ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ ПУЧКОВ И ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ МАК-МАГОНА.

А. БУРЯК

Аннотация. Недавно М. Вулетич нашла двупараметрическое обобщение формулы Мак-Магона. В данной работе мы покажем, что коэффициенты в её формуле являются числами Бетти некоторых подмногообразий в пространстве модулей пучков на проективной плоскости.

Ключевые слова: пространство модулей, плоское разбиение, колчанное многообразие.

1. Введение

Плоским разбиением называется диаграмма Юнга, заполненная положительными целыми числами, невозрастающими вдоль строк и столбцов. Вес $|\pi|$ плоского разбиения π определяется как сумма всех этих чисел. Множество всех плоских разбиений мы обозначим через $\mathcal{P}$.

Хорошо известна следующая формула Мак-Магона (см. напр. [11]):

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} s^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-s^n)^n}.$$

Она имеет различные обобщения, см. напр. [4, 12]. В этой статье мы исследуем обобщение М. Вулетич из работы [12]. Для каждого плоского разбиения π она построила рациональную функцию $F_\pi(q,t)$ и доказала, что

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} F_\pi(q,t)s^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-ts^nq^k}{1-s^nq^k}\right)^n. \tag{1}$$

Её доказательство было мотивировано работами [9] и [13].

Пусть $\mathcal{M}_{r,n}$ – пространство модулей оснащённых пучков без кручения на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с рангом r и вторым классом Черна c_2, равным n. Это гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности $2rn$. В случае $r=1$ оно изоморфно схеме Гильберта нульмерных подсхем на плоскости $\mathbb{C}^2$. Пространство

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-10-01-00678, Нш-8462.2010.1, Vidi NWO, а также «Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

модулей $\mathcal{M}_{r,n}$ имеет простое колчанное описание, которое мы напомним в Разделе 2.1. Имеется естественное действие двумерного тора $T = (\mathbb{C}^*)^2$ на многообразии $\mathcal{M}_{r,n}$. Более полное описание пространства модулей $\mathcal{M}_{r,n}$ можно найти в книге [6].

В этой статье мы покажем, что ряды $F_\pi(q,0)$ имеют следующий геометрический смысл. Их коэффициенты являются числами Бетти неприводимых компонент множества неподвижных точек $\mathcal{M}_{r,n}^T$.

Используя действие тора T на многообразии $\mathcal{M}_{r,n}$, мы получим комбинаторное тождество, по форме близкое к (1).

Тематика данной статьи близка к работе [3], где исследуется действие одномерных подторов в $T = (\mathbb{C}^*)^2$ на схеме Гильберта нульмерных подсхем на плоскости.

1.1. **Определение функции $F_\pi(q,t)$.** Для неотрицательных целых чисел n и m положим

$$f(n,m) = \begin{cases} \prod\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1-q^i t^{m+1}}{1-q^{i+1}t^m}, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Пусть $\pi \in \mathcal{P}$ – плоское разбиение и (i,j) – клетка в соответствующей диаграмме Юнга. Число, записанное в этой клетке, обозначим через $\pi_{i,j}$. Определим разбиения λ, μ и ν формулами

$$\begin{aligned} \lambda &= (\pi_{i,j}, \pi_{i+1,j+1}, \ldots), \\ \mu &= (\pi_{i+1,j}, \pi_{i+2,j+1}, \ldots), \\ \nu &= (\pi_{i,j+1}, \pi_{i+1,j+2}, \ldots). \end{aligned}$$

Функция $F_\pi(i,j)(q,t)$ определяется равенством

$$F_\pi(i,j)(q,t) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{f(\lambda_1 - \mu_{m+1}, m) f(\lambda_1 - \nu_{m+1}, m)}{f(\lambda_1 - \lambda_{m+1}, m) f(\lambda_1 - \lambda_{m+2}, m)}.$$

Пример изображён на Рис. 1.

