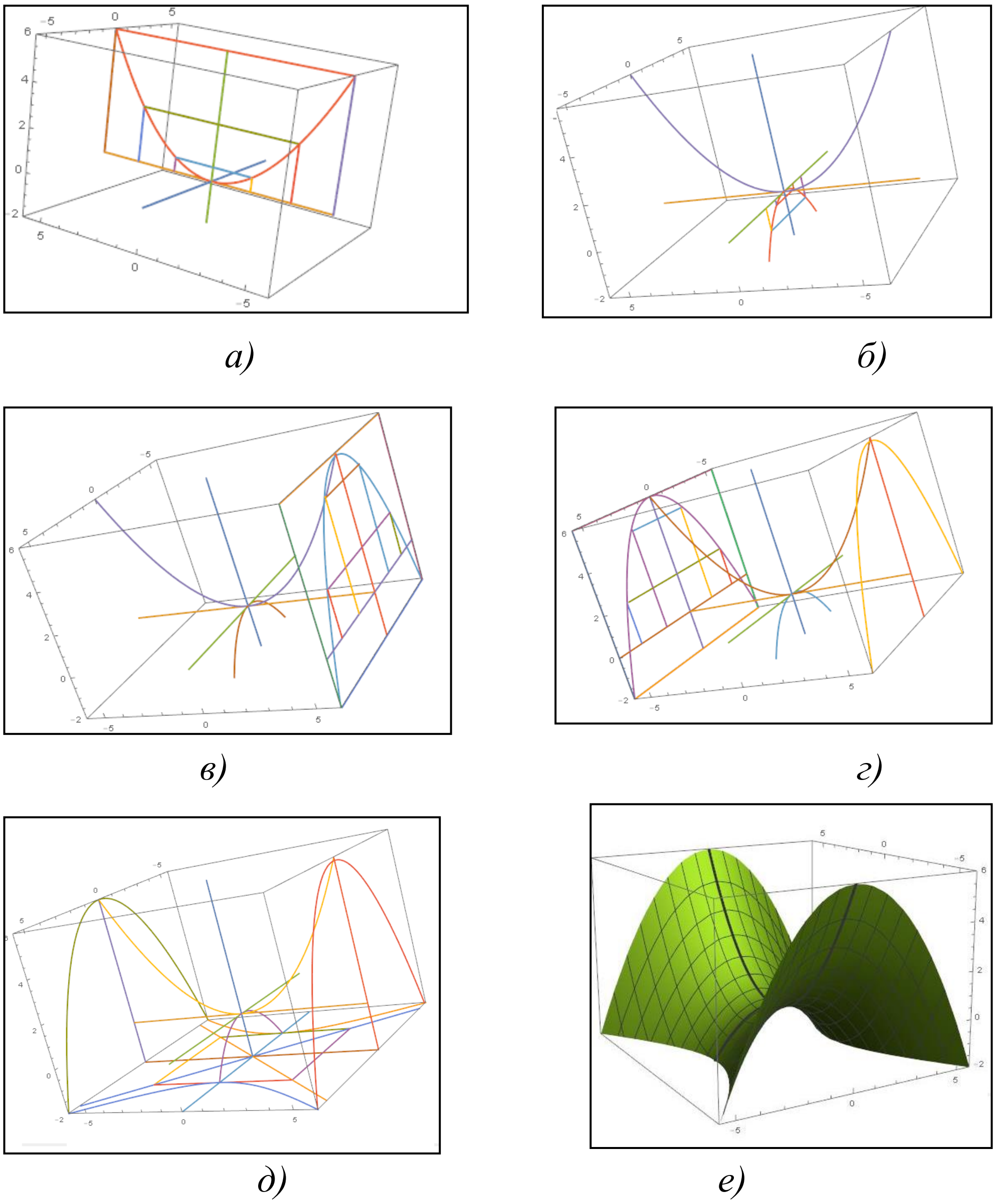


Рисунок 1 – Сечение поверхности $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$ *в программной среде Wolfram Mathematica плоскостями:*
а) $\mathrm{x} = 0$*; б)* $y = 0$*; в)* $y = 6$*; г)* $y = -6$*; д)* $z = -2$.

е) изображение гиперболического параболоида $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$.

На рисунках 1 б), в), г), д) приведено сечение поверхности $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$ в программной среде Wolfram Mathematica плоскостями $y=0$; $y=6$; $y=-6$; $z=-2$, а на рисунке 1 *е*) приведено итоговое изображение гиперболического параболоида (1).

Таким образом, начертательная геометрия из технической должна стать дисциплиной математического профиля, что является особенно важным для инженерного образования в условиях модернизации высшего профессионального образования. Предлагаемая дисциплина может носить название «Инженерная геометрия», что отражает её профессиональную направленность. Интегративное содержание этой дисциплины должны составить элементы аналитической, начертательной и дифференциальной геометрии. Важной особенностью изложения инженерной геометрии должно стать использование пакетов компьютерной математики для построения и исследования геометрических объектов.

Методологическими основой при разработке методики геометро-графической подготовки будущих инженеров должны стать интегративный и деятельностный подходы к обучению, позволяющие осуществить интеграцию дисциплин не только на уровне знаний, но и на уровне методов и способов действий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Евсеева Е. Г.* Методика визуализации математических объектов при обучении математике студентов инженерных специальностей / Е. Г. Евсеева, Б. В. Забельский // Сборник научно-методических работ. – Вып. 9. – Донецк : ДонНТУ, 2015. – С. 56-69.

2. *Евсеева Е. Г.* Формирование образного мышления студентов технического университета при обучении математике / Е. Г. Евсеева, Б. В. Забельский // Дидактика математики: проблемы и исследования: междунар. сборник научных работ. – Вып. 46. – Донецк : ДонНУ, 2017. – С. 38-47.

3. *Егорова М.А.* Методические особенности интеграции геометро-графических и профессиональных знаний студентов технических направлений : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / 4. Егорова Мария Александровна. – Оренбург, 2009. – 234 с.

5. *Информационный центр Wolfram Mathematica*: [Электронный ресурс]: Documentation Center. – Режим доступа: http://reference.wolfram.com/language/. – Заглавие с экрана. – Дата обращения 28.10.2019.

6. *Рукавишников В. А.* Инженерное геометрическое моделирование как методологическая основа геометро-графической подготовки в техническом вузе : дис. … докт. пед. наук : 13.00.08 / Рукавишников Виктор Алексеевич. – Казань, 2004. – 357 с.

7. *Полкова А.В.* Формирование методической модели современного геометро-графического образования студентов технического вуза : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / Полкова Анна Викторовна. – Москва, 2011. – 237 с.

8. *Пьянкова Ж.А.* Формирование готовности студентов оперировать пространственными объектами в процессе изучения геометро-графических дисциплин : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / Пьянкова, Жанна Анатольевна. – Екатеринбург, 2015. – 174 с.

ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ МЕТОДАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Клековкин Геннадий Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Россия, г. Самара, klekovkin_ga@mail.ru

Аннотация. *В статье анализируются перспективы применения интерактивной динамической системы GeoGebra при обучении будущих учителей математики методам изображений. Доказывается целесообразность расширения типологии традиционных учебных задач задачами на создание динамических моделей геометрических фигур и их комбинаций.*
Ключевые слова:*обучение геометрии, методы изображений, динамическая модель, интерактивная динамическая система GeoGebra.*

DYNAMIC MODELING IN THE INSTRUCTION ON DRAWING TECHNIQUES

Gennady A. Klekovkin
Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Russia, Samara, klekovkin_ga@mail.ru

Abstract. *The author of the article analyzes the prospects for using interactive dynamic system GeoGebra in teaching drawing techniques to pre-service teachers of mathematics. Being proved, is the feasibility of extending the typology of traditional training tasks to the tasks of creating dynamic models of geometric shapes and their combinations.*
Keywords: *geometry instruction, drawing techniques, dynamic model, interactive mathematical system GeoGebra.*

В федеральном проекте «Цифровая образовательная среда», входящем в состав стартовавшего национального проекта «Образование», фактически нигде в явном виде не представлена концепция содержательно-методического формирования этой среды, причем саму методологию внедрения современных цифровых технологий в основные образовательные программы планируется разработать только к апрелю 2020 года. В другом федеральном проекте, «Учитель будущего», нет ни слова о подготовке учителя в период его вузовского обучения.

Вместе с тем, не вызывает сомнений утверждение, что по-прежнему только учитель, глубоко знающий свой предмет, сможет обеспечить востребованное обществом качество образования.

Более того, уровень учебно-методических задач, которые он сможет решать в условиях цифровой образовательной среды, будет напрямую зависеть от уровня его предметно-содержательной и методической подготовки.

Используемые в образовательном процессе информационные средства и технологии можно условно разделить на общепредметные, на предназначенные для электронной поддержки обучения в родственных предметных областях и на предметно-ориентированные. Современные преобразования в профессиональной математической деятельности и практике обучения математике во многом обусловливаются появлением систем компьютерной математики и систем динамической геометрии (или интерактивных математических систем). Поэтому специфические особенности цифровизации образования в предметной области «Математика» будут, прежде всего, связаны с внедрением в учебный процесс именно этих программных средств автоматизации численных и символьных вычислений и визуализации математических объектов. Следовательно, сегодня у будущего учителя математики в период вузовского обучения должны быть сформированы умения и навыки использования этих инструментальных средств при решении учебно-математических задач из различных разделов математики. При этом важное место следует отвести практическому освоению интерактивных математических систем (ИМС), предназначенных для электронного сопровождения процесса обучения математике в средней школе. Пока такие системы главным образом изучаются в рамках элективных курсов и курсов по выбору, в лучшем случае используются на занятиях по элементарной математике. Вместе с тем, ИМС можно весьма эффективно применять при изучении практически всех разделов вузовского курса геометрии. Так, например, использование наиболее востребованной в последнее время среди российских учителей свободно распространяемой системы GeoGebra при обучении студентов методам изображений позволяет расширить традиционную типологию учебных задач и активизировать тем самым учебно-познавательную деятельность обучающихся при изучении базового курса геометрии.

В дальнейшем предполагается, что потенциальный читатель имеет определенные навыки работы в системе GeoGebra, в частности, знаком с основными способами построения стереометрических чертежей и умеет пользоваться средствами для создания динамических демонстраций. В случае необходимости описание инструментов и способов создания чертежей пространственных фигур и их комбинаций в среде GeoGebra можно найти в пособии В. А. Смирнова и И. М. Смирновой [3], а информацию о средствах динамического моделирования и анимации – в учебном пособии О. Л. Безумовой и др. [1].

Геометрические инструменты, расположенные на инструментальных панелях системы, позволяют строить в полотне 3D метрически определенные изображения плоских и пространственных фигур. В частности, на панели инструментов полотна 3D имеются инструменты для построения различных видов призм и пирамид, цилиндра, конуса и шара, а в раздел 3D каталога *Математические операции* входят команды для изображения додекаэдра, октаэдра и икосаэдра. Кроме того точки, плоскости и сферы можно задавать аналитически в строке ввода. Это дает возможность строить чертежи достаточно сложных комбинаций геометрических тел, встречающихся в школьных стереометрических задачах. В одних задачах чертеж удается построить непосредственно по условию задачи, в других – после ряда предварительных вычислений, а иногда – только после того, когда задача уже решена. При этом любая стереометрическая конструкция, созданная в полотне 3D в соответствии с установленными правилами, обеспечивает пользователю «взаимодействие» с нею в интерактивном режиме. Он может управлять ее размерами, изменять цвет и интенсивность окраски отдельных элементов, рассматривать конструкцию в разных ракурсах и ее анимировать.

Освоение студентами инструментов ИМС не требует больших временных затрат, расширение системы задач, традиционно предлагавшейся будущим учителям при изучении раздела «Методы изображений», задачами на построение чертежей с помощью таких систем усиливает профессиональную направленность обучения и отвечает целям федерального проекта «Цифровая образовательная среда». В качестве источника задач на построение геометрических тел и их комбинаций в среде GeoGebra можно рекомендовать учебное пособие [3].

Набор задач, предлагаемый в пособии [3], целесообразно дополнить задачами на создание динамических чертежей-моделей, в которых можно в установленных пределах варьировать исходные данные при сохранении самого алгоритма построения. Такие чертежи-модели позволяют оперативно визуализировать и экспериментально исследовать целые семейства родственных геометрических конфигураций. Основные виды и функции интерактивных динамических чертежей в обучении описаны В. Н. Дубровским в работе [2].

В ИМС GeoGebra основным средством для создания динамических чертежей и последующего управления ими является инструмент *Ползунок*, расположенный на панели инструментов. В некоторых случаях удобно также пользоваться инструментом *Точка на объекте*, позволяющим менять вид конфигурации «вручную», перемещая точку по объекту с помощью курсора.

Созданные однажды и сохраненные в формате ggb динамические чертежи-модели позволяют в дальнейшем существенно интенсифицировать процессы выполнения чертежей при решении задач. Иллюстрируем сказанное несколькими конкретными примерами.

Пример 1. В задачных материалах по стереометрии часто встречаются задачи на комбинации правильных призм (пирамид) и круглых тел. На рис. 1 на примере правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр, демонстрируется процесс создания универсальной динамической модели, позволяющей оперативно строить чертежи для любого n, а на рис. 2 – его результаты. Этот процесс отличается от процесса создания изображения комбинации для конкретного n только тем, что теперь первоначально нужно с помощью ползунка задать количество вершин правильного многоугольника, лежащего в основании призмы. Для этого во всплывающем окне ползунка выбирается опция *Целое число* и указывается интервал изменения этого числа (например, от 3 до 12).

Во многих случаях универсальную динамическую модель к родственным стереометрическим задачам удается сконструировать как с помощью ползунков, так и с помощью инструмента *Точка на объекте*.

Пример 2. В сферу всегда можно вписать конус, если его высота меньше диаметра сферы. На рис. 3 при создании динамической модели для автоматического получения чертежей к конкретным задачам на конус, вписанный в сферу, использован ползунок, на котором устанавливается заданная в задаче величина высоты конуса.

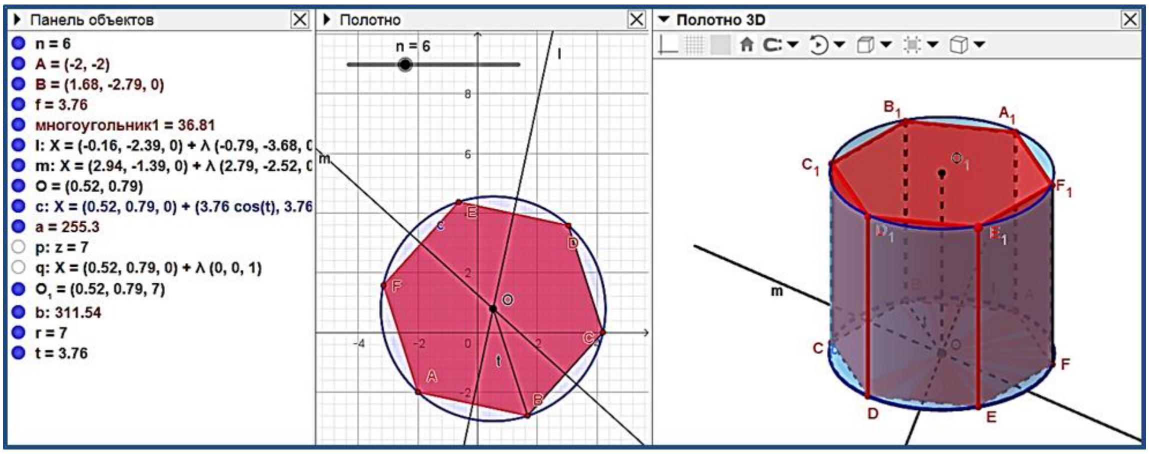


Рис. 1. Создание динамической модели «Правильная призма, вписанная в цилиндр»

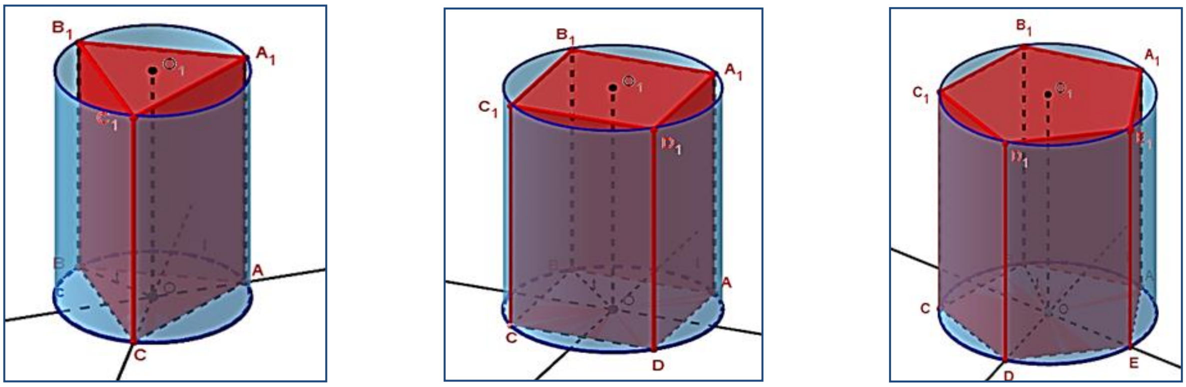


Рис. 2. Правильная призма, вписанная в цилиндр, при $n = 3, 4, 5$

Другую динамическую модель этой комбинации можно сконструировать с помощью инструмента *Точка на объекте*. Для этого нужно построить диаметр сферы, а затем с помощью указанного инструмента задать на диаметре основание O высоты конуса. В этой модели высота конуса меняется путем «ручного» перемещения точки O по диаметру с помощью курсора.

В число задач, предлагаемых студентам, полезно включить задания на конструирование динамических моделей к популярным и относительно простым задачам, при решении которых у школьников обычно возникают затруднения из-за неспособности выполнить наглядный и верный чертеж. Это могут быть задания на комбинации сферы и какого-либо правильного многогранника, на построение общей части двух многогранников, один из которых получен из другого с помощью некоторого геометрического преобразования, и т. п.

Пример 3. На рис. 4 представлены полученные с помощью одной динамической модели изображения различных комбинаций сферы и куба.

Параметром в этой модели является заданный с помощью ползунка радиус сферы.

Пример 4 демонстрирует использование динамического моделирования для изображения общей части тетраэдра $ABCD$ и его образа при симметрии относительно точки O, лежащей на медиане DGтетраэдра $ABCD$. Точка O на модели задана с помощью инструмента *Точка на объекте*. На левом чертеже (рис. 5) точка O является серединой медианы DG, на правом – делит эту медиану в отношении $3:1$, считая от точки D.

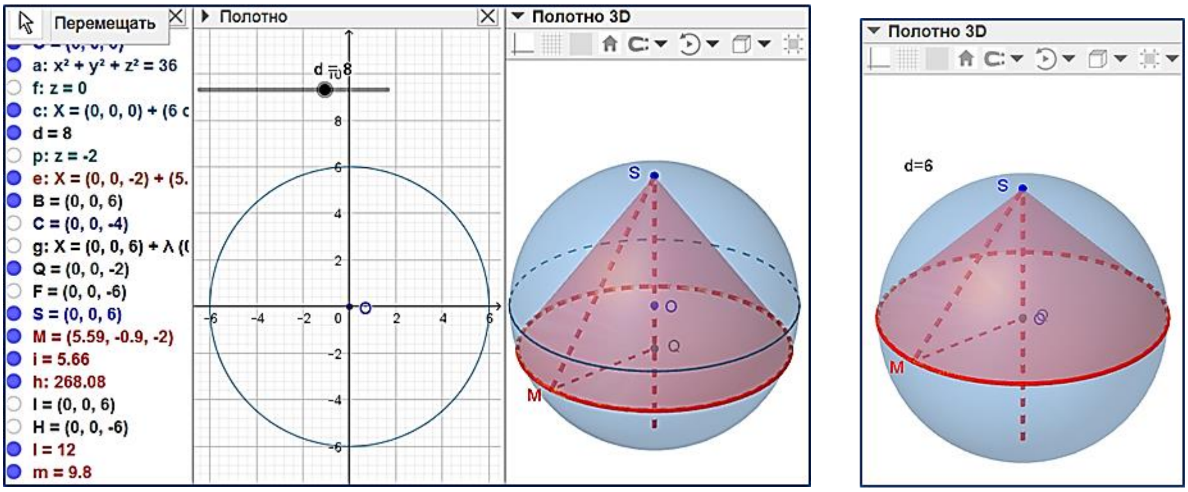


Рис. 3. Динамическая модель «Конус, вписанный в сферу»

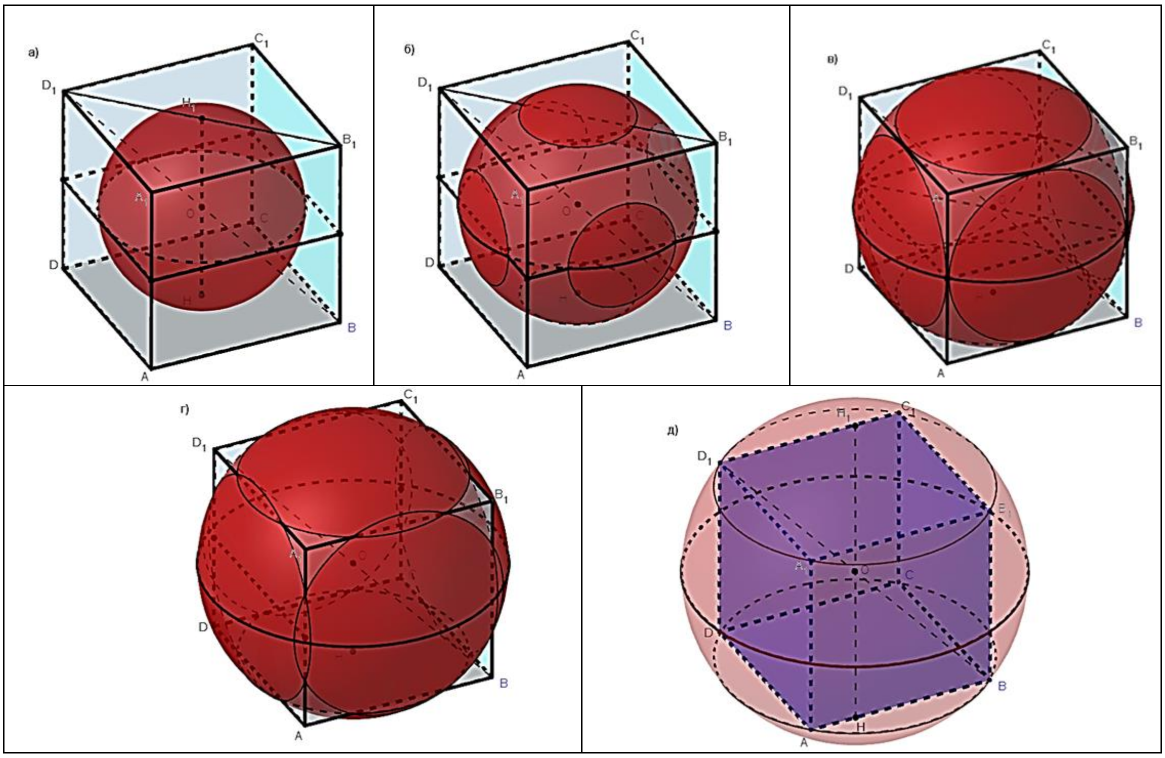


Рис. 4. Изображения, полученные с помощью динамической модели «Комбинации сферы и куба»

Пример 5. На рис. 6 показан процесс создания динамической модели к задачам, в которых рассматривается поворот куба вокруг его диагонали на заданный угол α. При конструировании этой модели был создан ползунок и в появившемся окне в качестве параметра выбрана величина α угла поворота. Изображение куба и его образа на рис. 6 соответствует случаю $\alpha = 60^{\circ}$. На рис. 7 представлены случаи $\alpha = 90^{\circ}$ и $\alpha = 120^{\circ}$.

