НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ИЕРАРХИЯМ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ТИПА

А. Ю. БУРЯК

Аннотация. Обзор посвящён обширному классу систем уравнений в частных производных, которые с одной стороны возникают в классических задачах математической физики, а с другой стороны являются эффективным инструментом для описания перечислительных инвариантов в алгебраической геометрии. Особое внимание уделено новым подходам к этим системам, в частности, подходу, предложенному в недавней работе автора.

УДК 512.772.5+517.957

Содержание

1. Введение 2
1.1. Организация статьи 5
1.2. Благодарности 5
2. Стабильные кривые и пространство модулей 5
2.1. Стабильные кривые 5
2.2. Пространство модулей кривых 7
2.3. Естественные отображения между пространствами модулей 7
2.4. Векторные расслоения над пространством модулей 8
3. Когомологические теории поля 8
3.1. Определение 8
3.2. Потенциал 9
3.3. Основные примеры 10
3.4. Операция сдвига 13
3.5. Конформные и полупростые когомологические теории поля 13
4. Иерархии топологического типа 15
4.1. Гамильтоновы системы и преобразования Миуры 15
4.2. Иерархия КдФ 18
4.3. Конструкция иерархии топологического типа 19
4.4. Примеры 21
5. Циклы двухточечных ветвлений 27
5.1. Циклы двухточечных ветвлений на пространстве $\mathcal{M}_{g,n}$ 27
5.2. Пространство модулей стабильных относительных отображений 27
5.3. Основные свойства 29
6. DR иерархии и гипотеза об эквивалентности 29
6.1. Конструкция DR иерархии 30
6.2. Примеры 31
6.3. Гипотеза об эквивалентности 33
6.4. Оператор рекурсии 34
6.5. Потенциал DR иерархии 34
6.6. Дальнейшие свойства 35
Список литературы 36

1. Введение

Мы будем рассматривать эволюционные уравнения в частных производных с одной пространственной переменной. Классическим примером такого уравнения является *уравнение Кортевега-де Фриза* (КдФ)

$$w_t = ww_x + \frac{\varepsilon^2}{12} w_{xxx},$$

описывающее колебание волн в мелком канале. Здесь w является функцией от двух переменных x и t, а ε является дополнительным параметром. Одним из замечательных свойств этого уравнения является наличие бесконечного числа инфинитезимальных симметрий. А именно, существует бесконечная последовательность уравнений в частных производных, начинающаяся с уравнения КдФ, причём все уравнения из этой последовательности попарно согласованы:

(1.1)

$$\begin{aligned}
w_{t_1} &= ww_x + \frac{\varepsilon^2}{12} w_{xxx},\\
w_{t_2} &= \frac{w^2 w_x}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{ww_{xxx}}{12} + \frac{w_x w_{xx}}{6}\right) + \varepsilon^4 \frac{w_5}{240},\\
w_{t_3} &= \frac{w^3 w_x}{6} + \varepsilon^2 \left(\frac{w^2 w_{xxx}}{24} + \frac{w_x^3}{24} + \frac{ww_x w_{xx}}{6}\right) + \varepsilon^4 \left(\frac{ww_5}{240} + \frac{w_4 w_x}{80} + \frac{w_{xxx} w_{xx}}{48}\right) + \varepsilon^6 \frac{w_7}{6720},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Мы обозначаем здесь через w_n производную $\frac{\partial^n w}{\partial x^n}$, а время t_1 отождествляем с временем t. Попарная согласованность уравнений означает, что любую пару уравнений из этой системы можно совместно решить на некотором малом временном промежутке для любого гладкого начального условия. Эта бесконечная система уравнений называется *иерархией КдФ*. Заметим, что правые части уравнений иерархии являются многочленами от функции w и её производных по x. Иерархия КдФ является хорошим модельным примером из того класса иерархий, которые мы будем рассматривать в этой статье.

С другой стороны, рассмотрим *пространство модулей (стабильных) кривых* $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Это топологическое пространство, параметризующее классы изоморфизма комплексных кривых с простейшими особенностями, рода g и с n занумерованными отмеченными точками. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ является компактным и имеет вещественную размерность $2(3g-3+n)$. Оно представляет большой интерес с точки зрения алгебраической геометрии и топологии. Одной из первых статей, где было предпринято систематическое изучение когомологий пространства модулей, была статья Д. Мамфорда [45]. Когомологии пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ имеют весьма сложную структуру, особенно в старших родах. В плане раскрытия структуры этих когомологий важной была работа Э. Виттена [55]. В ней Э. Виттен исследовал так называемые *числа пересечений* на пространстве модулей. Эти числа определяются как интегралы по пространству модулей кривых от мономов из первых классов Черна некоторых естественных линейных расслоений над пространством модулей, называемых тавтологическими расслоениями. Э. Виттен предложил записать числа пересечений в виде производящего ряда и выдвинул гипотезу, что этот ряд является решением иерархии КдФ (1.1). Доказательство гипотезы Виттена было заявлено в работе М. Концевича [34], некоторые его детали были прояснены впоследствии в работах Э. Лойенги [39] и Д. Звонкина [57]. Основанные на совершенно других идеях доказательства были предложены в работах А. Окунькова и Р. Пандхарипанде [47], М. Казаряна и С. Ландо [32], М. Мирзахани [43]. Э. Виттеном была также высказана более общая гипотеза, так называемая r-спин гипотеза Виттена [56]. С помощью r-спин структур на комплексных кривых можно построить естественный класс когомологий на пространстве модулей кривых, называемый классом Виттена. Более общая гипотеза Виттена описывает числа пересечений с этим классом в терминах иерархии Гельфанда-Дикого, являющейся обобщением иерархии КдФ. Обобщённая гипотеза Виттена была доказана почти 20 лет спустя в работе К. Фабера, С. Шадрина и Д. Звонкина [23].

Гипотезы Виттена инициировали большое количество исследований. Усилия были направлены на дальнейшее прояснение структуры когомологий пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Из большого количества работ мы бы выделили работу К. Фабера [22], где был выдвинут ряд важных гипотез. С другой стороны, внимание учёных привлекли различные обобщения пространства модулей кривых. Одним из примеров является *пространство модулей стабильных отображений*. Это топологическое пространство, параметризующее классы изоморфизма голоморфных отображений комплексных кривых в фиксированное гладкое комплексное многообразие. Интерес к этим пространствам обусловлен связью с классическими перечислительными задачами алгебраической геометрии, а также с теорией струн. Оказалось, что во многих случаях теория пересечений на пространствах модулей стабильных отображений описывается иерархиями уравнений, схожими по типу с иерархией КдФ. К примеру, теория пересечений на пространстве модулей стабильных отображений в проективную прямую описывается расширенной иерархией Тоды [21]. Если же учитывать действие группы $\mathbb{C}^*$ на проективной прямой, то соответствующая эквивариантная теория пересечений описывается двумерной иерархией Тоды [46]. Другой класс интересных примеров получается, если рассматривать пространство модулей, параметризующее классы изоморфизма комплексных кривых с набором линейных расслоений, удовлетворяющих определённым соотношениям. На этом пути получаются обобщения r-спин гипотезы Виттена, где возникают иерархии Дринфельда-Соколова [24].

Как мы говорили выше, представляет интерес изучение теории пересечений на различных обобщениях пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Однако имеется способ переформулировать эти проблемы в рамках обычного пространства модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Ключевую роль здесь играет понятие *когомологической теории поля*, введённое в работе М. Концевича и Ю. Манина [35]. Когомологическая теория поля определяется как набор классов когомологий на пространствах модулей кривых, удовлетворяющий некоторым простым аксиомам. Оказывается, что во всех перечисленных примерах, будь то пространство модулей стабильных отображений или пространство модулей кривых с линейными расслоениями, можно естественным образом построить когомологическую теорию поля, причём такую, что числа пересечений с её элементами совпадают с числами пересечений на пространстве модулей, которое мы рассматриваем.

Данный обзор посвящён подходам к изучению теории пересечений когомологических теорий поля, основанным на системах уравнений в частных производных. Здесь существуют несколько направлений исследований. Во-первых, имеется проблема явного описания систем уравнений в частных производных, контролирующих теорию пересечений когомологических теорий поля в конкретных важных примерах (см. напр. [38, 3]). Во-вторых, можно поставить проблему описания общей структуры систем уравнений в частных производных, описывающих теорию пересечений когомологических теорий поля. В работе [19] Б. А. Дубровин и Ю. Жанг определили класс систем эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной, обладающих бигамильтоновой структурой и рядом других дополнительных свойств. Б. А. Дубровин и Ю. Жанг предложили также конструкцию, которая по произвольной заданной полупростой конформной когомологической теории поля строит систему уравнений в частных производных, контролирующую теорию пересечений когомологической теории поля. Полученная иерархия называется *иерархией топологического типа* или *иерархией Дубровина-Жанга.* Б. А. Дубровин и Ю. Жанг выдвинули гипотезу, что класс иерархий топологического типа совпадает с определённым ими классом бигамильтоновых систем. В работе [20] они доказали, что любая иерархия из последнего класса является иерархией топологического типа, однако обратное утверждение было оставлено в качестве открытой проблемы. Основная трудность здесь заключается в том, что в конструкции иерархии топологического типа присутствуют замены переменных, являющиеся функциями с особенностями, и поэтому полиномиальность уравнений и обеих пуассоновых структур иерархии топологического типа является глубоко нетривиальным утверждением.

В работе [11] (см. также [10]) Х. Постхума, С. Шадрин и автор обобщили конструкцию иерархии топологического типа для произвольной полупростой когомологической теории поля и доказали полиномиальность уравнений иерархии, а также первой пуассоновой структуры. Важно отметить, что при отсутствии условия конформности обобщённая иерархия топологического типа в общем случае не имеет второй пуассоновой структуры. Таким образом, полиномиальность второй пуассоновой структуры в случае конформной полупростой когомологической теории поля является по-прежнему открытой проблемой.

