

Е. В. Ноздринова

Национальный исследовательский  
университет «Высшая школа экономики»  
Нижний Новгород, Россия  
maati@mail.ru

О. В. Починка

Национальный исследовательский  
университет «Высшая школа экономики»  
Нижний Новгород, Россия  
olga-pochinka@yandex.ru

## О КЛАССЕ УСТОЙЧИВОЙ СВЯЗАННОСТИ ДИФФЕОМОРФИЗМА ИСТОЧНИК-СТОК НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Рассмотрен класс градиентно-подобных диффеоморфизмов, обладающих аттрактором и репеллером, разделенными окружностью на 2-сфере. Для любого диффеоморфизма данного класса построена устойчивая дуга, соединяющая его с системой источник–сток. Библиография: 14 назв. Иллюстрации: 13 рис.

### 1. Введение

В [1] введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В [2] доказано существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса — Смейла. Из [3] вытекает, что такую простую дугу всегда можно заменить устойчивой. Для диффеоморфизмов Морса — Смейла, заданных на многообразиях любой размерности, известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении инварианта, однозначно определяющего класс эквивалентности диффеоморфизма Морса — Смейла относительно отношения связанности устойчивой дугой (компонента устойчивой связанности).

Окружность является единственным замкнутым многообразием, для которого эта задача полностью решена. Показано [4], что для сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности компонента устойчивой связанности определяется числом вращения Пуанкаре  $k/m$ ,  $(k, m) = 1$ , в то время как все меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности лежат в одной компоненте устойчивой связанности.

Для диффеоморфизмов Морса — Смейла на двумерной сфере установлены [5] необходимые условия существования соединяющей их устойчивой дуги, однако вопрос о достаточных условиях в [5] не рассматривался. Из условий, найденных в [5], следует, что даже на двумерной сфере

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No. 17-11-01041), за исключением построения устойчивой дуги, которое выполнено при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение No. 075-15-2019-1931.

© Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, 2020

компонент устойчивой связности бесконечно много. Чтобы пояснить этот факт, рассмотрим  $\mathbb{S}^1$  как экватор сферы  $\mathbb{S}^2$ . Тогда диффеоморфизм окружности в точности с двумя периодическими орбитами периода  $m$  и числом вращения  $k/m$  может быть продолжен до диффеоморфизма  $F_{k/m} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. При этом диффеоморфизмы  $F_{k/m}$  и  $F_{k'/m'}$  для  $m = 2^r \cdot q$  и  $m' = 2^{r'} \cdot q'$ , целых  $r, r' \geq 0$  и натуральных  $q \neq q'$  не соединяются устойчивой дугой (см. рис. 1, где приведены фазовые портреты диффеоморфизмов 2-сферы  $F_{1/2}$  и  $F_{1/3}$ ).

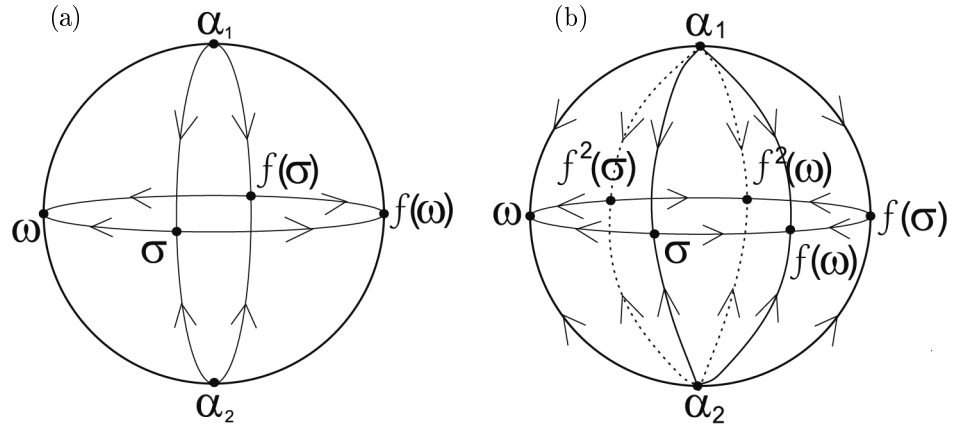


Рис. 1. Фазовые портреты диффеоморфизмов 2-сферы: (a)  $F_{1/2}$ , (b)  $F_{1/3}$ .

Простейшим структурно устойчивым двумерным диффеоморфизмом является система источник-сток на 2-сфере. Все такие системы попарно топологически сопряжены, однако факт существования устойчивого пути между двумя системами источник-сток доказывается весьма нетривиально [6] (более того, он не верен в общем случае для систем источник-сток на  $n$ -сфере [7]). В силу результатов [5] класс устойчивой связности диффеоморфизма источник-сток на 2-сфере не содержит диффеоморфизмов  $F_{k/m}$  для нечетных  $m > 1$ .

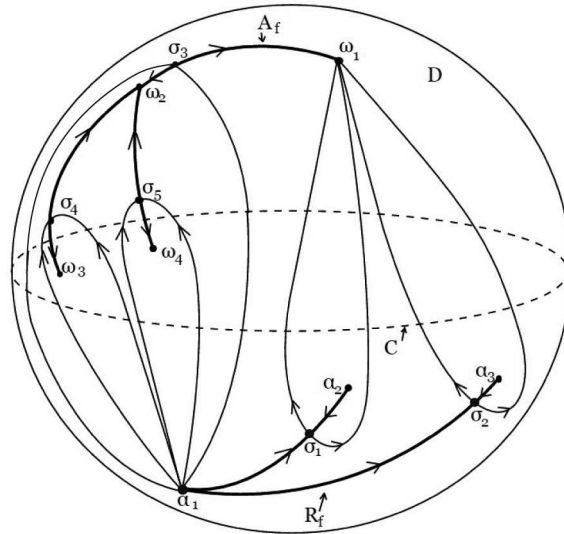


Рис. 2. Пример фазового портрета диффеоморфизма  $f \in G$ .

В настоящей работе установлены достаточные условия принадлежности градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы компоненте устойчивой связанности диффеоморфизма источник–сток. Именно, мы рассматриваем сохраняющие ориентацию градиентно-подобные диффеоморфизмы  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Обозначим через  $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2$  множество стоков, седел, источников диффеоморфизма  $f$  соответственно. Пусть  $\Sigma \subset \Omega^1$  — некоторое подмножество (возможно, пустое) седловых орбит. С каждым таким подмножеством  $\Sigma$  связана дуальная пара аттрактор–репеллер  $A_\Sigma, R_\Sigma$ , определенная следующим образом:

$$A_\Sigma = \Omega^0 \cup W_\Sigma^u, \quad R_\Sigma = \Omega^2 \cup W_{\Omega^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Будем говорить, что диффеоморфизм  $f$  принадлежит классу  $G$ , если существуют множество  $\Sigma$  и окружность  $C \subset \mathbb{S}^2$  такие, что  $A_\Sigma$  и  $R_\Sigma$  принадлежат разным компонентам связности множества  $\mathbb{S}^2 \setminus C$ . В дальнейшем будем обозначать через  $A_f$  и  $R_f$  аттрактор и репеллер с описанными свойствами для диффеоморфизма  $f \in G$  (см. рис. 2). Основным результатом работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Любой диффеоморфизм  $f \in G$  соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом источник–сток.*

## 2. Необходимые сведения и факты

**2.1. Диффеоморфизмы Морса — Смейла.** Пусть диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  задан на гладком замкнутом (компактном без края)  $n$ -многообразии ( $n \geq 1$ )  $M^n$  с метрикой  $d$ .

Точка  $x \in M^n$  называется *блуждающей* для  $f$ , если существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$  такая, что  $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В противном случае точка  $x$  называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек  $f$  называется *неблуждающим множеством* и обозначается  $\Omega_f$ .