Рис. 1

Для плоского разбиения π положим

$$F_\pi(q,t) = \prod_{(i,j)\in\pi} F_\pi(i,j)(q,t).$$

1.2. **Пространство модулей пучков на $\mathbb{P}^2$.** В этом разделе мы покажем геометрический смысл функций $F_\pi(q,0)$.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{r,n}$ определяется следующим образом

$$\mathcal{M}_{r,n} = \left\{ (E,\Phi) \left| \begin{array}{c} E\colon \text{пучок без кручения на } \mathbb{P}^2 \\ rank(E)=r, c_2(E)=n \\ \Phi\colon E|_{l_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{l_\infty}^{\oplus r}\colon \text{оснащение} \end{array} \right. \right\} \Big/ \text{изоморфизмы},$$

где $l_\infty = \{[0:z_1:z_2] \in \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^2$ – прямая на бесконечности.

Диагональное действие тора $T = (\mathbb{C}^*)^2$ на $\mathbb{C}^2$, $(t_1,t_2)(x,y) = (t_1x, t_2y)$, индуцирует T-действие на пространстве модулей $\mathcal{M}_{r,n}$. Мы покажем, что неприводимые компоненты множества неподвижных точек $\mathcal{M}_{r,n}^T$ нумеруются плоскими разбиениями π с условием $|\pi| = n$ и $\pi_{0,0} \le r$. Эти компоненты мы будем обозначать через $\mathcal{M}_{r,n}^T(\pi)$. Через $P_q(X)$ мы обозначаем ряд Пуанкаре $\sum_{i\ge 0} \dim H_i(X) q^{\frac{i}{2}}$ пространства X. Мы используем обозначение $[N]!_q = \prod_{i=1}^N (1-q^i)$.

Теорема 1.1. *Для произвольного плоского разбиения π с условием $|\pi| = n$ и $\pi_{0,0} \le r$ имеет место формула*

$$P_q(\mathcal{M}_{r,n}^T(\pi)) = \frac{[r]!_q}{[r-\pi_{0,0}]!_q} \prod_{i,j\ge 0} \frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_q}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_q [\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_q}.$$

Легко проверить, что

$$\prod_{i,j\ge 0} \frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_q}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_q [\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_q} = F_\pi(q,0). \tag{2}$$

Зададим отображение $\psi\colon \mathcal{M}_{r,n} \to \mathcal{M}_{r+1,n}$ равенством $\psi(E) = E \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$, где E – пучок на $\mathbb{P}^2$. Отображение ψ является вложением. Ограничивая его на множество неподвижных точек T-действия, мы получаем вложение $\mathcal{M}_{r,n}^T(\pi)$ в $\mathcal{M}_{r+1,n}^T(\pi)$. Обозначим через $\mathcal{M}_{\infty,n}^T(\pi)$ предельное пространство для цепочки вложений $\mathcal{M}_{1,n}^T(\pi) \hookrightarrow \mathcal{M}_{2,n}^T(\pi) \hookrightarrow \mathcal{M}_{3,n}^T(\pi) \hookrightarrow \dots$. Из Теоремы 1.1 и равенства (2) следует, что ряд $F_\pi(q,0)$ имеет следующий геометрический смысл.

Теорема 1.2. $F_\pi(q,0) = P_q(\mathcal{M}_{\infty,n}^T(\pi))$.

Из результата М. Вулетич немедленно вытекает следствие.

Следствие 1.3.

$$\sum_{n\ge 0} P_q(\mathcal{M}_{\infty,n}^T) t^n = \prod_{\substack{i\ge 0\\ j\ge 1}} \frac{1}{(1-q^it^j)^j}.$$

1.3. **Комбинаторное тождество.** В Разделе 3 мы разрежем многообразие $\mathcal{M}_{r,n}$ на локально замкнутые подмногообразия. Эти подмногообразия являются локально тривиальными расслоениями над многообразиями $\mathcal{M}_{r,n}^T(\pi)$. Далее с помощью Теоремы 1.1 мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1.4.