В рамках поиска новых подходов к иерархиям топологического типа в работе [4] автор предложил новую конструкцию гамильтоновой системы уравнений в частных производных, ассоциированной с любой заданной когомологической теорией поля. Основное отличие от конструкции иерархии топологического типа заключается в том, что новая конструкция напрямую даёт иерархию полиномильных уравнений, причём с очень простой пуассоновой структурой. Ключевую роль в конструкции играют особые классы когомологий в пространстве модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, так называемые *циклы двухточечных ветвлений* (double ramification cycles), поэтому новые иерархии были названы *DR иерархиями.* Автор выдвинул гипотезу, что в случае полупростой когомологической теории поля DR иерархия и иерархия топологического типа связаны полиномиальной заменой переменных. Эта гипотеза называется гипотезой об эквивалентности. В серии совместных работ автора с Дж. Герэ, Б. А. Дубровиным и П. Росси [4, 13, 8, 7, 9] гипотеза была доказана в широком классе случаев. В работе [9] гипотеза об эквивалентности была сведена к доказательству некоторого набора соотношений в когомологиях пространства модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, причём количество соотношений в каждом роде конечно. Было обнаружено, что DR иерархия наделена рядом интересных алгебраических структур, включающих рекурсии, квантование, а также наличие тау-структуры [12, 13, 6]. В совместной работе автора с П. Росси и С. Шадриным [14] была найдена явная конструкция бигамильтоновой структуры для DR иерархии в случае, когда когомологическая теория поля является конформной.

Нам представляется, что направление исследований, связанное с DR иерархиями, является перспективным с нескольких точек зрения. Прежде всего, доказательство гипотезы об эквивалентности вместе с результатом из работы [14] о бигамильтоновой структуре для DR иерархии позволяет доказать наличие второй полиномиальной пуассоновой структуры в иерархии топологического типа, что завершает доказательство гипотезы Дубровина-Жанга. Учитывая результат из работы [9], сводящий гипотезу об эквивалентности к соотношениям в когомологиях пространства модулей кривых, а также недавние продвижения в изучении когомологий пространства модулей [48, 31], описанный выше подход к доказательству гипотезы Дубровина-Жанга представляется реалистичным.

DR иерархии представляют собой обширный класс гамильтоновых систем уравнений в частных производных, включающий в себя ряд важных систем математической физики, таких как иерархия КдФ, старшие иерархии Гельфанда-Дикого, расширенная иерархия

Тоды. Исследование DR иерархий имеет интерес с точки зрения изучения новых алгебраических структур, которыми наделены системы математической физики. DR иерархии обладают богатой алгебраической структурой, тесно связанной с геометрией пространства модулей кривых. К примеру, рекурсивные операторы, найденные в работе [13], напрямую вытекают из геометрической формулы для пересечения цикла двухточечных ветвлений с первыми классами Черна тавтологических линейных расслоений над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [15]. Эти рекурсивные операторы никогда ранее в литературе не встречались, и уже в случае иерархии КдФ дают новый способ построения бесконечного набора законов сохранения. В работе [12] получено квантование DR иерархий, и опять же уже в случае иерархии КдФ такого рода квантование получено впервые. Мы убеждены, что возможности геометрии здесь ещё не исчерпаны. К примеру, мы ожидаем, что использование некоторых обобщений циклов двухточечных ветвлений, параметризуемых наборами из чисел $a_1, \ldots, a_n$ с необязательно нулевой суммой, позволит найти новые интересные структуры в DR иерархиях.

В заключение обзора хотелось бы упомянуть, что теория интегрируемых систем уравнений в частных производных может быть также применена для изучения некоторых тонких вопросов о структуре комплексных подмногообразий в пространстве модулей кривых. Оригинальный подход в этом направлении был предложен в работах С. Грушевского и И. М. Кричевера [27, 36, 28].

1.1. **Организация статьи.** В разделе 2 мы напомним основные определения, касающиеся стабильных кривых и их пространств модулей. В разделе 3 мы приведём определение когомологической теории поля, обсудим условие конформности и полупростоты, а также приведём примеры. Раздел 4 содержит описание конструкции иерархии топологического типа. В разделе 5 мы дадим определение циклов двухточечных ветвлений и перечислим их основные свойства. Заключительный раздел 6 посвящён DR иерархиям: мы приведём их конструкцию, сформулируем гипотезу об эквивалентности DR иерархии и иерархии топологического типа, а также обсудим основные свойства.

1.2. **Благодарности.** Автор благодарен Дж. Герэ, Б. А. Дубровину, Д. Звонкину, М. Э. Казаряну, Р. Пандхарипанде, П. Росси, С. Шадрину и Д. Янгу за полезные обсуждения. Автор благодарит В. М. Бухштабера, С. М. Гусейн-Заде, а также рецензента статьи за замечания, позволившие улучшить изложение.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда № 16-11-10260, проект ”Геометрия и математическая физика интегрируемых систем”.

2. Стабильные кривые и пространство модулей

В данном разделе мы сформулируем основные определения, касающиеся стабильных кривых и их пространств модулей. Мы опишем естественные отображения между пространствами модулей, а также основные векторные расслоения над ними. В качестве более подробного введения мы могли бы порекомендовать статьи [58, 54], а также книгу [30].

2.1. **Стабильные кривые.** Под гладкой кривой мы будем понимать гладкую компактную комплексную кривую. Гладкие кривые также называют римановыми поверхностями. Если иное не оговорено, то мы будем предполагать, что все наши кривые являются связными. *Нодальная кривая* – это связная компактная комплексная кривая, имеющая особенности не сложнее точек простого самопересечения. Иными словами, все особенности должны быть локально аналитически изоморфны особенности $\{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Множество особых точек нодальной кривой C мы будем обозначать через $\operatorname{Sing} C$. *Род* кривой определяется следующим образом. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}_C$ аналитических функций на кривой C. Тогда род определяется как размерность первой группы комогологий пучка $\mathcal{O}_C$:

$$g(C) := \dim H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

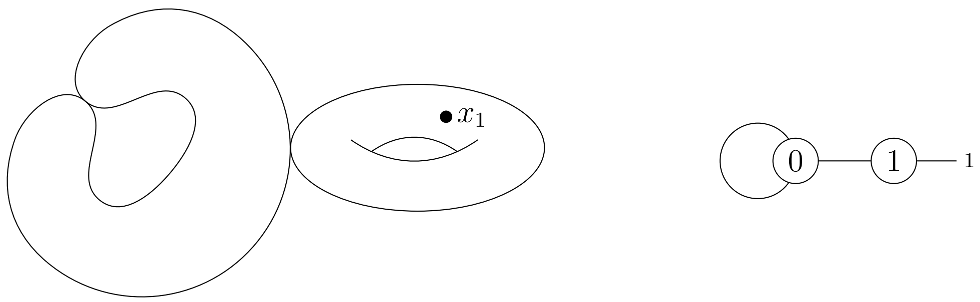

Рис. 1. Помеченная нодальная кривая и её двойственный граф

Если кривая C является гладкой, то определённый таким образом род совпадает с топологическим родом. В общем же случае произвольной нодальной кривой род можно посчитать следующим образом. Пусть δ – число особых точек кривой C. Обозначим через $\widetilde{C}$ нормализацию кривой C. Кривая $\widetilde{C}$ получается, если "развести" ветви кривой C в каждой особой точке. Кривая $\widetilde{C}$ является гладкой, но необязательно связной. Пусть рода её компонент связности равны $g_1, \ldots, g_k$. Тогда

$$g(C) = 1 + \delta + \sum_{i=1}^{k} (g_i - 1).$$

Помеченной нодальной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$ называется нодальная кривая C, на которой отмечено n попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in C \setminus \operatorname{Sing} C$. Важным объектом, ассоциированным с помеченной нодальной кривой, является её *двойственный граф*. Рассмотрим нормализацию $\widetilde{C}$ кривой C и проекцию $\pi\colon \widetilde{C} \to C$. Вершины двойственного графа соответствуют компонентам связности кривой $\widetilde{C}$, причём вершине мы также приписываем род этой компоненты. Рёбра двойственного графа соответствуют особым точкам кривой C. Пусть $p \in C$ – особая точка. Тогда прообраз $\pi^{-1}(p) \subset \widetilde{C}$ состоит из двух точек. Ребро двойственного графа, соответствующее нашей особой точке, соединяет вершины графа, соответствующие тем компонентам связности кривой $\widetilde{C}$, на которых лежат точки из прообраза $\pi^{-1}(p)$. Заметим, что если обе точки из прообраза $\pi^{-1}(p)$ лежат на одной компоненте связности, то соответствующее ребро является петлёй в двойственном графе. Двойственный граф также оснащён полурёбрами, соответствующими отмеченным точкам на кривой C. Полурёбра занумерованы числами от 1 до n. В качестве примера, на рисунке 1 мы изобразили нодальную кривую рода 2 с одной отмеченной точкой и её двойственный граф.

Под автоморфизмом помеченной нодальной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$ мы понимаем автоморфизм кривой C, который сохраняет каждую из отмеченных точек $x_1, \ldots, x_n$. *Стабильная кривая* – это помеченная нодальная кривая $(C; x_1, \ldots, x_n)$, группа автоморфизмов которой конечна. Конечность группы автоморфизмов помеченной нодальной кривой эквивалентна следующим двум условиям:

- $2g(C) - 2 + n > 0$,
- валентность любой вершины рода ноль двойственного графа больше либо равна трём.

Рассмотрим помеченную нодальную кривую $(C; x_1, \ldots, x_n)$ и предположим, что $2g(C) - 2 + n > 0$. Имеется канонический способ сопоставить ей стабильную кривую $(C'; x'_1, \ldots, x'_n)$. Рассмотрим нормализацию $\widetilde{C}$ и проекцию $\pi\colon \widetilde{C} \to C$. Неприводимая компонента кривой C называется нестабильной, если соответствующая ей компонента связности нормализации $\widetilde{C}$ имеет род ноль, и на ней лежит не более двух специальных точек. Под специальной точкой мы понимаем отмеченную точку, либо точку из прообраза $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} C)$. Нодальная кривая C' получается стягиванием всех нестабильных компонент кривой C.

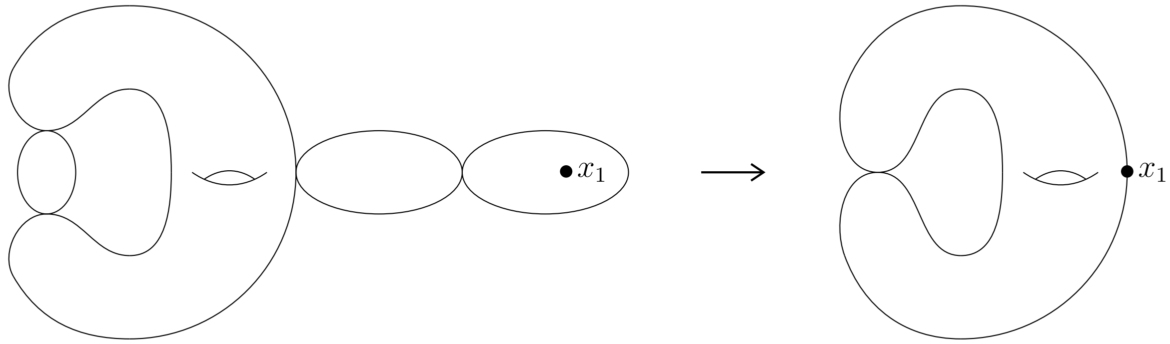

Рис. 2. Операция стабилизации

Рассмотрим проекцию $p\colon C \to C'$. Тогда $x_i' := p(x_i)$. Несложно понять, что помеченная нодальная кривая $(C'; x_1', \ldots, x_n')$ является стабильной. Она называется *стабилизацией* помеченной нодальной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$. Пример стабилизации изображён на рисунке 2.