При конструировании некоторых динамических моделей удобно сочетать геометрические и алгебраические способы задания элементов модели. Такой подход может быть эффективен, например, при исследовании сечений многогранника некоторым семейством плоскостей. Ограничимся следующим простым примером.

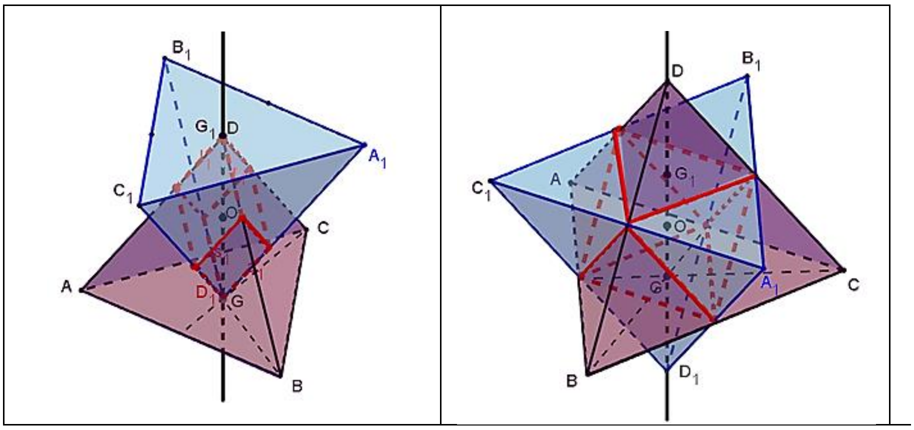


Рис. 5. Изображения, полученные с помощью модели «Симметричные тетраэдры»

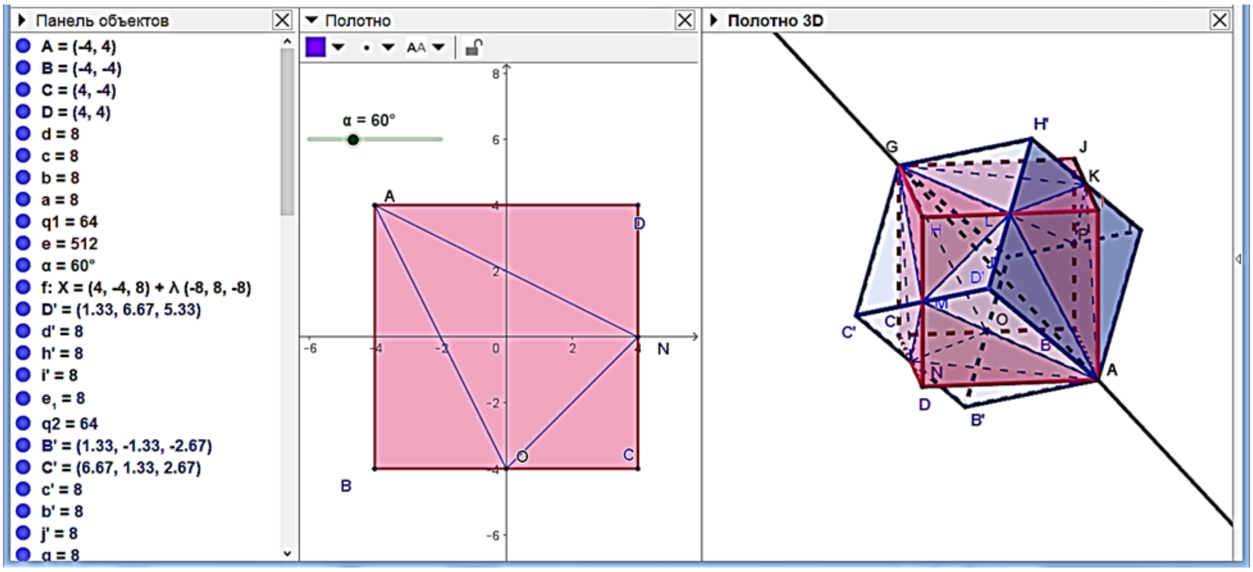


Рис. 6. Моделирование поворота куба относительно его диагонали

Пример 6. Рассмотрим создание динамической модели, с помощью которой можно демонстрировать форму сечений куба плоскостями, параллельными двум скрещивающимся диагоналям его граней.

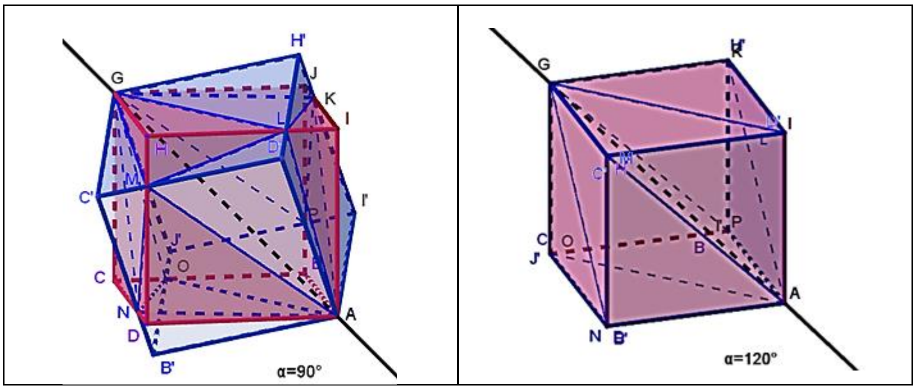


Рис. 7. Изображения куба и его образа при повороте куба относительно его диагонали

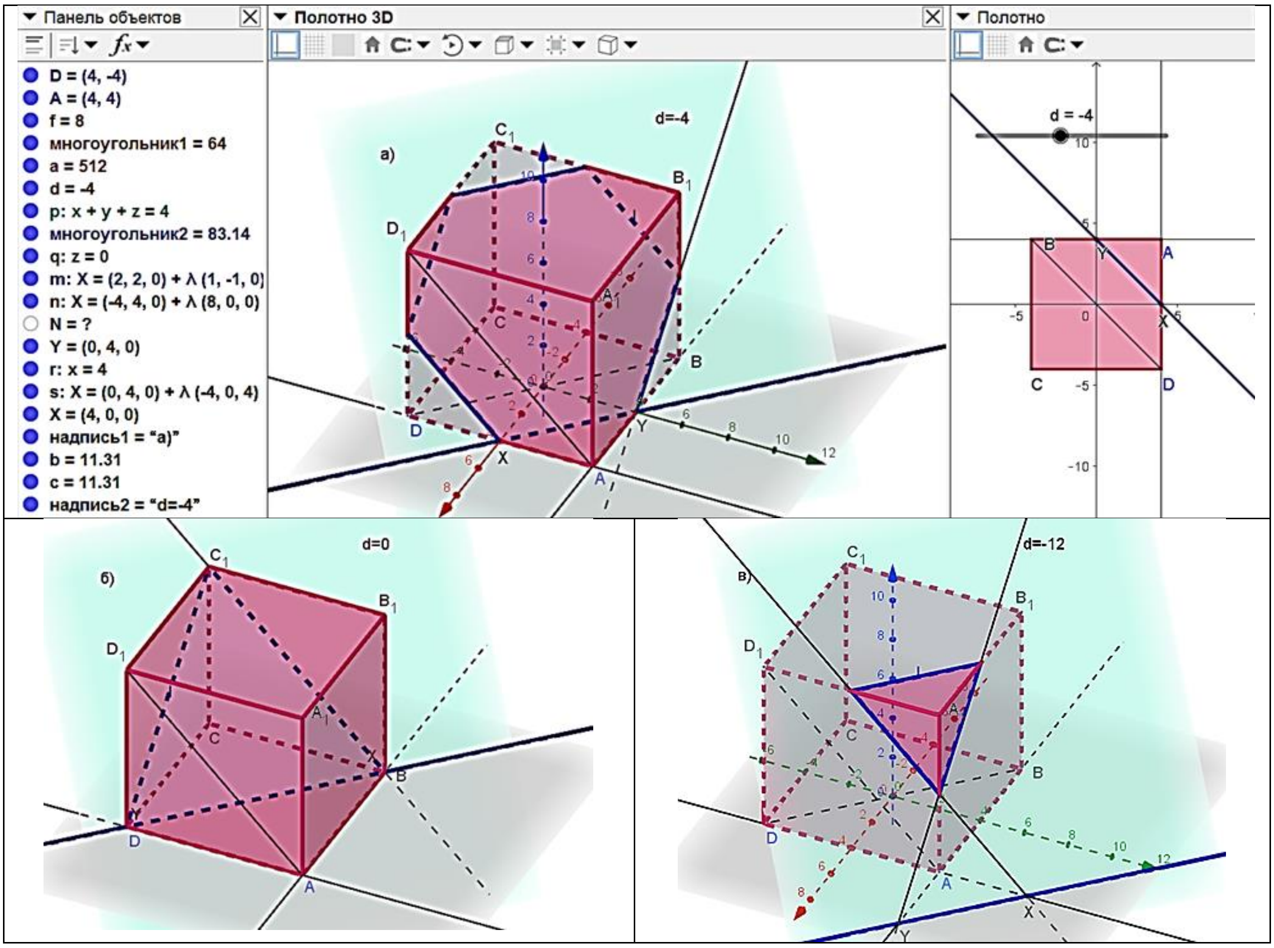


Рис. 8. Динамическая модель «Сечения куба плоскостью»

В полотне 2D построим квадрат $ABCD$ с центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям координат (на рис. 8 сторона квадрата равна 8). Затем на изображении этого квадрата в полотне 3D с помощью соответствующего геометрического инструмента строим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

В качестве скрещивающихся диагоналей выберем диагональ BD основания и диагональ AD_1 грани AA_1D_1D. Устанавливаем, что уравнение семейства плоскостей, параллельных этим диагоналям, можно представить в виде $x + y + z = d$. В полотне 2D создаем ползунок для d. Переходя к полотну 3D, вносим в строку ввода найденное уравнение.

После исполнения введенной команды в полотне 3D появляется изображение плоскости, которое соответствует значению параметра d, установленному на ползунке. Остается построить линии пересечения секущей плоскости с гранями куба.

Уверен, что в ближайшем будущем в методическом арсенале каждого учителя математики появится библиотека разнообразных дидактических материалов, разработанных на базе ИМС. Созданные на занятиях и сохраненные в формате ggb изображения геометрических тел, их комбинаций и динамические геометрические модели могут стать органичной частью этой библиотеки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Безумова О. Л., Овчинникова Р. П., Троицкая О. Н. и* др. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие. – Архангельск: КИРА, 2011. – 140 с.
2. *Дубровский В. Н.* Типология динамических чертежей // ИТО-2005 (Режим доступа).
3. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018. – 172 с.

Г.А. Клековкин и Е.В. Потоскуев (Тольятти, ТГУ, 29 ноября 2019 г.)

КОНСТРУКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ОБРАЗОВАНИИ УЧИТЕЛЯ

Князева Лариса Евгеньевна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики математического образования
Южный федеральный университет
Россия, г. Ростов-на-Дону, leknyazeva@sfedu.ru

Аннотация. *В статье рассматривается история вхождения конструктивной геометрии в педагогико-математическое образование России. Охарактеризовано содержание раздела «Геометрические построения на плоскости» на различных этапах становления и развития системы педагогического образования.*
Ключевые слова: *элементарная математика, конструктивная геометрия, геометрические построения.*

CONSTRUCTIVE GEOMETRY IN TEACHER EDUCATION

Knyazeva Larisa Evgenievna
candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, Department of Theory and Methodologymath education
South Federal University
Russia, Rostov-on-Don, leknyazeva@sfedu.ru

Abstract. *The article discusses the history of the occurrence of constructive geometry in the pedagogical and mathematical education of Russia. The content of the section "Geometric constructions on the plane" at various stages of the formation and development of the system of teacher education is described.*
Keywords: *elementary mathematics, constructive geometry, geometric constructions.*

В современном образовательном пространстве подготовка учителя занимает особое место вследствие его роли и значения в развитии интеллектуального потенциала общества. Одними из обсуждаемых вопросов педагогической публицистики последних лет являются вопросы, относящиеся к разработке содержания подготовки будущих учителей математики в свете концепции федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) третьего поколения (3++) – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование [6,7]. При этом всё чаще особо подчеркивается, что геометрическое образование в сегодняшней российской высшей педагогической школе не может не вызывать определенную озабоченность и тревогу. Нельзя не согласиться с мнением Е.В. Потоскуева о том, что среди существующих проблем геометрического образования первостепенными являются проблемы развития пространственного воображения, графической культуры, логического мышления и умений аргументированно обосновывать возникающие утверждения[10, с.67]. Исследователи объясняют необходимость перемен в области геометрического образования учителя математики существованием множества недостатков в сложившейся системе его подготовки. Среди них: по объему и содержанию фундаментальная математическая подготовка во многом повторяет классическое университетское математическое образование, нехватка времени на изучение фундаментальных математических курсов, недостаточный уровень школьного математического образования студентов, отрыв специальной математической подготовки от профессионально-педагогической и др. [5].

Остановимся более подробно на истории изучения раздела «Геометрические построения на плоскости». К началу XX века в России была создана сеть педагогических учебных заведений, включающая в себя 208 учительских семинарий, 53 учительских института, несколько десятков педагогических курсов, которые вели подготовку учителей начальных классов. Учителей математики для средних учебных заведений (гимназии, реальные училища) готовили на факультетах девяти университетов, пяти высших женских курсов, двух высших педагогических институтов и педагогических курсах, организованных при учебных округах [9]. В университетах слушатели получали фундаментальную подготовку в области математики, необходимую для последующей преподавательской деятельности.

В России осознание того, что будущему учителю математики необходима специальная педагогическая подготовка, произошло лишь к концу первого десятилетия XX века. 10 марта 1910 г. Государственная Дума рассмотрела законопроект об учреждении в Москве педагогического института им. П.Г. Шелапутина, в который принимались лица, уже имеющие высшие образование. Срок обучения составлял 2 года. В этих учебных заведения слушатели получали дополнительную научно-педагогическую подготовку. О геометрической составляющей этой подготовки можно судить по учебному плану, составленному В.Г. Каганом для двухгодичной подготовки учителей математики на педагогических курсах. План включал в себя следующие блоки: *общепедагогический* (история философии, психология, экспериментальная психология, логика, история педагогики, школьная гигиена); *специально-теоретический* (теоретическая арифметика, основания геометрии, проективная геометрия, черчение и решение конструктивных задач, коммерческая арифметика, теоретическая физика, история математики); *методический* (методика арифметики, методика геометрии и тригонометрии, методика алгебры, методика физики, методика космографии); *практический* (семинарские занятия по всем отделам, производство опытов по физике, производство опытов по химии, пробные уроки и их обсуждение, замещение преподавателей, посещение уроков опытных педагогов). Таким образом, умение решать конструктивные задачи – одно из требований предъявляемых к лицам, претендующим на должность учителя математики средней школы в начале прошлого века. При этом под конструктивными задачами понимались задачи на построение при помощи циркуля и линейки на плоскости. Заметим, что в последующих публикациях XX века большинство авторов (А.А. Мазаник, Г.П. Сенников, Д.И. Перепелкин, А.В. Дрокин, М.Н. Трубецкой и др.)

использовали термин «конструктивные задачи» для обозначения задач на построение.

В 20-х годах XX века подготовке учителя по элементарной математике придавалось большое значение: чаще всего обучение в педагогических институтах начиналось с дисциплины «Энциклопедия элементарной математики». Кроме того, учебный план включал курс элементарной математики с точки зрения высшей. Конструктивная геометрия входила в энциклопедию элементарной математики вместе с учением о геометрических преобразованиях, учением о площадях, принципом Кавальери, курсом тригонометрии, графическими методами в алгебре, комплексными числами, комбинаторикой и биномом Ньютона с элементами теории вероятностей. Таким образом, в содержание энциклопедии были включены вопросы, не связанные между собой, но имевшие большое значение для подготовки учителя.

Первые программы для педагогических институтов по математическим дисциплинам были опубликованы в 1934 году. В соответствие с учебным планом 1935 года теория геометрических построений – часть содержания специального курса элементарной математики (элементы теоретической арифметики и теории чисел, геометрические преобразования, основы неевклидовой геометрии), чтение которого начиналось на третьем курсе, рассчитанного на 164 часа. Особо следует отметить отсутствие учебной литературы по элементарной математике для педагогических институтов.

В 1937/38 учебном году были приняты новые учебные планы, в которых конструктивная геометрия по-прежнему оставалась разделом специальной части курса элементарной математики. В качестве рекомендованной литературы впервые названо пособие Ж. Адамара «Элементарная геометрия» (второе издание, 1938 г.) под редакцией Д.И. Перепёлкина. На протяжении нескольких десятилетий это пособие выполняло роль учебника для высших педагогических учебных заведений. Основой книги служил школьный курс геометрии, пособие было рассчитано на изучение геометрии «с нуля», однако содержание книги выходило за рамки школьной программы. Задачам на построение посвящены три главы пособия. Ж. Адамар подробно рассматривает алгоритмы простейших построений при помощи циркуля и линейки.

В 50-е годы XX века в связи с задачами политехнического обучения и переходом к всеобщему десятилетнему обучению вопрос о подготовке учителей математики средней школы приобрел особую остроту. Н.Я. Виленкин и И.М. Яглом справедливо отмечали, что «преподавание математики в педагогических институтах во много определяет уровень преподавания математики в средней школе» [4,с.45]. По их мнению, курс элементарной математики должен был занимать особое место в институтском преподавании. Вопросы теории геометрических построений должны изучаться в рамках элементарной геометрии. При этом рекомендовалось не ограничиваться только построениями циркулем и линейкой, но и привлекать другие средства построений, применять простейшие геометрические преобразования плоскости.

В соответствие с программой для физико-математических факультетов (1964), составленной под общей редакцией В.И. Левина, изучение дисциплины «Элементарная математика» начиналось в первом семестре [11, с.11-12]. Геометрические построения рассматривались в шестом, последнем семестре изучения дисциплины. При этом в содержание были включены следующие вопросы:

1. Конструктивная геометрия и её значение: система постулатов для построений с помощью циркуля и линейки. Понятие о построениях другими средствами.

2. Построение циркулем и линейкой суммы, разности, произведения и частного отрезков (при данной единице длины); построение квадратного корня из отрезка. Задачи первой и второй степени.

3. Критерий разрешимости циркулем и линейкой конструктивных задач. Задачи третьей степени, не разрешимые с помощью циркуля и линейки; неразрешимость квадратуры круга.

Авторы программы рекомендовали студентам следующую литературу: Л.С. Атанасян и др. «Сборник задач по элементарной геометрии» (М.: Просвещение, 1964); Н.Ф. Четверухин «Методы геометрических построений» (М.: Учпедгиз, 1952); Д.И. Перепелкин «Курс элементарной геометрии. Часть 1» (М.: ГТТИ, 1948); Ж. Адамар «Элементарная геометрия. Часть 1» (М.: Учпедгиз, 1948).Это свидетельствует о том, что к 60-м годам XX века была решена задача создания учебников и задачников для педагогических институтов, которые при сохранении общей структуры читаемых курсов и, не снижая их научного уровня, позволяли учитывать вопросы профессиональной подготовки будущего учителя путем накопления математических фактов. При этом оставалась нерешенной проблема анализа внутренних и внешних связей системы понятий школьного курса их места в понятийной системе высшей математики [8, с.39].

Реформы школьного математического образования 70-х годов XX века не могли не найти своего отражения в подготовке учителя. Одна из основных идей разработчиков учебного плана по специальности «математика», введенного с 1 сентября 1970 года, состояла в создании трех специальных математических объединенных курсов: математического анализа, алгебры и теории чисел, геометрии. Курс элементарной математики был снят с учебного плана. Включение основных разделов этого курса в программу объединенных курсов было направлено на ликвидацию противопоставления элементарной и высшей математик. Конструктивная геометрия стала одним из разделов объединенного курса геометрии. Её содержание и методика изложения, в основном, ориентированы на учебники авторов Л.С. Атанасяна и Г.Б. Гуревича [1], В.Т. Базылева и К.И. Дуничева [3]. Программа раздела «Геометрические построения на плоскости» включала следующие вопросы: система постулатов построений с помощью циркуля и линейки; основные задачи на построение в школьном курсе геометрии; различные методы геометрических построений на плоскости; алгебраический метод решения задач на построение; примеры классических задач на построение, не разрешимых циркулем и линейкой.

Вхождение конструктивной геометрии в объединенный курс геометрии повлекло за собой резкое уменьшение часов, отводимых на изучение раздела. Так, в учебно-методическом комплексе по геометрии, разработанном на кафедре геометрии Ростовского-на-Дону государственного педагогического института на основании инструктивного письма Минвуза СССР от 22.10.1982 г. № 32 и Программы для пединститутов по геометрии для специальности 2104 «Математика» на изучение геометрических построений на плоскости отводилось на лекции – 10 часов, на практические занятия – 6 часов.

С начала 90-х годов XX века педагогические вузы начали подготовку к переходу на многоуровневую систему подготовки специалистов. В 1995 году был принят Федеральный образовательный стандарт первого поколения для специальности 050201 «Математика». Представленное в нём содержание дисциплины «Геометрия» полностью совпадало с программным содержанием одноименного курса 80-х годов.

Однако при переходе от стандартов первого поколения к стандартам второго поколения (2000г., 2005 г.) геометрия как учебная дисциплина понесла ряд потерь. В частности, был незаслуженно исключен раздел «Геометрические построения на плоскости». Формулировки последующих стандартов второго поколения для направления 050200 «Физико-математическое образование», профиль «Математика» столь лаконичны, что, предоставляя преподавателю «свободу» при составлении рабочей программы, разрушают единство педагогического математического образовательного пространства, для создания которого стандарты и были предназначены. Последующие стандарты третьего поколения направления 050100 Педагогическое образование (2010-2011), направления 44.03.01 Педагогическое образование (2015,2018) позволяют самостоятельно учебной организации определять набор дисциплин вариативной части учебного плана в объеме, установленном ФГОС ВО.

Знакомство с рабочими программами дисциплин, выставленными на сайтах различных вузов, осуществляющих подготовку учителей математики, свидетельствуют о существовании нескольких подходов к определению места и содержания конструктивной геометрии в учебных планах.

Сторонники первого подхода считают необходимым выделение конструктивной геометрии в отдельную дисциплину. Например, по этому пути пошли преподавательские коллективы Алтайского и Уральского государственных педагогических университетов, Славянского-на-Кубани и Тобольского государственных педагогических институтов.

Сторонники второго реализуют обучение конструктивной геометрии в рамках других курсов, например, «Методика решения задач по элементарной математике. Планиметрия» (Казанский федеральный университет) [12], «Практикум решения математических задач», «Элементарная геометрия» и т.д.