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}\\ \pi_{0,0}\le r}} t^{|\pi|}\frac{[r]!_q}{[r-\pi_{0,0}]!_q}q^{\chi(\pi)}F_\pi(q,0)=\prod_{\substack{n\ge 1\\ 1\le m\le r}}\frac{1}{1-q^m t^n},$$

где $\chi(\pi)=\sum_{i,j\ge 0}\pi_{i,j}(\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1})$. *В частности*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}} t^{|\pi|}q^{\chi(\pi)}F_\pi(q,0)=\prod_{m,n\ge 1}\frac{1}{1-q^m t^n}.$$

1.4. **Структура статьи.** В Разделе 2 мы напомним колчанное представление пространства модулей $\mathcal{M}_{r,n}$. Мы используем его для описания неприводимых компонент многообразия $\mathcal{M}_{r,n}^T$. Мы напомним основные факты о кольце Гротендика $K_0(\nu_{\mathbb{C}})$, которое используется в доказательстве Теорем 1.1 и 1.4. Наконец, мы доказываем Теорему 1.1. Раздел 3 содержит доказательство Теоремы 1.4.

1.5. **Благодарности.** Автор благодарит С. М. Гусейн-Заде, Б. Л. Фейгина и С. В. Шадрина за полезные обсуждения.

2. Пространство модулей $\mathcal{M}_{r,n}$

2.1. **Колчанное описание пространства модулей $\mathcal{M}_{r,n}$.** Многообразие $\mathcal{M}_{r,n}$ имеет следующее представление (см. напр. [6]).

$$\mathcal{M}_{r,n}\cong\left\{(B_1,B_2,i,j)\ \middle|\ \begin{array}{c}1)[B_1,B_2]+ij=0\\ 2)(\text{Условие стабильности})\ \text{Не существует}\\ \text{подпространства } S\subsetneq\mathbb{C}^n \text{ такого что}\\ B_\alpha(S)\subset S\ (\alpha=1,2)\ \text{и}\ im(i)\subset S\end{array}\right\}\Big/ GL_n(\mathbb{C}),$$

где $B_1,B_2\in End(\mathbb{C}^n), i\in Hom(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^n)$ и $j\in Hom(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^r)$, причём действие элемента $g\in GL_n(\mathbb{C})$ задаётся формулой

$$g\cdot(B_1,B_2,i,j)=(gB_1g^{-1},gB_2g^{-1},gi,jg^{-1}).$$

В этом представлении отображение $\psi\colon\mathcal{M}_{r,n}\to\mathcal{M}_{r+1,n}$ индуцируется координатным вложением $\mathbb{C}^r\hookrightarrow\mathbb{C}^{r+1}$.

2.2. **Неприводимые компоненты многообразия $\mathcal{M}_{r,n}^T$.** В терминах Раздела 2.1 действие тора T на $\mathcal{M}_{r,n}$ задаётся формулой (см. напр. [7])

$$(t_1,t_2)\cdot[(B_1,B_2,i,j)]=[(t_1B_1,t_2B_2,i,t_1t_2j)].$$

По определению, точка $[(B_1,B_2,i,j)]\in\mathcal{M}_{r,n}$ является неподвижной тогда и только тогда когда существует гомоморфизм $\lambda\colon T\to GL_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} t_1B_1&=\lambda(t)^{-1}B_1\lambda(t),\\ t_2B_2&=\lambda(t)^{-1}B_2\lambda(t),\\ i&=\lambda(t)^{-1}i,\\ t_1t_2j&=j\lambda(t).\end{aligned}\tag{3}$$

Предположим, что $[(B_1, B_2, i, j)]$ – неподвижная точка, тогда мы имеем разложение пространства $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k,l} V_{k,l}$, где $V_{k,l} = \{v \in \mathbb{C}^n | \lambda(t) \cdot v = t_1^k t_2^l v\}$. Из условий (3) следует, что

$$\begin{aligned} B_1(V_{k,l}) &\subset V_{k-1,l}, \\ B_2(V_{k,l}) &\subset V_{k,l-1}, \\ im(i) &\subset V_{0,0}, \\ j|_{V_{k,l}} &= 0, \text{если } (k,l) \neq (1,1). \end{aligned}$$

Из условия стабильности следует, что

$$\begin{aligned} V_{k,l} &= 0, \text{если } k > 0 \text{ или } l > 0, \\ j &= 0, \\ \dim V_{0,0} &\leq r, \\ \dim V_{k,l} &\geq \dim V_{k-1,l}, \\ \dim V_{k,l} &\geq \dim V_{k,l-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, числа $(\dim V_{-k,-l})_{k,l \geq 0}$ образуют плоское разбиение.