2.2. **Пространство модулей кривых.** Пусть $g, n \geq 0$. *Пространство модулей* $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ определяется как множество классов изоморфизма стабильных кривых рода g с n отмеченными точками. Как мы знаем из предыдущего раздела, оно непусто, только если $2g-2+n>0$. На пространстве модулей имеется естественная структура связного гладкого компактного комплексного орбиобразия размерности $3g-3+n$. Это означает, что локально оно изоморфно фактору открытого шара в $\mathbb{C}^{3g-3+n}$ по голоморфному действию конечной группы. Легко понять, что пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ является точкой. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ изоморфно проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Классы эквивалентности гладких кривых образуют открытое плотное подорбиобразие $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ в пространстве модулей стабильных кривых. Дополнение $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \backslash \mathcal{M}_{g,n}$ называется границей и обозначается через $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. В пространстве модулей имеется также другое открытое подорбиобразие $\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}$, определяемое как множество классов изоморфизма стабильных кривых, двойственный граф которых является деревом. Таким образом, имеется цепочка вложений

$$\mathcal{M}_{g,n} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}.$$

2.3. **Естественные отображения между пространствами модулей.** Мы рассмотрим два типа естественных отображений между пространствами модулей стабильных кривых: отображения забывания и отображения склейки. Пусть $g \geq 0$, $n \geq 1$, причём $2g-3+n>0$. Рассмотрим стабильную кривую рода g с n отмеченными точками. Если забыть последнюю отмеченную точку и применить стабилизацию, то получится стабильная кривая с $n-1$ отмеченной точкой. Эта операция определяет отображение

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n-1},$$

которое называется *отображением забывания.*

Пусть теперь у нас имеется стабильная кривая рода g_1 с n_1+1 отмеченной точкой и стабильная кривая рода g_2 с n_2+1 отмеченной точкой. Отождествив последнюю отмеченную точку на первой кривой и последнюю отмеченную точку на второй кривой, мы получим стабильную кривую рода g_1+g_2 с n_1+n_2 отмеченной точкой. Эта операция определяет отображение

$$\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2},$$

называемое *отображением склейки.* С другой стороны, мы можем отождествить две отмеченные точки на одной стабильной кривой, при этом род полученной кривой увеличится на один. Таким образом, мы получим отображение

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n},$$

которое также называется отображением склейки.

2.4. **Векторные расслоения над пространством модулей.** Над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ имеется много естественных векторных расслоений. Нас будут интересовать в первую очередь линейные расслоения $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, n$, и расслоение Ходжа Λ. Слоем расслоения $\mathcal{L}_i$ над точкой пространства модулей, представленной стабильной кривой $(C; x_1, \dots, x_n)$, является кокасательное пространство к кривой C в точке x_i. Первые классы Черна этих расслоений обозначаются через

$$\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

и называются *пси-классами*.

Введём теперь понятие голоморфного дифференциала на стабильной кривой $(C; x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ – нормализация кривой C. Тогда *голоморфным дифференциалом* на стабильной кривой $(C; x_1, \dots, x_n)$ называется мероморфный дифференциал ω на кривой $\widetilde{C}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

- дифференциал ω является голоморфным на множестве $\widetilde{C} \backslash \pi^{-1}(\operatorname{Sing} C)$ и имеет полюса не выше первого порядка в точках из множества $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} C)$;
- если $p \in \operatorname{Sing} C$ и $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$, то $\operatorname{res}_{p_1} \omega + \operatorname{res}_{p_2} \omega = 0$.

Нетрудно понять, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на нашей стабильной кривой равна роду $g(C)$. Мы получили семейство векторных пространств размерности g над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Оно обладает естественной структурой векторного расслоения, которое называется *расслоением Ходжа* и обозначается через Λ. Классы Черна расслоения Ходжа обозначаются через

$$\lambda_i := c_i(\Lambda) \in H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

и называются *классами Ходжа*.

3. Когомологические теории поля

В данном разделе мы дадим определение когомологической теории поля, введём понятие потенциала, обсудим основные примеры, а также введём важные классы конформных и полупростых когомологических теорий поля.

3.1. **Определение.** Понятие когомологической теории поля было введено в работе М. Концевича и Ю. Манина [35]. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Зафиксируем невырожденную симметричную билинейную форму (скалярное произведение) $(\cdot, \cdot)$ на пространстве V, а также вектор $1\!\!1 \in V$, который мы будем называть единицей. Обозначим через $H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ чётномерную часть в когомологиях $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. *Когомологической теорией поля* называется набор линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$, заданных для всех значений g и n, для которых выполняется условие стабильности $2g-2+n > 0$, и удовлетворяющих следующим свойствам:

(1) Отображения $c_{g,n}$ являются эквивариантными относительно действия симметрической группы S_n. Здесь мы рассматриваем S_n-действие на тензорной степени $V^{\otimes n}$, получаемое перестановками множителей, а S_n-действие на когомологиях $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ индуцируется S_n-действием на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, задаваемым перестановками отмеченных точек.

(2) Для любых векторов $v, w \in V$ должно выполняться равенство

$$(v, w) = c_{0,3}(1\!\!1 \otimes v \otimes w) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

(3) Пусть $\pi\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – отображение забывания последней отмеченной точки. Тогда для любых векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ должно выполняться равенство

$$\pi^* c_{g,n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = c_{g,n+1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1\!\!1).$$

(4) Выберем базис $e_1, \ldots, e_{\dim V}$ в пространстве V и рассмотрим матрицу $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ скалярного произведения в этом базисе, $\eta_{\alpha\beta} := (e_\alpha, e_\beta)$. Положим $\eta^{-1} = (\eta^{\alpha\beta})$. Рассмотрим отображение склейки $\mathrm{gl}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$. Тогда для любых векторов $v_1, \ldots, v_{n_1+n_2} \in V$ должно выполняться равенство

$$\begin{aligned}(3.2)\quad & \mathrm{gl}^* c_{g_1+g_2,n_1+n_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1+n_2}) = \\ & \qquad = \sum_{1 \le \alpha,\beta \le \dim V} c_{g_1,n_1+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1} \otimes e_\alpha) \times c_{g_2,n_2+1}(v_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{n_1+n_2} \otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Схожее свойство должно выполняться и для отображения склейки $\mathrm{gl}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$:

$$\mathrm{gl}^* c_{g+1,n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{1 \le \alpha,\beta \le \dim V} c_{g,n+2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}. \tag{3.3}$$

Выполнение свойства (4) не зависит от выбора базиса в пространстве V. Векторное пространство V часто называют *фазовым пространством* когомологической теории поля, а его размерность – *рангом* когомологической теории поля.

Замечание 3.1. *В нашем определении когомологической теории поля все классы $c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ имеют чётную степень. На самом деле, можно сформулировать определение когомологической теории поля, не налагая этого ограничения. Однако в этом более общем случае теория интегрируемых систем, ассоциированных с нашей когомологической теорией поля, о которой мы будем говорить ниже, разработана существенно меньше. Поэтому общий случай мы оставляем за рамками данного обзора.*

3.2. **Потенциал.** Зафиксируем когомологическую теорию поля. Рассмотрим произвольные вектора $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ и целые неотрицательные числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Определим соответствующий *коррелятор* в роде g нашей когомологической теории поля следующей формулой:

$$\langle \tau_{d_1}(v_1)\tau_{d_2}(v_2)\cdots\tau_{d_n}(v_n)\rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}.$$

Совокупность корреляторов когомологической теории поля удобно записывать в виде производящего ряда. Обозначим размерность фазового пространства V через N. Выберем базис $e_1, \ldots, e_N$ в пространстве V таким образом, чтобы $e_1 = \mathbb{1}$. Введём формальные переменные t^α_d, где $1 \le \alpha \le N$ и $d \ge 0$, и ε. *Потенциал* F нашей когомологической теории поля является формальным рядом от переменных t^α_d и ε и определяется формулой

$$F(t^*_*, \varepsilon) := \sum_{g \ge 0} \varepsilon^{2g} F_g(t^*_*), \text{ где}$$

$$F_g(t^*_*) := \sum_{\substack{n \ge 0 \\ 2g-2+n>0}} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{1 \le \alpha_1,\ldots,\alpha_n \le N \\ d_1,\ldots,d_n \ge 0}} \langle \tau_{d_1}(e_{\alpha_1})\tau_{d_2}(e_{\alpha_2})\ldots\tau_{d_n}(e_{\alpha_n})\rangle_g \prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}_{d_i}.$$

Предложение 3.2 (см. напр. [52]). *Потенциал F удовлетворяет следущим базовым уравнениям:*

$$\frac{\partial F}{\partial t^1_0} = \sum_{p \ge 0} t^\alpha_{p+1} \frac{\partial F}{\partial t^\alpha_p} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} t^\alpha_0 t^\beta_0 + \varepsilon^2 \langle \tau_0(e_1)\rangle_1, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t^1_1} = \sum_{p \ge 0} t^\alpha_p \frac{\partial F}{\partial t^\alpha_p} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - 2F + \varepsilon^2 \frac{N}{24}. \tag{3.5}$$

В этих уравнениях мы пользуемся традиционным соглашением об автоматическом суммировании по повторяющимся верхним и нижним греческим индексам. Уравнения (3.4) и (3.5) называются, соответственно, *уравнениями струны* и *дилатон*.

3.3. **Основные примеры.**

3.3.1. *Классы Ходжа.* Пусть V – одномерное векторное пространство с базисным вектором, который мы обозначим через e. Определим скалярное произведение в пространстве V равенством $(e,e):=1$, и пусть единица $1\!\!1$ совпадает с вектором e. Обозначим через $\mathrm{Ch}_i(\Lambda)$ i-ую компоненту характера Черна расслоения Ходжа.

