Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, № 11, с. 87–92 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.В. Шурыгиным

Н.И. ЖУКОВА, Н.Г. ЧЕБОЧКО

СТРУКТУРА ЛОРЕНЦЕВЫХ СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Аннотация. Целью работы является описание структуры полных лоренцевых слоений (M, F) коразмерности два на n-мерных замкнутых многообразиях. Доказано, что (M, F) либо риманово, либо имеет постоянную трансверсальную кривизну и описана его структура. Для таких слоений (M, F) получен критерий, сводящий проблему хаоса в (M, F) как к проблеме хаотичности гладкого действия группы $O(1, 1)$ на ассоциированном локально симметрическом 3-многообразии, так и к проблеме хаотичности его глобальной группы голономии, представляющей собой конечнопорожденную подгруппу группы изометрий плоскости с полной метрикой постоянной кривизны.

Ключевые слова: слоение, лоренцево слоение, глобальная группа голономии, связность Эресмана.

УДК: 514.7

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-11-87-92

1. Лоренцевы слоения. Пусть N — q-мерное многообразие, топологическое пространство которого может быть несвязным. Рассмотрим n-мерное многообразие M, где $n > q$. Говорят, что задан N-коцикл $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, если заданы

(i) открытое покрытие $\{U_i \,|\, i \in J\}$ многообразия M и субмерсии со связными слоями $f_i : U_i \to N$ на открытые подмножества $V_i = f_i(U_i)$;

(ii) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$;

(iii) для любого $x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ имеет место равенство $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$, где $i, j, k \in J$.

Предполагается, что семейство η максимально по включению и $N = \bigcup_{i \in J} V_i$. Множество слоев субмерсий $\{f_i^{-1}(x) \,|\, x \in N, i \in J\}$ образует базу слоевой топологии Υ в M. Разбиение $F = \{L_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ многообразия M компонентами линейной связности топологического пространства (M, Υ) называется *слоением коразмерности q, заданным N-коциклом η*, и обозначается (M, F). Подмногообразия L_α называются слоями этого слоения.

Пусть (M, F) — слоение, заданное N-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$. Если на многообразии N существует лоренцева метрика g^N такая, что каждый элемент γ_{ij} из коцикла η

Поступила в редакцию 14.09.2020, после доработки 14.09.2020. Принята к публикации 01.10.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041, за исключением результатов теорем 5 и 6). Результаты, вошедшие в теоремы 5 и 6, получены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

является изометрией лоренцевых (соответственно, римановых) подмногообразий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i \cap U_j)$ и $f_i(U_i \cap U_j)$, тогда (M, F) называется *лоренцевым слоением* (соответственно, *римановым*) и говорят, что (M, F) задано (N, g^N)-коциклом η.

Пусть слоение (M, F) заданно N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$. Если N — лоренцево однородное пространство G/H, а γ_{ij} — ограничения сдвигов пространства G/H элементами группы Ли G, то (M, F) называется *трансверсально однородным* лоренцевым слоением или $(G, G/H)$-слоением.

2. Полнота лоренцева слоения. Пусть (M, F) — лоренцево слоение коразмерности q и $\mathfrak{M}$ — трансверсальное q-мерное распределение на M. Это означает, что для каждой точки $x \in M$ выполняется равенство $T_xM = \mathfrak{M}_x \oplus T_xF$, где T_xM — касательное векторное пространство к M, T_xF — касательное пространство к слою в точке x, $\mathfrak{M}_x$ — значение распределения в точке x. Обозначим через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и $\mathfrak{X}_F(M)$ множества векторных полей, касательных к $\mathfrak{M}$ и слоению (M, F), соответственно. Подчеркнем, что любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ однозначно представимо в виде $X = X^F + X^{\mathfrak{M}}$, где $X^F \in \mathfrak{X}_F(M)$, $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Предположим, что лоренцево слоение (M, F) задано (N, g^N)-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$. Пусть g^M — произвольная риманова метрика на M. Для любой точки $x \in M$ существует субмерсия $f : U \to V$ из коцикла η, для которой $x \in U$. Определим новую лоренцеву метрику g на M, полагая

$$g(X, Y)|_x := g^M(X^F, Y^F)|_x + g^N(f_{*x}X^{\mathfrak{M}}, f_{*x}Y^{\mathfrak{M}})|_{f(x)}.$$