Сторонники третьего подхода считают необходимым сохранить структуру курса геометрии, сложившуюся в 80-е годы прошлого века, изменяя, совершенствуя при этом методику его преподавания [2, с.14] (Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б.* Геометрия. Часть II. – М.: Просвещение, 1976.
2. *Атанасян С.Л.* Курс геометрии педагогического вуза как основа математической подготовки будущего учителя математики // Материалы весенней научной сессии преподавателей кафедры геометрии математического факультета МПГУ и кафедры алгебры и геометрии факультета естественных наук университета им. Палацкого в Оломоуце, г. Москва, 29-30 марта 2017 года. – Москва: МПГУ, 2017. С.14-19.
3. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Часть 2. – М.: Просвещение, 1975.
4. *Виленкин Н.Я. , Яглом И.М.* О преподавании математики в педагогических институтах // Математика в школе, 1956. № 2. С.45-47.
5. *Далингер В.А.* Недостатки и основные направления совершенствования подготовки учителей математики в педагогических вузах // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 6-4. – С. 822-827.
6. *Далингер В.А.* Подготовка учителей математики в условиях новых государственных стандартов по направлению «Педагогическое образование, профиль «Математическое образование» // Современные проблемы науки и образования [Электронный ресурс].– 2017. – № 1. Режим доступа: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=26089 (дата обращения: 29.10.2019).
7. *Елецких И.А., Сафронова Т.М., Черноусова Н.В*. Изучение дисциплины «Математический анализ» в условиях реализации ФГОС ВО: проектирование учебного процесса и методические особенности преподавания // Современные проблемы науки и образования [Электронный ресурс]. – 2018. – № 4. Режим доступа: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27737 (дата обращения: 29.10.2019).
8. *Жирков Е.П., Петрова А.И., Аргунова Н.В., Ефремов В.П.* Курс «Элементарная математика» в высшей школе: история развития, современное состояние, подготовка учителя // Вестник ЯГУ. Том 4, № 4. – 2007. С. 38-43.
9. *Очерки истории школы и педагогической мысли народов СССР* (1917-1941)/ Под ред. Н.П. Кузина и др. – М.: Педагогика, 1980.
10. *Потоскуев Е.В.* О геометрии и проблемах ее изучения в средней и высшей школе // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С.65-72.
11. *Программы педагогических институтов.* Элементарная математика. – М.: Просвещение, 1964.
12. *Садыкова Е.Р., Тимербаева Н.В.* Организация изучения раздела «Геометрические построения» в процессе подготовки будущего учителя математики // Стандартизация математического образования: проблемы внедрения и оценка эффективности: Материалы XXXV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. С.104-109.

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Коноплева Ирина Викторовна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры
естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской авиации
им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, irinakonopleva2014@yandex.ru
Знаенко Наталья Сергеевна
доцент, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт
гражданской авиации им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, znaenns@mail.ru
Миронова Людмила Викторовна
ассистент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской
авиации им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева,
Россия, г. Ульяновск, mironova5509@gmail

Аннотация. *В статье указаны примеры прикладных геометрических задач авиационной направленности, позволяющих активизировать учебный процесс и стимулировать познавательную активность студентов.*
Ключевые слова: *прикладные геометрические задачи, познавательная активность.*

SOMEAPPLIEDPROBLEMSOFANALYTICALGEOMETRYIN A TECHNICALUNIVERSITY

Konopleva Irina Viktorovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the
Department of Natural Sciences, Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal
of Aviation B.P. Bugaev, irinakonopleva2014@yandex.ru
Znaenko Natalya Sergeevna
Associate Professor, Associate Professor of the Department of Natural Sciences,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev,
znaenns@mail.ru
Mironova Lyudmila Viktorovna
Assistant of the Department of Natural Sciences,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev,
Russia, Ulyanovsk, mironova5509@gmail

Abstract. *The article shows the applied geometric problems of aviation orientation, allowing to activate the educational process and stimulate the cognitive activity of students.*
Keywords: *applied geometric problems, cognitive activity.*

При изучении раздела «Элементы аналитической геометрии» на кафедре естественнонаучных дисциплин УИ ГА рассматривается применение геометрических методов для решения задач, связанных с управлением воздушным движением, летной эксплуатацией воздушных судов, обеспечением аэропортовой деятельности и воздушных перевозок.

Профессиональная направленность заданий усиливает мотивацию изучения математики [1,2]. Для методического обеспечения учебного процесса, организации самостоятельной работы и ее контроля используются программно-методические продукты: учебные, учебно-методические и справочные пособия, тесты для тематического и рубежного контроля знаний, компьютерная обучающая система, разработанные преподавателями кафедры [3–7].

Важную часть курса аналитической геометрии составляет векторная алгебра и метод координат. Средства и методы векторной алгебры позволяют решать многие задачи аналитической геометрии, векторного анализа, теоретической механики, общей и теоретической физики. При изучении этого раздела рассматриваются задачи аэродинамики и навигации: нахождение аэродинамической силы, действующей на воздушное судно (ВС) во время полета; разложения результирующей аэродинамической силы на составляющие, поляра самолета; центр масс ВС (для курсантов специальности «Авиатопливное обеспечение» – центр масс активированной химической реакции, определение расстояний в пространственных кристаллических решетках, в том числе и косоугольных); рассмотрение навигационных систем координат на плоскости и в пространстве, использующихся в аэродинамике для изучения движения самолета; навигационный треугольник скоростей; девиация магнитного компаса; применение гироскопического момента в авиаприборах и появление гироскопического момента винта самолета [4,5]. Приведем несколько примеров:

Пример 1. Воздушное судно (ВС) массой m кг движется равномерно и прямолинейно с углом набора, равным φ^o. Вычислить величину силы лобового сопротивления ВС X_a и подъемной силы Y_a, если величина силы тяги равна F кН и она направлена вдоль траектории полета.

Пример 2. Воздушное судно, выполняющее установившееся снижение со скоростью v м/с и углом снижения φ^o, попадает в восходящий поток воздуха, поднимающийся вертикально вверх со скоростью w м/с. Определить величину и направление результирующей скорости движения ВС.

Пример 3. Воздушное судно выполняет установившийся горизонтальный полет. Величина приложенной силы тяги, действующей в горизонтальном направлении, равна P кН. Вычислить массу ВС, если результирующая аэродинамическая сила образует с вертикалью угол φ^o.

Пример 4.Вычислить величину скорости ветра U и его навигационное направление δ (угол между северным направлением магнитного меридиана и направлением ветра), если величина воздушной скорости ВС V км/ч, модуль вектора путевой скорости W км/ч, магнитный курс ВС составляет α^o, а угол сноса равен β^o.

Пример 5. Величина напряженности $\boldsymbol{H}$ магнитного поля Земли в k раз больше напряженности $\boldsymbol{F}$ магнитного поля, создаваемого воздушным судном. Найти значение девиации $\Delta_к$ (угол, заключенный между северными направлениями магнитного и компасного меридианов), если магнитный курс ВС равен α^o.

Пример 6. Найти координаты центра масс ВС $A(x,y,z)$ в нормальной земной системе координат, если известно расстояние OA от начала координат до центра масс и величины углов α и β, которые образует радиус вектор $\overrightarrow{OA}$, проведенный в центр масс воздушного судна, с осями координат Ox и Oy соответственно.

Пример 7. Путевая скорость ВС задана вектором $\overrightarrow{W}$, скорость ветра – вектором $\overrightarrow{U}$. Известны $\left|\vec{W}\right| = a, \left|\vec{U}\right| = b, \angle\left(\vec{W},\vec{U}\right) = \alpha$. Найти величину воздушной скорости ВС.

Пример 8. [8].К концам $A(\vec{r}_1)$ и $B(\vec{r}_2)$ невесомого стержня AB приложены две силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, изображенные на рис.1. Найти вектор $\vec{R}$ равнодействующей этих сил.

Пример 9. [8].Найти положение центра тяжести плоской стержневой фермы $ABCD$, состоящей из пяти стержней (рис. 2), если $AB = AC = BC, \angle BAD = 90^o$.

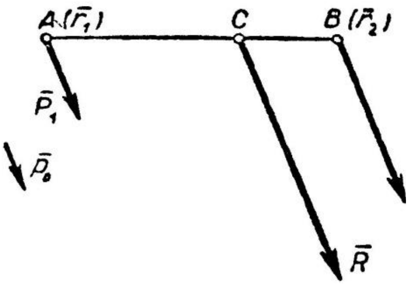


Рис.1.

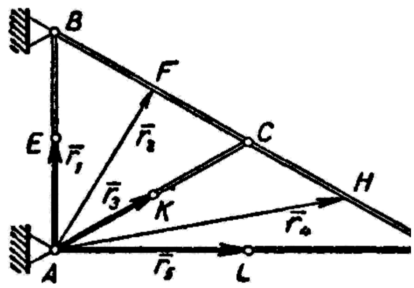


Рис.2.

Как приложения метода координат в пространстве указываются методы определения расстояний между движущимися летательными аппаратами в международной бортовой системе предупреждения столкновений TCAS –II.

Тема *«Прямая на плоскости»* иллюстрируется следующими задачами:

Задача 1.Для организации спасательной операции требуется определить место аварийного происшествия. Поиск осуществляется с помощью независимых пеленгаторных станций. Место аварии – точка $P(x;y)$ определена на плоскости из точек $P_1(x_1;y_1)$ и $P_2(x_2;y_2)$ дирекционными углами (пеленгами) α^o и β^o направлений от P_1 и P_2 к $P(x;y)$. Найти координаты искомой точки $P(x;y)$.

На втором курсе при изучении раздела «Теория вероятностей и математическая статистика» в этой задаче для оценки точности положения точки $P(x;y)$ определяется эллипс рассеяния (погрешностей) –область, в которой находится место происшествия с заданной вероятностью.

Задача 2. Через пункты $A(5;8)$ и $B(9;6)$ (на плане местности размеры даны в километрах) проходит автомобильная дорога. В точке $C(2;3)$ упал легкомоторный самолет. Определить координаты точки $D \in AB$, так, чтобы маршрут от шоссе AB до точки $C(2;3)$ оказался кратчайшим, найти его длину. Записать уравнение дороги CD, сделать чертеж.

Задача 3. Определить линейную зависимость $y = kx + b$ между полными издержками y авиакомпании и объемом x – ее авиаперевозок, если: а) постоянные издержки, не зависящие от объема перевозок (затраты на содержание техники, зданий, их отопление и т.д.), составляют b (денежных единиц); в) переменные издержки (материальные затраты) прямо пропорциональны с коэффициентом k к объему x перевозок.

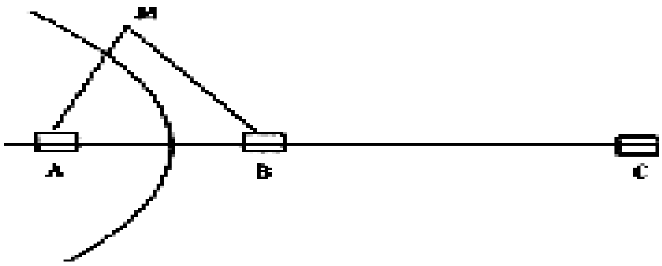
Задача 4. Стоимость (у.е.) перевозки груза авиакомпанией «Волга» описывается уравнением $y = 48x + 22$, где x – расстояние (сотни км.). Стоимость перевозки авиакомпанией «Урал» выражается формулой $y = 32x + 54$. Начиная с какого расстояния, стоимость перевозки авиакомпанией «Урал» становится дешевле. Дать геометрическую иллюстрацию.

При изучении кривых 2-го порядка, кроме их оптических свойств и физических приложений, решаются задачи, приведенные в [9]:

Задача 1. Два предприятия одного холдинга A и B, расстояние между которыми равно 200 км, производят изделие, заводская цена P которого одинакова для обоих предприятий. Транспортные расходы на перевозку единицы изделия от предприятия A до потребителя составляют 100 руб/км, а от B – 150 руб/км. Как следует разделить рынок сбыта, чтобы расходы потребителей были одинаковы? Какому потребителю выгоднее покупать продукцию предприятия A, а какому B?

Ответ. Рынок сбыта можно экономично поделить так: а) потребителям, находящимся на окружности $(x+125)^2 + y^2 = 75^2$, безразлично, изделия какого предприятия (A или B) покупать; б) потребители, находящиеся внутри указанного круга, покупают изделия предприятия A; в) потребители, находящиеся вне круга, покупают изделия предприятия B.

Задача 2. На железной дороге расположены две станции A и B. Из различных пунктов местности, по которой проходит железная дорога, нужно отправлять грузы в конечный пункт дороги C. Санция B находится к пункту C ближе, чем A. На какую из станций A или B грузоотправителю выгоднее довезти груз автотранспортом из пункта местности M для дальнейшей отправки по железной дороге (рис. 3)?



Ответ.
На станцию B выгоднее везти груз автотранспортом для отправки по железной дороге из различных пунктов местности, расположенных в части плоскости, отделенной от точки A ветвью гиперболы. На станцию A выгоднее подвезти груз для дальнейшей отправки по

железной дороге автотранспортом из тех пунктов местности, которые расположены в той же части плоскости относительно ветви гиперболы, в которой расположена и точка A.

В теме «*Поверхности 2-го порядка»* указываются математические методы определения положения точки в спутниковых системах GPS и Глонасс. Обязательно отмечается применение оптических свойств параболоидов в антенной технике, зеркалах телескопов, прожекторов и фар, двуполостного гиперболоида вращения – для телескопов и антенн системы Кассегрена. Оптическое свойство эллипсоида используется в медицине для проведения бесконтактной литотрипсии. Указываются приложения поверхностей в технике для создания различных типов механических передач, а также в архитектуре и дизайне.

В процессе обучения в вузе курсанты (студенты) сталкиваются с различными видами коммуникаций: монологичными (лекции), диалогичными (семинары, дискуссии), имитационно-игровыми. Такая форма обучения вполне приемлема в вузовской практике, так как игровая оболочка изучаемого материала позволяет избавиться от однообразия решения типовых задач, заинтересовать студентов, способствует развитию умений работы в коллективе. Дидактические игры мобилизуют интеллектуальные резервы, стимулируют познавательную деятельность, удерживают внимание на протяжении достаточно большого временного промежутка. Работая в команде, участники учатся взаимодействовать, слышать друг друга, генерировать идеи, отбирать информацию. Игровые методы используются преподавателями кафедры, ими разработаны сценарии и программы компьютерных игр к различным разделам математики [10], в частности, по аналитической геометрии создана викторина «Форт Байярд» [11]. Пример сценария взят из одноименной игры, а программа к ней написана курсантами с помощью визуального редактора «Microsoft Visual Studio» с использованием языков программирования C#, XAML, HTML, CSS.

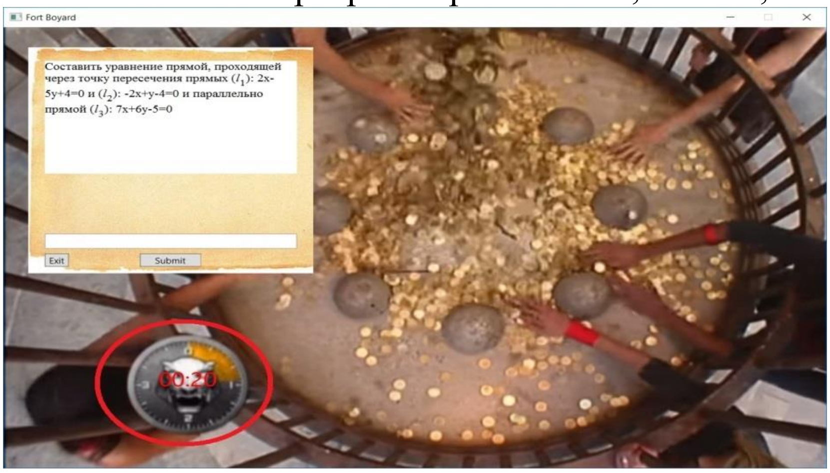


Рис.4. Часть финального задания

Правила игры следующие: создается несколько команд по три человека; каждая команда работает за своим компьютером; в ходе игры командам предлагаются задания разного типа: с вводом текстового ответа, установления соответствия, выбором ответа и вводом цифрового результата решения задачи.

В случае правильного ответа на все вопросы команда получает ключ в виде 30 секунд на выполнение последнего задания. Побеждает команда, которая справится со всеми заданиями правильно и быстрее всех. Образец одного из заданий представлен на рисунке 4. Такие викторины проводятся на заключительных занятиях по теме или во внеучебное время. В процессе игры происходит осмысление пройденного материала, развиваются инициатива и интерес к предмету, формируются новые отношения, как между студентами, так и между студентами и преподавателем. Обучение при этом происходит в процессе активного взаимодействия участников, эмоционально вовлеченных в интеллектуальную игру.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Знаенко Н.С., Коноплева И.В., Миронова Л.В.* Междисциплинарные связи как способ повышения мотивации изучения // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании: сборник трудов Межд. научно-техн. конф. 28-30.04.2016г. Ульяновск, УлГТУ. – 2016. С. 235-240.

2. *Коноплева И.В.,Знаенко Н.С., Миронова Л.В.* Формирование познавательной активности студентов при обучении математике в вузе// Актуальные проблемы преподавания математики в техническом ВУЗе. – 2018, Т. 6. С. 152-158.

3. *Компьютерная обучающая система по векторной алгебре и методу координат.* Разработчики – Айдаркин Д.В., Поленищенко Л.И. Свидетельство о регистрации электрон. ресурса № 16086 от 06.09.2010.

4. *Айдаркин Д. В., Поленищенко Л. И.* Сборник задач и упражнений по векторной алгебре и методу координат: учебное пособие для студентов вузов, обуч. по направл. подготовки «Аэронавигация» и спец. ВПО «Эксплуатация ВС и организация воздушного движения», «Летная эксплуатация ВС» и «Аэронавигационное обслуживание и использование воздушного пространства». – Ульяновск : УВАУ ГА (И), 2009.

5. *Айдаркин Д. В., Поленищенко Л. И.* Векторная алгебра и метод координат: учебное пособие для студентов вузов, обуч. по направл. подготовки «Аэронавигация» и спец. ВПО «Эксплуатация ВС и организация воздушного движения», «Летная эксплуатация ВС» и «Аэронавигационное обслуживание и использование воздушного пространства». – 2-е изд., доп. – Ульяновск : УВАУ ГА (И), 2011.

6. *Никонова С.П., Миронова Л.В.* Математика. Основные понятия и методы аналитической геометрии: учебное пособие. – Ульяновск: УВАУ ГА (И), 2013.

7. *Знаенко Н.С.* Математика. Индивидуальное домашнее задание № 1а «Аналитическая геометрия»: учеб-метод. пособие. Ульяновск: УИ ГА , 2017.

8. *Майоров В. М., Скопец З.А.* Задачник-практикум по векторной алгебре с приложениями к аналитической геометрии, элементарной геометрии и статике. – М.: Учпедгиз, 1961.

9. *Конюх А.В., Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Рабцевич В.А.* Высшая математика. Практикум. Часть 1.–Минск: Белорусский государственный экономический университет, 2014.

10. *Знаенко Н. С., Коноплева И.В., Миронова Л.В.* Дидактическая игра как один из методов интерактивного обучения математике в вузе// Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума MATHEDU-2017 по математическому образованию.18-22.10.2017г. Казань, Изд-во Казанского университета. – 2017, Т.2. С. 218–222.

11. *Рисухин К.В., Шмаков П.С.* (Научный руководитель Знаенко Н.С.). Браузерная игра по аналитической геометрии «Форт Боярд» // Гражданская авиация XXI век: сборник материалов XI Международной молодежной научной конференции (18-19 апреля 2019 г.). Ульяновск: УИГА. – 2019, С.157-159.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО ТЕМЕ «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ»ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Костин Сергей Вячеславович
старший преподаватель кафедры высшей математики,
Российский технологический университет (РТУ МИРЭА),
Россия, г. Москва, kostinsv77@mail.ru

Аннотация. *В данной статье мы делимся опытом составления задачи для типового расчета по теме «Прямая на плоскости» курса аналитической геометрии. Сформулированы руководящие принципы, которыми мы руководствовались при составлении задачи. Также приведена сама задача и подробные методические указания по ее решению.*
Ключевые слова: *аналитическая геометрия, преподавание математики, типовые расчеты.*

ON THE USING OF TYPICAL CALCULATION WORKS WHEN TEACHING STUDENTS TO THE THEME «LINE ON THE PLANE»OF THE COURSE OF ANALYTICAL GEOMETRY

Kostin Sergey Vyacheslavovich
senior lecturer, higher mathematics department,
Russian Technological University (RTU MIREA),
Russia, Moscow, kostinsv77@mail.ru

Abstract. *In this article we share experience of creating a problem on the theme «Line on the plane» of the analytical geometry course (this problem is intended for typical calculation work that is made by the students). We formulate general principles that have led us in our work. Also we give the problem itself and detailed instructions that should help a student to solve this problem.*
Keywords: *analytical geometry, teaching of mathematics, typical calculation works.*

Во многих технических вузах России уже давно сложилась и, как правило, хорошо себя зарекомендовала практика использования в процессе обучения студентов, так называемых типовых расчетов. Одним из пионеров внедрения в учебный процесс типовых расчетов был доцент Московского энергетического института Леонид Антонович Кузнецов. Преподавателям старшего поколения хорошо известен составленный Л.А. Кузнецовым и ставший практически классическим сборник типовых расчетов [4].

Типовой расчет − это (как правило, составленный сотрудниками кафедры высшей математики данного вуза) сборник заданий, которые студенты должны выполнить в течение семестра. Каждое задание представлено в достаточном количестве (обычно в 30) вариантах, что позволяет каждому студенту группы получить свой индивидуальный вариант.

В Российском технологическом университете МИРЭА (РТУ МИРЭА) типовые расчеты составлены по всем (или практически по всем) математическим дисциплинам (в том числе по дисциплинам, читающимся на относительно небольших потоках или даже для отдельных групп).

Каждый студент обязан выполнить типовой расчет в течение семестра. Эта обязанность закреплена организационно: выполненный и зачтенный типовой расчет (на котором стоят дата, фамилия и подпись преподавателя, который зачел студенту данный типовой) является для студента допуском на экзамен по соответствующей дисциплине.

Студенты, не защитившие в срок типовой расчет, на экзамен не допускаются. Кафедра высшей математики организует для таких студентов специальные дни (в том числе во время экзаменационной сессии), когда можно прийти и сдать (или до сдать) типовой расчет. Если в этот момент экзамен по данной дисциплине уже прошел, то студент, защитивший типовой расчет, может попасть с этим типовым расчетом только на пересдачу. (Мы не говорим здесь об отдельных исключительных ситуациях, –например, если студент болел, имеет соответствующие подтверждающие документы и т.д.). Конечно, не допуск студента, не имеющего зачтенного типового расчета, на экзамен – это жесткая мера, но, думается (и это подтверждает опыт работы кафедры высшей математики РТУ МИРЭА), только такая мера может заставить всех (или, во всяком случае, большинство) студентов делать (или, во всяком случае, пытаться сделать) свой типовой расчет в срок.

Естественно, что для того, чтобы данная система эффективно работала, студентам уже в начале 1-го семестра 1-го курса подробно рассказывают (в том числе на общем собрании 1-го курса) о том, что такое типовой расчет, как важно выполнить его в срок и т.д. Важно отметить, что наличие типового расчета ни в коем случае не отменяет существование также домашних заданий, которые регулярно задаются всем студентам группы. Хорошо зарекомендовала себя практика (ее использует, в том числе и автор данной статьи), когда домашние задания проверяют по очереди сами студенты группы, используя для этого выданные преподавателем ответы к задачам (или краткие решения задач). Опыт показывает, что большинство студентов очень ответственно относятся к выполнению этой работы, они не завышают оценку себе и не занижают другим студентам. Впрочем, при желании можно использовать также немного другой метод –назначенный преподавателем студент проверяет домашнее задание у других студентов группы, тогда как у самого этого студента домашнее задание проверяет преподаватель.

С учетом того, что система типовых расчетов весьма широко распространена в технических вузах России, думается, что был бы очень полезен обмен опытом составления типовых расчетов, накопленным кафедрами высшей математики различных вузов.