Предложение 3.3 (см. напр. [40]). *1. Для любого $i\ge 1$ выполняется $\mathrm{Ch}_{2i}(\Lambda)=0$.*
2. Для любой последовательности чисел $\gamma_i\in\mathbb{C}$, $i\ge 1$, набор линейных отображений $c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$, заданный равенством

$$c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}(e^{\otimes n}):=e^{\sum_{i\ge 1}\gamma_i\mathrm{Ch}_{2i-1}(\Lambda)},$$

образует когомологическую теорию поля.

Из этого предложения нетрудно вывести, что если $c'_{g,n}\colon W^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ – произвольная когомологическая теория поля, то для любой последовательности чисел $\gamma_i\in\mathbb{C}$, $i\ge 1$, отображения $c''_{g,n}\colon W^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$, заданные равенством

$$c''_{g,n}(\otimes_{j=1}^n w_j):=c'_{g,n}(\otimes_{j=1}^n w_j)\cdot e^{\sum_{i\ge 1}\gamma_i\mathrm{Ch}_{2i-1}(\Lambda)},\quad w_j\in W,\quad 1\le j\le n,$$

также образуют когомологическую теорию поля.

3.3.2. *Теория Громова-Виттена.* Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие. Предположим, что когомологии многообразия X не содержат нечётной части,

$$H^*(X,\mathbb{Q})=H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Q}).$$

Пусть $(C;x_1,\ldots,x_n)$ и $(C';x'_1,\ldots,x'_n)$ – помеченные нодальные кривые. Два аналитических отображения $f\colon(C;x_1,\ldots,x_n)\to X$ и $f'\colon(C';x'_1,\ldots,x'_n)\to X$ считаются изоморфными, если существует изоморфизм $h\colon C\to C'$ такой, что $h(x_i)=x'_i$, $1\le i\le n$, и $f'\circ h=f$. Аналитическое отображение $f\colon(C;x_1,\ldots,x_n)\to X$ помеченной нодальной кривой в пространство X называется стабильным, если оно имеет конечную группу автоморфизмов.

Пусть $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ – произвольный класс. Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ множество классов изоморфизма стабильных отображений $f\colon(C;x_1,\ldots,x_n)\to X$, для которых $g(C)=g$ и $f_*([C])=\beta$. Это пространство называется *пространством модулей стабильных отображений.* Оно было введено в работе М. Концевича и Ю. Манина [35]. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ является компактным топологическим пространством. Более того, на нём имеется структура стэка Делиня-Мамфорда (см. [1]). Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ обладает в общем случае компонентами разных размерностей, и поэтому его фундаментальный класс не может быть определён в обычном смысле. Однако имеется возможность построить однородный класс гомологий, являющийся в каком-то смысле заменителем фундаментального класса. Этот класс гомологий называется *виртуальным фундаментальным классом* и обозначается через $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ (см. [2, 37]). *Виртуальная размерность* пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ определяется как

$$\mathrm{vdim}\,\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta):=(3-\dim X)(g-1)+\int_\beta c_1(TX)+n. \tag{3.6}$$

Здесь TX обозначает касательное расслоение к многообразию X, а $\dim X$ обозначает комплексную размерность. Имеется формула

$$[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}\in H_{2\cdot\mathrm{vdim}\,\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta),\mathbb{Q}),$$

если $\mathrm{vdim}\,\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)\ge 0$, и $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}=0$, иначе.

Предположим, что $2g-2+n>0$. Сопоставим стабильному отображению $f\colon(C;x_1,\ldots,x_n)\to X$ стабилизацию помеченной нодальной кривой $(C;x_1,\ldots,x_n)$. Мы получаем отображение

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n},$$

которое мы будем обозначать через st. С другой стороны, если задано стабильное отображение $f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X$, то для каждого $1 \le i \le n$ ему можно сопоставить точку $f(x_i) \in X$. Таким образом мы получаем набор из n отображений

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \to X,$$

которые мы обозначаем через ev_i, $1 \le i \le n$.

В работе [35] было замечено, что классы $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\mathrm{virt}}$ можно использовать для построения когомологической теории поля. Отметим сразу, что на самом деле строится объект, являющийся небольшим обобщением понятия когомологической теории поля. Действительно, пусть K – произвольная $\mathbb{C}$-алгебра. Тогда мы можем определить когомологическую теорию поля с коэффициентами в алгебре K, как набор линейных отображений

$$c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C}) \otimes K,$$

удовлетворяющий тому же набору аксиом из раздела 3.1. Когомологические теории поля с коэффицентами в алгебре мы будем часто называть просто когомологическими теориями поля.

Полугруппа эффективных классов $E \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ определяется как полугруппа, порождённая классами вида $f_*([C])$, где $f\colon C \to X$ – голоморфное отображение гладкой комплексной кривой C в многообразие X. *Кольцо Новикова* $\mathcal{N}$ многообразия X – это векторное пространство, состоящее из возможно бесконечных линейных комбинаций с комплексными коэффициентами формальных символов q^β, $\beta \in E$,

$$\mathcal{N} := \left\{ \sum_{\beta \in E} a_\beta q^\beta | a_\beta \in \mathbb{C} \right\},$$

и со структурой умножения, заданного равенством $q^{\beta_1} \cdot q^{\beta_2} := q^{\beta_1 + \beta_2}$. Умножение определено корректно, потому что любой эффективный класс $\beta \in E$ может быть представлен в виде суммы $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1, \beta_2 \in E$, только конечным числом различных способов (см. напр. [25]). Очевидно, что пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ непусто, только если $\beta \in E$. Для любого $\beta \in E$ определим отображение $c^X_{g,n,\beta}\colon H^*(X, \mathbb{C})^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ равенством

$$c^X_{g,n,\beta}(\otimes_{i=1}^n v_i) := \mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}} \cap \prod_{i=1}^n \mathrm{ev}_i^*(v_i)\right)\right), \quad v_1, \ldots, v_n \in H^*(X, \mathbb{C}).$$

Здесь PD обозначает отображение двойственности Пуанкаре:

$$\mathrm{PD}\colon H_k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C}) \to H^{2(3g-3+n)-k}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C}).$$

Теорема 3.4 ([35])**.** *Набор отображений* $c^X_{g,n}\colon H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{N}$*, определённый равенством*

$$c^X_{g,n} := \sum_{\beta \in E} q^\beta c^X_{g,n,\beta},$$

задаёт когомологическую теорию поля с коэффициентами в кольце Новикова $\mathcal{N}$ *многообразия* X*. Фазовым пространством при этом является пространство когомологий* $H^*(X, \mathbb{C})$*, билинейная форма* $(\cdot,\cdot)$ *на нём задаётся спариванием Пуанкаре, а единицей* $\mathbb{1}$ *является единица в когомологиях* $H^*(X, \mathbb{C})$*.*

3.3.3. *r-спин кривые и класс Виттена.* Зафиксируем целое число $r \ge 2$. *Класс Виттена* представляет собой класс когомологий

$$W^r_{g,n}(a_1, \ldots, a_n) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}), \tag{3.7}$$

параметризуемый целыми числами $0 \le a_1, \ldots, a_n \le r-2$. Ключевым объектом в его определении является пространство модулей r-спин кривых. Зафиксируем целые числа $0 \le a_1, \ldots, a_n \le r-2$. *Гладкой r-спин кривой* называется тройка

$$((C; p_1, \ldots, p_n), L, \phi\colon L^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} \Omega_C(-a_1 p_1 - \ldots - a_n p_n)), \tag{3.8}$$

где $(C;p_1,\ldots,p_n)$ – гладкая помеченная кривая рода g, L – голоморфное линейное расслоение над кривой C, а $\phi\colon L^{\otimes r}\xrightarrow{\sim}\Omega_C(-a_1p_1-\ldots-a_np_n)$ – изоморфизм. Через Ω_C мы обозначаем здесь кокасательное линейное расслоение над кривой C. Ясно, что для существования изоморфизма ϕ необходимо выполнение условия

$$2g-2-\sum a_i\in r\mathbb{Z}.$$

Предположим, что это условие выполняется и что $2g-2+n>0$. Обозначим через $\mathcal{M}_{g,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$ множество классов изоморфизма гладких r-спин кривых. Оно называется *пространством модулей r-спин кривых*, и на нём имеется структура гладкого комплексного орбиобразия размерности $3g-3+n$.

Рассмотрим проекцию $\pi\colon\mathcal{M}_{g,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}\to\mathcal{M}_{g,n}$, сопоставляющую r-спин кривой (3.8) помеченную кривую $(C;p_1,\ldots,p_n)$. Отображение π является накрытием степени r^{2g}. Предположим теперь, что $g=0$. Рассмотрим r-спин кривую (3.8). Мы видим, что

$$\deg L=\frac{-2-\sum a_i}{r}<0,$$

и поэтому $\dim H^0(C,L)=0$. По теореме Римана-Роха, мы получаем

$$\dim H^1(C,L)=-1-\deg L=\frac{-(r-2)+\sum a_i}{r}.$$

Семейство векторных пространств над пространством модулей $\mathcal{M}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$, задаваемых группами $H^1(C,L)^*$, обладает структурой векторного расслоения. Обозначим его через Ω. Пространство $\mathcal{M}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$ имеет компактификацию $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$, сходную по конструкции с компактификацией $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ пространства $\mathcal{M}_{0,n}$. При этом проекция $\pi\colon\mathcal{M}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}\to\mathcal{M}_{0,n}$ продолжается до проекции $\overline{\pi}\colon\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}\to\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, а расслоение Ω над пространством $\mathcal{M}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$ продолжается до расслоения $\overline{\Omega}$ над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n}$. Обозначим через $c_{\mathrm{top}}(\overline{\Omega})\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{\frac{1}{r};a_1,\ldots,a_n},\mathbb{Q})$ старший класс Черна расслоения $\overline{\Omega}$. Тогда класс когомологий $W_{0,n}^r(a_1,\ldots,a_n)$ определяется равенством

$$W_{0,n}^r(a_1,\ldots,a_n):=\overline{\pi}_*(c_{\mathrm{top}}(\overline{\Omega})).$$

Ясно, что степень этого класса равна $2\frac{-(r-2)+\sum a_i}{r}$. В случае, когда $\frac{-2-\sum a_i}{r}\notin\mathbb{Z}$, класс $W_{0,n}^r(a_1,\ldots,a_n)$ полагается равным нулю. Детали определения класса Виттена в роде ноль можно найти в работе [56]. В старших родах имеются разные конструкции, содержащиеся в статьях [50, 17, 44, 24]. Хорошее изложение различных свойств класса Виттена читатель может найти в работе [48]. В общем случае класс Виттена (3.7) является ненулевым, только если $\frac{(g-1)(r-2)+\sum a_i}{r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, и в этом случае он имеет степень

$$\deg W_{g,n}^r(a_1,\ldots,a_n)=2\frac{(g-1)(r-2)+\sum a_i}{r}. \tag{3.9}$$

Заметим, что если $r=2$, то $W_{g,n}^2(0,0,\ldots,0)=1\in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$.