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка  $y \in M^n$  называется  $\omega$ -предельной точкой для точки  $x \in M^n$ , если существует последовательность  $t_k \rightarrow +\infty, t_k \in \mathbb{Z}$ , такая, что  $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$ . Множество  $\omega(x)$  всех  $\omega$ -предельных точек для точки  $x$  называется ее  $\omega$ -предельным множеством. Заменой  $+\infty$  на  $-\infty$  определяется  $\alpha$ -предельное множество  $\alpha(x)$  точки  $x$ . Множество  $L_f = cl(\bigcup_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$  называется *предельным множеством* диффеоморфизма  $f$ .

Если множество  $\Omega_f$  конечно, то каждая точка  $p \in \Omega_f$  является периодической. Обозначим через  $m_p \in \mathbb{N}$  период периодической точки  $p$ . С любой периодической точкой  $p$  связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Говорят, что периодические орбиты  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$  образуют *цикл*, если  $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u \neq \emptyset$  для  $i \in \{1, \dots, k\}$  и  $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$ .

Периодическая точка  $p \in \Omega_f$  называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби  $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)_p$  не равны по модулю единице. Если собственные значения по модулю меньше (больше), чем 1, то  $p$  называют *стоковой точкой* (*источниковой точкой*). Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является узловой, то она называется *седловой точкой*.

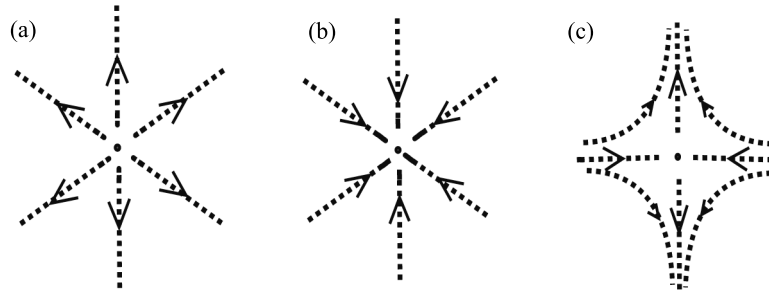


Рис. 3. (а) источник, (б) сток, (с) седло.

Из гиперболической структуры периодической точки  $p$  следует, что ее устойчивое  $W_p^u$  и неустойчивое  $W_p^s$  многообразия являются инъективными иммерсиями пространств  $\mathbb{R}^{q_p}$  и  $\mathbb{R}^{n-q_p}$ , где  $q_p$  — число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единиц. Число  $\nu_p$ , равное  $+1(-1)$ , если отображение  $f^{m_p}|_{W_p^u}$  сохраняет (меняет) ориентацию  $W_p^u$  называется *типом ориентации* точки  $p$ . Компонента линейной связности множества  $W_p^u \setminus p$  ( $W_p^s \setminus p$ ) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой* точки  $p$ .

Замкнутое  $f$ -инвариантное множество  $A \subset M^n$  называется *аттрактором* дискретной динамической системы  $f$ , если оно имеет компактную окрестность  $U_A$  такую, что  $f(U_A) \subset \text{int } U_A$  и  $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$ . Окрестность  $U_A$  при этом называется *захватывающей* или *изолирующей*.

*Репеллер* определяется как аттрактор для  $f^{-1}$ . Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность дуального репеллера.

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических орбит,
- 2) многообразия  $W_p^s, W_q^u$  пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек  $p$  и  $q$ .

Диффеоморфизм Морса — Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия  $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$  для различных точек  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$  следует, что  $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^s$ .

Аналогичным образом определяется *поток Морса — Смейла* на многообразии  $M^n$ , который называется *градиентно-подобным* в случае отсутствия периодических траекторий.

В случае  $n = 2$  динамика градиентно-подобных диффеоморфизмов тесно переплетается с динамикой периодических гомеоморфизмов. Напомним, что гомеоморфизм  $\varphi : M^2 \rightarrow M^2$  называется *периодическим порядка  $t \in \mathbb{N}$* , если  $\varphi^t = \text{id}$  и  $\varphi^\mu \neq \text{id}$  для любого натурального  $\mu < t$ .

**Предложение 2.1** (см. [8] и [9, теорема 3.3]). *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм  $f : M^2 \rightarrow M^2$  топологически сопряжен композиции периодического гомеоморфизма со сдвигом на единицу времени градиентно-подобного потока.*

Согласно классификации [10], сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода  $t$  двумерной сферы имеет периодические точки только двух периодов 1 и  $t$ , при этом множество его неподвижных точек непусто. Откуда получаем следующее утверждение, вытекающее из предложения 2.1.

**Предложение 2.2.** *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм 2-сферы имеет периодические точки только двух периодов 1 и  $t$  (возможно,  $t = 1$ ), при этом множество его неподвижных точек непусто.*

Кроме того, для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма  $f : M^2 \rightarrow M^2$  имеет место следующий факт.

**Предложение 2.3** (см. [9, леммы 3.1, 3.3]). *Пусть  $f : M^2 \rightarrow M^2$  — сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм и  $t_f$  — наименьшее натуральное число, для которого  $\Omega_{f^{t_f}}$  состоит из неподвижных точек с положительным типом ориентации. Тогда период любой седловой сепаратрисы диффеоморфизма  $f$  равен  $t_f$ .*

Суммируя результаты предложений 2.2 и 2.3, получаем следующий факт о структуре периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-сферы.

**Предложение 2.4.** *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы*

- 1)  $m_f = m$ ,
- 2) любая седловая точка с отрицательным типом ориентации является неподвижной,
- 3) любая седловая точка с положительным типом ориентации имеет период  $m$ .

**2.2. Устойчивые дуги в пространстве диффеоморфизмов.** Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (дугу)  $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$ . Обозначим через  $\mathcal{Q}$  множество дуг  $\{\varphi_t\}$ , которые начинаются и заканчиваются в диффеоморфизмах Морса – Смейла и обладают следующими свойствами:

- 1)  $\varphi_t$  имеет конечное предельное множество для всех  $t \in [0, 1]$ ;
- 2)  $\{\varphi_t\}$  содержит конечное множество бифуркационных диффеоморфизмов  $b_1, \dots, b_m \in (0, 1)$ .

Согласно [11] дуга  $\{\varphi_t\}$  называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги  $\{\varphi_t\}, \{\varphi'_t\} \in \mathcal{Q}$  называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  и  $H_t : M^n \rightarrow M^n$  такие, что  $h(b_i) = b'_i, i \in \{1, \dots, m\}, H_t \varphi_t = \varphi'_{h(t)} H_t, t \in [0, 1]$  и  $H_t$  непрерывно зависит от  $t$ .

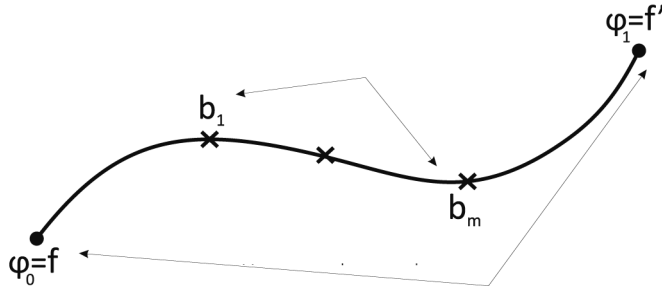


Рис. 4. Дуга из множества  $\mathcal{Q}$ .

В [11] также установлено, что дуга  $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$  является устойчивой тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

- 1) диффеоморфизм  $\varphi_{b_i}, i \in \{1, \dots, m\}$ , не имеет циклов и имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флип или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично,
- 2) устойчивые и неустойчивые многообразия любых периодических точек диффеоморфизма  $\varphi_t, t \in [0, 1]$ , пересекаются трансверсально (см. рис. 4).