Пусть $(\pi_{i,j})_{i,j \geq 0}$ – плоское разбиение, такое что $|\pi| = n$ и $\pi_{0,0} \leq r$. Обозначим через $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ подмножество в множестве $\mathcal{M}^T_{r,n}$, выделяемое условиями $\dim V_{-k,-l} = \pi_{k,l}$. Легко видеть, что множество $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ является гладким замкнутым подмногообразием в $\mathcal{M}^T_{r,n}$ и

$$\mathcal{M}^T_{r,n} = \coprod_{\substack{\pi \in \mathcal{P} \\ \pi_{0,0} \leq r}} \mathcal{M}^T_{r,n}(\pi).$$

Ясно, что многообразие $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ имеет следующее колчанное описание. Пусть $V_{-k,-l} = \mathbb{C}^{\pi_{k,l}}$, тогда

$$\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi) \cong \left\{ ((B_{1,k,l})_{k,l \geq 0}, (B_{2,k,l})_{k,l \geq 0}, i) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1) B_{1,k,l+1} B_{2,k,l} = B_{2,k+1,l} B_{1,k,l} \\ 2) B_{\alpha,k,l}, i \text{ – сюръективные отображения} \end{smallmatrix} \right\} \Big/ \prod_{k,l} GL_{\pi_{k,l}},$$

где $B_{1,k,l} \in Hom(V_{-k,-l}, V_{-k-1,-l})$, $B_{2,k,l} \in Hom(V_{-k,-l}, V_{-k,-l-1})$ и $i \in Hom(\mathbb{C}^r, V_{0,0})$ (см.Рис. 2).

Несложно доказать что многообразие $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ является неприводимым, но это также с очевидностью следует из Теоремы 1.1, которую мы докажем в Разделе 2.4.

2.3. **Кольцо Гротендика квазипроективных многообразий.** В этом разделе мы напомним определение и перечислим нужные нам свойства кольца Гротендика $K_0(\nu_{\mathbb{C}})$ комплексных квазипроективных многообразий.

Колько Гротендика $K_0(\nu_{\mathbb{C}})$ является абелевой группой, порождённой классами $[X]$ всех комплексных квазипроективных многообразий X по модулю соотношений:

(1) если многообразия X и Y изоморфны, то $[X] = [Y]$;

$$
\begin{tikzcd}
 & B_2 & & & & & \\
 & V_{0,-2} \arrow[ur, "B_1"] & & & & & \\
 & B_2 \arrow[u] & & B_2 & & & \\
 & V_{0,-1} \arrow[u] \arrow[ur, "B_1"] & & V_{-1,-1} \arrow[ul, "B_1"'] & & & \\
 & B_2 \arrow[u] & & B_2 \arrow[u] & & B_2 & \\
\mathbb{C}^r \arrow[r, "i"] & V_{0,0} \arrow[u] \arrow[ur, "B_1"] & & V_{-1,0} \arrow[u] \arrow[ul, "B_1"'] & & V_{-2,0} \arrow[u] \arrow[ul, "B_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2. Колчанное представление многообразия $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$

(2) если Y является замкнутым по Зариски подмногообразием в X, то $[X] = [Y] + [X \backslash Y]$.

Умножение в $K_0(\nu_{\mathbb{C}})$ определяется с помощью декартова произведения многообразий: $[X_1] \cdot [X_2] = [X_1 \times X_2]$. Класс $[\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}] \in K_0(\nu_{\mathbb{C}})$ аффинной прямой обозначается через $\mathbb{L}$.

Из этого определения легко получить, что если $Y \to X$ – алгебраическое расслоение со слоем F, то $[Y] = [X] \cdot [F]$. Этот факт мы будем часто использовать в дальнейшем.