Теорема 3.5 ([50, 17, 44, 24])**.** *Зафиксируем векторное пространство V размерности $r-1$ с базисом $e_1,\ldots,e_{r-1}$. Зададим на нём симметричную билинейную форму $(\cdot,\cdot)$ равенством $(e_i,e_j):=\delta_{i+j,r}$. Тогда семейство линейных отображений $c_{g,n}^{r\text{-}spin}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$, задаваемых равенством*

$$c_{g,n}^{r\text{-}spin}(e_{a_1+1}\otimes\cdots\otimes e_{a_n+1}):=W_{g,n}^r(a_1,\ldots,a_n),\quad 0\le a_1,\ldots,a_n\le r-2,$$

образует когомологическую теорию поля. Единицей этой когомологической теории поля является вектор e_1.

3.4. **Операция сдвига.** Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля, заданную семейством линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$. Для любого вектора $v\in V$ определим набор отображений $c^v_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ равенством

$$c^v_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i):=\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\pi_{m*}\left(c_{g,n+m}(\otimes_{i=1}^n v_i\otimes v^{\otimes m})\right),\quad v_1,\ldots,v_n\in V, \tag{3.10}$$

где через $\pi_m\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n+m}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ мы обозначаем отображение забывания последних m отмеченных точек. Заметим, что в общем случае ряд в правой части равенства (3.10) может быть расходящимся.

Предложение 3.6 (см. напр. [48]). *Рассмотрим такой вектор $v\in V$, что для любых g, n и векторов $v_1,\ldots,v_n\in V$ ряд в правой части (3.10) является абсолютно сходящимся. Тогда набор отображений $c^v_{g,n}$ образует когомологическую теорию поля, при этом билинейная форма и единица в фазовом пространстве V остаются прежними.*

Определённая выше операция на когомологических теориях поля называется операцией сдвига.

3.5. **Конформные и полупростые когомологические теории поля.** Рассмотрим когомологическую теорию поля $c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ с фазовым пространством V размерности N. Рассмотрим оператор $\mathrm{Deg}\colon H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$, действующий на подпространстве $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ умножением на k. Когомологическая теория поля называется *конформной*, если существует базис $e_1,\ldots,e_N$ в пространстве V и константы $a_1=1,a_2,\ldots,a_N,b^1,\ldots,b^N$ и δ такие, что $e_1=1\!\!1$ и для любых $g,n\geq 0$, $2g-2+n>0$, и индексов $1\leq\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq N$ выполняется свойство

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{Deg}+\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i}\right)c_{g,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right)+\pi_*c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes b^\gamma e_\gamma\right)=((g-1)\delta+n)c_{g,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right).$$

Здесь через $\pi\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ мы обозначаем отображение забывания последней отмеченной точки. Число δ называется *конформной размерностью* когомологической теории поля.

Рассмотрим когомологическую теорию поля из раздела 3.3.1. Если последовательность констант $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ не является нулевой, то когомологическая теория поля $c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}$ не является конформной.

Рассмотрим когомологическую теорию поля из раздела 3.3.2. Пусть $\dim H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{C})=N$ и выберем однородный базис $e_1,\ldots,e_N$ в когомологиях $H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{C})$ такой, что $e_1=1$. Пусть $e_i\in H^{2d_i}(X,\mathbb{C})$.

Предложение 3.7. *Когомологическая теория поля $c^X_{g,n}$ является конформной с константами*

$$\begin{aligned}&a_i=1-d_i,\quad 1\leq i\leq N,\\&\delta=\dim X,\end{aligned}$$

и константами b^α, определяемыми равенством

$$c_1(TX)=b^\alpha e_\alpha.$$

Доказательство. Предложение следует из формулы (3.6), уравнения дивизора [35, раздел 2.2.4] и того факта, что комплексная размерность пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ равна $3g-3+n$. □

Наконец, рассмотрим когомологическую теорию поля из раздела 3.3.3.

Предложение 3.8. *Когомологическая теория поля $c_{g,n}^{r\text{-}spin}$ является конформной с константами*

$$a_i = \frac{r-i+1}{r}, \quad b^i = 0, \quad 1 \le i \le r-1,$$
$$\delta = \frac{r-2}{r}.$$

Доказательство. Предложение следует из формулы (3.9) и того факта, что комплексная размерность пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ равна $3g-3+n$. □

Важнейшим классом когомологических теорий поля являются полупростые когомологические теории поля. Зафиксируем опять когомологическую теорию поля $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ с фазовым пространством V размерности N с базисом $e_1, \ldots, e_N$ таким, что $e_1 = \mathbb{1}$. Напомним, что матрица $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ определяется как $\eta_{\alpha\beta} := (e_\alpha, e_\beta)$. Определим константы $c_{\beta\gamma}^\alpha$, $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le N$, равенством

$$c_{\beta\gamma}^\alpha := \eta^{\alpha\theta} \left\langle \tau_0(e_\theta)\tau_0(e_\beta)\tau_0(e_\gamma)\right\rangle_0.$$

Предложение 3.9 ([35])**.** *Константы $c_{\beta\gamma}^\alpha$ определяют на пространстве V структуру коммутативной ассоциативной алгебры с единицей $e_1 = \mathbb{1}$.*

Доказательство. Равенство $c_{\beta\gamma}^\alpha = c_{\gamma\beta}^\alpha$ вытекает из свойства (1) когомологической теории поля. Значит умножение коммутативно. Из равенства (3.1) следует, что

$$c_{\beta,1}^\alpha = \eta^{\alpha\mu} \left\langle \tau_0(e_\mu)\tau_0(e_\beta)\tau_0(e_1)\right\rangle_0 = \eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

и значит вектор e_1 является единицей.

Проверим теперь ассоциативность умножения. Зафиксируем индексы $1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le N$ и положим $\theta := c_{0,4}(e_\alpha \otimes e_\beta \otimes e_\gamma \otimes e_\delta) \in H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,4}, \mathbb{C})$. Рассмотрим отображение склейки

$$\mathrm{gl}_1\colon \overline{\mathcal{M}}_{0,3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,3} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,4},$$

причём пусть точки в первом множителе занумерованы числами $1, 2, 5$, а во втором множителе – числами $3, 4, 6$, и мы склеиваем точки под номером 5 и 6. Так как пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ является точкой, то $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,3}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Из равенства (3.2) следует, что

$$\mathrm{gl}_1^*(\theta) = \left\langle \tau_0(e_\alpha)\tau_0(e_\beta)\tau_0(e_\mu)\right\rangle_0 \eta^{\mu\nu} \left\langle \tau_0(e_\nu)\tau_0(e_\gamma)\tau_0(e_\delta)\right\rangle_0. \tag{3.11}$$

С другой стороны, можно рассмотреть склеивающее отображение

$$\mathrm{gl}_2\colon \overline{\mathcal{M}}_{0,3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,3} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,4},$$

где точки в первом множителе занумерованы числами $1, 3, 5$, а во втором множителе – числами $2, 4, 6$, и мы склеиваем точки под номером 5 и 6. Тогда из равенства (3.2) вытекает, что

$$\mathrm{gl}_2^*(\theta) = \left\langle \tau_0(e_\alpha)\tau_0(e_\gamma)\tau_0(e_\mu)\right\rangle_0 \eta^{\mu\nu} \left\langle \tau_0(e_\nu)\tau_0(e_\beta)\tau_0(e_\delta)\right\rangle_0. \tag{3.12}$$

Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ изоморфно проективной прямой $\mathbb{P}^1$, а значит связно, и поэтому выражения (3.11) и (3.12) равны. Приравнивая правые части этих выражений и поднимая индекс α, мы получаем

$$c_{\beta\mu}^\alpha c_{\gamma\delta}^\mu = c_{\gamma\mu}^\alpha c_{\beta\delta}^\mu,$$

что эквивалентно ассоциативности построенного нами умножения на пространстве V. □

Когомологическая теория поля называется *полупростой*, если алгебра, определяемая структурными константами $c_{\beta\gamma}^\alpha$, не имеет нильпотентов.

Когомологическая теория поля из раздела 3.3.1 является полупростой, так как соответствующая алгебра совпадает с алгеброй комплексных чисел $\mathbb{C}$. Когомологические теории поля, возникающие в теории Громова-Виттена (см. разд. 3.3.2) могут быть как полупростыми, так и нет. Примером многообразия с полупростой когомологической теорией поля является проективная прямая $\mathbb{P}^1$. С другой стороны, когомологическая теория поля, соответствующая поверхности Энрикеса, не является полупростой. Более того, никакой из её сдвигов также не является полупростым (см. [42]). Когомологическая теория поля, задаваемая классом Виттена из раздела 3.3.3, не является полупростой для $r \geq 3$, однако её можно сдвинуть на некоторый вектор, чтобы она стала полупростой (см. [49]).

Важность полупростых когомологических теорий поля во многом обусловлена следующим результатом.

Теорема 3.10 ([53])**.** *Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля* $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$.
1. Предположим, что наша когомологическая теория поля является полупростой. Тогда набор классов в роде ноль $c_{0,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$, $v_i \in V$, *определяет классы* $c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$ *в старших родах* $g \geq 1$ *однозначно с точностью до умножения*

$$c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \mapsto c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \cdot e^{\sum_{i\geq 1}\gamma_i \mathrm{Ch}_{2i-1}(\Lambda)},$$

для некоторой последовательности констант $\gamma_i \in \mathbb{C}$, $i \geq 1$.
2. Предположим, что помимо условия полупростоты выполняется также условие конформности. Тогда классы в роде ноль $c_{0,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$, $v_i \in V$, *однозначно определяют классы* $c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$ *во всех старших родах* $g \geq 1$.

Отметим, что помимо утверждения об однозначности работа [53] содержит также явную формулу для классов когомологической теории поля в старших родах. Очень хорошее изложение этого результата приведено в работе [48].

4. Иерархии топологического типа

В этом разделе мы опишем конструкцию иерархии топологического типа и обсудим ряд примеров.