Из определения (N, g^N)-коцикла вытекает корректность определения метрики g на M, т. е. независимость от выбора субмерсии $f : U \to V$, для которой $x \in U$. Кроме того, нетрудно проверить, что g — трансверсально проектируемая метрика относительно (M, F), т. е. производная Ли $L_X g$ вдоль любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_F(M)$, касательного к (M, F), равна нулю. Будем называть такую метрику $\mathfrak{M}$-*ассоциированной* с лоренцевым слоением (M, F).

Согласно ([1], теорема 1) для лоренцевой метрики g, ассоциированной с лоренцевым слоением (M, F), и связности Леви-Чивита ∇^g многообразия (M, g) распределение $\mathfrak{M}$ является ортогональным слоению и вполне геодезическим. Последнее свойство означает, что любая геодезическая лоренцева многообразия (M, g), ортогональная слоению в одной точке, остается ортогональной ему в каждой своей точке.

Лоренцево слоение (M, F) коразмерности q называется *полным*, если существуют трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$-ассоциированная лоренцева метрика g на M такие, что любая максимальная геодезическая, ортогональная слоению, определена на всей числовой прямой.

3. Критерий римановости. В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс слоений (П. Молино [2], А. Хефлигер [3], Ф. Тондеур [4] и др.). Р. Волак [5] поставил вопрос о нахождении условий, при которых слоение является римановым и доказал, что полное G-слоение, все слои которого компактны, является римановым. Критерии и другие достаточные условия римановости слоений, все слои которого компактны, найдены в [6].

Следующая теорема, доказанная в [7], дает ответ на этот вопрос для произвольных полных лоренцевых слоений коразмерности два.

Теорема 1. *Полное лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n-мерном многообразии является римановым тогда и только тогда, когда группа голономии каждого его слоя конечна, т.е. либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Как показывают примеры, конечность всех групп голономии не является достаточным условием для того, чтобы лоренцево слоение было римановым, а теорема 1 отражает специфику лоренцева слоения коразмерности два.

4. Альтернатива: римановость или трансверсальная однородность. Пусть $\mathbb{S}^q$ — стандартная q-мерная сфера, а $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q)$ — это группа Ли всех ее конформных преобразований. С. Таркини [8], а затем С. Таркини и Ш. Франц в [9] поставили вопрос о том, любое ли конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ на компактном многообразии является либо римановым, либо $(\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q), \mathbb{S}^q)$-слоением, и положительно ответили на него при некоторых дополнительных предположениях. Полный положительный ответ на данный вопрос представлен в ([10], теорема 2). Заметим, что конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ есть $(\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q), \mathbb{S}^q)$-слоение тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую конформную кривизну или, эквивалентно, является трансверсально однородным конформным слоением. Для полных конформных слоений (M, F) коразмерности $q \geq 3$ без предположения компактности многообразия M аналогичное утверждение доказано нами в [11], а для более широкого класса параболических слоений ранга один в [12].

Предположим, что лоренцево слоение (M, F) коразмерности два задано (N, g^N)-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Обозначим через $K = K(y)$, $y \in N$, функцию гауссовой кривизны двумерного лоренцева многообразия (N, g^N). Для любой точки $x \in M$ существует такая субмерсия $f_i\colon U_i \to V_i$ из коцикла η, что $x \in U_i$. Поскольку гауссова кривизна поверхности (N, g^N) инвариантна относительно любых локальных изометрий, из определения (N, g^N)-коцикла вытекает, что равенство

$$\mathcal{K}(x) = K(f_i(x))$$

корректно определяет функцию $\mathcal{K}\colon M \to \mathbb{R}$, которая называется *трансверсальной гауссовой кривизной лоренцева слоения* (M, F). Подчеркнем, что из этого определения вытекает, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ — базисная функция, т. е. постоянная на слоях слоения (M, F).