Говорят, что дуга  $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$  *проходит типично через седло-узловую бифуркацию*  $\varphi_{b_i}$  (см. рис. 5 и 6), если в некоторой окрестности негиперболической точки  $(p, b_i)$  дуга  $\varphi_t$  сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \dots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + \tilde{t}, \pm 2x_2, \dots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \dots, \frac{\pm x_n}{2} \right),$$

где  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_i| < 1/2, |\tilde{t}| < 1/10$ .

Говорят, что дуга  $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$  *проходит типично через бифуркацию удвоения периода (флип)*  $\varphi_{b_i}$  (см. рис. 7 и 8), если в некоторой окрестности негиперболической точки  $(p, b_i)$  дуга  $\varphi_t$  сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \dots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \dots, x_n) = \left( -x_1(1 \pm \tilde{t}) + x_1^3, \pm 2x_2, \dots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \dots, \frac{\pm x_n}{2} \right),$$

где  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_i| < 1/2, |\tilde{t}| < 1/10$ .

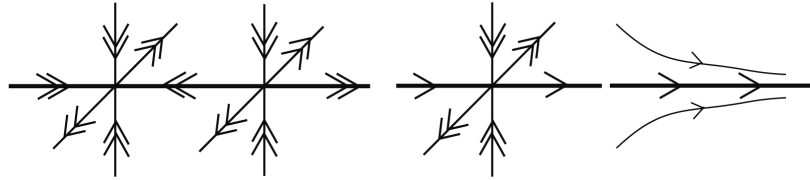


Рис. 5. Седло-узловая бифуркация.

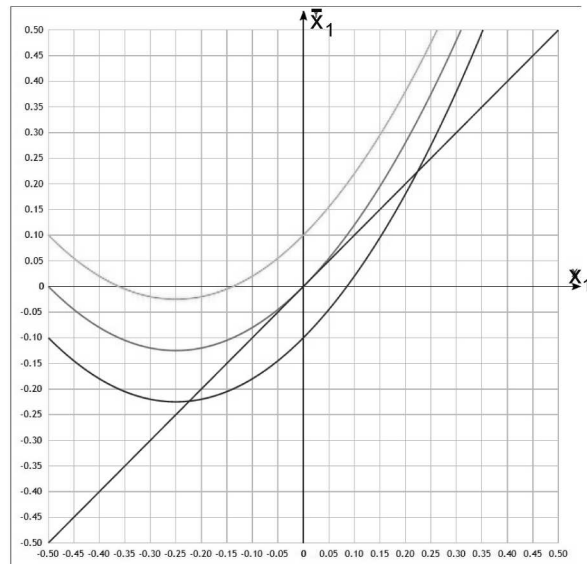


Рис. 6. График отображения первой координаты седло-узловой бифуркации.

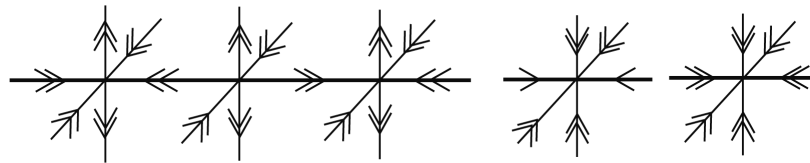


Рис. 7. Бифуркация удвоения периода (флип).

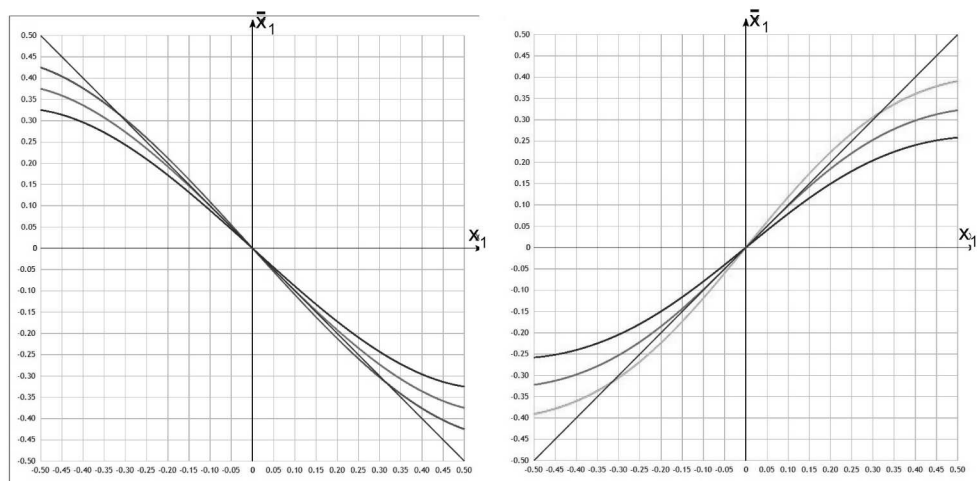


Рис. 8. График отображения первой координаты и квадрата этого отображения для бифуркации удвоения периода (флипа).

### 3. Динамика диффеоморфизмов класса $G$

**Лемма 3.1.** *Для любого диффеоморфизма  $f \in G$  аттрактор  $A_f$  либо состоит из одной стоковой точки, либо является связным одномерным комплексом без циклов.*

**Доказательство.** Обозначим через  $D$  компоненту связности множества  $\mathbb{S}^2 \setminus C$ , содержащую  $A_f$ . Поскольку  $A_f$  является аттрактором и диск  $D$  лежит в его бассейне притяжения, существует натуральное число  $l$  такое, что  $f^l(\text{cl } D) \subset \text{int } D$ . Тогда  $A_f = \bigcap_{k \geq 0} f^{kl}(\text{cl } D)$ , откуда следует связность аттрактора  $A_f$  (см., например, [9, предложение 10.1]). Покажем, что  $A_f$  не содержит циклов.

Предположим противное:  $A_f$  содержит цикл, образованный замыканиями неустойчивых многообразий седловых точек  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ . Тогда замкнутая кривая  $R = \bigcup_{i=1}^r \text{cl } W_i^u$  ограничивает диск  $d \subset D$ , откуда следует, что одна из устойчивых сепаратрис каждого седла  $\sigma_i$  лежат в диске  $d$ , а, следовательно, в диске  $d$  лежит и замыкание этой сепаратрисы. Таким образом,  $R_f \cap d \neq \emptyset$ , что противоречит условиям, наложенным на класс  $G$ .

Таким образом получаем, что  $A_f$  не содержит циклов. □

**Лемма 3.2.** *Если аттрактор  $A_f$  диффеоморфизма  $f \in G$  отличен от стока, то справедливо в точности одно из следующих утверждений:*

- 1)  $A_f = \text{cl } W_\sigma^u$ , где  $q_\sigma = m_\sigma = 1, \nu_\sigma = -1$ ,
- 2) существуют точки  $\sigma, \omega \in A_f$  такие, что  $m_\sigma = m_\omega, q_\omega = 0, q_\sigma = \nu_\sigma = 1, \omega \in \text{cl } W_\sigma^u$  и пересечение  $W_\omega^s \cap A_f$  состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла  $\sigma$  и стока  $\omega$ .

**Доказательство.** Пусть аттрактор  $A_f$  диффеоморфизма  $f \in G$  отличен от стока. В силу леммы 3.1 в этом случае одномерный комплекс  $A_f$  является деревом и, следовательно, имеет, так называемую висячую вершину, т.е. существуют точки  $\sigma, \omega \in A_f$  такие, что  $q_\omega = 0, q_\sigma = 1, \omega \in \text{cl } W_\sigma^u$  и пересечение  $W_\omega^s \cap A_f$  состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла  $\sigma$  и стока  $\omega$ . Возможны два случая: 1)  $\nu_\sigma = -1$ , 2)  $\nu_\sigma = 1$  (см. рис. 9).