Раздел 4.1 содержит основные определения из теории гамильтоновых систем уравнений в частных производных. Одним из важнейших для нас представителей этого класса систем является иерархия КдФ, конструкцию которой мы опишем в разделе 4.2. Далее в разделе 4.3 мы приведём конструкцию иерархии топологического типа, соответствующей когомологической теории поля. Раздел 4.4 посвящён примерам.

4.1. **Гамильтоновы системы и преобразования Миуры.** Раздел содержит краткое изложение необходимых нам фактов из теории гамильтоновых систем уравнений в частных производных. Читателю, интересующемуся подробностями, мы могли бы порекомендовать работу [19].

4.1.1. *Гамильтоновы системы уравнений в частных производных.* Пусть $N \geq 1$. Пусть w^α_d, $1 \leq \alpha \leq N$, $d \geq 0$ – формальные переменные, при этом мы также будем использовать обозначения $w^\alpha_0 = w^\alpha, w^\alpha_1 = w^\alpha_x, w^\alpha_2 = w^\alpha_{xx}, \ldots$. *Дифференциальным многочленом* от переменных $w^1, \ldots, w^N$ называется многочлен от переменных w^α_d, $d \geq 1$, с коэффициентами, являющимися формальными рядами из кольца $\mathbb{C}[[w^1, \ldots, w^N]]$. Множество всех дифференциальных многочленов от переменных w^α образует кольцо, которое мы обозначаем через $\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}$. Определим оператор ∂_x в кольце $\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}$ равенством

$$\partial_x := \sum_{i\geq 0} w^\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial w^\alpha_i}.$$

Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \partial_x\right] = 0, \tag{4.1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha_i}, \partial_x\right] = \frac{\partial}{\partial w^\alpha_{i-1}}, \quad i \geq 1. \tag{4.2}$$

Оператор вариационной производной $\frac{\delta}{\delta w^\alpha}\colon \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N} \to \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}$ определяется как

$$\frac{\delta f}{\delta w^\alpha} := \sum_{i\ge 0}(-\partial_x)^i \frac{\partial f}{\partial w^\alpha_i}, \quad f\in \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Обозначим через $\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$ факторпространство пространства $\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}$ по подпространству, порождённому константами и образом оператора ∂_x:

$$\Lambda_{w^1,\ldots,w^N} := \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}/(\mathbb{C}\oplus \mathrm{Im}(\partial_x)).$$

Пространство $\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$ называется *пространством локальных функционалов*. Мы имеем каноническую проекцию

$$\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N} \to \Lambda_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Образ дифференциального многочлена $f\in \mathcal{A}_{w_1,\ldots,w^N}$ под действием этой проекции мы будем обозначать через

$$\overline{f} = \int f dx.$$

Дифференциальный многочлен f называется в этом случае *плотностью* локального функционала $\overline{f}$. Используя коммутационные соотношения (4.1) и (4.2), легко проверить, что для любого дифференциального многочлена f выполняется $\frac{\delta}{\delta w^\alpha}\partial_x f = 0$. Отсюда следует, что вариационная производная $\frac{\delta}{\delta w^\alpha}$ корректно определена на пространстве локальных функционалов $\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$.

В кольце $\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}$ имеется градуировка, определяемая равенством $\deg w^\alpha_d := d$. Эта градуировка переносится на пространство $\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$. Пространства дифференциальных многочленов и локальных функционалов степени k мы будем обозначать через $\mathcal{A}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}$ и $\Lambda^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}$, соответственно.

Введём теперь понятие пуассоновой структуры на пространстве локальных функционалов. Рассмотрим $N\times N$ матрицу $K=(K^{\alpha\beta})$, чьи элементы $K^{\alpha\beta}$ являются дифференциальными операторами:

$$K^{\alpha\beta} = \sum_{i\ge 0} K^{\alpha\beta}_i \partial^i_x, \quad K^{\alpha\beta}_i \in \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Мы предполагаем здесь, что сумма является конечной. Определим билинейную форму $\{\cdot,\cdot\}_K\colon \Lambda_{w^1,\ldots,w^N}\times\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}\to\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$ формулой

$$\{\overline{f},\overline{g}\}_K := \int \frac{\delta \overline{f}}{\delta w^\alpha} K^{\alpha\beta}\frac{\delta \overline{g}}{\delta w^\beta}dx, \quad \overline{f},\overline{g}\in\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Скобка $\{\cdot,\cdot\}_K$ называется скобкой Пуассона, если она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Оператор K в этом случае называется *пуассоновым*. Стандартным примером пуассонова оператора является оператор $\eta\partial_x$, где $\eta=(\eta^{\alpha\beta})$ – произвольная симметричная невырожденная матрица с комплексными коэффициентами.

Нам потребуются в дальнейшем расширенные пространства $\widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N}$ и $\widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N}$, определяемые равенствами $\widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N} := \mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^N}[[\varepsilon]]$ и $\widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N} := \Lambda_{w^1,\ldots,w^N}[[\varepsilon]]$. Элементы расширенных пространств мы будем также называть дифференциальными многочленами и локальными функционалами. Положим $\deg\varepsilon := -1$. Через $\widehat{\mathcal{A}}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}\subset\widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N}$ и $\widehat{\Lambda}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}\subset\widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N}$ мы обозначаем подпространства степени k. Пуассоновы структуры на расширенном пространстве $\widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N}$ определяются так же, как и на пространстве $\Lambda_{w^1,\ldots,w^N}$, с той лишь разницей, что мы требуем, чтобы оператор $K=(K^{\alpha\beta})$ имел вид $K^{\alpha\beta}=\sum_{i\ge 0}K^{\alpha\beta}_i\partial^i_x$, где $K^{\alpha\beta}_i\in\widehat{\mathcal{A}}^{[-i+1]}_{w^1,\ldots,w^N}$. Таким образом, скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_K$ имеет степень 1:

$$\{\cdot,\cdot\}_K\colon \widehat{\Lambda}^{[i]}_{w^1,\ldots,w^N}\times\widehat{\Lambda}^{[j]}_{w^1,\ldots,w^N}\to\widehat{\Lambda}^{[i+j+1]}_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Эволюционной системой уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x и временами $\tau_1, \tau_2, \ldots$ называется система вида

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial \tau_d} = P^\alpha_d(w^*, w^*_x, \ldots, \varepsilon), \quad 1 \le \alpha \le N, \quad d \ge 1, \tag{4.3}$$

где $P^\alpha_d \in \widehat{\mathcal{A}}^{[1]}_{w^1,\ldots,w^N}$. Система (4.3) называется *гамильтоновой*, если существует пуассонов оператор K и последовательность локальных функционалов $\overline{h}_d \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{w^1,\ldots,w^N}$, $d \ge 1$, таких, что

$$\begin{aligned} &\{\overline{h}_i, \overline{h}_j\}_K = 0, \quad i, j \ge 1, \\ &P^\alpha_d = K^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{h}_d}{\delta w^\mu}, \quad 1 \le \alpha \le N, \quad d \ge 1. \end{aligned}$$

Локальные функционалы $\overline{h}_d$ называются в этом случае *гамильтонианами* системы (4.3).

4.1.2. *Преобразования Миуры.* Введём класс замен переменных, которые мы будем использовать при изучении гамильтоновых систем уравнений в частных производных. Помимо переменных $w^1, \ldots, w^N$, рассмотрим новые переменные $u^1, \ldots, u^N$, а также соответствующие пространства дифференциальных многочленов и локальных функционалов. *Преобразованием Миуры* называется замена переменных вида

$$w^\alpha \mapsto u^\alpha(w^*_*, \varepsilon) = \sum_{k \ge 0} \varepsilon^k f^\alpha_k(w^*_*), \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{4.4}$$

$$f^\alpha_k \in \mathcal{A}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}, \quad f^\alpha_0|_{w^*=0} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial f^\alpha_0}{\partial w^\beta}\right)\bigg|_{w^*=0} \ne 0.$$

Эти преобразования образуют группу. С помощью замены (4.4) любой дифференциальный многочлен $f(w^*_*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N}$ можно переписать в виде дифференциального многочлена от переменных u^α, который мы обозначим через $f(u^*_*, \varepsilon)$. Мы видим также, что если $f(w^*_*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}$, то $f(u^*_*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}^{[k]}_{u^1,\ldots,u^N}$. Таким образом, преобразование Миуры (4.4) определяет изоморфизм $\widehat{\mathcal{A}}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N} \simeq \widehat{\mathcal{A}}^{[k]}_{u^1,\ldots,u^N}$. Ясно, что под действием этого изоморфизма образ оператора ∂_x переходит в образ оператора ∂_x. Поэтому преобразование Миуры также позволяет отождествить пространства локальных фунционалов $\widehat{\Lambda}^{[k]}_{w^1,\ldots,w^N}$ и $\widehat{\Lambda}^{[k]}_{u^1,\ldots,u^N}$. Локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N}$, переписанный в переменных u^α, мы будем обозначать через $\overline{h}[u]$.

Обсудим теперь, как меняется гамильтонова система под действием преобразования Миуры. Рассмотрим гамильтонову систему уравнений

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial \tau_d} = K^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{h}_d}{\delta w^\mu}, \quad 1 \le \alpha \le N, \quad d \ge 1, \tag{4.5}$$

где $K = (K^{\alpha\beta})$ – пуассонов оператор, $\overline{h}_d \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{w^1,\ldots,w^N}$ и $\{\overline{h}_i, \overline{h}_j\}_K = 0$. Рассмотрим также преобразование Миуры (4.4). Тогда гамильтонова структура системы (4.5) в координатах u^α задаётся гамильтонианами $\overline{h}_d[u]$ и пуассоновым оператором $K_u = (K^{\alpha\beta}_u)$, определяемым равенством

$$K^{\alpha\beta}_u = \sum_{p,q \ge 0} \frac{\partial u^\alpha(w^*_*, \varepsilon)}{\partial w^\mu_p} \partial^p_x \circ K^{\mu\nu} \circ (-\partial_x)^q \circ \frac{\partial u^\beta(w^*_*, \varepsilon)}{\partial w^\nu_q}. \tag{4.6}$$

Таким образом, в координатах u^α система (4.5) имеет вид

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau_d} = K^{\alpha\mu}_u \frac{\delta \overline{h}_d[u]}{\delta u^\mu}.$$

4.1.3. *Замечание о расширенных пространствах $\widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\dots,w^N}$, $\widehat{\Lambda}_{w^1,\dots,w^N}$ и преобразованиях Миуры.* В задачах математической физики часто возникают системы уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t} = P^\alpha(w^*, w^*_x, \dots), \quad 1 \le \alpha \le N,$$

где $P^\alpha \in \mathcal{A}_{w^1,\dots,w^N}$. Для изучения таких систем оказывается эффективным использовать замены переменных вида $w^\alpha \mapsto u^\alpha = Q^\alpha(w^*, w^*_x, \dots)$, где $Q^\alpha \in \mathcal{A}_{w^1,\dots,w^N}$. Однако, даже если наложить условие невырожденности

$$Q^\alpha|_{w^*_*=0} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial w^\beta}\right)\Bigg|_{w^*_*=0} \ne 0,$$

множество рассматриваемых замен не образует группу. Чтобы решить эту проблему вводятся расширенные пространства $\widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\dots,w^N}$, $\widehat{\Lambda}_{w^1,\dots,w^N}$ и преобразования Миуры.