В данной статье мы хотели бы рассказать о нашем опыте участия в модернизации одного из типовых расчетов. Речь идет о составлении задачи для используемого в РТУ МИРЭА типового расчета по аналитической геометрии. Эта задача посвящена теме «Прямая на плоскости». Данную статью можно рассматривать как продолжение статей автора [1–3].

Аналитическая геометрия является важной составной частью вузовского курса математики. Этот раздел высшей математики является продолжением и развитием школьного курса геометрии, во всяком случае, той части школьного курса геометрии, которая посвящена векторам и координатам.

Как отмечает в своей книге [5] профессор МГУ Ю.М. Смирнов, аналитическая геометрия «лучше и яснее всех других предметов учит связи геометрии с алгеброй и алгебры с геометрией. Она по существу как бы является двойным словарем перевода с языка геометрии на язык алгебры и наоборот».

Можно только согласиться с мнением уважаемого профессора. Автор этих строк тоже считает аналитическую геометрию очень важной составной частью вузовского курса математики. Студент, который хорошо разбирается в аналитической геометрии, с большой вероятностью не будет иметь проблем и с другими разделами математики. Скажем больше: с большой вероятностью (если этот студент не перестанет учиться на старших курсах) он станет грамотным инженером, хорошим конструктором…

Некоторое время назад в РТУ МИРЭА возникла потребность в определенном обновлении, модернизации типового расчета по аналитической геометрии. В частности, возникла потребность существенно переработать задачу (а по сути, составить новую, более интересную и содержательную задачу) по теме «Прямая на плоскости». Эта работа была выполнена автором данной статьи.

При составлении новой задачи по теме *«Прямая на плоскости»* мы исходили из следующих руководящих принципов:

1) при решении задачи студент должен продемонстрировать уверенное владение такими понятиями, как «направляющий вектор прямой», «нормальный вектор прямой», «общее уравнение прямой», «каноническое уравнение прямой», «скалярное произведение векторов» (выражение скалярного произведения через длины векторов и угол между ними; выражение скалярного произведения через координаты векторов), «расстояние от точки до прямой» и др.;

2) выходные данные задачи (то есть количество найденных студентом расстояний, углов и т.д., которые приводятся в ответе к задаче) не должно быть очень большим (по разным причинам, но в том числе для облегчения работы преподавателя по проверке полученных студентом результатов);

3) целесообразно, чтобы еще до проверки задачи преподавателем студент (хотя бы предварительно) сам мог проверить правильность полученных результатов (то есть целесообразно, чтобы внутри задачи была заложена возможность контроля правильности полученных результатов);

4) задача по возможности должна связывать школьную и вузовскую математику, то есть она должна перекидывать мостик между школьным курсом геометрии (в данном случае школьным курсом планиметрии) и вузовским курсом аналитической геометрии;

5) задача должна быть по возможности интересной.

Руководствуясь этими принципами, мы составили следующую задачу.

Задача. Точки A, B, C, D заданы своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат Oxy на плоскости.

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра M и радиус r этой окружности.

3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра N и радиус R этой окружности.

Данная задача была составлена нами в 30 вариантах. Также мы составили, снабдили подробными образцами решения два демонстрационных варианта: вариант 31 и вариант 32.

Методические указания к задаче.

1) Можно предложить два способа доказательства того, что $ABCD$ − выпуклый четырехугольник.

Способ 1. Составить уравнения диагоналей AC и BD. Прямые AC и BD должны иметь ровно одну общую точку K. Найти координаты этой точки. Если точка K лежит строго внутри отрезка AC (то есть $\overrightarrow{AK} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$, где $0 < \alpha < 1$) и строго внутри отрезка BD (то есть $\overrightarrow{BK} = \beta\,\overrightarrow{BD}$, где $0 < \beta < 1$), то четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

Способ 2. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Эти векторы должны быть неколлинеарны (то есть они должны образовывать базис на плоскости). Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по этому базису: $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AD}$. Четырехугольник $ABCD$ является выпуклым тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три неравенства: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$.

2) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$AB + CD = BC + AD. \tag{1}$$

Координаты центра M вписанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения биссектрис двух смежных углов четырехугольника (например, уравнения биссектрис углов A и B), тогда точка M пересечения этих биссектрис будет центром окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Радиус r вписанной окружности можно найти как расстояние от точки M до одной из сторон четырехугольника, например, до стороны AB: $r = d(M, AB)$.

Контроль 1. Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки M до трех других сторон четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу r вписанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, по желанию студента). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного описанного четырехугольника следующей формулы: $S = pr$, (2)

где S — площадь четырехугольника, p − полупериметр четырехугольника, а

r — радиус вписанной окружности. При этом площадь S можно найти, например, по формуле

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi, \qquad (3)$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а φ — угол между ними.

3) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ. \qquad 4)$$

Координаты центра N описанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения серединных перпендикуляров двух смежных сторон четырехугольника (например, уравнения серединных перпендикуляров сторон AB и BC), тогда точка N пересечения этих серединных перпендикуляров будет центром окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

Радиус R описанной окружности можно найти как расстояние от точки N до одной из вершин четырехугольника, например, до вершины A: $R=d(N,A)=NA$.

Контроль 1. Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки N до трех других вершин четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу R описанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, по желанию студента). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного вписанного четырехугольника следующей формулы:

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD. \qquad (5)$$

(это теорема Птолемея, гласящая, что у вписанного четырехугольника сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей).

Замечание. В равенстве (4) мы рассматриваем углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ просто как геометрические углы на плоскости. Величина каждого из этих углов не превышает 180°. Если под углами $\angle BAD$ и $\angle BCD$ понимать углы четырехугольника $ABCD$ (то есть углы, величина которых – в случае невыпуклого четырехугольника – может быть больше 180°), то из равенства (4) автоматически следует выпуклость четырехугольника $ABCD$ (то есть в этом случае требование выпуклости четырехугольника $ABCD$ можно снять).

Демонстрационный вариант 31.

Числовые данные: $A=(3,10)$, $B=(-4,9)$, $C=(3,-14)$, $D=(6,7)$.

Ответ: 1) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; 2) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность; центр этой окружности находится в точке $M=\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$, а радиус равен $r=3\sqrt{2}$; 3) Около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

Демонстрационный вариант 32.

Числовые данные: $A=(7,8)$, $B=(9,2)$, $C=(-3,-7)$, $D=(3,11)$.

Ответ: 1) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; 2) В четырехугольник $ABCD$ нельзя вписать окружность; 3) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность; центр этой окружности находится в точке $N=\left(-\frac{1}{2},\frac{13}{6}\right)$, а радиус равен $R=\frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}}$.

В данной статье мы поделились нашим опытом составления задачи для типового расчета по аналитической геометрии по теме «Прямая на плоскости». Мы старались сделать задачу интересной и содержательной, а также заложить внутрь задачи возможность контроля правильности полученных результатов.

Описанные и вписанные четырехугольники обладают большим количеством замечательных свойств. Например, увлеченным математикой студентам можно предложить (в случае вписанного четырехугольника) проверить справедливость для данного четырехугольника формулы Брахмагупты.

При составлении задачи мы ставили цель не только обучить студентов основным методам решения задач по теме «Прямая на плоскости», но также наша цель состояла в том, чтобы, начиная с самых первых занятий первого курса, постараться увлечь студентов математикой, постараться показать студентам внутреннюю красоту и единство математики…

Насколько нам это удалось – судить Вам, уважаемые читатели. Мы надеется, что статья заинтересовала читателей и будем очень благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Костин С.В.* Об изучении канонического уравнения параболы в вузовском курсе аналитической геометрии // XV Колмогоровские чтения: сборник статей участников международной научной конференции (Арзамас, 10-13 сентября 2019 г) / науч. ред. С.В. Миронова, отв. ред. С.В. Напалков. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2019. С. 93–96.

2. *Костин С.В.* Об оптимальном месте появления геометрической задачи в учебнике //Классическая и современная геометрия: материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) / под ред. А. В. Царева. М.: Моск. пед. гос. ун-т, 2019. 154 с. С. 92–93.

3. *Костин С. В.* Пять решений одной геометрической задачи // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Вып. 21 / Вятский гос. ун-т; гл. ред. Е. М. Вечтомов. Киров: Науч. изд-во ВятГУ, 2019. 356 с. С. 274–282.

4. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш. шк., 1983. 175 с.

5. *Смирнов Ю.М.* Курс аналитической геометрии. М.: УРСС, 2005. 224 с.

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ В ЦИФРОВОЙ СРЕДЕ КАК ИНСТРУМЕНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

Рябинова Елена Николаевна
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры
высшей математики и прикладной информатики,
Самарский государственный технический университет, eryabinova@mail.ru,
Жихарева Анастасия Александровна
аспирант кафедры высшей математики и прикладной информатики
Самарский государственный технический университет,
*Россия, г. Самара,*nemilostevaaa@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены вопросы подготовки современного инженера, способного к освоению цифровых технологий будущего. Авторы отмечают связь уровня преемственного математического образования обучающегося и готовности к будущей профессиональной деятельности. Проблемы, которые возникают у обучающихся при решении задач повышенного уровня по геометрии, решаются с помощью цифровых технологий.Проиллюстрированы примеры решения задач по геометрии сложной части единого государственного экзамена в программе GeoGebra*.
Ключевые слова: *геометрия*, *единый государственный экзамен*, *цифровая образовательная среда, преемственные математические компетенции.*

Ryabinova Elena Nikolaevna
doctor of pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of higher mathematics and applied Informatics, Samara state technical University, eryabinova@mail.ru,
Zhikhareva Anastasia Aleksandrovna
postgraduate student of the Department of higher mathematics and applied Informatics
Samara state technical University,
Russia, Samara, nemilostevaaa@mail.ru

Abstract. *The article deals with the issues of training a modern engineer capable of mastering digital technologies of the future. The author notes the relationship between the level of continuous mathematical education of the student and readiness for future professional activity. Problems that arise in students when solving problems of advanced level in geometry, are solved with the help of digital technologies. Examples of solving problems on the geometry of a complex part in the program GeoGebra are illustrated.*
Keywords: *geometry, unified state examination, digital educational environment, continuous mathematical competence.*

О значимости технического образования говорится повсеместно. Любая отрасль современной деятельности будет включать в себя современные технологии, для владения которыми требуются определенные технические компетенции. Рассматривая дисциплину «математика» как основополагающую в технических науках, следует говорить о математических компетенциях, способных влиять на уровень владения цифровыми технологиями. Отбор в вузы на специальности технического профиля происходит по критериям единого государственного экзамена (ЕГЭ) профильного уровня.

Подготовка конкурентоспособного инженера напрямую зависит от сформированных математических компетенций обучающихся.

Из анализа данных Федерального института педагогических измерений следует, что решение задач сложной части по геометрии способно увеличить общее число баллов за ЕГЭ. Среди основных причин, по которым обучающиеся совершенно не приступают к заданиям сложной части по геометрии, в частности к задачам под №№14 и16, будут следующие.

– Интерес к заданиям по геометрии повышенного уровня сложности пропадает в связи с тем, что требуется много времени на иллюстрацию задачи. Нет уверенности в её правильном решении. Преобладает желание перейти на более понятные задания в ограниченный экзаменационный временной период.

– Непонимание взаимного расположения фигур приводит к тому, что обучающиеся составляют чертеж на черновике, видят противоречия с условиями задачи, и отказываются от её решения.

По статистике, среди обучающихся 11 классов, желающих сдавать экзамен профильного уровня по математике, не более третьей части от общего числа приступают к решению задачи № 16 ЕГЭ (планиметрия).

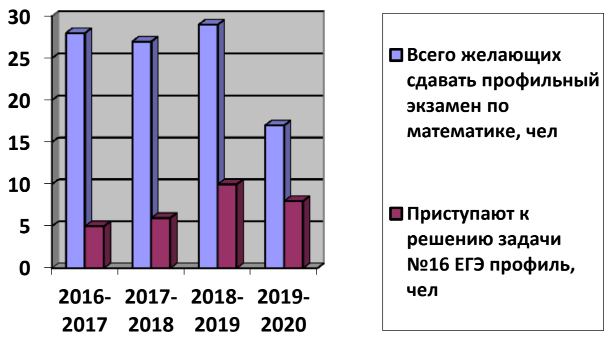


Рис. 1. Соотношение общего числа желающих сдавать экзамен по математике профильного уровня к числу приступающих к решению задачи №16 ЕГЭ (планиметрия).

Показатели абсолютно правильного решения геометрической задачи сложной части будут значительно меньше. Таким образом, прежде всего, необходимо увеличивать число желающих решать задачи повышенного уровня, а затем работать над качеством непосредственно решения.

Современный мир меняется быстро, и педагог должен динамично выстраивать свою траекторию преподавания согласно новым социальным запросам. Мотивирование обучающихся на решение сложных задач по геометрии объяснением с помощью доски и мела не создаёт атмосферы инноваций и не увлекает современных обучающихся.

Американский педагог, профессор Джон Дьюи отмечает, что если мы будем учить сегодня так, как учили вчера, то украдём у наших детей завтра. Поэтому, следуя тенденциям мирового опыта в различных сферах деятельности, стоит обратить внимание на цифровизацию образовательного процесса.

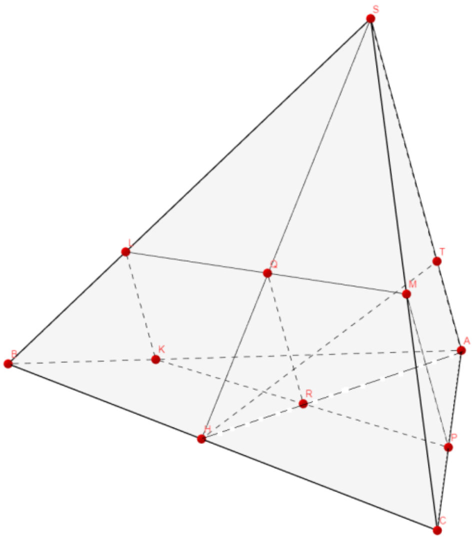
<table>
<tr><td colspan="2">Условие задачи. В правильной треугольной пирамиде SABCD, сторона основания $AB = 3$, а боковое ребро $SA = 2$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении 1:2, считая от вершины A.
б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.</td></tr>
<tr><td>Дано:
AB = 3
SA = 2
AK:KB =
= SM:MC =
= 1:2
KMϵα
α ∥ SA</td><td>

Рисунок:
Для выполнения рисунка использовали «Geogebra 3D»</td></tr>
<tr><td>Найти:
а) Док-ть: α делит ребро AC в отношении 1:2
б) расстояние между прямыми SA и KM</td><td>Решение: а) Пусть плоскость α пересекает ребро AC в точке P. Так как плоскость α параллельна SA, она пересекает грань SCA по прямой, параллельной SA. Тем самым, прямые MP и SA параллельны, следовательно треугольники CMP и SCA подобны, а $AP : AC = SM : MC = 1 : 2$, Ч. Т. Д.
б) Пусть плоскость сечения пересекает ребро SB в точке L. Аналогично пункту а) из подобия треугольников BKL и SBA находим, что$SL : LB = AK : KB = 1 : 2$. Из равенства $AP : AC = AK : KB$ следует, что PK и CB параллельны.
Пусть H – середина BC. Проведем SH и AH, пусть плоскость SHA пересекает α по прямой QR. Прямая SA параллельна плоскости α, поэтому искомое расстояние от прямой SA до прямой KM равно расстоянию между параллельными прямыми SA и QR. Найдем его. Найдем длины сторон треугольника SHA:
$$SA = 2, AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
Проведём высоту треугольника HT и найдем её. Пусть $AT = x$, тогда $ST = 2 - x$, тогда по теореме Пифагора, из треугольников AHT и SHT получаем:
$$HT^2 = AH^2 - AT^2 = SH^2 - ST^2$$
$$\frac{27}{4} - x^2 = \frac{7}{4} - (2 - x)^2$$
Решая уравнение получим$x = \frac{9}{4}$. Тогда $HT = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{81}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
Из подобия треугольников AKP и ABC получаем $AR : RH = AK : KB =$ $= 1 : 2$. QHR и SHA также подобны, а тогда плоскость сечения делит высоту HT в том же отношении 1 : 2, считая от точки T. Следовательно, расстояние между SA и KM равно одной третьей высоты HT или$\frac{\sqrt{3}}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ:$\frac{\sqrt{3}}{4}$</td></tr>
</table>

Среди информационно-коммуникационных средств выделим компьютер и бесплатную, кроссплатформенную динамическую математическую программу для всех уровней образования, включающую в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику в одном удобном для использования пакете [1]. В результате появляется план, согласно которому следует работать над проблемой низкой мотивации к решению задач по геометрии повышенного уровня:

– Заинтересовать обучающихся цифровыми ресурсами, способными облегчить решение задач по геометрии (GeoGebra).

– Научить основным приёмам работы в программе GeoGebra.

– Решить планиметрические задачи базового уровня по геометрии (индивидуально каждый, самоконтроль).

– По карточкам решить задачи базового уровня по планиметрии (в парах, взаимоконтроль).

– Решить планиметрические задачи повышенного уровня по геометрии (индивидуально каждый, самоконтроль).

–По карточкам решить задачи повышенного уровня по планиметрии (в парах, взаимоконтроль).

Пример решения **задачи №14** ЕГЭ профильного уровня с комментариями, этапами решения и чертежом приведен в таблице 1.

Работая с программным пакетом GeoGebra, обучающиеся отмечают простоту интерфейса: информационная среда для них является более комфортной по сравнению с построением чертежа вручную.

Навыки работы с цифровым ресурсом развивают умения:

– применять полученные знания по геометрии на практике;

– действовать самостоятельно без опасения совершить ошибку (всегда можно отменить действие);

– контролировать собственные действия.

В заключении отметим, что на всех ступенях образовательного процесса необходимо соблюдать принцип преемственности. Ситуации применения знаний на практике с помощью цифровых технологий в учебном процессе могут неоднократно повториться в будущей профессиональной деятельности конкурентоспособного инженера. Образовательный процесс и цифровые технологии дополняют друг друга на этапе подготовки квалифицированного специалиста, определяя единство образовательной среды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.*Ященко И.В.* Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ// М. : Издательство «Экзамен», 2019.- 263с.

2. https://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

ЭЛЕКТРОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТЕНТ «ИМЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ КУРСА ГЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ»

Утеева Роза Азербаевна
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика и математическое образование», Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, R.Uteeva@ tltsu.ru

Карасев Алексей Игоревич
аспирант кафедры «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, lex1012@mail.ru

Аннотация. *В статье раскрывается содержание и структура электронно-образовательного контента «Именные теоремы школьного курса геометрии».*
Ключевые слова: *электронно-образовательный контент, геометрия.*

ELECTRONIC EDUCATIONAL CONTENT "NOMINAL THEORIES OF THE SECONDARY SCHOOL GEOMETRY COURSE"

Uteeva Roza Azerbaevna
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Head of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Education
Togliatti State University
Russia, Togliatti, R. Uteeva @ tltsu.ru

Karasev Alexey Igorevich
post-graduate student of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Education
Togliatti State University
Russia, Togliatti, lex1012@mail.ru

Abstract. *The article reveals the content and structure of the electronic educational content "Nominal theorems of the school geometry course".*
Key words: *electronic educational content, geometry.*

Электронно-образовательный контент (ЭОК) мы рассматриваем как средство электронного образования, представляющее собой структурированный содержательный материал, размещённый в электронном (цифровом) виде, потребляемый с применением устройств обработки цифровой информации и используемый в образовательном процессе [2].

Использование ЭОК в процессе обучения, в частности математике, позволяет с помощью мультимедийных средств учитывать склонности, интересы и способности учащихся, а также удовлетворять потребности учеников в интеллектуальном развитии. Разработка ЭОК представляет собой одну из актуальных задач современной теории и методики обучения математике в связи с ориентацией образования на цифровизацию, а также удовлетворения потребностей школьников в дополнительном математическом образовании и развитии с помощью дистанционных образовательных технологий.

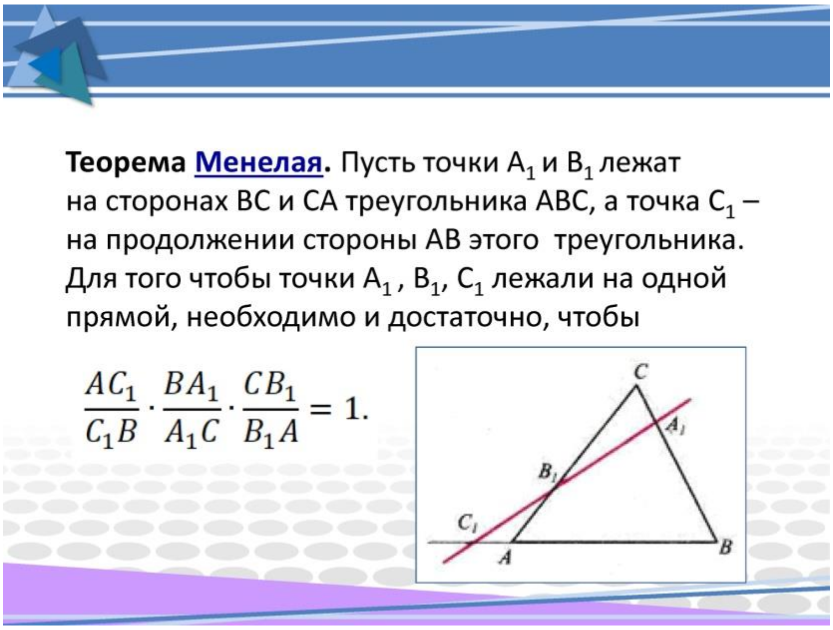
При разработке ЭОК по теме «Именные теоремы школьного курса геометрии», мы опирались на результаты анализа школьных учебников геометрии в 7-9 классах и выделенные в них именные теоремы: *Фалеса, Вариньона, Пифагора, Менелая, Чевы, Птолемея*, а также *формулу Герона* [5].

Аналогично мы выделили именные теоремы, изучаемые в 10-11 классах: пространственный аналог теоремы *Пифагора,* теорема *Декарта-Эйлера* для выпуклых многогранников; теорема *Дезарга,* теорема *Паскаля,* теорема *Польке-Шварца.*

В основу структурирования содержательного материала по каждой именной теореме были положены основные этапы обучения теоремам Г.И. Саранцева [3].

Содержательный материал по каждой теореме включает в себя экраны (слайды). Покажем эти слайды на примере теоремы Менелая:

1. Формулировка теоремы.



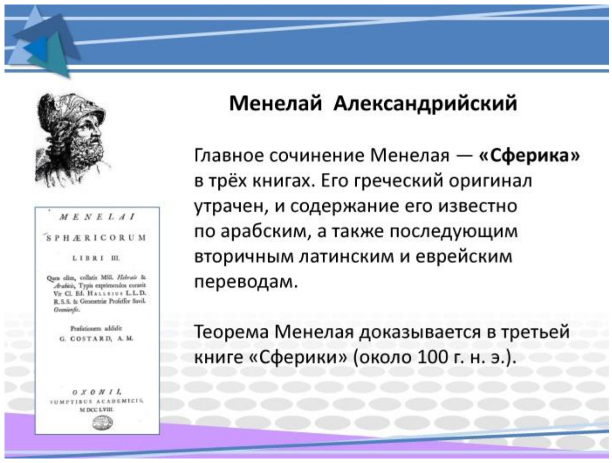
Экран с формулировкой теоремы

2. Краткая историческая справка об истории возникновения этой теоремы, о том, в честь кого и почему она так названа. Далее указывается ссылка на дополнительную литературу (например, на статьи из журнала «Квант», «Математика для школьников») и Интернет-источники.