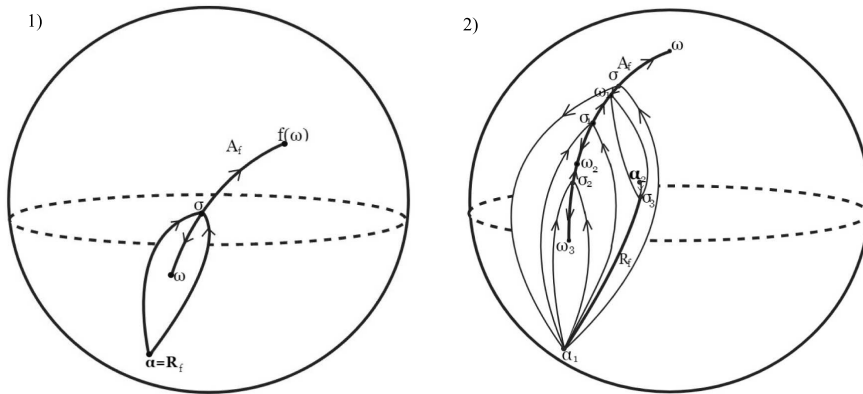


Рис. 9. Иллюстрация к лемме 3.2.

В случае 1) согласно предложению 2.4  $m_\sigma = 1$  и период сепаратрисы седла  $\sigma$  равен 2. Поскольку  $A_f$  не имеет циклов,  $\omega \neq f(\omega)$  и, следовательно,  $m_\omega = 2$ . Тогда пересечение  $W_{f(\omega)}^s \cap A_f$  состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла  $\sigma$  и стока  $f(\omega)$ . Откуда следует, что  $A_f = \omega \cup W_\sigma^u \cup f(\omega)$ .

В случае 2) согласно предложению 2.4  $m_\sigma = m$ , период сепаратрисы седла  $\sigma$  равен  $m$ , а для стока  $\omega$  существуют две возможности 2а)  $m_\omega = m$  и 2б)  $m_\omega = 1$ . В случае 2а) мы в точности получаем утверждение леммы. В случае 2б) все  $m$  неустойчивых сепаратрис седла  $\sigma$  лежат в бассейне стока  $\omega$ . Поскольку пересечение  $W_\omega^s \cap A_f$  состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла  $\sigma$  и стока  $\omega$ , получаем  $m = 1$  и утверждение леммы верно. □

#### 4. Построение устойчивой дуги

Разобьем класс  $G$  на попарно не пересекающиеся подмножества  $G_{\lambda,\mu}$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$  число стоков, источников, принадлежащих аттрактору  $A_f$ , репеллеру  $R_f$  соответственно. Заметим, что класс  $G_{1,1}$  состоит из диффеоморфизмов источник–сток. Тогда для доказательства теоремы 1.1 достаточно построить устойчивую дугу  $\Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda-1,\mu}}$ ,  $\lambda > 1$ , соединяющую диффеоморфизм  $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}$  с диффеоморфизмом  $f_{\lambda-1,\mu} \in G_{\lambda-1,\mu}$  (что мы и делаем в лемме 4.2 ниже). Действительно, тогда устойчивая дуга

$$\Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{1,\mu}} = \Gamma_{f_{2,\mu}, f_{1,\mu}} * \cdots * \Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda-1,\mu}}$$

соединяет диффеоморфизм  $f_{\lambda,\mu}$  с диффеоморфизмом  $f_{1,\mu}$ . Если  $c_1$  и  $c_2$  — пути в топологическом пространстве  $X$ , причем  $c_1(1) = c_2(0)$ , то под *произведением путей*  $c_1$  и  $c_2$  мы понимаем путь  $c_1 * c_2$ , определенный формулой

$$(c_1 * c_2)(t) = \begin{cases} c_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ c_2(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Поскольку диффеоморфизм  $f_{1,\mu}^{-1}$  принадлежит классу  $G_{\mu,1}$ , устойчивая дуга

$$\Gamma_{f_{1,\mu}^{-1}, f_{1,1}^{-1}} = \Gamma_{f_{2,\mu}^{-1}, f_{1,\mu}^{-1}} * \cdots * \Gamma_{f_{1,\mu}^{-1}, f_{1,\mu-1}^{-1}} = \{\gamma_t\}$$

соединяет диффеоморфизм  $f_{1,\mu}^{-1}$  с диффеоморфизмом  $f_{1,1}^{-1}$ . Тогда устойчивая дуга

$$\tilde{\Gamma}_{f_{1,\mu}, f_{1,1}} = \{\gamma_t^{-1}\}$$

соединяет диффеоморфизм  $f_{1,\mu}$  с диффеоморфизмом  $f_{1,1}$ . Таким образом, искомая дуга, соединяющая диффеоморфизм  $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}$  с некоторым диффеоморфизмом источник–сток будет иметь вид (см. рис. 10)

$$\tilde{\Gamma}_{f_{1,\mu}, f_{1,1}} * \Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{1,\mu}}.$$

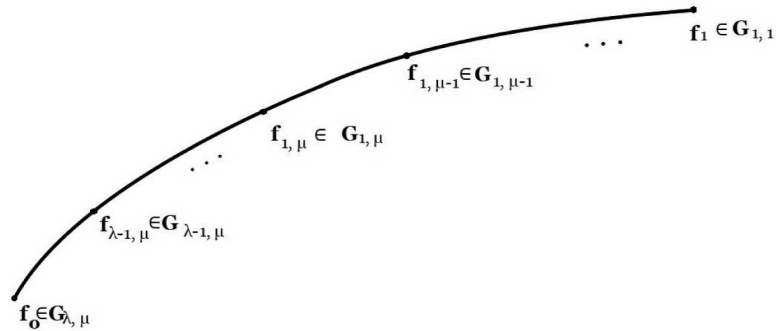


Рис. 10. Схема построения дуги.

Уменьшение числа седловых точек на аттракторе  $A_f$  достигается путем построения дуги, проходящей типично через бифуркацию седло-узел или флип. Для реализации такого сценария необходимо привести к каноническому виду объекты слияния. Именно, в лемме 4.2 мы приводим динамику в окрестности стока к каноническому сжатию, а в лемме 4.1 укладываем неустойчивую седловую сепаратрису в бассейне канонического стока на гладкую дугу. Важным техническим инструментом всех построений является следующий классический факт.

**Предложение 4.1** (теорема Тома о продолжении изотопии [12, теорема 5.8]). Пусть  $Y$  — гладкое многообразие без границы,  $X$  — гладкое компактное подмногообразие  $Y$  и  $\{f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]\}$  — гладкая изотопия такая, что  $f_0$  — отображение включения  $X$  в  $Y$ . Тогда для любого компактного множества  $A \subset Y$ , содержащего носитель изотопии  $\text{supp}\{f_t\}$  существует гладкая изотопия  $\{g_t \in \text{Diff}(Y), t \in [0, 1]\}$  такая, что  $g_0 = \text{id}$ ,  $g_t|_X = f_t|_X$  для любого  $t \in [0, 1]$  и  $\text{supp}\{g_t\}$  принадлежит  $A$ .

Носителем  $\text{supp}\{f_t\}$  изотопии  $\{f_t\}$  называется замыкание множества  $\{x \in X : f_t(x) \neq f_0(x) \text{ для некоторого } t \in [0, 1]\}$ .