Следующая теорема является одним из основных результатов данной работы.

Теорема 2. *Пусть (M, F) — полное лоренцево слоение коразмерности два на n-мерном замкнутом многообразии M. Тогда либо (M, F) — риманово слоение, либо (M, F) — трансверсально однородное лоренцево слоение постоянной трансверсальной гауссовой кривизны. Более точно во втором случае (M, F) является $(G, G/H)$-слоением, где $H = O(1,1)$, а $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$, если трансверсальная гауссова кривизна равна нулю, в противном случае $G = O(2,1)$.*

Заметим, что для любого $q \geq 3$ существуют полные лоренцевы слоения коразмерности q, для которых утверждение теоремы 2, вообще говоря, не выполняется.

Согласно теореме 1, группа голономии любого лоренцева слоения коразмерности два, являющегося римановым, либо тривиальна, либо изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, поэтому замыкания всех слоев этого слоения имеют одинаковую размерность, и утверждение следующей теоремы доказывается на основании результатов П. Молино [2].

Теорема 3. *Пусть (M, F) — лоренцево слоение коразмерности два на замкнутом многообразии M, являющееся римановым. Тогда замыкание каждого слоя образует минимальное множество и является гладким вложенным подмногообразием в M, а множество замыканий всех слоев образует гладкое слоение $(M, \overline{F})$, удовлетворяющее одному из следующих трех условий:*

1) *каждый слой слоения (M, F) замкнут, т.е. $\overline{F} = F$, а пространство слоев естественным образом наделяется структурой гладкого компактного 2-орбифолда $\mathcal{N}$, причем проекция на пространство слоев $M \to \mathcal{N} = M/F$ является субмерсией на $\mathcal{N}$;*

2) *слоение* $(M, \overline{F})$ *имеет коразмерность один и образовано слоями субмерсии* $M \to \mathcal{N} = M/\overline{F}$ *на компактный гладкий одномерный орбифолд* $\mathcal{N}$*;*

3) *каждый слой слоения* (M, F) *всюду плотен в* M.

Из теоремы 2 и ([11], теорема 2) вытекает

Теорема 4. *Пусть* (M, F) *— полное лоренцево слоение коразмерности два на* n*-мерном многообразии, не являющееся римановым. Тогда*

1) *существует регулярное накрывающее отображение* $\kappa : L_0 \times B \to M$, *где* B *— полное лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны, диффеоморфное плоскости* $\mathbb{R}^2$, L_0 *— многообразие, диффеоморфное любому слою без голономии, а индуцированное слоение* $\widetilde{F} = \kappa^* F$ *образовано слоями проекции на второй сомножитель* $pr : \widetilde{M} = L_0 \times B \to B$;

2) *существует гомоморфизм* $\chi \colon \pi_1(M) \to \mathfrak{Iso}(B)$ *фундаментальной группы* $\pi_1(M)$ *в группу Ли изометрий* $\mathfrak{Iso}(B)$ *лоренцева многообразия* B, *причем группа* $\Psi = \chi(\pi_1(M))$ *изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия* $\kappa : \widetilde{M} \to M$;

3) *для* (M, F) *существует связность Эресмана* $\mathfrak{M}$ *в смысле* [13]*;*

4) *стационарная подгруппа* Ψ_b *в произвольной точке* $b \in B$ *изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия* $\kappa|_{L_0 \times \{b\}} : L_0 \times \{b\} \to L$ *на слой* $L = L(x)$, *где* $x \in \kappa(pr^{-1}(b))$, *а также ростковой группе голономии* $\Gamma(L, x)$ *и группе* $\mathfrak{M}$*-голономии* $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$.

Определение 1. Группа Ψ, определенная в теореме 4, называется *глобальной группой голономии слоения* (M, F).

5. Хаос в лоренцевых слоениях коразмерности два. Далее мы исследуем проблему существования хаотического поведения для слоений изучаемого класса. В отличие от параболических слоений ранга один [12], они не имеют аттракторов.

Напомним, что слой L слоения (M, F) называется замкнутым, если L — замкнутое подмножество в M.