Нам также потребуются следующие два свойства кольца $K_0(\nu_{\mathbb{C}})$ (см. напр. [5]). Во-первых, существует гомоморфизм $\theta : K_0(\nu_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}]$ такой, что для любого гладкого проективного многообразия X выполняется

$$\theta([X]) = P_q(X). \tag{4}$$

Во-вторых, выполняется равенство

$$\theta(\mathbb{L}) = q. \tag{5}$$

2.4. **Доказательство Теоремы 1.1.** Рассмотрим разбиения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$, удовлетворяющие условиям $\mu_i \geq \nu_i$. Пусть $h = (h_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ – некоторый набор сюръективных отображений $h_i \in Hom(\mathbb{C}^{\nu_i}, \mathbb{C}^{\nu_{i+1}})$. Определим многооразие $N_{\mu,\nu,h}$ равенством

$$N_{\mu,\nu,h} = \left\{ ((f_i)_{1 \leq i \leq k-1}, (g_i)_{1 \leq i \leq k}) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1) g_{i+1} f_i = h_i g_i \\ 2) f_i \text{ и } g_i \text{ сюръективные отображения} \end{smallmatrix} \right\},$$

где $f_i \in Hom(\mathbb{C}^{\mu_i}, \mathbb{C}^{\mu_{i+1}})$ и $g_i \in Hom(\mathbb{C}^{\mu_i}, \mathbb{C}^{\nu_i})$. Ясно, что многообразие $N_{\mu,\nu,h}$ является гладким, и что при различных выборах отображений h_i многообразия $N_{\mu,\nu,h}$ изоморфны.

Лемма 2.1.

$$[N_{\mu,\nu,h}] = \frac{[\mu_1]!_{\mathbb{L}} \left[GL_{\nu_1}\right]}{[\nu_1]!_{\mathbb{L}} [\mu_1 - \nu_1]!_{\mathbb{L}}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{[\mu_i - \nu_{i+1}]!_{\mathbb{L}} \left[GL_{\mu_{i+1}}\right]}{[\mu_i - \mu_{i+1}]!_{\mathbb{L}} [\mu_{i+1} - \nu_{i+1}]!_{\mathbb{L}}}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. Предположим, что $k=1$, тогда многообразие $N_{\mu,\nu,h}$ является многообразием $\mu_1 \times \nu_1$ матриц максимального ранга. Класс этого многообразия равен $\frac{[\mu_1]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\nu_1}\right]}{[\mu_1-\nu_1]!_{\mathbb{L}}[\nu_1]!_{\mathbb{L}}}$.

Пусть $k \geq 2$. Очевидно, что имеет место включение $Ker(f_{k-1}) \subset Ker(h_{k-1}g_{k-1})$. Обозначим через $Gr_M(V)$ грассманиан M-мерных векторных подпространств в векторном пространстве V. Пусть $h' = (h_1, h_2, \ldots, h_{k-2})$, $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1})$ и $\nu' = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1})$ и пусть

$$\widetilde{N}_{\mu',\nu,h} = \left\{(f', g', v) \,\middle|\, (f', g') \in N_{\mu',\nu',h'}, v \in Gr_{\mu_{k-1}-\mu_k}(Ker(h_{k-1}g'_{k-1}))\right\}.$$

Опеределим отображение $\phi\colon N_{\mu,\nu,h} \to \widetilde{N}_{\mu',\nu,h}$ следующим образом

$$((f_i)_{1\leq i\leq k-1}, (g_i)_{1\leq i\leq k}) \mapsto ((f_i)_{1\leq i\leq k-2}, (g_i)_{1\leq i\leq k-1}, Ker(f_{k-1})).$$

Легко понять, что отображение ϕ является локально тривиальным расслоением со слоем GL_{μ_k}. Таким образом

$$[N_{\mu,\nu,h}] = \left[\widetilde{N}_{\mu',\nu,h}\right][GL_{\mu_k}] = [N_{\mu',\nu',h'}]\left[Gr_{\mu_{k-1}-\mu_k}(\mathbb{C}^{\mu_{k-1}-\nu_k})\right][GL_{\mu_k}] =$$
$$= [N_{\mu',\nu',h'}]\,\frac{[\mu_{k-1}-\nu_k]!_{\mathbb{L}}\,[GL_{\mu_k}]}{[\mu_{k-1}-\mu_k]!_{\mathbb{L}}[\mu_k-\nu_k]!_{\mathbb{L}}}.$$