Формулируются вопросы и задания по каждому источнику для самостоятельной работы. Указывается форма оформления ответов и выполненных заданий.

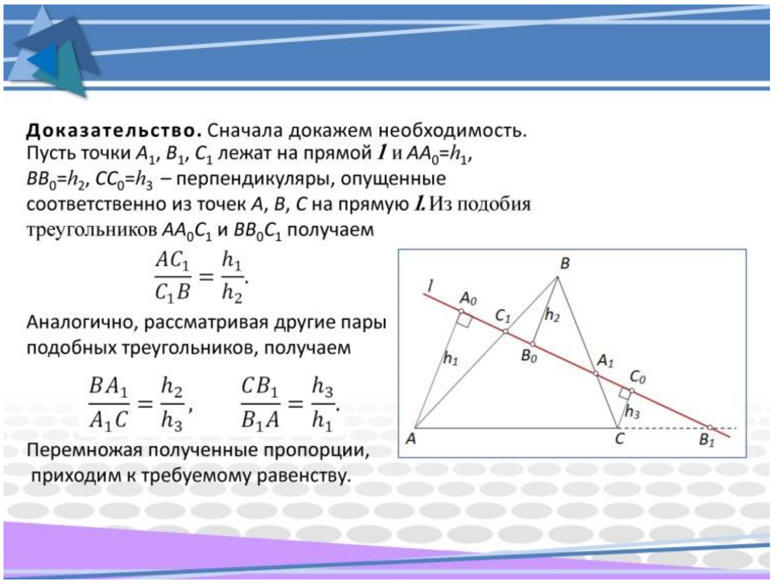
3. Мотивация изучения теоремы. Показ ее теоретической или практической значимости (Для чего? Зачем?).

4. Тест на усвоение формулировки теоремы (на распознавание, контрпримеры, примеры, геометрическая интерпретация теоремы).



Экраны с краткой исторической справкой

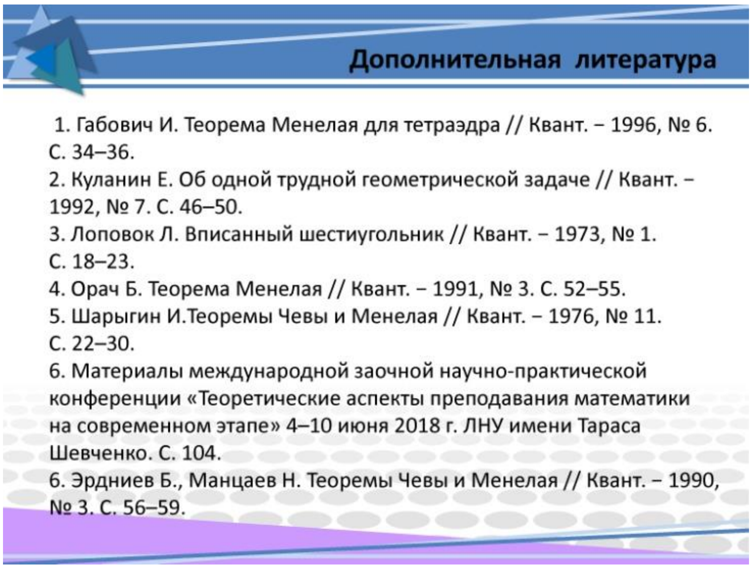
5. Ознакомление с идеей доказательства и указанием на наличие различных способов доказательства теоремы.



Экраны с доказательством теоремы

6. Разбор доказательства теоремы. Образец оформления записи доказательства.

Ссылка на дополнительную литературу и Интернет-источники для самостоятельного изучения других способов доказательства теоремы.



Экран с дополнительной литературой

7. Вывод основных следствий из теоремы.

8. Формулировка обратной теоремы и ее обоснование или доказательство.

9. Применение теоремы на практике. Образцы записи решения задач разного уровня (базового, углубленного).

Задания для самостоятельного решения задач. Тесты для самоконтроля.

10. Обобщение теоремы.

Значимость разработанного ЭОК «Именные теоремы школьного курса геометрии» определяется тем, что его содержание:

− ориентировано на достижение предметных результатов освоения математики в общеобразовательной школе (базовый или углубленный уровни);

− направлено на знакомство обучающихся с историей математических идей и открытий, с биографией ученых и их вкладом в развитие математики в целом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зидыганова Е.А., Утеева Р.А.* «Именные» теоремы школьного курса математики» /Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы Международной заочной научно-практической конференции(4–10июня, 2018г.). – Луганск: Книта, 2018. С.101-105.

2. *Карасев А.И.* Электронно-образовательные контенты как средство обучения математике в школе/ Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26–29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С. 420–423.

3. *Саранцев Г.И.* Общая методика преподавания математики: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов /Г.И. Саранцев. – Саранск: Красный октябрь, 1999. –454с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ К КЛАССИФИКАЦИИ РАСПАДАЮЩИХСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Борисов Иван Михайлович
аспирант кафедры фундаментальной математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, г. Нижний Новгород, i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Григорий Михайлович
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, г. Нижний Новгород, polotovsky@gmail.com

Аннотация. *В работе рассматривается применение метода Оревкова, основанного на теории узлов и зацеплений, к классификации вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, при выполнении некоторых условий максимальности и общего положения. В частности, рассматриваются некоторые классы распадающихся кривых степеней 7 и 8.*
Ключевые слова: *вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод Оревкова.*

APPLICATION OF THE THEORY OF KNOTS AND LINKS TO THE CLASSIFICATION OFTHE DECOMPOSABLE ALGEBRAIC CURVES

Borisov Ivan Michailovich
Postgraduate at the Department of Fundamental mathematics
National Research University Higher School of Economics
Russia, Nizhny Novgorod, i.m.borisov@mail.ru

PolotovskiyGrigory Michailovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Fundamental mathematicsNational Research University Higher School of Economics,
Russia, Nizhny Novgorod, polotovsky@gmail.com

Abstract: *The work is devoted to the application of the Orevkov method, based on the theory of knots and links, to the classification of real algebraic curves, which decompose into the product of two nonsingular curves under some conditions of maximality and general position. In particular, some classes of decomposable curves of the 7 and 8 degree are considered*.
Keywords: *real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, Orevkov’smethod*

Изучение вещественных алгебраических кривых берёт своё начало фактически у истоков математики, в Древней Греции, а задача топологической классификации таких кривых особую известность и современную формулировку приобрела после включения её Давидом Гильбертом в его известный список математических проблем под номером 16. Гильберт, столкнувшись, с первым нетривиальным случаем, кривыми степени 6, поставил задачу классификации кривых шестой степени, которая была решена лишь спустя 69 лет Дмитрием Андреевичем Гудковым [1]. Сейчас известна классификации кривых степени 7, а для кривых степени 8 есть открытые вопросы.

После результатов Гудкова, интерес к этой тематике резко возрос. Появился ряд сопутствующих ей задач, одна из которых была сформулирована Гудковым как задача топологической классификации вещественных алгебраических кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей (была решена вторым из авторов настоящей работы [2]. На данный момент известна классификации распадающихся кривых до степени 6 включительно, есть открытые вопросы для кривых степени 7.

Определение 1.Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_mстепени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.

Определение 2. Множество RC_m (CC_m)точек $(x_0\colon x_1\colon x_2)$ $\big((z_0\colon z_1\colon z_2)\big)$ вещественной (комплексной) проективной плоскости RP^2 (CP^2), удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m.

Определение 3. Кривая C_mназывается неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в CP^2).

Теорема (Харнак, 1876). Пусть N– число компонент связности RC_m. Тогда

$N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, причём эта оценка точна для любого m.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *М*-кривыми.

Будем считать, что для рассматриваемых распадающихся кривыхC_m выполняются следующие условия:

1. $C_m = C_{m-k}C_k, k \in \{1,2,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$.

2. C_{m-k}и C_k являются *М*-кривыми.

3. C_{m-k}и C_k пересекаются в $(m-k)\cdot k$ действительных точках без касания.

4. Все точки пересечения лежат на одной ветви кривой C_{m-k} *и* на одной ветви кривой C_k,.

5. Точки пересечения лежат на пересекающихся ветвях в одном порядке.

Задача топологической классификации распадающихся кривых степени m обычно формулируется как задача классификации с точностью до изоморфизма троек (RP^2, RC_m, RC_k), где $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$.

Для того, чтобы применить метод Оревкова (подробнее см. [4], [5]), нужно выбрать схемы, для которых существует максимальный пучок, то есть в RP^2 есть точка p такая, что любая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекает исследуемую схему кривой степени m не менее, чем в $m - 2$ точках, и существует прямая, пересекающая схему в m точках.

Идея метода заключается в том, чтобы сначала получить для кривой C_m соответствующую ей косу из m нитей, рассматривая в комплексной проективной плоскости CP^2 расположение пучка комплексных прямых CL_p с центром в точке p относительно CC_m и устраняя двойные точки множества $CC_m \cap Cl_p$, а затем использовать известный факт [3]: если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая ей коса квазиположительна.

Неравенство Мурасуги-Тристрама и условие Фокса-Милнора – необходимые условия квазиположительности косы. Поэтому, если хотя бы одно из них не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой.

В нашей работе метод Оревкова применялся к распадающимся кривым степеней 7 и 8.

Этим методом были запрещены 11 схем расположений двух коник и кубики таких, что коники пересекаются друг с другом в четырёх точках, а нечётная ветвь кубики пересекает каждую из коник в шести точках. Также рассматривались распадающиеся кривые степени 8 с сомножителями степеней 2 и 6. Было доказано, что из 250допустимых расположений, 230 не реализуются вещественными алгебраическими кривыми рассматриваемого класса. 6 из оставшихся схем реализуются методом Гильберта (метод Гильберта изложен, например, в [1]). Для остальных 14 схем вопрос о реализуемости вещественными алгебраическими кривыми указанного вида остаётся открытым.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гудков Д.А.* Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. – 1974 – Т.29, №4, С. 3-79.

2. *Полотовский Г.М.* Полная классификация *M*-распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости //Деп. ВВИНИТИ. – 1978, С 1-103.

3. *Lee Rudolf.*Algebraic functions and closed braids // Topology. – 1983, №22, P. 191-202.

4. *Orevkov S.Yu.* Classification flexible *M*-curves of degree 8 up to isotopy // Geom. Funct. Anal. – 2002, №12, P. 723-755.

5. *Orevkov S.Yu.* Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. – 1999, №38, P.779-810.

ОБ УСЕЧЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ТРИГОНОМЕРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Ильмушкин Георгий Максимович

Доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры высшей математики
«Димитровградский инженерно-технологический институт-филиал
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ»
Россия, г. Димитровград, gera1946@yandex.ru

Аннотация. *В работе описываются решения усеченной операторной тригонометрической проблемы моментов методами спектральной теории изометрических операторов. Рассматривается тот случай, когда теплицева матрица для данной проблемы моментов является строго положительной. Тогда описание решений обозначенной проблемы моментов сводится к описанию спектральных разложений регулярного изометрического оператора в гильбертовом пространстве конечных векторных последовательностей.*

Ключевые слова: *гильбертово пространство, регулярный изометрический оператор, спектральное разложение, решение проблемы моментов, псевдогильбертово пространство.*

ABOUT TRACED OPERATOR TRIGONOMERIC PROBLEM OF MOMENTS

Ilmushkin Georgy Maksimovich

Doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences,
professor, Professor Department of Higher Mathematics
«Dimitrovgrad Engineering and Technology Institute, a branch of the National
Research Nuclear University MEPhI»
Russia, Dimitrovgrad, gera1946@yandex.ru

Abstract. *The paper describes solutions to the truncated operator trigonometric moment problem by the methods of the spectral theory of isometric operators. We consider the case when the Toeplitz matrix for this problem of moments is strictly positive. Then the description of the solutions of the indicated problem of moments reduces to the description of the spectral decompositions of regular isometric operator in a Hilbert space of finite vector sequences.*

Keywords: *Hilbert space, regular isometric operator, spectral decomposition, solution of the moment problem, pseudo-Hilbert space.*

1. *Предварительные сведения*

Усеченная операторная тригонометрическая проблема состоит в следующем: дана конечная последовательность линейных ограниченных операторов $\mathrm{C_k}$ $(\mathrm{k} = 0, \pm 1, 2, \ldots \pm n)$ в гильбертовом пространстве H. Отыскиваются операторные функции распределения F(t), удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{C_k} = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dF(t) \ \ (\mathrm{k} = 0, \pm 1, 2, \ldots \pm n),$$

где F(t) – неубывающая операторная функция со значениями в H. Сходимость интегралов Стилтьеса понимается в сильной топологии пространства H.

При этом функции распределения F(t) называются решениями операторной тригонометрической проблемы моментов или операторной проблемы моментов Каратеодори [2,3,7].

Приведём необходимые сведения, понятия и обозначения, которые в дальнейшем нам потребуются.

Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Обозначим через $L(H_1, H_2)$ совокупность всех линейных непрерывных операторов, отображающих одно гильбертово пространство H_1 в другое – H_2 с псевдоскалярным произведением $\{U,V\} = U^*V$, где U^* - сопряженный оператор, называется псевгильбертовым пространством [1].

Пусть H – произвольное пространство Гильберта со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Обозначим через L(H;H) пространство линейных непрерывных операторов, действующих на всем H.

2. Результаты исследования и их обсуждение

В теории усеченной тригонометрической операторной проблемы моментов важное место занимают так называемые теплицевы матрицы $T_k (k = 0,1,\dots,n)$, определяемые следующим образом [2,5]

$$T_k = \begin{Vmatrix} C_0 & C_1 & . & . & . & C_k \\ C_{-1} & C_0 & . & . & . & C_{k-1} \\ & & & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ C_{-k} & C_{-k+1} & . & . & . & C_0 \end{Vmatrix}.$$

Элементами теплицевой матрицы является линейные операторы из L(H;H).

Теплицевы матрицы $T_k (k = 0,1,\dots,n)$ можно также понимать как оператор, действующий в ортогональной сумме $\oplus_{i=1}^{k} H_i$ гильбертовых пространств $H_i = H$. Напомним [2,3], проблема моментов (2) разрешима тогда и только тогда, когда оператор T_n положителен. Это равносильно тому, что

$$\sum_{i,k}^{n} (C_{i-k} x_i, x_k)_H \geq 0 \; (x_i \in H).$$

Из положительности последовательности $\{C_k\}_{-n}^{n}$ следует, что $C_{-k} = C_k^*$.

Обозначим через C^n множество всех конечных последовательностей операторов $\{(C_k)_{-n}^{n}\}$в H, для которых теплицевы операторы T_n строго положительны.

Напомним, что оператор A в гильбертовом пространстве H называется строго положительным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Ax, x)_H > \gamma \| f \|, \forall x \in H.$$

Итак, пусть $(C_k)_{-n}^{n} \in C^n$. Обозначим через l_2 (H;[0, n]) , где n–некоторое фиксированное натуральное число, гильбертово пространство конечных векторных последовательностей со скалярным произведением

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^{n} (C_{i-k} x_i, y_k)_H, \text{где } \hat{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\hat{y} = (y_0, y_1, ..., y_n) \quad (x_i, y_k \in H).$$

Можно показать, что l_2 (H;[0, n]) – полное гильбертово пространство. Обозначим через $\hat{l}_2$ (H;[0, n]) псевдогильбертово пространство всех линейных операторов U, отображающих H в l_2 (H;[0, n]), с псевдоскалярным произведением $\{U, V\} = U^* V$.

Заметим, что пространство конечных операторных последовательностей $\hat{l}_2(H;[0, n)) = \{ (U_0, U_1, \ldots, U_n), U_i \in L(H;H)\}$, псевдоскалярное произведение, в котором для любых $U = \{U_i\}_{i=0}^{n}$, $V = \{V_i\}_{i=0}^{n}$ определено следующим образом: $\{U, V\} = \sum_{i,k=0}^{n} U_i^* C_{i-k} V_i$.

Всякий линейный оператор A в l_2 (H;[0, n]) с областью определения D_A естественным образом порождает в псевдогильбертовом пространстве $\hat{l}_2$ (H;[0, n]) оператор $\overline{A}$ [1, с. 567],заданный на

$$D_{\overline{A}} = \left\{ U \in \hat{l}_2(H;[0, n]) : Ux \in D_A, \forall x \in H \right\}$$

следующим образом

$$(\overline{A}U)x = \overline{A}(UX) \forall U \in D_{\overline{A}}, x \in H.$$

Обозначим через V оператор сдвига в пространстве l_2 (H;[0, n]) с областью определения $D_v = l_2$ (H;[0, n - 1]), определенный в следующем виде

$$V(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

В качестве псевдобазиса в $\hat{l}_2$ (H;[0, n]) выберем последовательность псевдовекторов $\{ E_i' = (\delta_{i0} E, \delta_{i1} E, \ldots, \delta_{in} E) \}_{i=0}^{n}$, $i = 0,1, \ldots n$, (1)

где E – тождественный оператор в L(H;H).

С учетом условия $(C_k)_{-n}^{n} \in C^n$ нетрудно показать, что последовательность псевдовекторов (1) псевдоортогонализируема. Посредством псевдоортогонализации получим псевдоортонормированный базис $E_0, E_1, ..., E_n$ в $\hat{l}_2$ (H;[0, n]).

Положим:

$\{ E_i, \overline{V} E_k \} = A_{ik}$, $(i = 0,1, ..., k+1,\ k = 0,1, ..., n-1)$.

Справедливы следующие положения:

1. $A_{k+1,k}$ $(k = 0,1,2, ..., n-1)$ -операторы из L(H;H), имеющие ограниченные обратные на всем H.

2. $\sum_{i=0}^{k=1} A_{ik}^* A_{ik} = E$. 3. $V(E_k x) = \sum_{i=0}^{k+1} E_i A_{ik} x, \forall x \in H \ (k = 0,1, ..., n-1)$.

Из соотношения (3) следует, что оператор V – изометрический, причем замкнутый.

В самом деле, имеем

$$(\mathrm{V}\,(\mathrm{E_k}x), \mathrm{V}(\mathrm{E_k}x)) = (\sum_{\mathrm{i=0}}^{k+1} E_i \mathrm{A_{ik}}x, \sum_{\mathrm{i=0}}^{k+1} E_i \mathrm{A_{ik}}x) =$$

$$= (\sum_{\mathrm{i=0}}^{k=1} \mathrm{A_{ik}}^* \mathrm{A_{ik}}x, x) = (\mathrm{Ex},\ \mathrm{x}) = (\mathrm{x},\ \mathrm{x})\ (\mathrm{k} = (0,1,\ldots,\mathrm{n}-1).$$

Напомним, что точка ς называется точкой регулярного типа линейного оператора А, если $\exists\,\mathrm{k} = \mathrm{k}(\varsigma) > 0, \forall \mathrm{f} \in \mathrm{D_A}$ выполняется условие

$$\|\,(\mathrm{A} - \varsigma\,\mathrm{E})\mathrm{f}\,\| \geq k\|f\|.$$

Множество всех точек регулярного типа оператора А называется полем регулярности этого оператора. Если вся комплексная плоскость является полем регулярности оператора А, то он называется регулярным. Изометрический оператор будет регулярным, если все точки единичной окружности являются для него точками регулярного типа.

В частности, спектральные разложения симметрических и изометрических операторов, в том числе, и в регулярном случае, описаны в работах [4-6,8].

Итак, каждой конечной последовательности $(C_k)_{-n}^n \in C^n$ соответствует выше построенным образом оператор сдвига V в гильбертовом пространстве $l_2\,(\mathrm{H};[0,\mathrm{n}])$, который является регулярным изометрическим оператором.

Как известно[3], для любой моментной последовательности операторов $(C_k)_{-n}^n \in C^n$ решениеF(t) допускает представление в виде $F(t) = \{E_0, \overline{E}_t\ E_0\}$, (3)

где $E_{\mathrm{t}}\ (0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi)$ - некоторое спектральное разложение регулярного изометрического оператора V, ассоциированного с данной проблемой моментов. Обратно, формула (3) при любом E_{t} определяет решение рассматриваемой проблемы моментов.

Тем самым для описания совокупности всех решений F(t) проблемы моментов Каратеодори достаточно описать множество всех спектральных разложений регулярного изометрического оператора V. Составим систему операторных уравнений $\sum_{\mathrm{i=0}}^{k+1} \mathrm{A_{ik}} X_k = \varsigma\, X_k\ (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1)$

с начальными условиями

$$P_0(\varsigma) = E,\quad \mathrm{P_1}(\varsigma) = (\varsigma\, E - A_{00})A_{00}^{-1},$$

где ς - произвольное комплексное число. Решением данной системы являются тригонометрические полиномы первого рода $P_k(\varsigma), \mathrm{k} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}.$

Обозначим через K(S; H, H) класс всех аналитических в единичном круге S операторных функций, значениями которых являются линейные операторы сжатия, действующие на всем H. Из исследований [4-6] следует, что спектральные функции регулярного изометрического оператора Vопределяются формулой

$$S(t) = \frac{\lim}{r \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{Re} \left\{ \begin{array}{l} [E + \varsigma P_n^{-1}(\frac{1}{\varsigma}) \sum_{i=0}^{n} P_i(\frac{1}{\varsigma}) P_i^*(0) \Gamma(0)^{1/2} \omega(\varsigma)] \times \\ \times [E - \varsigma P_n^{-1}(\frac{1}{\varsigma}) \sum_{i=0}^{n} P_i(\frac{1}{\varsigma}) P_i^*(0) \Gamma(0)^{1/2} \omega(\varsigma)]^{-1} \end{array} \right\} dt, \quad (4)$$

где $\varsigma = re^{it}$, $\omega(\varsigma)$ - произвольная функция классаK(S;H,H). Из последних соотношений следует, что совокупность решений F(t) для моментной последовательности $(C_k)_{-n}^{n} \in C^n$ определяется формулами (3) и (4).

3. Заключение

Как показывают результаты реализованного исследования, спектральная теория изометрических операторов имеет важное прикладное значение во многих областях современных математических знаний. В частности, в данной работе широко использована связь спектральной теории операторов с теорией операторных степенных проблем моментов. В представленной работе спектральная теория изометрических операторов позволила описать решения операторной тригонометрической проблемы моментов через множество аналитических функций, значениями которых являются операторы сжатия в некотором гильбертовом пространстве. При этом существенную роль в реализованном исследовании сыграла методика автора [1].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 800 с.

2. *Ильмушкин Г.М., Турицын А.Б.* Усеченная операторная тригонометрическая проблема моментов // Ж. Известия вузов. Математика. Изд-во Казанского университета. 1982. №7. С. 17–21.

3. *Ильмушкин Г.М., Александров Е.Л.* О решениях операторной степенной проблемы моментов // Ж. Известия вузов. Математика. Изд-во Казанского университета. 1989. №3. С. 18–24.

4. *Ильмушкин Г.М.* О спектральных функциях одного регулярного симметрического разностного оператора // Математические заметки. АН СССР. 1979. Т. 25. Вып. 2. С. 249–255.

5. *Ильмушкин Г.М.* Об одном изометрическом операторе в гильбертовом пространстве // Вестник ДИТИ: науч. журн. / Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал НИЯУ МИФИ.2017.Вып. 2 (13). С. 36–41.

6. *Александров Е.Л., Ильмушкин Г.М.*О спектральных функциях распределения регулярных изометрических операторов // Сибирский математический журн. АН СССР. 1974. Т. XV. №5. С. 972–984.