**Предложение 4.2** (лемма Фрэнкса [13, лемма 1.1]). Пусть  $\theta$  — конечное множество точек многообразия  $M^n$ ,  $\varphi : M^n \rightarrow M^n$  — диффеоморфизм,

$$T = \bigcup_{x \in \theta} TM_x^n, \quad T' = \bigcup_{x \in \theta} TM_{\varphi(x)}^n.$$

Тогда существует окрестность  $U(\theta) \supset \theta$  и число  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого изоморфизма  $G : T \rightarrow T'$  такого, что  $\|G - D\varphi\| < \varepsilon/10$  существует диффеоморфизм  $\psi : M^n \rightarrow M^n$ ,  $\varepsilon$ -близкий к  $\varphi$  в  $C^1$  топологии, для которого  $D\psi = G$  на  $T$  и  $\psi = f$  вне  $U(\theta)$ .

В силу того, что между любыми гиперболическими автоморфизмами одинакового индекса (число собственных значений по модулю больших 1) существует путь из гиперболических автоморфизмов, лемма Фрэнкса допускает следующее обобщение.

**Предложение 4.3.** Пусть диффеоморфизм  $\varphi_0 : M^n \rightarrow M^n$  имеет гиперболическую точку  $r_0$  периода  $m_0$ , и пусть  $(U_0, h)$  — локальная карта многообразия  $M^n$  такая, что  $r_0 \in U_0$ ,  $h(r_0) = O$ . Тогда для любого гиперболического автоморфизма  $G$ , имеющего такой же индекс, что и автоморфизм  $(D\varphi_0^{m_0})_{r_0}$ , существуют окрестности  $U_1$  и  $U_2$  точки  $r_0$ ,  $U_2 \subset U_1 \subset U_0$ , и дуга  $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$  без бифуркаций такие, что

- 1) диффеоморфизм  $\varphi_t, t \in [0, 1]$ , совпадает с диффеоморфизмом  $\varphi_0$  вне множества

$$\bigcup_{k=0}^{m_0-1} \varphi_0^k(U_1), \quad \bigcup_{k=0}^{m_0-1} \varphi_0^k(r_0)$$

- гиперболическая орбита периода  $m_0$  для каждого  $\varphi_t$ ,

- 2) диффеоморфизм  $h\varphi_1^{m_0}h^{-1}$  совпадает с диффеоморфизмом  $G$  на множестве  $h(U_2)$ .

Перейдем к деталям построения.

Обозначим через  $O(0, 0)$  начало координат в плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Для любого  $r > 0$  положим  $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ . Обозначим через  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  диффеоморфизм, заданный формулой  $g(x, y) = (x/2, y/2)$ .

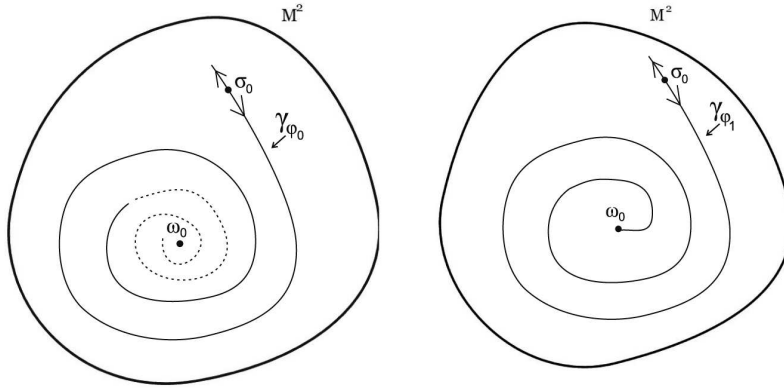


Рис. 11. Выпрямление сепаратрисы.

**Лемма 4.1.** Пусть диффеоморфизм  $\varphi_0 : M^2 \rightarrow M^2$  имеет гиперболический сток  $\omega_0$  и гиперболическое седло  $\sigma_0$  такие, что неустойчивая сепаратриса  $\gamma_{\varphi_0}$  седла  $\sigma_0$  лежит в бассейне стока  $W_{\omega_0}^s$  и имеет тот же период  $t$ , что и сток  $\omega_0$ . Пусть  $(U_0, \psi_0)$  — локальная карта многообразия  $M^2$  такая, что  $\omega_0 \in U_0$ ,  $\psi_0(\omega_0) = O$  и  $\varphi_0^m(U_0) \subset U_0$ . Тогда существуют окрестности  $V_1, V_2$  точки  $\omega_0$  такие, что  $V_2 \subset V_1 \subset U_0$  и дуга  $\varphi_t : M^2 \rightarrow M^2, t \in [0, 1]$  без бифуркаций со следующими свойствами:

- (1) диффеоморфизм  $\varphi_t, t \in [0, 1]$  совпадает с диффеоморфизмом  $\varphi_0$  вне множества  $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$  и  $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(\omega_0)$  является гиперболической стоковой орбитой периода  $t$  для всех  $\varphi_t$ ,

(2)  $\psi_0(\gamma_{\varphi_1} \cap V_2) \subset OX_1$ , где  $\gamma_{\varphi_1}$  — неустойчивая сепаратриса седла  $\sigma_0$  относительно диффеоморфизма  $\varphi_1$  (см. рис. 11).

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_0 = \varphi_0^m, \bar{\varphi}_0 = \psi_0 \varphi_0 \psi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . В силу предложения 4.3 не уменьшая общности можно считать, что  $\bar{\varphi}_0 = g$  на диске  $B_{2r_0}$  для некоторого  $r_0 > 0$ . Положим  $K_0 = B_{2r_0} \setminus B_{r_0}$  и  $\gamma_{\bar{\varphi}_0} = \psi_0(\gamma_{\varphi_0})$ .

Обозначим через  $E_g$  множество сжатий  $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , совпадающих с  $\bar{\varphi}_0$  вне  $B_{2r_0}$  и с  $g$  на  $B_{r_{\bar{\varphi}}}$ , где  $r_{\bar{\varphi}} \leq 2r_0$ . Для любого  $\bar{\varphi} \in E_g$  положим  $\gamma_{\bar{\varphi}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\varphi}^k(\gamma_{\bar{\varphi}_0} \cap K_0)$ . По построению  $\bar{\varphi}$ -инвариантная кривая  $\gamma_{\bar{\varphi}}$  совпадает с  $\bar{\varphi}_0$ -инвариантной кривой  $\gamma_{\bar{\varphi}_0}$  вне диска  $B_{r_0}$ . Тогда достаточно построить дугу из сжатий  $\bar{\varphi}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]$  такую, что

1) диффеоморфизм  $\bar{\varphi}_t, t \in [0, 1]$  совпадает с диффеоморфизмом  $\bar{\varphi}_0$  вне множества  $B_{r_0}$ ,

2)  $(\gamma_{\bar{\varphi}_1} \cap B_{r_{\bar{\varphi}_1}}) \subset OX_1$ .

Тогда дуга  $\varphi_t : M^2 \rightarrow M^2$  получается из дуги  $\bar{\varphi}_t$  следующим образом. Пусть  $V_1 = h^{-1}(B_{r_0}), V_2 = h^{-1}(B_{r_{\bar{\varphi}_1}})$  и  $\varphi_t = h^{-1} \bar{\varphi}_t h$  на  $V_1$ . Тогда  $\varphi_t$  для каждого  $t \in [0, 1]$  совпадает с  $\varphi_0$  вне  $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$ ,  $\varphi_t(z) = \varphi_0(z)$  для  $z \in \varphi_0^k(V_2), k \in \{0, \dots, m-2\}$  и  $\varphi_t(z) = \varphi_0^{1-m}(z)$  для  $z \in \varphi_0^{m-1}(V_2)$ .

Для построения дуги  $\bar{\varphi}_t$  введем следующие обозначения для любого диффеоморфизма  $\bar{\varphi} \in E_g$ .