По предположению индукции, последнее выражение равно правой части формулы (6). □

Из (4) и (5) следует, что Теорема 1.1 вытекает из равенства

$$\left[\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)\right] = \frac{[r]!_{\mathbb{L}}}{[r-\pi_{0,0}]!_{\mathbb{L}}}\prod_{i,j\geq 0}\frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_{\mathbb{L}}}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_{\mathbb{L}}}. \tag{7}$$

Пусть

$$N(\pi) = \left\{((B_{1,i,j})_{i,j\geq 0}, (B_{2,i,j})_{i,j\geq 0}) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1) B_{1,i,j+1}B_{2,i,j} = B_{2,i+1,j}B_{1,i,j} \\ 2) B_{\alpha,i,j} \text{ – сюръективные отображения} \end{smallmatrix}\right\},$$

где $B_{1,i,j} \in Hom(V_{-i,-j}, V_{-i-1,-j})$, $B_{2,i,j} \in Hom(V_{-i,-j}, V_{-i,-j-1})$. Обозначим через $Hom'(W,V)$ многообразие сюръективных линейных отображений пространства W в пространство V. По определению, многообразие $\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ является фактором многообразия $N(\pi) \times Hom'(\mathbb{C}^r, V_{0,0})$ по свободному действию группы $\prod_{k,l} GL_{\pi_{k,l}}$. Легко понять, что расслоение $N(\pi) \times Hom'(\mathbb{C}^r, V_{0,0}) \to \mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$ является локально тривиальным в этальной топологии. Из специальности группы GL_n следует, что это расслоение является локально тривиальным в топологии Зарисского (см. [10]). Значит

$$[N(\pi)] = \frac{\left[\mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)\right]\prod_{k,l}\left[GL_{\pi_{k,l}}\right]}{[Hom'(\mathbb{C}^r, V_{0,0})]}.$$

Таким образом, формула (7) вытекает из равенства

$$[N(\pi)] = \frac{[\pi_{0,0}]!_{\mathbb{L}}}{\left[GL_{\pi_{0,0}}\right]} \prod_{i,j\geq 0} \frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\pi_{i,j}}\right]}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_{\mathbb{L}}}. \tag{8}$$

Пусть l – количество строк в диаграмме Юнга, соответствующей плоскому разбиению π. Докажем (8) индукцией по l. В случае $l = 0$ равенство (8) очевидно. Пусть $l \geq 1$. Определим плоское разбиение $\widetilde{\pi}$ равенством $\widetilde{\pi}_{i,j} = \pi_{i,j+1}$. Рассмотрим некоторую точку $((B_{1,i,j}),(B_{2,i,j})) \in N(\pi)$. Забывая отображения $B_{1,i,0}$ и $B_{2,i,0}$, мы получаем точку из многообразия $N(\widetilde{\pi})$. Таким образом, мы построили отображение $\rho\colon N(\pi) \to N(\widetilde{\pi})$. Легко видеть, что отображение ρ является локально тривиальным расслоением. Слоем над точкой $((\widetilde{B}_{1,i,j}),(\widetilde{B}_{2,i,j})) \in N(\widetilde{\pi})$ является многообразие $N_{\mu,\nu,h}$, где $\mu_i = \pi_{i,0}$, $\nu_i = \pi_{i,1}$ и $h_i = \widetilde{B}_{1,i,0}$. Используя предположение индукции и Лемму 2.1, мы получаем

$$\begin{aligned}
[N(\pi)] = &\left(\frac{[\pi_{0,1}]!_{\mathbb{L}}}{\left[GL_{\pi_{0,1}}\right]} \prod_{i\geq 0, j\geq 1} \frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\pi_{i,j}}\right]}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_{\mathbb{L}}}\right) \times \\
&\times \frac{[\pi_{0,0}]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\pi_{0,1}}\right]}{[\pi_{0,1}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{0,0}-\pi_{0,1}]!_{\mathbb{L}}} \prod_{i\geq 0} \frac{[\pi_{i,0}-\pi_{i+1,1}]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\pi_{i+1,0}}\right]}{[\pi_{i,0}-\pi_{i+1,0}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{i+1,0}-\pi_{i+1,1}]!_{\mathbb{L}}} = \\
&= \frac{[\pi_{0,0}]!_{\mathbb{L}}}{\left[GL_{\pi_{0,0}}\right]} \prod_{i,j\geq 0} \frac{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j+1}]!_{\mathbb{L}}\left[GL_{\pi_{i,j}}\right]}{[\pi_{i,j}-\pi_{i+1,j}]!_{\mathbb{L}}[\pi_{i,j}-\pi_{i,j+1}]!_{\mathbb{L}}},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство Теоремы 1.4

