Первые ненулевые члены разложения Тейлора с центром в точке 1 потенциальной функции Конвея*

А. Ю. Буряк †

Аннотация

Рассматривается потенциальная функция Конвея $\nabla_L(t_1,\dots,t_l)$ упорядоченного ориентированного зацепления $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_l \subset S^3$, которая, вообще говоря, не определяется потенциальными функциями Конвея компонент L_i и их индексами зацеплений. Однако, оказывается, что первые два ненулевых члена разложения Тейлора функции ∇_L в точке 1 определяются только индексами зацеплений. В работе приводятся для этих членов разложения формулы в терминах сумм по деревьям с l вершинами.

Ключевые слова: зацепление, потенциальная функция Конвея, разложение Тейлора.

Consider the Conway potential function $\nabla_L(t_1,\dots,t_l)$ of an ordered oriented link $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_l \subset S^3$. In general this function isn't determined only by the linking numbers and the Conway potential functions of the components. But the first two nonzero terms of the Taylor expansion at 1 of the function ∇_L can be calculated using only the linking numbers. We give the explicit formulas for these terms by using the summation over trees with l vertices.

Key words: link, Conway potential function, Taylor expansion.

Пусть $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_l \subset S^3$ — упорядоченное ориентированное зацепление с l компонентами. В [1] Дж. Конвей определил для такого зацепления потенциальную функцию $\nabla_L(t_1,\dots,t_l) \in \mathbb{Z}(t_1,\dots,t_l)$, в которой каждой компоненте зацепления соответствует своя переменная.

*УДК 515.162.8.

†*Буряк Александр Юрьевич* – асп. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail:buryaksh@mail.ru.

Напомним связь функции ∇_L с некоторыми другими хорошо известными инвариантами зацеплений. В статье [2] определяется полином Александера $\Delta_L(t_1,\dots,t_l)\in\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\dots,t_l^{\pm1}]$ упорядоченного ориентированного зацепления L. Полином Δ_L определён лишь с точностью до умножения на моном вида $t_1^{a_1}t_2^{a_2}\dots t_l^{a_l}$. Потенциальная функция Конвея определяется однозначно и является нормировкой полинома Александера, точнее говоря, справедливо следующее равенство (см. [1]):

$$\nabla_L(t_1,\dots,t_l)=\begin{cases}\frac{\Delta_L(t_1^2)}{t_1-t_1^{-1}}, \text{если } l=1;\\ \Delta_L(t_1^2,\dots,t_l^2), \text{если } l\geq 2.\end{cases}$$

При $l=1$ мы видим, что $(t-t^{-1})\nabla_L(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$, а если $l\geq 2$, то $\nabla_L(t_1,\dots,t_l)\in\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\dots,t_l^{\pm1}]$. Дж. Конвей (см. [1]) определил также для неупорядоченного ориентированного зацепления L полином Конвея $\Omega_L(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$, для которого справедливо следующее равенство:

$$\nabla_L(t,\dots,t)=\frac{\Omega_L(t)}{t-t^{-1}}.$$

Стоит заметить, что в работе [1] нет четкого определения функции ∇_L. Точные конструкции потенциальной функции Конвея можно найти, например, в работах [3],[4].

Для произвольной функции $F\in\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\dots,t_l^{\pm1}]$ пусть $\widetilde{F}(t_1,\dots,t_l)=F(1+t_1,\dots,1+t_l)$, а через $\widetilde{F}^{(i)}$ обозначим однородную компоненту степени i разложения функции $\widetilde{F}$ в степенной ряд с центром в 0. Пусть l_{ij} — индекс зацепления компонент L_i и L_j. Пусть $\mathcal{T}_l$ — множество деревьев с l пронумерованными вершинами. Для $T\in\mathcal{T}_l$ обозначим через $v_i(T)$ валентность i-й вершины дерева T, а при $i\neq j$ положим

$$e_{ij}(T)=\begin{cases}l_{ij}, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ соединены ребром;}\\ 1 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Пусть $w(T)=\prod_{i<j}e_{ij}(T)$. Хорошо известно, что если $l=1$, то

$$\Omega_L(1)=1,\quad \Omega'_L(1)=0. \tag{1}$$

Обобщением этого факта служит следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $l\geq 2$, тогда*
а) $\widetilde{\nabla}_L^{(i)}=0$ *при* $i<l-2$ *и* $l\geq 3$*;*
б) $\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}=2^{l-2}\sum_{T\in\mathcal{T}_l}w(T)\prod_{i=1}^{l}t_i^{v_i(T)-1}$*;*
в) $\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(t_1,\dots,t_l)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l}t_i^2\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(t_1,\dots,t_l)$.