Представим двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  как пространство орбит действия диффеоморфизма  $g$  на множестве  $\mathbb{R}^2 \setminus O$  и обозначим через  $p : \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{T}^2$  естественную проекцию. Зафиксируем на торе  $\mathbb{T}^2$  образующие  $\hat{a} = p(OX_1)$  и  $\hat{b} = p(S^1)$ . Положим  $K_{\bar{\varphi}} = B_{r_{\bar{\varphi}}} \setminus B_{r_{\bar{\varphi}}/2}$  и  $\hat{\gamma}_{\bar{\varphi}} = p(\gamma_{\bar{\varphi}} \cap K_{\bar{\varphi}})$ . Тогда кривая  $\hat{\gamma}_{\bar{\varphi}}$  является узлом на торе  $\mathbb{T}^2$ , имеющим разложение  $\langle 1, -n_{\bar{\varphi}} \rangle, n_{\bar{\varphi}} \in \mathbb{Z}$  по базису  $\hat{a}, \hat{b}$  (см., например, [9]).

Дуга  $\bar{\varphi}_t$  будет гладким произведением дуг  $\eta_t$  и  $\zeta_t$ , где

I) дуга  $\eta_t, t \in [0, 1]$ , состоит из сжатий, совпадающих с диффеоморфизмом  $\bar{\varphi}_0$  вне множества  $B_{r_0}$  и соединяет диффеоморфизм  $\eta_0 = \bar{\varphi}_0$  с некоторым диффеоморфизмом  $\eta_1 \in E_g$  таким, что узел  $\hat{\gamma}_{\eta_1}$  имеет разложение  $\langle 1, 0 \rangle$  по базису  $\hat{a}, \hat{b}$ .

II) дуга  $\zeta_t \in E_g, t \in [0, 1]$  соединяет диффеоморфизм  $\zeta_0 = \eta_1$  с диффеоморфизмом  $\zeta_1$  таким, что  $\hat{\gamma}_{\zeta_1} = \hat{a}$ .

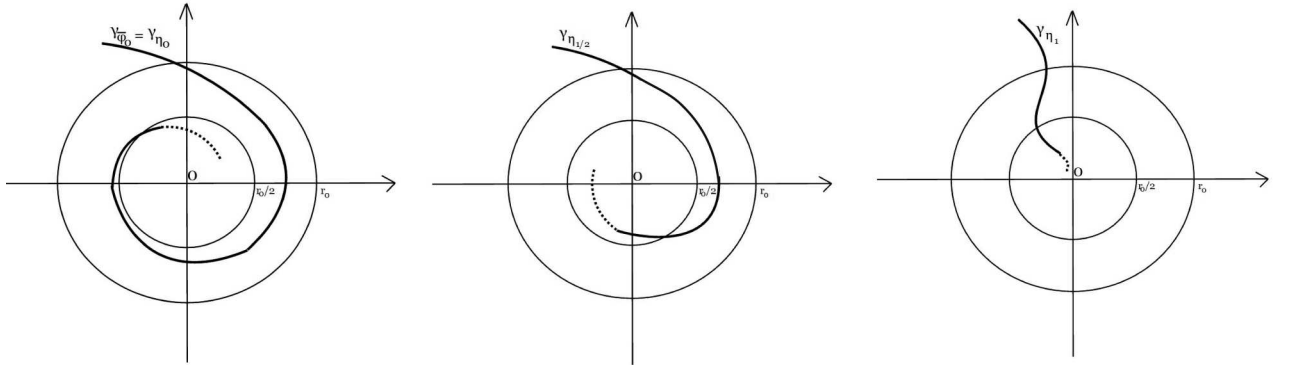


Рис. 12. Иллюстрация к лемме 4.1, часть I.

I) Если  $n_{\bar{\varphi}} = 0$ , то положим  $\eta_t = \bar{\varphi}_0$  для всех  $t \in [0, 1]$ . В противном случае определим диффеоморфизм  $\theta_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]$ , так, что  $\theta_t(O) = O$  и

$$\theta_t(\rho e^{i\varphi}) = \begin{cases} \rho e^{i\varphi}, & \rho > r_0, \\ \rho e^{i(\varphi + 4n_{\bar{\varphi}}\pi t(1 - \rho/r_0))}, & r_0/2 \leq \rho \leq r_0, \\ \rho e^{i(\varphi + 2n_{\bar{\varphi}}\pi t)}, & \rho < r_0/2. \end{cases}$$

Тогда  $\eta_t = \theta_t \bar{\varphi}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — искомая дуга (см. рис. 12).

II) По построению  $\eta_1 \in E_g$  и узел  $\widehat{\gamma}_{\eta_1}$  имеет разложение  $\langle 1, 0 \rangle$  по базису  $\widehat{a}, \widehat{b}$ . Существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм  $\widehat{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такой, что  $\widehat{h}(\widehat{\gamma}_{\eta_1}) = \widehat{a}$ . Для  $r > 0$  положим  $K_r = B_r \setminus B_{r/2}$ . Выберем открытое покрытие  $D = \{D_1, \dots, D_q\}$  тора  $\mathbb{T}^2$  такое, что компонента связности  $\overline{D}_i$  множества  $p^{-1}(D_i)$  является подмножеством  $K_{r_i}$  для некоторых  $r_i < r_{i-1}/2$  и  $r_1 \leq r_0/2$ . Согласно [14] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы  $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_q : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:

i) для каждого  $i \in \{1, \dots, q\}$  существует гладкая изотопия  $\{\widehat{w}_{i,t}\}$ , тождественная вне  $D_i$  и соединяющая тождественное отображение и  $\widehat{w}_i$ ,

ii)  $\widehat{h} = \widehat{w}_1 \dots \widehat{w}_q$ .

Пусть  $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — диффеоморфизм, который совпадает с  $(p|_{K_{r_i}})^{-1}\widehat{w}_{i,t}p$  на  $K_{r_i}$  и совпадает с тождественным отображением вне  $K_{r_i}$  (см. рис. 13). Тогда искомая дуга определяется формулой

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{q,t}.$$

Лемма доказана. □

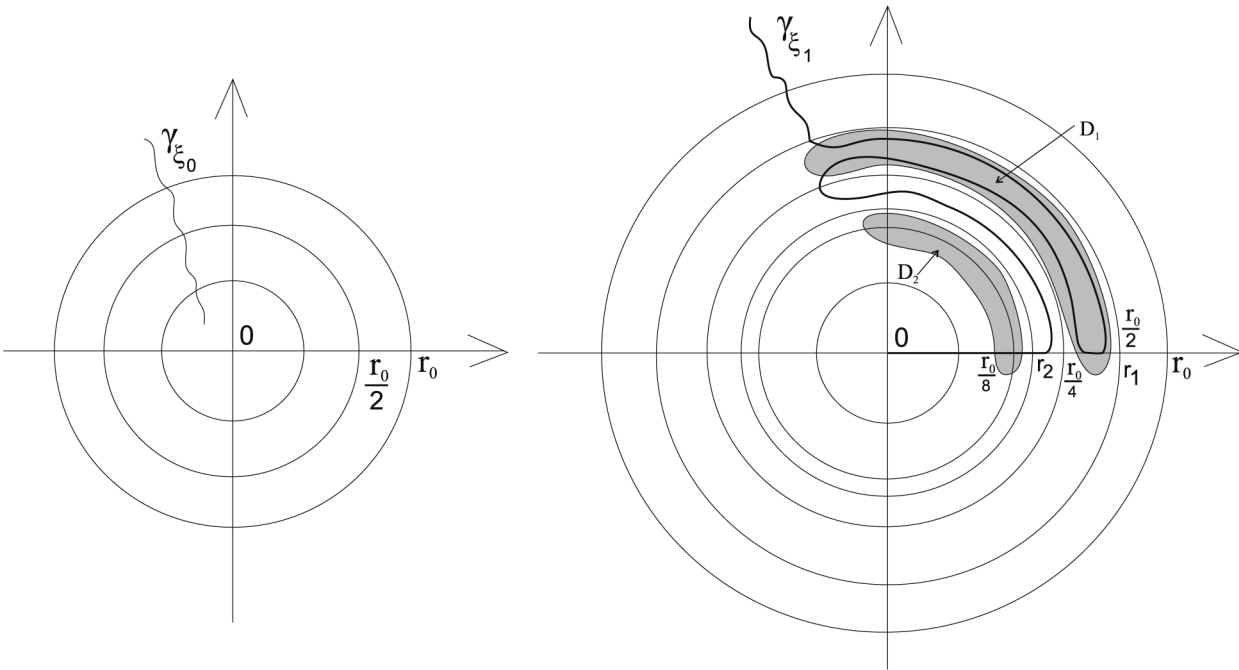


Рис. 13. Иллюстрация к лемме 4.1, часть II.