Определение 2. Гладкое слоение (M, F) на компактном многообразии M называется *хаотическим* [14], если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) существует всюду плотный слой (топологическая транзитивность);

2) объединение всех компактых слоев всюду плотно в M (плотность компактных слоев).

Непрерывные хаотические действия счетных групп вводятся в [15] аналогично определению 2, в котором слои заменяются орбитами, а компактные слои заменяются конечными орбитами. Далее мы будем использовать

Определение 3. Гладкое действие группы Ли G (возможно дискретной) на многообразии M называется *хаотическим*, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) существует всюду плотная орбита;

2) объединение всех замкнутых орбит всюду плотно в M.

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ — гладкий поток на многообразии M и $\varphi^t := \varphi|_{\{t\} \times M}$, $t \in \mathbb{R}$. Напомним, что поток φ^t называется *аносовским*, если существует разложение касательного расслоения $TM = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^\varphi \oplus \mathbb{E}^u$, инвариантное относительно дифференциала $D\varphi^t$, и положительные константы a, b такие, что

1) распределение $\mathbb{E}^\varphi$ — касательное к орбитам потока;

2) неравенство $||D\varphi^t(v)|| \leq b \cdot e^{-at}||v||$ выполняется для любых $v \in \mathbb{E}^s$ и $t > 0$;

3) неравенство $||D\varphi^{-t}(v)|| \leq b \cdot e^{-at}||v||$ выполняется для любых $v \in \mathbb{E}^u$ и $t > 0$,

где $||\ ||$ — некоторая полная риманова метрика на M.

Будем называть аносовский поток *хаотическим*, если его орбиты образуют хаотическое слоение. Как известно (см., например, [16]), даже на компактных трехмерных многообразиях существуют нетранзитивные, следовательно, нехаотические, аносовские потоки.

Обозначим через $\mathfrak{Fol}$ категорию гладких слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого, а композиция морфизмов совпадает с композицией отображений.

В ([17], теорема 4.1) доказано, что с точностью до конечнолистных накрытий любое полное лоренцево слоение коразмерности два на компактном трехмерном многообразии либо риманово, либо изоморфно в категории $\mathfrak{Fol}$ слоению, образованному алгебраическим аносовским потоком. Используя этот результат и учитывая, что любой алгебраический поток является хаотическим, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Полное лоренцево слоение коразмерности два на компактном трехмерном многообразии либо риманово, либо хаотическое.*

Примеры показывают, что для любого $n > 3$ существуют n-мерные компактные многообразия с лоренцевыми слоениями коразмерности два, не являющиеся ни римановыми, ни хаотическими. Таким образом, в теореме 5 указано уникальное свойство лоренцевых слоений коразмерности два на компактных трехмерных многообразиях.

Напомним понятие слоеного расслоения. Пусть (M, F) — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности два. Согласно теореме 2 оно является $(G, G/H)$-слоением. Следовательно, (M, F) — картаново слоение типа (G, H), где $H = O(1,1)$, а $G = GL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, если трансверсальная гауссова кривизна равна нулю, и $G = O(2,1)$ в противном случае. Поэтому для (M, F) определено слоеное расслоение ([18], предложение 2). Это означает, что определены: главное H-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$, поднятое e-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, невырожденная H-эквивариантная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω на $\mathcal{R}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, такие, что $L_X\omega = 0$ для любого векторного поля X, касательного к слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Подчеркнем, что определенная выше полнота (M, F) эквивалента полноте слоения (M, F) в смысле [18]. В случае, когда поднятое слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образовано слоями субмерсии $\pi_b : \mathcal{R} \to W$, на многообразии W индуцируется локально свободное действие группы Ли $O(1,1)$.

Нами доказан следующий критерий хаотичности лоренцевых слоений коразмерности два.