4.2. **Иерархия КдФ.**

4.2.1. *Псевдодифференциальные операторы.* Пусть $N \ge 1$ и $w^1, \dots, w^N$ – формальные переменные. *Псевдодифференциальным оператором* с коэффициентами в кольце $\mathcal{A}_{w^1,\dots,w^N}[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ называется ряд Лорана вида

$$A = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n \partial_x^n, \quad a_n \in \mathcal{A}_{w^1,\dots,w^N}[\varepsilon, \varepsilon^{-1}],$$

где m – произвольное целое число. Мы рассматриваем здесь ∂_x как формальную переменную. Положим

$$A_+ := \sum_{n=0}^{m} a_n \partial_x^n \quad \text{и} \quad \operatorname{res} A := a_{-1}.$$

Произведение псевдодифференциальных операторов задаётся формулой

$$\partial_x^k \circ f := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!} \partial_x^l f \partial_x^{k-l},$$

где $k \in \mathbb{Z}$ и $f \in \mathcal{A}_{w^1,\dots,w^N}[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Несложно понять, что для любого целого числа $m \ge 2$ и псевдодифференциального оператора A вида

$$A = \partial_x^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \partial_x^{m-n}$$

существует единственный псевдодифференциальный оператор $A^{\frac{1}{m}}$ вида

$$A^{\frac{1}{m}} = \partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n \partial_x^{m-n},$$

удовлетворяющий свойству $\left(A^{\frac{1}{m}}\right)^m = A$.

4.2.2. *Конструкция иерархии.* Пусть w – формальная переменная, и рассмотрим псевдодифференциальные операторы с коэффициентами в кольце $\mathcal{A}_w[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Рассмотрим оператор

$$L = \partial_x^2 + 2\varepsilon^{-2} w.$$

Для любого $n \ge 0$ выражение $\varepsilon^{2n+2}\left[\left(L^{n+\frac{1}{2}}\right)_+, L\right]$ не содержит членов с положительными степенями символа ∂_x, и, более того, оно является дифференциальным многочленом степени 1 от переменной w. *Иерархией КдФ* называется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial w}{\partial t_n} = \frac{\varepsilon^{2n+2}}{2(2n+1)!!}\left[\left(L^{n+\frac{1}{2}}\right)_+, L\right], \quad n \geq 0. \tag{4.7}$$

Иерархия КдФ обладает гамильтоновой структурой. Скобка Пуассона задаётся оператором ∂_x, а гамильтонианы – формулой

$$\overline{h}_d^{\mathrm{KdV}} = \frac{\varepsilon^{2d+4}}{(2d+3)!!}\int \operatorname{res} L^{\frac{2d+3}{2}} dx, \quad d \geq 0.$$

Иерархия КдФ имеет очень богатую теорию. Хорошее её изложение содержится в книге [18].

4.3. **Конструкция иерархии топологического типа.** Как мы уже кратко обсуждали во введении, в работе [19] была предложена конструкция, которая ставит в соответствие каждой конформной полупростой когомологической теории поля бигамильтонову систему уравнений в частных производных, называемую иерархией топологического типа. Утверждение о полиномиальности уравнений иерархии, а также обеих пуассоновых структур были высказаны в качестве гипотезы. В работе [11] было обнаружено, что конструкция уравнений иерархии, а также первой пуассоновой структуры обобщается для произвольной когомологической теории поля, и была доказана их полиномиальность в случае, когда когомологическая теория поля является полупростой. В нашем изложении ниже мы в основном следуем работе [11].

Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля, задаваемую набором линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$. Пусть фазовое пространство V имеет размерность $N \geq 1$, и зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_N$ в пространстве V такой, что вектор e_1 совпадает с единицей $\mathbb{1}$ нашей когомологической теории поля.

4.3.1. *Уравнения иерархии.* Введём формальные переменные t^α_d, $1 \leq \alpha \leq N$, $d \geq 0$, и ε. Мы будем отождествлять переменные t^1_0 и x. Рассмотрим потенциал $F(t^*_*, \varepsilon)$ нашей когомологической теории поля:

$$F(t^*_*, \varepsilon) = \sum_{\substack{g,n\geq 0\\ 2g-2+n>0}} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\substack{1\leq\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq N\\ d_1,\ldots,d_n\geq 0}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}_{d_i}.$$

Определим формальный ряд $(w^{\mathrm{top}})^\alpha(t^*_*, \varepsilon)$ равенством

$$(w^{\mathrm{top}})^\alpha := \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial t^\beta_0 \partial t^1_0}.$$

Положим $(w^{\mathrm{top}})^\alpha_n := \frac{\partial^n}{\partial x^n}(w^{\mathrm{top}})^\alpha$. Из уравнения струны (3.4) следует, что

$$(w^{\mathrm{top}})^\alpha_n = t^\alpha_n + \delta^{\alpha,1}\delta_{n,1} + O(t^2) + O(\varepsilon^2). \tag{4.8}$$

Здесь символ $O(t^2)$ обозначает формальный ряд от переменных t^γ_d, не имеющий константных и линейных членов. Из равенства (4.8) вытекает, что любой формальный ряд от переменных t^β_d и ε можно единственным образом переписать в виде формального ряда от выражений $((w^{\mathrm{top}})^\alpha_n - \delta^{\alpha,1}\delta_{n,1})$ и ε. Для построения иерархии топологического типа необходимо выполнение двух условий полиномиальности, первое из которых мы сформулируем сейчас, а второе – в следующем разделе.

Первое условие полиномиальности. Предположим, что для любых $1 \leq \alpha, \beta \leq N$ *и* $p, q \geq 0$ *существует дифференциальный многочлен* $\Omega_{\alpha,p;\beta,q} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[0]}_{w^1,\ldots,w^N}$ *такой, что*

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q}\big|_{w^\gamma_n = (w^{\mathrm{top}})^\gamma_n} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^\alpha_p \partial t^\beta_q}.$$

Из сказанного выше следует, что если указанный в условии дифференциальный многочлен существует, то он единственный.

Теорема 4.1 ([11]). *Первое условие полиномиальности выполняется для любой полупростой когомологической теории поля.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_q} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_x\Omega_{\gamma,0;\beta,q}, \quad 1 \le \alpha,\beta \le N, \quad q \ge 0. \tag{4.9}$$

Эта система задаёт *уравнения иерархии топологического типа*, соответствующей нашей когомологической теории поля. По определению, мы имеем $\Omega_{1,0;\alpha,0} = \eta_{\alpha\gamma}w^\gamma$, и значит уравнение системы (4.9) при $\beta = 1$ и $q = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^1_0} = w^\alpha_x,$$

что согласуется с тем, что мы отождествляем переменные t^1_0 и x. Набор из функций $(w^{\rm top})^1, \ldots, (w^{\rm top})^N$ образует решение системы (4.9), которое называется *топологическим решением*. Оно является единственным решением системы (4.9), удовлетворяющим начальному условию

$$(w^{\rm top})^\alpha(t^1_0 = x, 0, 0, \ldots, \varepsilon) = \delta^{\alpha,1}x.$$

Из уравнения струны (3.4) можно вывести, что топологическое решение $(w^{\rm top})^\alpha$ полностью определяет потенциал F.

Замечание 4.2. *Одной из основных проблем в теории иерархий топологического типа является то, что замена переменных $t^\alpha_d \mapsto (w^{\rm top})^\alpha_d - \delta^{\alpha,1}\delta_{d,1}$ является даже в самых простейших случаях очень сложной, и поэтому прямое применение приведённой конструкции позволяет вычислять иерархию топологического типа только в очень ограниченном числе случаев.*

4.3.2. *Гамильтонова структура. Гамильтонианы иерархии топологического типа* задаются формулой

$$\overline{h}_{\alpha,p} := \int \Omega_{\alpha,p+1;1,0}dx, \quad 1 \le \alpha \le N, \quad p \ge 0. \tag{4.10}$$

Конструкция пуассоновой структуры является более сложной. Рассмотрим ряд

$$(v^{\rm top})^\alpha(t^*_*) := (w^{\rm top})^\alpha\big|_{\varepsilon=0}.$$

Положим $(v^{\rm top})^\alpha_n := \frac{\partial^n}{\partial x^n}(v^{\rm top})^\alpha$. Из равенства (4.8) следует, что любой формальный ряд от переменных t^α_n и ε можно единственным образом представить в виде формального ряда от выражений $((v^{\rm top})^\beta_d - \delta_{d,1}\delta^{\beta,1})$ и ε. В частности, для любого $g \ge 1$ мы можем выразить ряд F_g в виде функции от рядов $(v^{\rm top})^\alpha_n$.