**Лемма 4.2.** Для любых диффеоморфизмов  $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}, \lambda > 1, f_{\lambda^{-1},\mu} \in G_{\lambda^{-1},\mu}$  существует соединяющая их устойчивая дуга  $H_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda^{-1},\mu}, t}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f = f_{\lambda,\mu}$ . В силу леммы 3.2 существуют точки  $\sigma, \omega \in A_f$  такие, что  $q_\omega = 0, q_\sigma = 1, \omega \in \text{cl } W_\sigma^u$  и пересечение  $W_\omega^s \cap A_f$  состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы  $\gamma$  седла  $\sigma$  и стока  $\omega$ , при этом период этой сепаратрисы совпадает с периодом стока  $t$ . Предложение 4.3 и лемма 4.1 позволяют предположить, что существует локальная карта  $(U, \psi)$  многообразия  $\mathbb{S}^2$  такая, что  $\omega \in U, \psi(\omega) = O, f^m(U) \subset U$  и  $\psi(\gamma \cap U) \subset OX_1$ . Согласно лемме 3.2 для диффеоморфизма  $f$  возможны два случая 1)  $\nu_\sigma = -1$  и 2)  $\nu_\sigma = 1$ . Проведем построение искомой дуги отдельно для каждого случая.

1) В этом случае  $A_f = W_\sigma^u \cup \omega \cup f(\omega)$  и  $m = 2$ . Положим  $l = W_\sigma^u \cup \psi^{-1}(OX_1) \cup f(\psi^{-1}(OX_1))$ . Тогда  $l$  — гладкая кривая, содержащая  $A_f$  и для которой точки  $\omega, f(\omega)$  являются внутренними, при этом  $f(l) \subset l$ . Положим  $\Pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < 1/2\}$ . Определим на отрезке  $[-1/2; 1/2] \subset$

$OX_1$  семейство диффеоморфизмов  $\varphi_t : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой

$$\varphi_t(x_1) = \left( -x_1 \left( 1 + \frac{1}{10}(1-2t) \right) + x_1^3 \right).$$

Определим диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}_t : \tilde{\Pi}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой

$$\tilde{\varphi}_t(x_1, x_2) = (\varphi_t(x_1), -x_2/2).$$

По построению диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}_0$  имеет три периодические точки периода, а именно 2 стока  $P_1(-1/\sqrt{10}, 0)$ ,  $P_2(1/\sqrt{10}, 0)$  периода два и неподвижную источниковую точку  $P_3(0, 0)$ . Для  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  положим

$$J_\varepsilon = \left[ -\frac{1}{\sqrt{10}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{10}} + \varepsilon \right] \subset OX_1,$$

$$V_{\varepsilon, \delta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/\sqrt{10} + \varepsilon, |x_2| < \delta\}.$$

Выберем окрестность  $\Pi_1$  дуги  $A_f$  и диффеоморфизм  $\beta : \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$  так, что  $\beta(\omega) = P_1$ ,  $\beta(f(\omega)) = P_2$ ,  $\beta(\sigma) = P_3$  и  $\beta(l \cap \Pi_1) = OX_1 \cap \tilde{\Pi}_1$ . Тогда в некоторой окрестности  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  корректно определен диффеоморфизм  $\tilde{f} = \beta f \beta^{-1}$ . В силу предложения 4.3 можно считать, что в окрестностях

$$V_{P_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + 1/\sqrt{10}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 1/\sqrt{10}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_3} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < \delta_1\}$$

точек  $P_1, P_2, P_3$  диффеоморфизм  $\tilde{f}$  совпадает с  $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_1}$ ,  $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_2}$ ,  $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_3}$  соответственно. Обозначим через  $\varphi$  ограничение диффеоморфизма  $\tilde{f}$  на отрезок  $J_{\varepsilon_1}$ . Определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}$  формулой  $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), -x_2/2)$ . Для  $\delta > 0$  определим бамп-функцию  $\rho_\delta(r)$ ,  $r \geq 0$ , равную 1 для  $r \in [0, \delta]$  и 0 для  $r \geq 2\delta$ . Для  $\delta_2 = \delta_1/2$  определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  семейство диффеоморфизмов  $\tilde{a}_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , формулой

$$\tilde{a}_t(x_1, x_2) = t\rho_{\delta_2}(|x_2|)\tilde{\varphi}(x_1, x_2) + (1 - t\rho_{\delta_2}(|x_2|))\tilde{f}(x_1, x_2).$$

По построению  $\tilde{a}_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , совпадает с  $\tilde{f}$  на  $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{a}_0 = \tilde{f}$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  и  $\tilde{a}_1 = \tilde{\varphi}$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_2}$ . Поскольку диффеоморфизмы  $\tilde{f}$  и  $\tilde{\varphi}$  совпадают на отрезке  $J_{\varepsilon_1}$  и прямоугольниках  $V_{P_1}, V_{P_2}, V_{P_3}$ , не уменьшая общности можно считать, что значение  $\delta_2$  выбрано таким образом, что диффеоморфизм  $\tilde{a}_t$  не имеет неблуждающих точек, отличных от  $P_1, P_2, P_3$ .

Для  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/4$  и  $t \in [0, 1]$  положим

$$v_t(x_1) = \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|)\varphi_t(x_1) + (1 - \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|))\varphi(x_1), \quad x_1 \in J_{\varepsilon_1}.$$

По построению диффеоморфизм  $v_t$  совпадает с  $\varphi_t$  на  $J_{\varepsilon_2}$  и  $\varphi$  на  $J_{\varepsilon_1} \setminus J_{2\varepsilon_2}$ . Для  $t \in [0, 1]$  положим  $\nu_t(x_1) = tv_0(x_1) + (1-t)\varphi(x_1)$ . По построению  $\nu_0$  совпадает с  $\varphi$  и  $\nu_1$  совпадает с  $v_0$ . Положим  $w_t = \nu_t * v_t$  и  $\tilde{w}_t(x_1, x_2) = (w_t(x_1), -x_2/2)$  для  $(x_1, x_2) \in V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ .

Для  $\delta_3 = \delta_2/2$  определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  семейство диффеоморфизмов  $\tilde{b}_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , формулой

$$\tilde{b}_t(x_1, x_2) = \rho_{\delta_3}(|x_2|)\tilde{w}_t(x_1, x_2) + (1 - \rho_{\delta_3}(|x_2|))\tilde{a}_1(x_1, x_2).$$

По построению  $\tilde{b}_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , совпадает с  $\tilde{f}$  на  $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{b}_0 = \tilde{a}_1$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{b}_t = \tilde{w}_t$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$  и  $\tilde{b}_1 = \tilde{v}_1$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$ .