Обозначим через $T_{a,b} = \{(t^a, t^b) \in T | t \in \mathbb{C}^*\}$ одномерный подтор в двумерном торе T. Пусть α – положительное целое число. Предположим, что α достаточно велико, тогда $\mathcal{M}_{r,n}^{T_{1,\alpha}} = \mathcal{M}_{r,n}^{T}$. Определим отображение $\rho\colon \mathcal{M}_{r,n} \to \mathcal{M}_{r,n}^{T}$ равенством $\rho(p) = \lim_{t\to 0} t\cdot p$, где $p \in \mathcal{M}_{r,n}$ и $t \in T_{1,\alpha}$. Мы имеем

$$\mathcal{M}_{r,n} = \coprod_{\substack{\pi\in\mathcal{P}\\ \pi_{0,0}\leq r}} \rho^{-1}(\mathcal{M}_{r,n}^{T}(\pi)).$$

Из работ [1, 2] следует, что множество $\rho^{-1}(\mathcal{M}_{r,n}^{T}(\pi))$ является локально замкнутым подмногообразием и отображение $\rho^{-1}\left(\mathcal{M}_{r,n}^{T}(\pi)\right) \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}_{r,n}^{T}(\pi)$ является локально тривиальным расслоением со слоем, являющимся аффинным пространством. Обозначим через $d_{1,\alpha}^{+}(\pi)$ размерность этого пространства. Мы получаем равенство

$$[\mathcal{M}_{r,n}] = \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}\\ \pi_{0,0}\leq r}} \left[\mathcal{M}_{r,n}^{T}(\pi)\right] \mathbb{L}^{d_{1,\alpha}^{+}(\pi)}. \tag{9}$$

Докажем, что

$$d^+_{1,\alpha}(\pi) = rn + \sum_{i,j\geq 0} \pi_{i,j}(\pi_{i,j} - \pi_{i,j+1}). \tag{10}$$

На многообразии $\mathcal{M}_{r,n}$ имеется естественное действие $(r+2)$-мерного тора $T \times (\mathbb{C}^*)^r$. В терминах Раздела 2.1 это действие задаётся формулой (см. напр. [7])

$$(t_1, t_2, e_1, e_2, \ldots, e_r) \cdot [(B_1, B_2, i, j)] = [(t_1 B_1, t_2 B_2, ie^{-1}, t_1 t_2 ej)],$$

где $e = diag(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ – диагональная $r \times r$-матрица.

Множество $\mathcal{M}_{r,n}^{T\times(\mathbb{C}^*)^r}$ конечно и параметризуется наборами $D = (D_1, D_2, \ldots, D_r)$ из r диаграмм Юнга D_i с условием $\sum_{i=1}^r |D_i| = n$ (см.напр.[7]). Легко видеть, что неподвижная точка, соответствующая набору D, принадлежит многообразию $\mathcal{M}_{r,n}^T(\pi)$, где $\pi_{i,j} = |\{\alpha | (i,j) \in D_\alpha\}|$.

Для диаграммы Юнга Y введём следующие обозначения

$$r_l(Y) = |\{(i,j) \in D |\, j = l\}|,$$
$$c_l(Y) = |\{(i,j) \in D |\, i = l\}|.$$

Для точки $s = (i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ положим

$$l_Y(s) = r_j(Y) - i - 1,$$
$$a_Y(s) = c_i(Y) - j - 1,$$

см. Рис. 3. Отметим, что числа $l_Y(s)$ и $a_Y(s)$ являются отрицательными если $s \notin Y$.