7. *Чумакин М.Е.* Об обобщенных резольвентах изометрического оператора // Докл. АН СССР. 1965. Т.154. №4. С. 791–794.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ СИМПЛЕКСОВ

Овездурдыев Худайберды
кандидат физико- математических наук, доцент, зав. кафедрой математики
и методики преподавания математики,
Туркменский государственный педагогический институт имени С. Сейди,
Туркменистан, г. Туркменбат. h-owez@mail.ru
Мурадов Бегенч
преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики
Туркменский государственный педагогический институт имени С. Сейди.
Туркменистан, г. Туркменбат

Аннотация. *В статье показано применение обобщенных теорем теории симплексов для решения конкретных задач.*
Ключевые слова: *теорема Лейбница, обобщенная теорема Лейбница.*

THE APPLICATION OF THE GENERALIZED SIMPLEX METHOD

Owezdurdyyev Hudayberdi
candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, head of department
of mathematics and methods of teaching mathematics
S. Seydi Turkmen State Pedagogical Institute
Turkmenistan, City Turkmenabat. h-owez@mail.ru

Muradov Begench
teacher of department of mathematics and methods of teaching mathematics.
S. Seydi Turkmen State Pedagogical Institute
Turkmenistan, City Turkmenabat

Abstract. *In this article given the application of the generalized simplex method for solving the specific problems.*
Key words: *Leibniz's rule, generalized Leibniz's rule.*

Существует много теорем, включенных в золотой фонд классической геометрии (теорема Чевы, Ван-Обеля, Жергона, Менелая, Лейбница и др.). В работе [1] даются обобщение этих теорем.

В данной статье рассматривается применение теорем теории симплексов для решения задач, которые значительно облегчают решение задач. Проиллюстрируем это на примере решения одной задачи.

Теорема Лейбница [2]. Сумма квадратов расстояний произвольной точки Р до вершин треугольника, равна сумме квадратов расстояний от вершин до центра тяжести О треугольника , сложеной с утроенным квадратом расстояния от центра тяжести до данной точки:

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=3|PO|^2+|OA|^2+\left|OB^2\right|+|OC|^2.$$

Задача1. Пусть вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность.На окружности возьмем произвольную точку P, не совпадающую с вершинами треугольника ABC. Требуется найти сумму:

$$S = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2.$$

Решение. Пусть $|AB| = a$ и P произвольная точка описанной возле треугольника ABC окружности (рис.1). Для решения задачи применим теорему синусов. ΔABC - равносторонний, отсюда следует $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$.

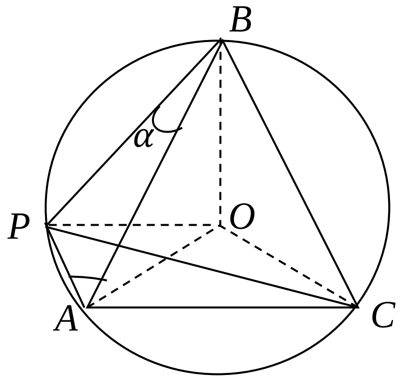


рис. 1

Согласно свойству углов четырехугольника, вписанного в окружность, получим $\angle APB = 120^0$. Если $\angle PBA = \alpha$, тогда $\angle PAB = 60^0 - \alpha$ и по теореме синусов получим:

$$\Delta APB : PB = 2R\sin\alpha,\ PA = 2R\sin(60^0 - \alpha);\ \Delta APC : PC = 2R\sin(60^0 + \alpha).$$

В результате имеем:

$$S = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 4R^2\left[\sin^2\alpha + \sin^2(60^0 - \alpha) + \sin^2(60^0 + \alpha)\right] =$$

$$= 4R^2\left[\sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2\right] =$$

$$= 4R^2\left[\sin^2\alpha + 2\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)\right] = 4R^2\cdot\frac{3}{2} = 6R^2 = 6\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2a^2, \quad S = 6R^2 = 2a^2$$

Если задачу решать с использованием теоремы Лейбница, то получим

$$S = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3\cdot|PO|^2 + |AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 = 3R^2 + R^2 + R^2 + R^2 = 6R^2 = 6\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2a^2.$$

При сравнении решений задачи, видим, что второй способ более рациональный, облегчает решение задачи.

Обобщенная теорема Лейбница [1]. Сумма квадратов расстояний произвольной точки P от вершин квадрата равна сумме квадратов расстояний от вершин до центра тяжести O квадрата, сложенной с учетверенным квадратом расстояния от центра тяжести до данной точки.

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4\cdot|PO|^2+|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2 .$$

Задача 2. Пусть вокруг квадрата ABCD со стороной a описана окружность. На окружности возьмем произвольную точку P (рис. 2), не совпадающую с вершинами квадрата. Требуется найти сумму:

$$S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$$

Решение. Для решения задачи применим теорему синусов. Пусть $\angle BAP=\alpha,$ тогда $\angle PBA=45^0-\alpha.$ Согласно свойству углов четырехугольника, вписанного в окружность, получим $\angle BPA=135^0$.

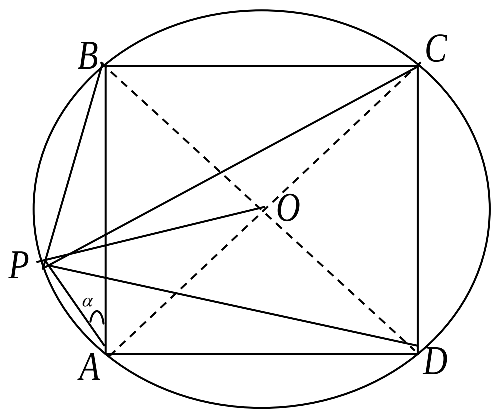


Рис.2.

Из треугольников $APB,\ APD,\ PBC$ получим

1) $\Delta APB:\ |PB|=2R\sin\alpha;\ PA=2R\cdot\sin(45^0-\alpha),$

2) $\Delta APD:\ |PD|=2R\sin(\alpha+90^0)=2R\cdot\cos\alpha,$

3) $\Delta PBC:\ |PC|=2R\cos(45^0-\alpha).$

В итоге имеем

$$S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4R^2\left[\sin^2(45^0-\alpha)+\sin^2\alpha+\cos^2(45^0-\alpha)+\cos^2\alpha\right]=$$

$$=4R^2\cdot 2=8R^2=8\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=4a^2;\quad S=8R^2=4a^2.$$

Если задачу решать с использованием обобщенной теоремы Лейбница, то получим:

$$S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4|PO|^2+|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2=8R^2=4a^2$$

При сравнении решений задачи, видим, что второй способ более рациональный.

Авторами собрано достаточно много конкретных задач, которые решаются с применением теорем теории симплексов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.*Овездурдыев Х.* Обобщенные теоремы теории симплексов.-А.: Ылым, 2014.

2.*Зейтель С. И.* Новая геометрия треугольника.- Учпедгиз, 1962.

ГЕОМЕТРИЯ ТРАЕКТОРИЙ РАЗРЫВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ

Уланов Борис Васильевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики и математического образования,
Тольяттинский государственный университет
Россия, г. Тольятти, bv_ulanov@mail.ru

Аннотация. *В статье предлагается способ синтеза систем стабилизации динамических объектов с неизвестными изменяющимися произвольным образом в ограниченных пределах параметрами с использованием разрывного управления без скользящих режимов в замкнутой системе.В замкнутой системе обеспечивается асимптотическая сходимость вектора состояния к нулю. Управления синтезируются по измеряемому векторному выходу объекта.*
Ключевые слова: *динамический объект, стабилизация; разрывное управление; скользящий режим*.

THE GEOMETRY OF THE TRAJECTORIES OF A DISCONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEM WITHOUT SLIDING MODES

Ulanov Boris Vasilyevich
candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor,
associate Professor of the Department of higher mathematics and mathematical education
Togliatti state University
Russia, Togliatti, bv_ulanov@mail.ru

Abstract. *The article proposes a method for synthesizing stabilization systems of dynamic objects with unknown parameters that vary arbitrarily within limited limits using discontinuous control without sliding modes in a closed system. In a closed system, the state vector is asymptotically converging to zero. The controls are synthesized by the measured vector output of the object.*
Keywords: *dynamic object, stabilization; discontinuous control; sliding mode.*

Известно, что для стабилизации динамических объектов с неизвестными нестационарными параметрами, изменяющимися произвольным образом в широких пределах, используются разрывные управления [1, 2]. Эффективность использования разрывных управлений обосновывается тем, что нелинейность управления позволяет избежать использование больших коэффициентов в законе управления и удовлетворить имеющиеся на практике ограничения на величину управления, так как в [1, 2] показано, что для стабилизации объекта достаточно использование нелинейного управления с абсолютной величиной коэффициентов, всего лишь мажорирующей абсолютную величину неизвестных параметрических возмущений, а использование таких по величине коэффициентов в линейном управлении недостаточно, так как линейное управление должно обеспечивать известную степень устойчивости движения в зависимости от пределов изменения неизвестных параметров объекта.

В данной работе развиваются методы синтеза нелинейных стабилизирующих управлений [3, 4]. Показывается, что предлагаемый метод синтеза управления позволяет решить задачу стабилизации объекта при использовании разрывного управления без скользящих режимов; решить задачу в случае, когда пределы изменения параметров объекта широки, и обеспечить сходимость вектора состояния объекта к нулю. Перейдем к математической формулировке проблемы. Рассматривается управляемая динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(\gamma^T(t)y + u), y = Dx, t \geq t_0, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – состояние управляемого объекта, $u \in R^1$ – управление, $y \in R^d$– выход объекта; A, b, D– известные постоянные матрицы; компоненты неизвестной вектор-функции

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t))^T \in R^d$$

есть измеримые в смысле Лебега на $[t_0, \infty)$функции, причем

$$\underset{t \geq t_0}{vrai\,max}|\gamma_i(t)| \leq \gamma_{i0} \quad (i = 1, \dots, d),$$

где γ_{i0} $(i = 1, \dots, d)$ – известные числа.

Проблема состоит в синтезе управления $u = u(y)$, при котором всякое решение замкнутой системы ограничено и для всякого решения $\|x(t)\| \to 0$при $t \to \infty$.

Предполагаем, что известными в теории линейных стационарных систем найдены векторы $c \in R^d$, $k \in R^d$и n ×-матрица P, такие, что

$$P = P^T > 0, \qquad Pb = D^T c, \qquad -A_0^T P - PA_0 > 0, \qquad (2)$$

где $A_0 = A + bk^T D$и неравенство $G > 0$для матрицы G означает положительную определенность матрицы G.

Обозначаем: $s = s(y) = c^T y, s(t) = s\big(y(t)\big), |w| = (|w_1|, \dots, |w_m|)^T$для $w = (w_1, \dots, |w_m|)^T \in R^m$.

В случае известных γ_{i0} строим разрывное управление

$$u = u_1 + u_2, \qquad (3)$$

где $u_1 = k^T y, u_2 = -(\alpha_0^T |y|) sgns,$ здесь $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{d0})^T$ – некоторый постоянный вектор, подлежащий выбору.

Теорема. Пусть выполнены условия (2) и$\alpha_{i0} \geq \gamma_{i0}$для $i = 1, \dots, d.$ Тогда нулевое решение замкнутой системы$x(t) \equiv 0$ (решение разрывной замкнутой системы понимаем в смысле Филиппова А.Ф.) – асимптотически устойчивое в целом решение замкнутой системы.

Утверждается, что построенная замкнутая система с разрывным управлением может функционировать без скользящего режима на поверхности разрыва $\{x: s = c^T Dx = 0\}$ вдоль любого ненулевого решения$x(t).$ При синтезе замкнутой системы можно ставить цель – обеспечить отсутствие скользящих режимов. Указанное свойство замкнутой системы продемонстрируем в следующем примере, рассмотрев геометрические свойства изменения с течением времени положения вектора состояния объекта в пространстве состояний. Рассмотрим объект, описываемый уравнениями, $\frac{dx_1}{dt} = x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma_1(t)x_1 + \gamma_2(t)x_2 + u, y = (x_1, x_2)^T, t \geq t_0.$$

Предположим, что $|\gamma_i(t)| \le 10, \forall t \ge t_0, i = 1, 2$.

В примере в соответствии с общей постановкой задачи имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выберем

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} -1 \\ -43 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 44 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношения (2) выполняются. Положим $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 10$. Тогда будем иметь $s = c^T y = x_1 + x_2, u = -x_1 - 43x_2 - 10(|x_1| + |x_2|) \cdot sgn\, s$.

Проанализируем, может ли вектор состояния $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ управляемого объекта продолжить движение вдоль прямой $\{s = 0\}$, попав на эту прямую, и тогда в замкнутой системе возникнет скользящий режим, или скользящий режим гарантированно будет отсутствовать.

Производная от s по t вдоль решений замкнутой системы (1), (3) будет

$$\frac{ds}{dt} = -x_1 - 42x_2 + \gamma_1(t)x_1 + \gamma_2(t)x_2 - 10(|x_1| + |x_2|) \cdot sgn\, s.$$

В точках прямой $\{s = 0\}$, лежащих в множестве $\{x_1 > 0,\ \ x_2 < 0\}$,имеем

$$\lim_{s\to 0+} ds/dt \ge (-x_1 - 42x_2 - 20x_1 + 20x_2)|_{s=0} =$$

$$= (21s - x_2)|_{s=0} = -x_2 > 0,$$

$$\lim_{s\to 0-} ds/dt \ge (-x_1 - 42x_2)|_{s=0} = (-s - 41x_2)|_{s=0} = -41x_2 > 0.$$

В точках прямой $\{s = 0\}$, лежащих в множестве $\{x_1 < 0,\ \ x_2 > 0\}$,имеем

$$\lim_{s\to 0+} ds/dt \le (-x_1 - 42x_2)|_{s=0} = (-s - 41x_2)|_{s=0} = -41x_2 < 0,$$

$$\lim_{s\to 0-} ds/dt \ge (-x_1 - 42x_2 - 20x_1 + 20x_2)|_{s=0} =$$

$$= (21s - x_2)|_{s=0} = -x_2 < 0.$$

Как видим, знаки рассмотренных пределов дают доказательство невозможности возникновения скользящего режима вдоль любого ненулевого решения построенной замкнутой системы стабилизации.

Таким образом, в работе предложен способ математического конструирования систем стабилизации объектов с неизвестными нестационарными параметрами с использованием разрывного управления без возникновения скользящего режима вдоль всякого ненулевого решения замкнутой системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *UtkinV.I.* Sliding modes in control optimization. –Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 485 pp.

2. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. – М.: Наука, 1974. – 272 с.

3. *Уланов Б.В.* Стабилизация динамических объектов с неизвестными нестационарными параметрами линейными и адаптивными управлениями // Известия вузов. Авиационная техника. 1990, №4. С. 38 – 40.

4. *Уланов Б.В.* Стабилизация объектов с неизвестными нестационарными параметрами разрывными и нелинейными непрерывными управлениями // Известия вузов. приборостроение. 1991, №12. С. 22 – 25.

WEB-КВЕСТ КАК ИННОВАЦИОННАЯ ФОРМА ОРГАНИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ В УСЛОВИЯХ ЕДИНОЙ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Большова Елена Анатольевна
аспирант кафедры «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинский государственный университет
магистр, преподаватель математики
Автономная некоммерческая организация дополнительного образования
«ЦЕНТР ДОМАШНЕГО ОБУЧЕНИЯ»,
Россия, г. Тольятти, elena.bolschova@yandex.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются особенности организации дифференцированной домашней работы по геометрии обучающихся 7-ых классов онлайн-школы посредством Web-квест технологии, ориентированной на формирование навыков учебно-познавательной самостоятельности, творческого мышления, активизации исследовательской деятельности школьников, что предполагает повышение интереса и мотивации к обучению.*
Ключевые слова: *дифференцированные домашние задания, дифференцированная домашняя работа, дистанционное обучение, Web-квест технология, тематический образовательный Web-квест.*

WEB-QUEST AS AN INNOVATIVE FORM OF ORGANIZATION OF THE DIFFERENTIATED HOMEWORK STUDENTS FOR GEOMETRY IN THE SINGLE DIGITAL INFORMATION EDUCATIONAL ENVIRONMENT

Bolshova Elena Anatolievna
postgraduate student of the Department "Higher mathematics and mathematical education" Togliatti state University master's degree, teacher of mathematics
Autonomous non-profit organization of additional education
«HOME EDUCATION CENTER»,
Russia, Tolyatti, elena.bolschova@yandex.ru

Abstract. *The article discusses the features of the organization of differentiated homework on the geometry of students in the 7th grades of an online school through a web-quest technology focused on the formation of skills of educational-cognitive independence, creative thinking, and the activation of research activity of students, which implies an increase in interest and motivation for learning.*
Keywords: *differentiated home tasks, differentiated homework, distance learning, Web-quest technology, thematic educational Web-quest.*

Задача школьного математического образования в Российской Федерации состоит в информатизации, как в одном из приоритетных направлений развития, обеспечивающих широкие возможности для реализации учебных программ, применения современных образовательных технологий обучения, позволяющих ориентироваться на личностные особенности и учитывать индивидуальные потребности обучающихся.

В настоящее время некоторые школьники не имеют возможности обучаться традиционным способом, посещая общеобразовательное учреждение, ввиду разных проблем (временных, территориальных, ОВЗ и т.п.). Для таких категорий обучающихся *дистанционное обучение* — это единственный способ получения знаний. При такой форме обучения особое место занимает домашняя работа, поскольку большую часть учебного материала обучающиеся изучают самостоятельно, в домашних условиях. Дифференциация в организации домашней работы школьников при дистанционной форме обучения математике позволит сделать процесс обучения наиболее эффективным. Возникает вопрос об эффективных способах и формах организации *дифференцированной домашней работы* по математике в условиях дистанционного обучения.

Широкую популярность в образовательной среде информационных технологий в последнее время приобретает *технология Web-квест*. Подробный анализ понятия «Web-квест» проведён в исследованиях С.В. Напалкова, Н.В. Гусевой [10], а также Е.А. Игумновой, И. В. Радецкой [7, С. 37] и, в методической литературе, в самом общем смысле, характеризуется, во-первых, использованием интернет-ресурсов; во-вторых, решением проблемно-поисковых задач, способствующих развитию познавательной активности обучающихся.

Стоит отметить, что одни исследователи рассматривают Web-квест как полноценно функционирующий веб-сайт [3, 6], включающий техническое оснащение, необходимое для презентации результата работы над учебной задачей и возможности использования во всемирной сети для всеобщего доступа; другие – как образовательную технологию, информационный контент, имеющий сложную дидактическую структуру [2, 5, 8, 11].

Таким образом, с технической (инструментальной) точки зрения Web-квест представляет собой образовательный веб-сайт, компоненты которого наполняются обучающимися в процессе решения определённых учебных задач; с точки зрения образовательной (обучающей) – это учебно-поисковая, исследовательская, самостоятельная, познавательная деятельность, где учебный информационный контент представлен с помощью ресурсов интернет и интернет-технологий [4].

Тематические образовательные Web-квесты можно отнести к активным методам обучения, мотивирующим учебно-познавательную деятельность школьников.

При изучении любой темы курса математики в дистанционных условиях обучения школьников огромное значение имеет завершающий этап, связанный с обобщением и систематизацией знаний, когда формируется целостное представление о математических объектах, идеях, методах решения и т.п.

В этой связи в теории обучения математике выделяют следующие компоненты информационного контента *тематического образовательного Web-квеста* [9]:

– *«Теория»* – включает теоретический учебный материал, содержащий информацию об основных фактах по изучаемым вопросам, учебно-познавательные задания на отработку навыков решения задач и углубление имеющихся знаний, получение целостного представления об их роли в исследуемой проблеме.

– *«Приложения»* – включает сведения и задания прикладного характера, содержание которых направлено на расширение представлений о сфере возможного применения учебного материала на практике.

– *«Проблемы»* – включает информацию и задания, углубляющие и расширяющие изученный материал, которые позволяют обучающимся проводить различные учебные эксперименты и исследования, создавать цепочки задач, выстраивать локальные теории, выявлять закономерности и т.д.

– *«Архивы»* – содержит исторические и биографические сведения по изучаемым вопросам и учебные задания, связанные с их упорядоченным представлением (по сюжету или хронологии).

– *«Ошибки»* – содержит информацию и учебные задания, позволяющие предупредить возможные ошибочные рассуждения, заблуждение, а также их анализ и отыскание возможных решений.

С учётом специфики дидактической структуры *тематического образовательного Web-квеста*, основных положений концепции уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [12], а также методических особенностей *дифференциации домашних заданий*, выявленных в исследовании [1], была разработана система *дифференцированных домашних заданий* по геометрии для 7-ых классов.

В качестве примера рассмотрим задачную конструкцию для компонента «Теория» информационного контента Web-квеста по теме «Окружность и круг».

1. Теория. **Цель:** систематизировать теоретические сведения по теме «Окружность и круг».

Типологическая группа А (здесь и далее в соответствии с типологией Утеевой Р.А.[12])

Задания алгоритмического типа:

1) Узнать:

– определения основных понятий, правил, свойств и признаков по теме «Окружность и круг» (проиллюстрировать и привести примеры);

– взаимосвязи изученных по теме «Окружность и круг» понятий друг с другом (проиллюстрировать и привести примеры);

Задания полуэвристического типа:

– зависимости, отраженные в формулировках правил, свойств и признаков по теме «Окружность и круг» (проиллюстрировать и привести примеры).

Задания эвристического типа:

– исследовать и установить закономерности в утверждениях, отражающих свойства и признаки окружности, а также их взаимосвязи.

2) Создать:

– тезаурус по теме «Окружность и круг»;

– опорный конспект по теме «Окружность и круг»;

– структурно-логическую схему системы понятий по теме «Окружность и круг».

3) Оформить: проект-отчёт по теме «Окружность и круг» (электронная презентация (анимация), доклад в текстовом редакторе, заполнить страничку веб-сайта).

Типологическая группа В

Задания алгоритмического типа:

1) Узнать:

– определения основных понятий, правил, свойств и признаков по теме «Окружность и круг» (проиллюстрировать и привести примеры);

Задания полуэвристического типа:

– взаимосвязи изученных по теме «Окружность и круг» понятий друг с другом (проиллюстрировать и привести примеры);

Задания эвристического типа:

– зависимости, отраженные в формулировках правил, свойств и признаков по теме «Окружность и круг» (проиллюстрировать и привести примеры).

2) Создать:

– тезаурус по теме «Окружность и круг»;

– план темы «Окружность и круг»;

– опорный конспект по теме «Окружность и круг» в соответствии с составленным планом.

3) Оформить: проект-отчёт по теме «Окружность и круг» (электронная презентация (анимация), доклад в текстовом редакторе, заполнить страничку веб-сайта).

Типологическая группа С

Задания алгоритмического типа:

1) Узнать:

– определения основных понятий (ГМТ, окружность, центр окружности, радиус, диаметр, дуга, хорда, круг, сектор, касательная к окружности), правил и свойств(теорем и следствий), связанных с ними (проиллюстрировать и привести примеры);

Задания полуэвристического типа:

– принадлежит ли окружности её центр (проиллюстрировать);

– принадлежит ли кругу его центр (проиллюстрировать);

– какое неравенство выполняется для любой точки, принадлежащей кругу с центром О заданного радиуса (проиллюстрировать);

– какое неравенство выполняется для любой точки, не принадлежащей кругу с центром О заданного радиуса (проиллюстрировать);

– варианты взаимного расположения прямой и окружности (проиллюстрировать).

2) Создать:

– тезаурус по теме «Окружность и круг»;

– план темы «Окружность и круг»;

– таблицу определений, правил, свойств (теорем и следствий), примеров и иллюстраций к ним по теме «Окружность и круг» согласно составленному плану.

3) Оформить: проект-отчёт по теме «Окружность и круг» (электронная презентация (анимация), доклад в текстовом редакторе, заполнить страничку веб-сайта).