Положим  $\tilde{c}_t = \tilde{a}_t * \tilde{b}_t$  и  $U_2 = \beta^{-1}(V_{\varepsilon_1, \delta_1})$ . Тогда искомая дуга  $\Gamma_{f_\mu, f_{\mu-1}}$  совпадает с  $f$  вне  $\bigcup_{k=0}^{m-1} f^k(U_2)$ ,  $f_t(z) = f(z)$  для  $z \in f^k(U_2)$ ,  $k \in \{0, \dots, m-2\}$ , и  $f_t(z) = \beta^{-1}(\tilde{c}_t(\beta(f^{1-m}(z))))$  для  $z \in f^{m-1}(U_2)$ .

2) В этом случае седло  $\sigma$  и сток  $\omega$  имеют одинаковый период  $m$ . Положим  $l = W_\sigma^u \cup \psi^{-1}(OX_1)$ . Тогда  $l$  — гладкая кривая, содержащая  $\gamma$  и для которой точки  $\omega, \sigma$  являются внутренними.

Положим  $\Pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < 1/2\}$ . Определим на отрезке  $[-1/2; 1/2] \subset OX_1$  семейство диффеоморфизмов  $\varphi_t : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой

$$\varphi_t(x_1) = x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{10}(2t - 1).$$

Определим диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}_t : \tilde{\Pi}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой  $\tilde{\varphi}_t(x_1, x_2) = (\varphi_t(x_1), x_2/2)$ . По построению диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}_0$  имеет стоковую точку  $P_1(-1/\sqrt{5}, 0)$  и седловую точку  $P_2(1/\sqrt{5}, 0)$ . Для  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  положим  $I_\varepsilon = [-1/\sqrt{5} - \varepsilon, 1/\sqrt{5} + \varepsilon] \subset OX_1$  и

$$V_{\varepsilon, \delta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/\sqrt{5} + \varepsilon, |x_2| < \delta\}.$$

Выберем окрестность  $\Pi_1$  дуги  $\gamma$  и диффеоморфизм  $\beta : \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$  так, что  $\beta(\omega) = P_1, \beta(\sigma) = P_2$  и  $\beta(l \cap \Pi_1) = O_{x_1} \cap \tilde{\Pi}_1$ . Тогда в некоторой окрестности  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  корректно определен диффеоморфизм  $\tilde{f} = \beta f^m \beta^{-1}$ . В силу предложения 4.3 можно считать, что в окрестностях

$$V_{P_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + 1/\sqrt{5}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 1/\sqrt{5}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\}$$

точек  $P_1, P_2$  диффеоморфизм  $\tilde{f}$  совпадает с  $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_1}, (D\tilde{\varphi}_0)_{P_2}$  соответственно. Обозначим через  $\varphi$  ограничение диффеоморфизма  $\tilde{f}$  на отрезок  $I_{\varepsilon_1}$ . Определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  диффеоморфизм  $\tilde{\varphi}$  формулой  $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), x_2/2)$ . Для  $\delta > 0$  определим бамп-функцию  $\rho_\delta(r), r \geq 0$ , равную 1 для  $r \in [0, \delta]$  и 0 для  $r \geq 2\delta$ . Для  $\delta_2 = \delta_1/2$  определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  семейство диффеоморфизмов  $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$ , формулой

$$\tilde{a}_t(x_1, x_2) = t\rho_{\delta_2}(|x_2|)\tilde{\varphi}(x_1, x_2) + (1 - t\rho_{\delta_2}(|x_2|))\tilde{f}(x_1, x_2).$$

По построению  $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$  совпадает с  $\tilde{f}$  на  $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{a}_0 = \tilde{f}$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  и  $\tilde{a}_1 = \tilde{\varphi}$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_2}$ . Поскольку диффеоморфизмы  $\tilde{f}$  и  $\tilde{\varphi}$  совпадают на отрезке  $I_{\varepsilon_1}$  и прямоугольниках  $V_{P_1}, V_{P_2}$ , не уменьшая общности можно считать, что значение  $\delta_2$  выбрано таким образом, что диффеоморфизм  $\tilde{a}_t$  не имеет неблуждающих точек, отличных от  $P_1$  и  $P_2$ .

Для  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/4$  и  $t \in [0, 1]$  положим

$$v_t(x_1) = \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|)\varphi_t(x_1) + (1 - \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|))\varphi(x_1), x_1 \in I_{\varepsilon_1}.$$

По построению диффеоморфизм  $v_t$  совпадает с  $\varphi_t$  на  $I_{\varepsilon_2}$  и  $\varphi$  на  $I_{\varepsilon_1} \setminus I_{2\varepsilon_2}$ . Для  $t \in [0, 1]$  положим  $\nu_t(x_1) = tv_0(x_1) + (1 - t)\varphi(x_1)$ . По построению  $\nu_0$  совпадает с  $\varphi$  и  $\nu_1$  совпадает с  $v_0$ . Положим  $w_t = \nu_t * v_t$  и  $\tilde{w}_t(x_1, x_2) = (w_t(x_1), x_2/2)$  для  $(x_1, x_2) \in V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ .

Для  $\delta_3 = \delta_2/2$  определим на цилиндре  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$  семейство диффеоморфизмов  $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$ , формулой

$$\tilde{b}_t(x_1, x_2) = \rho_{\delta_3}(|x_2|)\tilde{w}_t(x_1, x_2) + (1 - \rho_{\delta_3}(|x_2|))\tilde{a}_1(x_1, x_2).$$

По построению  $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$  совпадает с  $\tilde{f}$  на  $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{b}_0 = \tilde{a}_1$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ ,  $\tilde{b}_t = \tilde{w}_t$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$  и  $\tilde{b}_1 = \tilde{v}_1$  на  $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$ .

Положим  $\tilde{c}_t = \tilde{a}_t * \tilde{b}_t$  и  $U_2 = \beta^{-1}(V_{\varepsilon_1, \delta_1})$ . Тогда искомая дуга  $\Gamma_{f_\mu, f_{\mu-1}}$  совпадает с  $f$  вне  $\bigcup_{k=0}^{m-1} f^k(U_2)$ ,  $f_t(z) = f(z)$  для  $z \in f^k(U_2), k \in \{0, \dots, m-2\}$  и  $f_t(z) = \beta^{-1}(\tilde{c}_t(\beta(f^{1-m}(z))))$  для  $z \in f^{m-1}(U_2)$ .  $\square$

### Литература

1. S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, “Stable arcs of diffeomorphisms”, *Bull. Am. Math. Soc.*, **82**, 499–502 (1976).
2. S. Newhouse, M. M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows”, *Astérisque* **31**, 15–41 (1976).
3. G. Fleitas, “Replacing tangencies by saddle-nodes”, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **8**, 47–51 (1977).
4. E. V. Nozdrinova, “Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle”, *Nelinein. Din.* **14**, No. 4, 543–551 (2018).

5. P. R. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.* **47**, 33–46, (1980).
6. E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, “On existence of a smooth arc without bifurcations joining source–sink diffeomorphisms on 2-sphere”, *J. Phys., Conf. Ser.* **990**, 012010 (2018).
7. Хр. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса — Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Тр. МИАН* **256**, 54–69, (2007).
8. А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий. Дифференциальные и интегральные уравнения”, В: *Дифференциальные и интегральные уравнения*, с. 33–37, ГГУ, Горький (1985).
9. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham (2016).
10. B. von Kerekjarto, “Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche”, *Math. Ann.* **80**, 36–38 (1919).
11. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **57**, 5–71 (1983).
12. J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1965).
13. J. Franks, “Necessary conditions for stability of diffeomorphisms”, *Trans. Am. Math. Soc.* **158** 301–308 (1971).
14. A. Banyaga, “On the structure of the group of equivariant diffeomorphism”, *Topology* **16**, 279–283, (1977).

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2019 г.