Теорема 6. *Пусть (M, F) — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности два. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) *слоение (M, F) хаотическое;*

2) *индуцированное действие группы $O(1,1)$ на трехмерном локально симметрическом базовом многообразии W является локально свободным и хаотическим;*

3) *глобальная группа голономии слоения (M, F) является конечнопорожденной дискретной подгруппой группы Ли всех изометрий $\mathfrak{Iso}(\mathbb{R}^2, g)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ с полной лоренцевой метрикой g постоянной кривизны, хаотически действующей на $\mathbb{R}^2$.*

Литература

[1] Dolgonosova A.Yu., Zhukova N.I. *Pseudo-Riemannian Foliations and their Graphs*, Lobachevskii J. Math. **39** (1), 54–64 (2018).

[2] Molino P. *Riemannian Foliations* (Birkhauser, Boston 1988).

[3] Haefliger A. *Closures of leaves in Riemannian foliations*, A fête of topology, Acad. Press, Boston, 3–32 (1988).

[4] Tondeur P. *Geometry of foliations* (Birkhauser, Basel, 1997).

[5] Wolak R.A. *Leaves of foliations with transverse G-srtuctures of finite type*, Pub. UAB. **33**, 153–162 (1989).

[6] Zhukova N.I. *Local and Global Stability of Compact Leaves and Foliations*, Журн. матем. физ., анал., геом. **9** (3), 400–420 (2013).
[7] Багаев А.В., Жукова Н.И. *Трансверсально аналитические лоренцевы слоения коразмерности два*, Изв. вузов. Поволжск. регион, Физ.-матем. науки, **44** (4), 35–47 (2017).
[8] Tarquini C. *Feuilletages conformes*, Ann. Inst. Fourier, **52** (2), 453–480 (2004).
[9] Frances C., Tarquini C. *Autour du théorème de Ferrand-Obata*, **21** (1), 51–62 (2007).
[10] Жукова Н.И. *Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений*, Сиб. матем. журн., **52** (3), 436–450 (2011).
[11] Жукова Н.И. *Глобальные аттракторы конформных слоений*, Матем. сб., **203** (3), 79–106 (2012).
[12] Жукова Н.И. *Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один*, Матем. заметки, **93** (5-6), 436–450 (2013).
[13] Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations*, Indiana Univ. Math. J. **33** (4), 597–611 (1984).
[14] Churchill, R. C. *On definding chaos in absent of time*. In: Deterministic chaos in general relativity, ads. Hobill D., Burd A., Coley. A.A., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. **332**, 107—112 (1994).
[15] Cairns G., Davis G., Elton D., Kolganova A., Perversi P. *Chaotic group actions*, L'Enseignement mathematique **41**, 123–133 (1995).
[16] Beguin F., Bonatti C., Yu B. *Bilding Anosov flows on 3-manifolds*, Geom. Topol., **21** (3), 1837–1930 (2017).
[17] Boubel C., Mounoud P., Tarquini C. *Lorentzian foliations on 3-manifolds*, Ergodic Theory Dynam. System. **26** (5), 1339–1362 (2006).
[18] Жукова Н.И. *Минимальные множества картановых слоений*, Тр. МИАН, **256** (1), 115–147 (2007).

Нина Ивановна Жукова

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,

e-mail: nzhukova@hse.ru

Наталья Георгиевна Чебочко

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",
ул. Большая Печерская, д. 25/12, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,

e-mail: nchebochko@hse.ru

N.I. Zhukova and N.G. Chebochko

The structure of Lorentzian foliations of codimension two

Abstract. The aim of this work is to describe the structure of complete Lorentzian foliations (M, F) of codimension two on n-dimensional closed manifolds. It is proved that (M, F) is either Riemannian or has a constant transversal curvature and its structure is described. For such foliations (M, F), the criterion is obtained, reducing the chaos problem in (M, F) to the same problem of the associated action of the group $O(1,1)$ on a 3-dimensional manifold and also to the chaos problem of its global holonomy group, which is a finite-generated discrete subgroup of the isometry group of the plane with the full metric of a constant curvature.

Keywords: foliation, Lorentzian foliation, global holonomy group, Ehresmann connection.

Nina Ivanovna Zhukova

National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155 Russia,

e-mail: nzhukova@hse.ru

Natalia Georgievna Chebochko

National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155 Russia,

e-mail: nchebochko@hse.ru