Типологическая группа Д

Задания алгоритмического типа:

1) Узнать:

– что такое ГМТ, привести примеры (описать словесно и сделать иллюстрации);

– определения основных понятий: окружность, центр окружности, радиус, диаметр, дуга, хорда, круг, сектор, касательная к окружности (описать словесно и сделать иллюстрации);

– как связаны между собой диаметр и радиус окружности;

– правило построения окружности заданного радиуса (диаметра).

Задания полуэвристического типа:

– некоторые свойства окружности: диаметра окружности, перпендикулярного хорде; свойство касательной; свойство отрезков касательных.

2) Создать:

– тезаурус по теме «Окружность и круг»;

– таблицу определений, правил, свойств (теорем и следствий), примеров и иллюстраций к ним по теме «Окружность и круг» согласно данному плану.

3) Оформить: проект-отчёт по теме «Окружность и круг» (электронная презентация (анимация), доклад в текстовом редакторе, заполнить страничку веб-сайта).

Список интернет-ресурсов: электронный учебник на учебном портале онлайн-школы http://2019.eduserver.ru/login/index.php, видеоматериалы по теме на образовательном портале www.interneturok.ru,https://infourok.ru/videouroki, фонд «Математические этюды» http://www.etudes.ru/, свободная энциклопедия https://ru.wikipedia.org/ wiki/Заглавная_страница, учебный портал http://shkolo.ru/, учебный портал http:// www.yaklass.ru/, портал Вики-наука http://ru.science.wikia.com /wiki / Заглавная _ страница.

Особое внимание стоит уделить способу оформления проекта-отчёта. В дистанционных условиях обучения удобным и наиболее интересным для обучающихся является создание совместно с учителем образовательного веб-сайта. Для такой организации домашней работы над *тематическим образовательным Web-квестом* можно использовать свободные (бесплатные) платформы https://www.a5.ru/, https://www.jimdo.com/, https://gsuite.google.ru/intl/ru/products/sites/ и др. Учитель разрабатывает на основе предложенных электронным сервисом шаблонов структуру информационного контента Web-квеста в соответствии с заданиями для каждой типологической группы и «открывает» доступ для редактирования соответствующих страниц обучающимися. Здесь же учитель может разместить критерии оценивания, организовать форум для обучающихся и разместить любую другую информацию, касающуюся тематики Web-квеста.

Заметим, что в процессе работы над Web-квестом активизируются все формы учебной деятельности школьников: индивидуальный и групповой поиск решения задач, коллективное обсуждение проблем. Чередование всех этих форм деятельности с одной стороны является хорошим стимулом к обучению для одних ребят, с другой – способом преодоления препятствий для других. Таким образом, достигается самореализация и самоутверждение каждого обучающегося в классе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Утеева Р.А.* Дифференцированные домашние задания по математике в условиях дистанционного обучения школьников / Р.А.Утеева, Е.А.Большова // Письма в Эмиссия. Оффлайн (The Emissia.Offline Letters). – 2018. – №11. – ART 2667. – URL:http://emissia.org/offline/2018/2667.htm. – [дата обращения 04.10.2019].

2. *Вахрушева Н.В.* Использование web-квестов в обучении математике // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 170-174. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29171407. – [дата обращения 04.10.2019].

3. *Виштак О.В.* Использование метода проектов при создании Web-квестов по информатике // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 151-155. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id =29171399. – [дата обращения 04.10.2019].

4. *Голубев О.Б.* Учебный веб-квест как современная технология в исследовательской работе учащихся / О.Б. Голубев, В.А. Тестов, Н.Е. Смирнов // Развивающий потенциал образовательных Web-технологий: материалы Международной научно-практической конференции (17-18 мая 2018 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2018. – С. 82-85. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id =35023888. – [дата обращения 04.10.2019].

5. *Гречухина А.П.* Образовательный квест как интерактивная образовательная среда и деятельностная форма организации процесса обучения в рамках реализации ФГОС // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 207-210. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29171416. – [дата обращения 04.10.2019].

6. *Дариенко М.С.* Некоторые особенности применения адаптивного дизайна при разработке web-квестов // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической

конференции (25-27 мая 2017 г.) –Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 147-150. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id =29171398. – [дата обращения 04.10.2019].
7. *Игумнова Е.А.* Квест-технология в образовании: учеб. пособие / Е.А. Игумнова, И.В. Радецкая; Забайкал. гос. ун-т. – Чита: ЗабГУ, 2016. – 164 с. – URL: https://kosova-ozgsch4.edumsko.ru/uploads/ 3000/4196/section/494761/40941.pdf. – [дата обращения 04.10.2019].
8. *Миронова С.В.* Об использовании тематических образовательных web-квестов для подготовки к итоговой аттестации по математике // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 180-183.
URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29171409. – [дата обращения 04.10.2019].
9. *Миронова С.В.* О дидактической структуре тематических образовательных web-квестов /С.В. Миронова, С.В. Напалков // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 184-191. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29171410. – [дата обращения 04.10.2019].
10. *Напалков С.В*. Web-технологии как педагогические формы приобщения школьников к творчеству в процессе обучения математике / С.В. Напалков, Н.В. Гусева // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №6. – С. 768. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=22877991. – [дата обращения 04.10.2019].
11. *Напалков С.*В. Специфика заданий и задачных конструкций информационного контента тематического образовательного Web-квеста / С.В. Напалков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2014. – №4 (36). – С. 222-226. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=22823593. – [дата обращения 04.10.2019].
12. *Утеева Р.А.* Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. … д-ра. пед. наук / Р.А. Утеева – М. – 1998. – 363 с. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15969693. – [дата обращения 15.06.2019].

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Дюпина Анастасия Эдуардовна
магистрант 2 курса Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Россия, г. Казань, anastasiya.dupina@yandex.ru

Аннотация. *В исследовании изучается структура геометрического мышления через совокупность пространственного, логического и понятийного видов мышления, отражены результаты экспериментальной работы по развитию уровня геометрического мышления у будущих учителей математики.*

Ключевые слова: *геометрическое мышление, подготовка учителей математики, планиметрия*

ANALYSIS OF GEOMETRIC THINKING STRUCTURE OF PEDAGOGICAL DEPARTMENT STUDENTS

Dupina Anastasia Eduardovna
second year master student of N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga) Federal University
Russia, Kazan, anastasiya.dupina@yandex.ru

Abstract. *The research studies the structure of geometric thinking through a combination of spatial, logical and conceptual types of thinking, the results of experimental work on the development of the level of geometric thinking in future mathematics teachers are reflected.*
Keywords: *geometric thinking, teacher training, Plane geometry.*

«Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой».

А.Д. Александров

Многолетняя практика проведения ЕГЭ и ОГЭ по математике[6], результаты Международной программы по оценке образовательных достижений учащихся (Programme for International Student Assessment, PISA) [5] показывают, что учащиеся испытывают большие трудности при решении геометрических задач, несмотря на тесную взаимосвязь предмета с жизненным опытом.

Низкий уровень геометрической подготовки в условиях школьного образования приводит к тому, что абитуриенты оказываются не готовыми к изучению курса элементарной планиметрии, поэтому следует обратить пристальное внимание на подготовку учителей математики в области геометрии. Результаты проекта «Teachers matter» [21] показывают, что успехи образовательных систем ведущих стран мира определяются в первую очередь качеством подготовки педагогических кадров. Согласно ФГОС ВО выпускник педагогического направления должен быть готов к реализации образовательной программы по своему предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов, используя при этом все возможности образовательной среды[9].Для этого необходимо находить методические приемы и подходы в изучении геометрии для повышения заинтересованности и мотивации будущих учителей.

В психолого-педагогической литературе базовым понятием, определяющим качественный уровень геометрической подготовки, является *геометрическое мышление.* Анализ современных работ [1], [2], [4] показывает, что не существует общепринятого определения геометрического мышления, часто происходит подмена понятий «геометрическое мышление», «пространственное мышление», «пространственное воображение». Можно выделить *два подхода* в определении геометрического мышления: как врожденное свойство психики человека[10], [3], и как результат математического образования[1], [11], [16].

Наиболее известными теориями, описывающими геометрическое мышление, являются Теория стадий Пиаже и Модель ван Хиле. *Теория Пиаже* связывает развитие геометрического мышления с возрастными особенностями ребенка, опираясь на детскую психологию. В основе лежит идея о том, что мысленное восприятие детьми пространства отличается от восприятия того, что находится вокруг них [1]. По мнению Пиаже [18], [19], ребенок начинает мыслить топологически, постепенно двигаясь к евклидовой геометрии, что противоречит историческому пути развития науки, которая прошла путь от евклидовой геометрии к топологии.

Модель ван Хиле описывает непосредственно стадии обучения геометрии, достигаемые в результате математического образования, поэтому она была взята за основу исследования. Данная Модель уже применялась в СССР при изучении влияния на результаты обучения учебного эксперимента, основанного на работах Выготского Л.С., однако не получила должного признания и распространения [14]. В результате анализа зарубежной литературы[11],[13], [14], [15], [16], посвященной вопросам развития геометрического мышления, было выявлено отсутствие определения понятия. К слову, сами создатели теории Пьер ван Хиле и Дина ван Хиле-Гельдоф не давали в своих работах определение геометрического мышления [20].

Согласно теории ван Хиле, геометрическое мышление можно измерить. Учеными были выделены *пять уровней* геометрического мышления, которые имеют строгую иерархию и способны прогнозировать успеваемость в геометрии: визуальный, аналитический, неформальная дедукция (или абстрактный), дедуктивный и строгий[8]. Методика обучения в соответствии с теорией ван Хиле как результат обобщения практической работы не включает в себя определение геометрического мышления и работу над отдельными его компонентами.

Анализ отечественной и зарубежной психолого-педагогической литературы позволил нам сформулировать гипотезу о структуре геометрического мышления как некоторой зависимости трех компонентов – логического, пространственного и понятийного видов мышления:

$$\textit{Геометрическое мышление} = f(\textit{ЛМ}, \textit{ПрМ}, \textit{ПМ})$$

Выделение перечисленных компонентов позволит более осознанно подходить к формированию геометрического мышления, влиять на отдельные его компоненты. С этой целью с декабря 2017 г. по настоящее время проводится опытно-экспериментальная работа среди студентов второго курса педагогического отделения ИММ им. Н.И. Лобачевского КФУ при изучении курса «Элементарная математика(планиметрия)», которая включает в себя *следующие этапы:*

1. Измерение уровня геометрического мышления в соответствии с теорией ван Хиле. 2. Определение уровней развития логического, пространственного и понятийного видов мышления, исследование их

взаимосвязей. 3. Разработка методики развития геометрического мышления будущих учителей математики, в частности, с помощью цифровых технологий.

Таким образом, одним из аспектов экспериментальной работы стал анализ соответствия уровня геометрического мышления по ван Хиле и психологических тестов на определение уровня развития логического, пространственного и понятийного видов мышления.

В соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле директором Чикагского математического проекта, педагогом Залманом Узискиным был разработан тест [22] для школьников и студентов. Данный тест был переведен нами на русский язык для проведения эксперимента.

Для определения уровня понятийного мышления был использован тест «Сложные аналогии», который используется для выяснения того, насколько испытуемому доступно понимание сложных логических отношений и выделение абстрактных связей. Измерение уровня пространственного мышления осуществлялось с помощью Субтеста №8 «Пространственное воображение» теста Амтхауера. Логическое мышление было проверено Тестом на выполнение логических операций над геометрическими объектами (ЛОГО). Методика предназначена для диагностики умственного развития учащихся юношеского возраста и позволяет выявлять индивидуально-психологические различия в овладении логическими операциями с геометрическими объектами [10].

В тестировании приняли участие 32 студента 2 курса Педагогического направления Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ.

Наиболее высокие результаты студенты получили по итогам выполнения теста на измерение уровня понятийного мышления (Диаграмма 1).

При выполнении теста «Пространственное воображение» 86% ошибок студенты допустили, отвечая на вторую половину вопросов (с 11 по 20), которые подразумевали не одну операцию поворота или переворота, а их одновременное выполнение. Диаграмма 2 отражает уровень развития геометрического мышления (max – 84, min – 44) и средний балл по трем тестам (max – 81, min – 35). Девять из тридцати двух студентов продемонстрировали уровень развития геометрического мышления, имеющий наименьшую разницу с уровнем развития понятийного, пространственного и логического видов мышления. Разрозненность результатов у других студентов может свидетельствовать о преобладании того или иного вида мышления.

Хуже всего студенты справились с тестом на выполнение логических операций над геометрическими объектами (47% неправильных ответов), который имеет наименьшую погрешность в результатах в сравнении с тестом теории ван Хиле (41% неправильных ответов) (Диаграмма 3).

Подробный анализ данных, полученных в результате тестирований, дает возможность определить уровень развития каждой из трех составляющих геометрического мышления у отдельного студента и выявить, какой тип мышления преобладает в заданиях теста по теории ван Хиле, в которых были допущены ошибки. Понимание трудностей, которые испытывают студенты при выполнении конкретных заданий, облегчает процесс преподавания, направленный на повышение уровня геометрического мышления каждого студента.

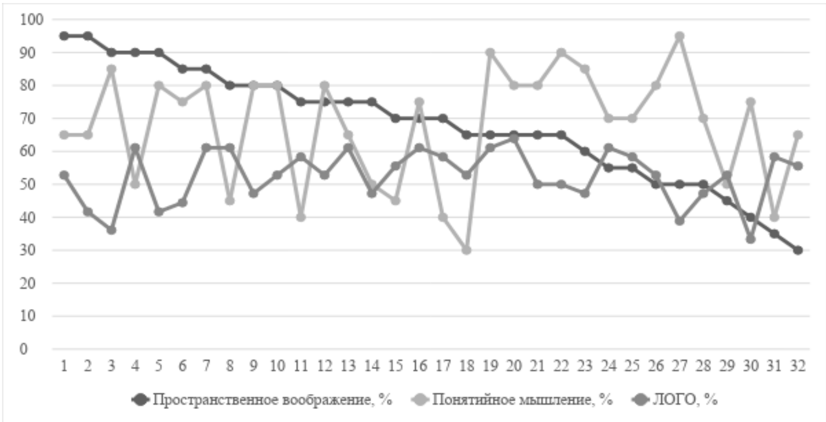


Диаграмма 1. Результаты по трем тестам

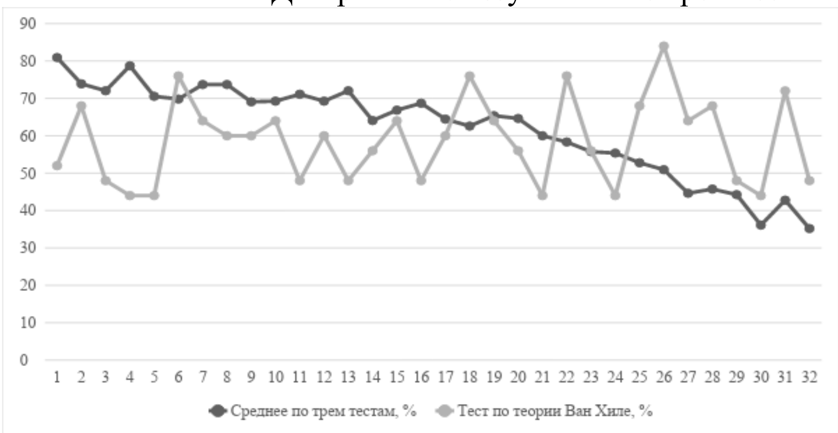


Диаграмма 2. Сравнение среднего показателя по трем тестам с результатами теста по теории ван Хиле

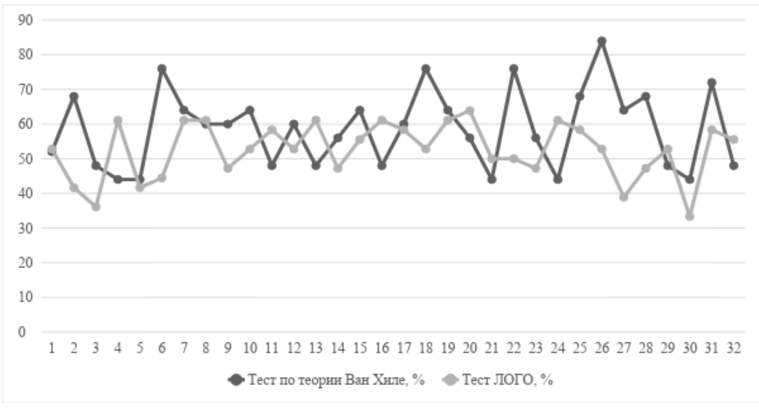


Диаграмма 3. Сравнение результатов теста по теории ван Хиле и теста ЛОГО

Данное исследование является одной из составляющих частей опытно-экспериментальной работы, направленной на повышение качества геометрической подготовки студентов педагогического отделения при помощи технологии смешанного обучения и использования цифровых технологий.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке автора курса «Элементарная математика (планиметрия)» Фалилеевой Марины Викторовны,

кандидата педагогических наук, доцента кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Боровских А.В., Рейхани Э., Розов Н.Х.* Развитие геометрического мышления школьников. [Электронный ресурс] / Режим доступа: fpo.msu.ru/open_files/borovskikh/razv_geom_mish.doc
2. *Дубинина С.А.* Развитие пространственного мышления детей младшего школьного возраста при изучении геометрического материала. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://docplayer.ru/55441511-Svetlana-alekseevna-razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-detey-mladshego-shkolnogo-vozrasta-pri-izuchenii-geometricheskogo-materiala.html (Дата обращения: 02.02.2018)
3. *Истратова О.Н.* Справочник психолога-консультанта организации [Электронный ресурс] / справ. / О.Н. Истратова, Т.В. Эксакусто. — Электрон. дан. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2010. — 638 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/70148
4. *Кайгородцева Н.В.* Геометрия, геометрическое мышление и геометро-графическое образование // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12330
5. *Основные результаты* международного исследования PISA-2015 [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.osoko.edu.ru/common/upload/osoko/pisa/PISA_2015_results_short_report.pdf
6. *Статистико-аналитический отчет* о результатах ЕГЭ. URL: https://www.ege15.ru/files/common/other/GIA2018/EGE2018/2_22_%D0%9E%D0%A2%D0%A7%D0%95%D0%A2%20%D0%95%D0%93%D0%AD%202018.pdf.
7. *Тест структуры интеллекта Амтхауэра*. Психодиагностика. Psyera.ru [Электронный ресурс]: Режим доступа: https://psyera.ru/2484/test-struktury-intellekta-amthauera (Дата обращения: 18.12.2017)
8. *Фалилеева М.В., Дюпина А.Э.* Обучение курсу «Элементарная математика» с использование программы GeoGebra / В сборнике: Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе Материалы международной научно-методической конференции. Научный редактор Е.К. Хеннер. 2017. — С. 88-92. [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29943037
9. *Приказ от 4 декабря 2015* г. N 1426 об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 педагогическое образование (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgosvob/440301.pdf
10. *Якиманская И.С.* Психологические основы математического образования: Учебное пособие для студентов пед.вузов / Ираида Сергеевна Якиманская. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.
11.*Clements D. H., & Battista, M. T.* (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York: MacMillan.
12. *Frykholm, J. A.* (1994). The significance of external variables as predictors of van Hiele levels in algebra and geometry students. Madison: University of WisconsinMadison. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 372 924)
13. *Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R.* (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
July Raquel Andrea. "Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the Geometer's Sketchpad" (2001). ProQuest ETD Collection for FIU. AAI3018479. http://digitalcommons.fiu.edu/dissertations/AAI3018479

14.*Nasser, L.* (1995). Long term effects of a geometry course based on the van Hiele theory. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (19th. Recife Brazil. July 22-27'): Vol 1. (pp. 213).
15. *Neslihan Bulut, Mehmet Bulut.* Development of pre-service elementary mathematics teachers' geometric thinking levels through an undergraduate geometry course. Procedia - Social and Behavioral Sciences 46 (2012) 760 – 763
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812013237
16. *Pavlovičová G., Švecová V., Rumanová L.* (2014) Support of Pupil's Creative Thinking in Mathematical Education. Procedia – Social and Behavioral Sciences, 1715-1719, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814004789
17. *Piaget J., Inhelder B.* The Childs Conception of Space. New York: Norton, (1967).
Piaget J., Inhelder B., Szeminski A. The Childs Conception of Geometry. London: Routledge &Kegan Paul, (1960).
18. *Pierre M. van Hiele.* Structure and insight: a theory of mathematics education. Academic Press, 1986: 246 c.
19. *Teachers matter.* Attracting, developing and retaining effective teachers. OECD, 2005.
20. *Zalman Usiskin.* "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry." University of Chicago, 1982: 438.
https://www.researchgate.net/publication/234715504_Van_Hiele_Levels_and_Achievement_in_Secondary_School_Geometry_CDASSG_Project

ВЗАИМОСВЯЗЬ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО КУРСОВ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ»

Шкурай Ирина Александровна
магистрант 2 года обучения Института математики, механики
и компьютерных наук имени И. И. Воровича
Южный федеральный университет
Россия, г. Ростов-на-Дону, ishkuray@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматривается история введения темы «Векторы» в школьный курс геометрии. Показана связь школьного курса геометри с разделом «Векторная алгебра», изучаемого в рамках дисциплины «Геометрия» студентами педагогических вузов. Представлены результаты среза остаточных знаний первокурсников по теме «Векторы».*
Ключевые слова: *вектор, координаты вектора, школьный курс геометрии, векторная алгебра, векторный метод.*

Skuray Irina Aleksandrovna
magistrant 2 years of study Institute of Mathematics, Mechanics,
and Computer Science named after of I.I. Vorovich
Southern federal University
Russia, Rostov-on-Don, ishkuray@mail.ru

Abstract. *The article discusses the history of the introduction of the topic "Vectors" in the school course of geometry. The connection of the school course geometry with the section "Vector algebra", studied in the discipline "Geometry" students of pedagogical universities. The results of the study of residual knowledge of first-year students on the topic "Vectors"are presented.*
Keywords*:* *vector, vector coordinates, school geometry course, vector algebra, vector method.*

Вектор – одно из важнейших математических понятий: на нем базируется современное изложение геометрии, алгебры, в меньшей мере математического анализа, других математических дисциплин. Это мощный и изящный метод доказательства теорем и решения задач. Понятие вектора и векторный аппарат – основа многих других наук, в частности, физики, механики, техники [4, с. 77].

В школьном курсе геометрии векторы стали изучать относительно недавно, а именно с 1963 года. Появился учебник по геометрии для 9 классов авторов В.Г. Болтянского и И.М. Яглома, в котором последовательно и продуманно с методической точки зрения вводились векторы. Учебник сопровождался методическим пособием для учителей и содержал большой и интересный подбор задач, решаемых векторным методом. Но в школе он просуществовал всего два года, поскольку не был подготовлен предшествующим уровнем и стилем преподавания, а также поддержан последующим изучением геометрии [1, с. 55].

Систематическое изучение векторов и координат в школьном курсе геометрии началось в последней трети 20 века с появлением учебника по геометрии для 6-8 классов под редакцией А.Н. Колмогорова. В первых изданиях этого учебного пособия *векторы* определялись как *параллельные переносы*, которые в свою очередь представлялись в качестве *геометрических преобразований*. Идея геометрических преобразований являлась ведущей идеей школьного курса геометрии. Неудобство такой трактовки векторов отмечалось многими физиками и математиками, а впоследствии подверглось резкой критике со стороны Отделения математики Академии наук СССР. Однако, главное заключается в том, что в течение 15 лет работы по этому учебнику и согласованному с ним пособию по стереометрии для 9-10 классов под редакцией З.А. Скопеца, была проверена и подтверждена жизнеспособность и важность понятия вектора для школьной геометрии. Стало ясно, что вектор– необходимое понятие школьного курса, без которого уже ни один учебник в обозримом будущем обойтись не сможет [1,3].