Рис. 3. $l_Y(s) =$ число ♠, $a_Y(s) =$ число ♡

Рассмотрим точку $p \in \mathcal{M}_{r,n}^{T\times(\mathbb{C}^*)^r}$. Пусть D – соответствующий набор из диаграмм Юнга. Отождествим кольцо представлений тора $T \times (\mathbb{C}^*)^r$ с кольцом полиномов Лорана $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, e_1^{\pm 1}, e_2^{\pm 1}, \ldots, e_r^{\pm 1}]$. Мы имеем следующее разложение представления тора $T \times (\mathbb{C}^*)^r$ в касательном пространстве $T_p(\mathcal{M}_{r,n})$ (см. напр. [7])

$$T_p(\mathcal{M}_{r,n}) = \sum_{i,j=1}^r e_j e_i^{-1} \left(\sum_{s\in D_i} t_1^{-l_{D_j}(s)} t_2^{a_{D_i}(s)+1} + \sum_{s\in D_j} t_1^{l_{D_i}(s)+1} t_2^{-a_{D_j}(s)} \right). \tag{11}$$

Предположим теперь, что $p \in \mathcal{M}^T_{r,n}(\pi)$, тогда из (11) следует, что

$$d^+_{1,\alpha}(\pi) = \sum_{i,j=1}^{r} (|\{s \in D_i |\, \alpha(a_{D_i}(s)+1) - l_{D_j}(s) > 0\}| + \\ + |\{s \in D_j |\, -\alpha a_{D_j}(s) + l_{D_i}(s) + 1 > 0\}|).$$

Так как α достаточно велико, то правая часть равна

$$rn + \sum_{i,j=1}^{r} |\{s \in D_j |\, a_{D_j}(s) = 0, s \in D_i\}| = rn + \sum_{i,j\geq 0} \pi_{i,j}(\pi_{i,j} - \pi_{i,j+1}).$$

Таким образом, формула (10) доказана.

Хорошо известно, что (см. напр. [8])

$$\sum_{n\geq 0} [\mathcal{M}_{r,n}] t^n = \prod_{m=1}^{r} \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - \mathbb{L}^{rn+m} t^n}. \tag{12}$$

Теорема 1.4 теперь следует из равенств (7), (9), (10) и (12), если вместо $\mathbb{L}$ подставить формальную переменную q.

Список литературы

[1] A. Bialynicki-Birula. Some theorems on actions of algebraic groups. Ann. of Math. (2) 98 (1973), 480-497.

[2] A. Bialynicki-Birula. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 24 (1976), no. 9, 667-674.

[3] A. Buryak. The classes of the quasihomogeneous Hilbert schemes of points on the plane. ArXiv:1011.4459.

[4] M. Ciucu. Plane partitions I: A generalization of MacMahon's formula. Memoirs of Amer. Math. Soc. 178 (2005), no. 839, 107-144.

[5] E. Looijenga. Motivic measures. Seminaire Bourbaki, 1999-2000(874), 2000.

[6] H. Nakajima. Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. AMS, Providence, RI, 1999.

[7] H. Nakajima, K. Yoshioka. Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. Invent. Math. 162 (2005), no. 2, 313-355.

[8] H. Nakajima, K. Yoshioka. Lectures on instanton counting. Algebraic structures and moduli spaces, 31-101, CRM Proc. Lecture Notes, 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[9] A. Okounkov, N. Reshetikhin. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. J. Amer.Math. Soc. 16 (2003), no. 3, 581-603.

[10] J.-P. Serre. Espaces fibres algebriques. Exposes de Seminaires 1950-1999, Doc. Math. 1, Soc. Math. France, 2001, 107-139.

[11] R. Stanley. Enumerative combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[12] M. Vuletic. A generalization of MacMahon's formula. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 5, 2789-2804.

[13] M. Vuletic. The Shifted Schur Process and Asymptotics of Large Random Strict Plane Partitions. Int. Math. Res. Notices (2007), Vol. 2007, 53 pages.

Механико-математический факультет, Московский государственный университет, 119991, Россия и

Факультет математики, унивеситет Амстердама, 94248, 1090 GE Амстердам, Нидерланды

E-mail address: buryaksh@mail.ru, a.y.buryak@uva.nl