Доказательство. Докажем пп. *а* и *б* по индукции. Пусть $l = 2$. Нужно доказать, что $\nabla_L(1,1) = l_{12}$. Имеет место формула Торреса (см. [5, 1, 3, 4])

$$\nabla_L\big|_{t_i=1} = \left(\prod_{j\neq i} t_j^{l_{ji}} - \prod_{j\neq i} t_j^{-l_{ji}}\right) \nabla_{L\setminus L_i}(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_l).$$

При $l = 2$ из нее следует, что

$$\nabla_L(1,t_2) = \left(t_2^{l_{12}} - t_2^{-l_{12}}\right)\nabla_{L\setminus L_1}(t_2) = \left(\sum_{i=0}^{l_{12}-1} t_2^{2i+1-l_{12}}\right)\left(t_2 - t_2^{-1}\right)\nabla_{L\setminus L_1}(t_2) =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{l_{12}-1} t_2^{2i+1-l_{12}}\right)\Omega_{L\setminus L_1}(t_2).$$

Применив (1), получаем $\nabla_L(1,1) = l_{12}$. Пусть теперь $l \geq 3$. Из формулы Торреса следует, что

$$\widetilde{\nabla}_L\Big|_{t_i=0} = \left(2\sum_{j\neq i} l_{ji}t_j + O(t^2)\right)\widetilde{\nabla}_{L\setminus L_i}(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_l). \qquad (2)$$

Из (2) и предположения индукции сразу получаем п. *а*. В каждый моном из $\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}$ не входит какая-либо переменная, поэтому для проведения шага индукции в доказательстве п. *б* достаточно показать, что для любого i

$$\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}\Big|_{t_i=0} = \left(2^{l-2}\sum_{T\in\mathcal{T}_l} w(T)\prod_{i=1}^{l} t_i^{v_i(T)-1}\right)\Bigg|_{t_i=0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}\Big|_{t_i=0} = 2\left(\sum_{j\neq i} l_{ji}t_j\right)\left(2^{l-3}\sum_{T\in\mathcal{T}_{l-1}} w(T)\prod_{j\neq i} t_j^{v_j(T)-1}\right). \qquad (3)$$

В последнем равенстве суммирование идет по всем деревьям, проходящим через все вершины, за исключением i-й. Это равенство выполнено в силу (2) и предположения индукции. Таким образом, п. *б* доказан. Докажем *в*. Воспользуемся симметрией функции Конвея (см. [1, 3, 4]):

$$\nabla_L(t_1^{-1},\ldots,t_l^{-1}) = (-1)^l\nabla_L(t_1,\ldots,t_l) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1)^l\widetilde{\nabla}_L\left(-\frac{t_1}{1+t_1},\ldots,-\frac{t_l}{1+t_l}\right) = \widetilde{\nabla}_L(t_1,\ldots,t_l).$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(t_1,\ldots,t_l)+\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(t_1,\ldots,t_l)=$$
$$=(-1)^l\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(-t_1+t_1^2,\ldots,-t_l+t_l^2)+(-1)^l\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(-t_1,\ldots,-t_l)+O(t^l),$$

значит,

$$2\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(t_1,\ldots,t_l)=\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(t_1(1-t_1),\ldots,t_l(1-t_l))-\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(t_1,\ldots,t_l)+O(t^l).$$

В силу последнего равенства п. *в* очевиден. □

Формулу для $\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(t_1,\ldots,t_l)$ можно также написать в виде суммы по деревьям следующим образом. Пусть $\mathcal{T}_l^1$ — множество деревьев с l пронумерованными вершинами, у которых одна вершина выделена. Для $T\in\mathcal{T}_l^1$ обозначим через $q(T)$ номер выделенной вершины.

Следствие. *Если $l\geq 2$, то*

$$\widetilde{\nabla}_L^{(l-1)}(t_1,\ldots,t_l)=-2^{l-3}\sum_{T\in\mathcal{T}_l^1}(v_{q(T)}-1)w(T)t_{q(T)}\prod_{i=1}^l t_i^{v_i(T)-1}.$$

Замечание. *Введем $(l\times l)$-матрицу $A=(a_{ij})$, где*

$$a_{ij}=\begin{cases}-\sum_{k\neq i}l_{ik}t_it_k, & \text{если } i=j;\\ l_{ij}t_it_j, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Пусть A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}. Тогда (см. [6]) для любых i и j

$$A_{ij}=(-1)^{l-1}\sum_{T\in\mathcal{T}_l}w(T)\prod_{i=1}^l t_i^{v_i(T)}.$$

Значит,

$$\widetilde{\nabla}_L^{(l-2)}(t_1,\ldots,t_l)=2^{l-2}(-1)^{l-1}A_{ij}\prod_{k=1}^l t_k^{-1}.$$

Автор приносит благодарность профессору С. М. Гусейн-Заде за конструктивные идеи и полезные обсуждения, а также рецензенту за важные замечания.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №07–01–00593, НШ–709.2008.1, Vidi NWO, а также Фонда поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

Список литературы

[1] *Conway J.H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, 1970 Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967) 329-358 Pergamon, Oxford.

[2] *Fox R.H.* Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups. // Ann. of Math. 1954. **59**, N 2. 196-210.

[3] *Hartley R.* The Conway potential function for links. // Comment. Math. Helv. 1983. **58**, N 3. 365-378.

[4] *Cimasoni D.* A geometric construction of the Conway potential function. // Comment. Math. Helv. 2004. **79**, N 1. 124-146.

[5] *Torres G.* On the Alexander polynomial. // Ann. of Math. 1953. **57**, N 2. 57-89.

[6] *Kauffman L.H.* Annals of Mathematics Studies, 115. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

Поступила в редакцию
05.10.2009.