Сегодня тема «Векторы» прочно вошла в школьное математическое образование. При традиционном разделении курса геометрии на планиметрию и стереометрию, векторы изучаются в два этапа: в *основной школе* – векторы на плоскости, в *старшей* – векторы в пространстве. Следует отметить, что при этом тема “Векторы” изучается изолированно от другого материала. Вектор не становится математическим аппаратом, практически не имеет приложений в самом курсе планиметрии: ни одна тема не строится на векторной основе. Понятие вектора вводится в основном в целях обеспечения нужд других предметов, прежде всего физики [4, с. 78].

В материалах ЕГЭ по математике задания на базовые операции с векторами полностью отсутствуют. Применение координатно-векторного метода возможно только при решении стереометрической задачи в 14 задании. Но вследствие того, что теме «Векторы» не уделяется должного внимания на уроках геометрии в школе, выпускники не овладевают навыком решения задач этим методом.

Знакомство с высшей геометрией студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 Педагогическое образование, профиля «Математика», начинается с векторной алгебры на плоскости. Такой выбор продиктован логикой изложения курса аналитической геометрии, изучение которой начинается в I семестре, а также необходимостью соблюдения принципа преемственности между школьным и вузовским курсами геометрии. В школе у обучающихся формируются базовые знания и умения по теме «Векторы», а в вузе эта тема углубляется и расширяется. За ней логически следуют разделы «Прямая линия на плоскости», «Линии второго порядка» «Прямые и плоскости в пространстве», «Поверхности второго порядка», которые нельзя в должной мере освоить без повторения и более глубокого изучения векторной алгебры. Таким образом, уже более полувека специальные геометрические дисциплины в педагогических университетах строятся на векторной основе [2, с.86].

В этом году Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича набрал для обучения на 1 курс по направлению 44.03.01 Педагогическое образование, профиля «Математика» и «Математика и информатика» 50 студентов. Большинство из них являются выпускниками школ Ростовской области и Краснодарского края. С целью получения данных об остаточных знаниях первокурсников, была проведена входная контрольная работа по теме «Векторы и координаты на плоскости», текст которой представлен ниже (*Время выполнения 30 минут).*

Контрольная работа по теме «Векторы и координаты на плоскости»

№ 1. Верно ли утверждение (ответьте да или нет):

а) если $\vec{a} = \vec{b}, то \; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) если $\vec{a} = \vec{b}, то \; \vec{a} \; и \; \vec{b}$ коллинеарны;

в) если $\vec{a} = \vec{b}, то \; \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, то \; \vec{a} = \vec{b}$.

№ 2. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a} \; и \; \vec{b}$ и постройте векторы: $\vec{a} + \vec{b}, \;\; \vec{b} - \vec{a}, -\vec{a} + \vec{b}$.

№ 3. Используя правило многоугольника, упростите выражение $\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) - \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}\right)$.

№ 4. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма ABCD, причем BM:MC=3:1. Выразите векторы $\overrightarrow{AM} \; и \; \overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

№ 5. В треугольнике ABC даны стороны AB = 4 см, BC = 5 см, AC = 7 см. Найдите величину $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right|$.

№ 6. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца A(-3;0), B(0;4).

№ 7. Найдите координаты вектора $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}\{2; -5\}, \vec{b}\{-5; 2\}$.

№ 8. Найдите длину вектора $\vec{a}\{5; 9\}$.

№ 9. Найдите координаты точки O – середины отрезка AB, если A(2;-3), B(-3;1).

№ 10. Найдите расстояние между точками A(2;7) и B(-2;7).

Остановимся детально на результатах выполнения контрольной работы (Таблица 1). Почти половина студентов не справилась с первым задание, что говорит о недостаточном понимании понятий равных и коллинеарных векторов.

Таблица 1

Результаты выполнения контрольной работы студентами 1 курса

№ задания	Проверяемые знания/умения	Выполнили верно		Выполнили неверно		Не приступили к выполнению	
		чел.	%	чел.	%	чел.	%
1	Знать понятия коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных, равных векторов.	27	54%	3	46%	0	0%
2	Уметь проводить операции над векторами в геометрической форме (сложение и вычитание векторов).	19	38%	1	62%	0	0%
3	Уметь находить сумму нескольких векторов по правилу многоугольника	32	64%	2	24%	6	12%
4	Уметь проводить операции над векторами. Знать понятие равных векторов.	18	36%	5	50%	7	14%
5	Уметь проводить операции над векторами, находить модуль вектора.	31	62%	9	38%	0	0%
6	Уметь вычислять координаты вектора через координаты его конца и начала.	33	66%	7	34%	0	0%
7	Уметь находить координаты суммы и разности векторов, произведения вектора на число.	35	70%	2	24%	3	6%
8	Уметь вычислять длину вектора	28	56%	7	34%	5	10%
9	Уметь вычислять координаты середины отрезка	16	32%	7	34%	7	14%
10	Уметь вычислять расстояние между двумя точками	13	26%	5	50%	12	24%

Большое количество ошибок было допущено студентами в заданиях 2 и 4, в которых требовалось знание правил сложения и вычитания векторов. Из-за того, что студенты не видят на чертеже сумму или разность, выражение одного вектора через другие представляет для них трудность.

Ошибки в заданиях 6, 8,9, 10 связаны с незнанием формул. Так, при нахождении координат вектора многие студенты координаты конца и начала вектора складывали, а не вычитали, при нахождении длины вектора складывали первую и вторую координаты вектора.

Результаты контрольной работы показали, что студенты слабо владеют базовыми умениями и навыками по теме «Векторы». Сами первокурсники объяснили такие результаты тем, что в их школе эти темы не изучались достаточно подробно или вообще были пропущены при изучении курса геометрии.

С целью обобщить и систематизировать знания студентов по теме «Векторы» мы предлагаем ряд мероприятий. Например, чтобы показать применимость векторного метода к решению задач и доказательству теорем, на практических занятиях будет полезно решить некоторые **задачи** школьного курса геометрии с помощью векторов:

1. Напишите в векторной форме необходимое и достаточное условие того, что четырехугольник ABCD является параллелограммом.
2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
3. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.
4. Докажите теорему о средней линии трапеции.

Несколько занятий из модуля «Векторная алгебра» необходимо посвятить решению простейших задач в координатах, что позволит отработать применение всех формул, а также закрепить умения, связанные с нахождением длин векторов, углов между векторами, расстояний между точками, площадей различных геометрических фигур. Также необходимо осуществлять текущий контроль в виде коротких самостоятельных работ по каждой теме и итоговый контроль по всем темам модуля, с целью коррекции и определения перспектив дальнейшей работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Глейзер Г. Д., Кеян Г. К.* К истории вопроса об изучении векторов // Математика в школе – 1986, №5.
2. *Ковешников Е. В*. Элементы векторной алгебры в курсе геометрии высшей педагогической школы // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота – 2015, № 6.
3. *Методика обучения математике*. В 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата/ под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – Серия: Бакалавр. Академический курс.
4. *Полякова Т. С.* Методика обучения геометрии в основной школе: Учебное пособие для студентов педвузов и педколледжей. - Ростов н/Д: РГПУ, 2003.

STEM-ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Иванова Екатерина Юрьевна
кандидат педагогических наук, учитель математики Славянской общеобразовательной школы I-III ст. № 16
Украина, г. Славянск, ivanova.katrin.13@gmail.com

Аннотация. *В статье исследованы особенности математической подготовки будущих учителей начальной школы в условиях развития Концепции STEM-образования. Определено, что актуальной проблемой является теоретическое обоснование и разработка STEM-технологий в высшей школе, в частности при изучении математики. Показано, что в математической подготовке будущих учителей начальной школы необходимо использовать такие STEM-технологии, как реализация межпредметных связей математики и решение прикладных задач.*
Ключевые слова: *STEM-образование, математическая подготовка, межпредметные связи, учитель начальной школы.*

STEM-TECHNOLOGIES IN MATHEMATIC TRAINING OF FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Ivanova Ekaterina Yurievna
candidate of pedagogical sciences, mathematics teacher at the Slavic comprehensive school of I-III art. Number 16
Ukraine, Slavyansk, ivanova.katrin.13@gmail.com

Abstract. *The article explores the features of the mathematic training of future primary school teachers in the development of the concept of STEM education. It has been determined that the actual problem is the theoretical justification and development of STEM technologies in higher education, and in particular in the study of mathematics. It is shown that in the mathematic training of future primary school teachers it is necessary to use such STEM-technologies as the implementation of inter subject communications of mathematics and the solution of applied problems.*
Keywords: *STEM education, mathematical training, inter disciplinary communication primary school teachers.*

Стремительное развитие инновационных технологий создает необходимость применения знаний и умений при решении задач как профессионального, так жизненного характера. Поэтому актуальной проблемой современного образования является подготовка компетентных специалистов, способных применять полученные знания в реальной жизни.

Реформирование школьного образования направлено на формирование личности, которая может применять полученные знания на практике (в повседневной жизни) и в профессиональной деятельности. Основой успешности такой подготовки является STEM-образование.

Внедрение STEM-образования требует от будущих учителей знаний о взаимосвязи смежных наук и готовности осуществлять интеграцию учебных предметов, с помощью практических занятий демонстрировать ученикам возможность применения научно-технических знаний в реальной жизни.

Учитель начальной школы имеет преимущества по внедрению STEM-образования, потому что он является учителем-универсалом и может реализовать межпредметные связи образовательных областей, а также создать условия и организовать урок так, чтобы ученики имели возможность получить знания, которые можно реализовать в реальной жизни. Для учащихся начальной школы внедрения STEM-программы предусматривает формирование позитивного отношения к научному творчеству, навыков исследовательской деятельности, развитие креативности мышления, творческих способностей и, прежде всего, способностей к изобретательству, ознакомления с STEM-отраслями и профессиями; стимулирование интереса учащихся к дальнейшему освоению курсов, связанных с STEM [4, с. 137–138].

Одной из основных составляющих STEM-образования является математика. Успешность внедрения STEM-образования во многом зависит от уровня математической подготовки будущего учителя начальных классов, насколько он знает и реализует прикладную и практическую направленность математики, особенно геометрии, которая имеет широкое применение в природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д.. Это требует усиления внимания к геометрической подготовке будущих специалистов.

Целью данной статьи является раскрытие возможностей использования STEM-технологий в обучении математике будущих учителей начальной школы.

Математическая подготовка будущего учителя начальной школы в свете современных требований имеет особое значение. В новых условиях развития образования в Украине математическая подготовка будущих учителей начальной школы должна основываться на сочетании глубокого усвоения теоретических знаний с формированием практических умений и навыков применять эти знания в практической и будущей профессиональной деятельности.

Курс математики занимает одно из ведущих мест в фундаментальной подготовке будущих учителей начальной школы. Однако довольно часто их математические знания, особенно по геометрии, носят формальный характер, не соответствуют требованиям профессиональных дисциплин и общему уровню подготовки современного специалиста.

Современное состояние математической подготовки будущих учителей начальных классов свидетельствует о том, что изучение курса математики происходит, как правило, в «изолированной» форме, без взаимосвязи с различными отраслями жизнедеятельности человека. По результатам анкетирования, 56% студентов 3-го и 47% студентов 4-го курсов (студенты указанных курсов уже изучили курс математики) ответили, что изучали курс математики, прежде всего, для сдачи экзаменов и не интересовались возможностями применения приобретенных знаний на практике и межпредметными связями математического материала.

Среди STEM-технологий обучения математике – реализация межпредметных связей математики, использование прикладных задач и задач, требующих нестандартного подхода.

Поэтому очень важным в математической подготовке будущих учителей начальной школы переориентировать цели и содержание курса математики в направлении приобретения студентами знаний, умений и навыков, которые будут использоваться ими в различных сферах деятельности.

Раскрытие же студентам межпредметных связей геометрии усиливает учебно-познавательную деятельность, является стимулом для качественного изучения основных понятий и утверждений, касающихся пространственных отношений и геометрических фигур, расширяет их представление о мире, основные формы познания. В частности реализация межпредметных связей помогает формировать у студентов такие качества знаний, как системность, глубина, осознанность, гибкость. На основе межпредметных связей геометрического материала у студентов формируются научно-гуманистические взгляды на природу, современные представления о ее целостности и развитии. Знания, полученные студентами на межпредметной основе, выполняют ведущую роль в познавательной деятельности.

Следовательно, можно констатировать, что современным подходом к реализации применения математики в решении широкого круга проблем, возникающих в реальном мире, является STEM-ориентированное обучение, которое направлено на установление межпредметных связей, способствующих формированию у учителей начальной школы целостного, системного мировоззрения, актуализации личностного отношения к рассматриваемым вопросам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Elaine J. Hom*. What is STEM Education. - [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://www.livescience.com/43296-what-is-stem-education.html.

2. *Балик Н.Р.* Підходи та особливості сучасної STEM-освіти / Н.Р. Балик, Г.П. Шмигер // Фізико-математична освіта, – 2017. – № 2(12), С. 26–30.

3. *Кузьменко О.* Сутність та напрямки розвитку STEM – освіти. Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. – Випуск 9 (III). – С. 188-190.

4. *Олексюк О. Р.* Елементи STEM-освіти у початковій школі. *STEM-освіта та шляхи її впровадження в навчально-виховний процес*: матеріали I регіональної науково-практичної веб-конференції, м. Тернопіль, 24 травня 2017 р. Тернопіль: ТОКІППО, 2017. С. 136–139.

ПОСТСКРИПТУМ

Благодарю. "Gmail" <potoskuev39@gmail.com> Птн, 20 Дек 2019, 21:44.

Добрый вечер, уважаемая Роза Азербаевна!

Очень признателен Вам за то, что Вы не забываете о моем существовании.

Посмотрел вновь программу конференции и удивился: «как много на ней было интересного в выступлениях, взаимных общениях прибывших гостей и наших коллег по кафедре!»

Огромное Вам спасибо за организацию и проведение этой конференции, часть которой была посвящена Вашему покорному слуге! Очень трогательными для меня были выступления прибывших моих бывших студентов и магистрантов, коллег из других городов. Прочитал и заново перечитываю приветственные поздравления от ученых, ректоров и директоров различных учреждений.

СПАСИБО БОЛЬШОЕ ВСЕМ, ВСЕМ, ВСЕМ!!!

С самыми добрыми пожеланиями Вам и всем членам кафедры, Евгений Викторович.

Участники международной научной конференции, 29 ноября 2019 г., Тольятти, ТГУ

СОДЕРЖАНИЕ

Обращение к участникам конференции …………………………………….. 5
Поздравительные адреса юбиляру в честь 80-летнего юбилея …………… 6
Дворянинов С.В. *Россия, г. Москва*
Короткие воспоминания………………………………………………………. 15
Ковалева Г.И. *Россия, г. Волгоград*
Народный профессор методики обучения геометрии……………………… 16
Смирнов В.А., Смирнова И.М. *Россия, г. Москва*
Е.В. Потоскуеву −80 лет! ………………………………………………….. 18
Утеева Р.А. *Россия, г. Тольятти*
Тольяттинская дорога Е.В. Потоскуева длиною в 30 лет…………………… 19
Ястребов А.В. *Россия, г. Ярославль*
Долгое знакомство с Евгением Викторовичем Потоскуевым ……………. 25
Пояркова О.С. *Россия, г. Санкт-Петербург*
О главном Учителе в моей жизни ……………………………………… 27

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ…………………………………………………….. 28

Асланов Р.М. *Азербайджан, г. Баку*
Создатель геометрической школы Азербайджана XX века –
М.А. Джавадов ………………………………………………………………… 28
Дорофеев С.Н. *Россия, г. Тольятти*
Геометрическая составляющая подготовки будущих магистров математического образования в курсе «Современные проблемы науки и образования» …………………………………………………………… 32
Ковалева Г.И. , Бузулина Т.И. *Россия, г. Волгоград*
Методика использования «сквозных» задач при изучении стереометрии… 37
Малова И.Е. *Россия, г. Брянск*
Исследования учителей и студентов Брянщины на основе учебников
Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича ……………………………………………….. 42
Матиева Г. , Борбоева Г.М. *Кыргызстан, г. Ош*
Роль геометрических задач с многозначными ответами в формировании
пространственного мышления ………………………………………… 47
Михайлов П.Н., Михайлова В.В. *Россия, г. Стерлитамак*
Практические занятия по разделу «Основания геометрии» ………………. 53
Орлов В.В., *Россия, г. Санкт-Петербург*
Актуальные направления развития геометрического образования ……….. 56
Родионов М.А. *Россия, г. Пенза*
Подготовка будущего учителя к обеспечению мотивационной
направленности обучения математике ………………………………….. 60
Санина Е.И., Мозговая М.А. *Россия, г. Армавир*
Методика формирования графических образов в процессе обучения
геометрии в средней школе ………………………………………… 66

Смирнов В.А., Смирнова И.М. *Россия, г. Москва*
О научности и доступности в обучении геометрии ……………………… 71
Ястребов А.В. *Россия, г. Ярославль*
Освоение геометрии Лобачевского посредством
компьютерных экспериментов на модели Кэли–Клейна ……………….. 78

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ……….. 84

Ажгалиев У. *Казахстан, г. Нур-Султан*
Новая головоломка 3Д танграм – кубик……………………………….. 84
Антонова И.В. , *Россия, г. Тольятти*
Мухамбетова Б.Ж. , *Казахстан, г. Уральск*
Реализация практической направленности обучения геометрии
в общеобразовательной школе……………………………………………. 89
Гайдаржи Г.Х., Шинкаренко Е.Г. *Приднестровье, г. Тирасполь*
Необходимость усиления внимания геометрическому образованию в
школе ……………………………………………………………………… 95
Дыбыспаев Б.Д. *Казахстан, г. Нур-Султан*
Исследование площадей сечений тетраэдра и гексаэдра, разбивающих их
на равновеликие фигуры…………………………………………………… 101
Евелина Л.Н., Бурых П.А. *Россия, г. Самара*
Аналогия как средство изучения геометрии в средней школе …………. 107
Иванюк М.Е. *Россия, г. Самара*
Реализация принципа наглядности на уроках геометрии в условиях
информатизации образования …………………………………………… 113
Кожабаев К.Г., Даутов А.О., Алип Айбек А. *Кахахстна, г.Кокшетау*
Роль эстетического воспитания как средства повышения логики на
уроках геометрии 116
Кошелева Н.Н., Павлова Е.С. Россия, г. Тольятти
Способы представления информации на уроках обобщения и
систематизации знаний при изучении курса геометрии в школе ………. 121
Липилина В.В., *Россия, г. Самара*
О соотношении геометрических и алгебраических задач в тестах
ОГЭ и ЕГЭ по математике ……………………………………………….. 124
Мельников Р.А., Сафронова Т.М., Черноусова Н.В. *Россия, г. Елец*
Методический и эстетический потенциал задачи об окружности,
вписанной в прямоугольный треугольник………………………………… 130
Палферова С.Ш. , Кузнецова О.А., Крылова С.А. *Россия, г. Тольятти*
Проектная деятельность учащихся при обучении геометрии в
общеобразовательной школе……………………………………………….. 137
Панищева О.В., *Украина, г. Луганск*
Овчинникова М.В. , *Россия, г. Ялта*
Использование нетрадиционных заданий при изучении площадей плоских
фигур……………………………………………………………………… 139

Потоскуев Е.В. *Россия, г. Тольятти*
О вычислении углов и расстояний ………………………………………………… 145
Рогановский Н.М., Рогановская Е. Н. *Беларусь, г. Могилев*
Система ознакомления с фракталами учащихся средней школы………….. 151
Torебек Е.Ж., Аширбаев Н.К., Мадияров Н.К. *Казахстан, г. Шымкент*
Дидактические возможности использования компьютерных ресурсов в обучении геометрии учащихся старших классов общеобразовательной школы ………………………………………………………………………….. 161
Торебек Е.Ж., Рахымбек Д., Абдуалиева М.А. *Казахстан, г. Шымкент*
Организация обучения геометрии с использованием компьютерных ресурсов в общеобразовательных школах ………………………………….. 165
Усаева А.Ш. *Россия, г. Астрахань*
О непрерывности геометрического образования в школе………………… 170
Шило Н.Г. *Россия, г. Новосибирск*
Уровни сформированности системности геометрических знаний учащихся в курсе общеобразовательной средней школы ………………… 173

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ................ 178

Гераськин М.И., Клентак А.С., Клентак Л.С., *Россия, г. Самара*
Методические аспекты занятия по теме «Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования» …………… 178
Гостевич Т.В., Лещенко Л.В. *Беларусь, г. Могилев*
О геометрической подготовке будущих учителей I ступени общего среднего образования ……………………………………………………………. 183
Евсеева Е.Г. *ДНР, г. Донецк*
Новые походы к геометрико-графической подготовке студентов технического университета ……………………………………………………… 189
Клековкин Г.А. *Россия, г. Самара*
Динамическое моделирование при обучении методам изображений……. 195
Князева Л.Е. *Россия, г. Ростов-на-Дону*
Конструктивная геометрия в образовании учителя……………………….. 203
Коноплева И.В., Знаенко Н.С., Миронова Л.В. *Россия, г. Ульяновск*
Некоторые прикладные задачи аналитической геометрии в техническом вузе... 209
Костин С.В. *Россия, г. Москва*
Задачи для типовых расчетов по теме «Прямая на плоскости» при обучении студентов аналитической геометрии…………………………… 215
Рябинова Е.Н., Жихарева А.А. *Россия, г. Самара*
Преемственность в цифровой среде как инструмент решения задач по геометрии повышенного уровня сложности... 221
Утеева Р.А., Карасев А.И. *Россия, г. Тольятти*
Электронно-образовательный контент «Именные теоремы курса геометрии средней школы»……………………………………………………… 225

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ…………………………………… 229

Борисов И.М., Полотовский Г.М. *Россия, г. Нижний Новгород*
Применение теории узлов и зацеплений к классификации распадающихся алгебраических кривых………………………………………………………… 229
Ильмушкин Г.М. *Россия, г. Димитровград*
Об усеченной операторной тригонометрической проблеме моментов…… 232
Овездурдыев Х., Мурадов Б. *Туркменистан, г. Туркменбат*
Применение обобщенных теорем теории симплексов…………………… 237
Уланов Б.В. *Россия, г. Тольятти*
Геометрия траекторий разрывной динамической системы без скользящих режимов ………………………………………………………. 240

КОНКУРСНЫЕ РАБОТЫ АСПИРАНТОВ, СТУДЕНТОВ И ДОКТОРАНТОВ…………………………………………………………… …… 243

Большова Е.А. *Россия, г. Тольятти*
Web-квест как инновационная форма организации дифференцированной домашней работы школьников при обучении геометрии в условиях единой цифровой информационной образовательной среды……………… 243
Дюпина А.Э. *Россия, г. Казань*
Исследование структуры геометрического мышления студентов педагогического отделения………………………………………………… 249
Шкурай И.А. *Россия, г. Ростов-на-Дону*
Взаимосвязь школьного и вузовского курсов геометрии на примере темы «Векторы» ……………………………………………………………………. 255
Иванова Е.Ю. *Украина, г. Славянск*
Stem-технологии в математической подготовке будущих учителей начальной школы …………………………………………………………. 260

Постскриптум ……………………………………………………………… 263

Содержание ………………………………………………………………… 264

Научное издание

ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник трудов
IV международной научной конференции
«Геометрия и геометрическое образование
в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева)

Тольятти, 29 – 30 ноября 2019 года

В *авторской редакции*

Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

Подписано в печать ____ 2020. Формат 60х84/16
Печать оперативная. Усл. п.л. ___ .
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, Тольятти, ул. Белорусская, 14