Предложение 4.3 (см. напр. [11]). *Для любого $g \ge 1$ функция F_g, выраженная как функция от рядов $(v^{\rm top})^\alpha_n$, зависит только от рядов $(v^{\rm top})^\alpha_n$, где $n \le 3g-2$.*

Рассмотрим формальные переменные $v^1, \ldots, v^N$. Обозначим через $\mathcal{A}^{\rm wk}_{v^1,\ldots,v^N}$ кольцо формальных рядов от выражений $(v^\alpha_n - \delta^{\alpha,1}\delta_{n,1})$, $1 \le \alpha \le N$, $n \ge 0$, с комплексными коэффициентами. Имеется очевидное вложение

$$\mathcal{A}_{v^1,\ldots,v^N} \subset \mathcal{A}^{\rm wk}_{v^1,\ldots,v^N}.$$

Положим $\widehat{\mathcal{A}}^{\rm wk}_{v^1,\ldots,v^N} := \mathcal{A}^{\rm wk}_{v^1,\ldots,v^N}[[\varepsilon]]$. Из сказанного выше следует, что существует единственный элемент $w^\alpha(v^*_*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}^{\rm wk}_{v^1,\ldots,v^N}$ такой, что

$$w^\alpha(v^{\rm top}, v^{\rm top}_x, \ldots, \varepsilon) = (w^{\rm top})^\alpha.$$

Рассмотрим разложение функции $w^\alpha(v^*_*,\varepsilon)$ по степеням ε:

$$w^\alpha(v^*_*,\varepsilon)=v^\alpha+\sum_{g\ge 1}\varepsilon^{2g}f^\alpha_g(v^*_*),\qquad f^\alpha_g\in\mathcal{A}^{\mathrm{wk}}_{v^1,\ldots,v^N}. \tag{4.11}$$

Из предложения 4.3 следует, что функция $f^\alpha_g(v^*_*)$ зависит только от переменных v^γ_n, где $n\le 3g$. Мы будем рассматривать формулу (4.11) как замену переменных между переменными v^α и w^α. Определим оператор $K(v^*_*,\varepsilon)=\left(K^{\alpha\beta}(v^*_*,\varepsilon)\right)_{1\le\alpha,\beta\le N}$ равенством

$$K^{\alpha\beta}(v^*_*,\varepsilon):=\sum_{p,q\ge 0}\frac{\partial w^\alpha(v^*_*,\varepsilon)}{\partial v^\mu_p}\partial_x^p\circ\eta^{\mu\nu}\partial_x\circ(-\partial_x)^q\circ\frac{\partial w^\beta(v^*_*,\varepsilon)}{\partial v^\nu_q}. \tag{4.12}$$

В силу того, что функция $f^\alpha_g(v^*_*)$ зависит только от переменных v^γ_n, где $n\le 3g$, бесконечная сумма в правой части формулы (4.12) является конечной при любой фиксированной степени переменной ε. Поэтому выражение в правой части формулы (4.12) имеет смысл. Мы имеем разложение

$$K^{\alpha\beta}(v^*_*,\varepsilon)=\sum_{i\ge 0}K^{\alpha\beta}_i(v^*_*,\varepsilon)\partial_x^i.$$

Обозначим через $K^{\alpha\beta}_i(w^*_*,\varepsilon)$ функцию $K^{\alpha\beta}_i(v^*_*,\varepsilon)$, выраженную в переменных w^γ. Мы имеем $K^{\alpha\beta}_i(w^*_*,\varepsilon)\in\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{wk}}_{w^1,\ldots,w^N}$. Теперь мы можем сформулировать второе условие полиномиальности.

Второе условие полиномиальности. Предположим, что для любых $1\le\alpha,\beta\le N$ *и* $i\ge 0$ *выполняется* $K^{\alpha\beta}_i(w^*_*,\varepsilon)\in\widehat{\mathcal{A}}^{[-i+1]}_{w^1,\ldots,w^N}$.

Теорема 4.4 ([11], см. также [10])**.** *Второе условие полиномиальности выполняется для любой полупростой когомологической теории поля.*

Определим $N\times N$ матрицы $K_i(w^*_*,\varepsilon)$ равенством $K_i(w^*_*,\varepsilon):=(K^{\alpha\beta}_i(w^*_*,\varepsilon))_{1\le\alpha,\beta\le N}$. Оператор $K=\sum_{i\ge 0}K_i(w^*_*,\varepsilon)\partial_x^i$ является пуассоновым. Вместе с локальными функционалами (4.10) он определяет гамильтонову структуру для системы (4.9). Система (4.9) вместе с построенной гамильтоновой структурой называется *иерархией топологического типа*, соответствующей нашей когомологической теории поля.

Замечание 4.5. *Для конформной и полупростой когомологической теории поля в статье* [19] *была предложена конструкция второй пуассоновой структуры, согласованной с пуассоновой структурой, описанной выше. Полиномиальность второй пуассоновой структуры по-прежнему остаётся важной открытой проблемой.*

4.3.3. *Замечание о единственности пуассонова оператора.* Приведём полезное соображение, помогающее вычислять пуассонов оператор иерархии топологического типа в конкретных примерах.

Предложение 4.6 ([11, разд. 6])**.** *Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля и предположим, что выполняется первое условие полиномиальности. Предположим также, что существует пуассонов оператор* K *вида* $K=\sum_{i\ge 1}K_i\partial_x^i$ *такой, что вместе с локальными функционалами* (4.10) *он задаёт гамильтонову структуру для системы* (4.9)*. Тогда второе условие полиномиальности также выполняется, и оператор* K *получается конструкцией, описанной в разделе 4.3.2.*

4.4. **Примеры.**

4.4.1. *Тривиальная когомологическая теория поля и иерархия КдФ.* Зафиксируем векторное пространство V размерности 1 с базисным вектором e и скалярным произведением $(e,e)=1$. Рассмотрим тривиальную когомологическую теорию поля $c^{\mathrm{triv}}_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$, задаваемую равенством

$$c^{\mathrm{triv}}_{g,n}(e^{\otimes n}):=1\in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C}).$$

Поскольку векторное пространство V имеет размерность 1, мы не будем писать верхние индексы в переменных t^α_d и w^α_d. Потенциал нашей когомологической теории поля задаётся равенством

$$F(t_0,t_1,\ldots,\varepsilon)=\sum_{\substack{g\ge 0,\,n\ge 1\\ 2g-2+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{d_1,\ldots,d_n\ge 0}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}\right)t_{d_1}\cdots t_{d_n}.$$

В работе [55] Э. Виттен выдвинул гипотезу, что ряд $w^{\mathrm{top}}=\frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}$ является решением иерархии КдФ (4.7). Уравнение струны (3.4) полностью определяет интегралы $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}$, и можно вывести следующую формулу:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}=\begin{cases}\frac{(n-3)!}{d_1!\cdots d_n!}, & \text{если } \sum d_i=n-3,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{4.13}$$

Это позволяет доказать гипотезу Виттена в роде 0. В роде 1 гипотезу Виттена можно доказать, используя уравнения струны (3.4) и дилатон (3.5). В старших родах гипотеза Виттена является глубоко нетривиальным утверждением. Как мы уже упоминали во введении, доказательство гипотезы Виттена было впервые заявлено в работе [34], некоторые его детали были прояснены впоследствии в работах [39, 57]. Основанные на совершенно других идеях доказательства были предложены в работах [47, 32, 43].

Теорема 4.7 ([19]). *Иерархия топологического типа, соответствующая тривиальной когомологической теории поля, совпадает с иерархией КдФ.*

4.4.2. *Классы Ходжа и иерархия уравнения двухслойной жидкости.* Рассмотрим то же векторное пространство V, что и в предыдущем разделе. Пусть μ – произвольное комплексное число. Определим когомологическую теорию поля $c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ равенством

$$c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}(e^{\otimes n}):=1+\mu\lambda_1+\ldots+\mu^g\lambda_g\in H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C}). \tag{4.14}$$

Пусть $F^{\mathrm{Hodge}}(t_0,t_1,\ldots,\varepsilon)$ – её потенциал.

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=uu_x+\sum_{g\ge 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}u_{2g+1}, \tag{4.15}$$

где через B_n мы обозначаем числа Бернулли, определяемые равенством

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n\ge 0}B_n\frac{z^n}{n!}.$$

Уравнение (4.15) описывает длинные волны на границе раздела двухслойной жидкости конечной глубины. В англоязычной литературе оно чаще всего называется Intermediate Long Wave equation. При $\mu=0$ уравнение (4.15) совпадает с уравнением КдФ. Как и уравнение КдФ, уравнение двухслойной жидкости (4.15) является первым нетривиальным уравнением гамильтоновой системы, состоящей из бесконечной последовательности уравнений и называемой *иерархией уравнения двухслойной жидкости*. Пуассонова структура этой системы задаётся оператором ∂_x, а первые несколько из бесконечной последовательности гамильтонианов $\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}}$, $d \geq 0$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_0^{\mathrm{ILW}} &= \int \frac{u^2}{2}dx,\\
\overline{h}_1^{\mathrm{ILW}} &= \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}uu_{2g}\right)dx,\\
\overline{h}_2^{\mathrm{ILW}} &= \int \left(\frac{u^4}{4!} + \frac{\varepsilon^2}{48}u^2u_{xx} + \sum_{g\geq 2}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}\varepsilon^{2g}\left(\mu^{g-2}\frac{g+1}{2}uu_{2g} + \mu^{g-1}\frac{1}{4}u^2u_{2g}\right)\right)dx.
\end{aligned}$$

Гамильтониан $\overline{h}_1^{\mathrm{ILW}}$ задаёт само уравнение двухслойной жидкости (4.15). Работа [5] содержит описание гамильтонианов $\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}}$ для всех $d \geq 0$.

Теорема 4.8 ([5])**.** *Преобразование Миуры*

$$w \mapsto u(w_*^*, \varepsilon) = w + \sum_{g\geq 1}\frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g} \tag{4.16}$$

переводит иерархию топологического типа, соответствующую когомологической теории поля (4.14)*, в иерархию уравнения двухслойной жидкости.*

Замечание 4.9. *В работе* [33] *М. Казарян доказал, что после некоторой замены переменных ряд F^{Hodge} становится решением иерархии Кадомцева-Петвиашвили. Подход М. Казаряна существенно отличается от подхода из работы* [5]*. Как нам кажется, представляет интерес напрямую вывести один результат из другого.*

4.4.3. *Теория Громова-Виттена проективной прямой и иерархия Тоды.* Рассмотрим теорию Громова-Виттена проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и соответствующую когомологическую теорию поля. Таким образом, фазовое пространство V двумерно и совпадает с пространством когомологий $H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$. Обозначим через e_1 единицу, а через e_2 класс, двойственный точке, в когомологиях $H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$. Полугруппа эффективных классов $E \subset H_2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$ свободно порождена фундаментальным классом $[\mathbb{P}^1]$, поэтому мы можем отождествить $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Кольцо Новикова $\mathcal{N}$ отождествляется, таким образом, с кольцом $\mathbb{C}[[q]]$. Скалярное произведение на пространстве V в базисе e_1, e_2 задаётся матрицей $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$, где $\eta_{1,2} = \eta_{2,1} = 1$ и $\eta_{1,1} = \eta_{2,2} = 0$.

Обозначим через $c_{g,n,d}^{\mathbb{P}^1}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$, $g, n, d \geq 0$, $2g-2+n > 0$, линейные отображения, задающие нашу когомологическую теорию поля. Потенциал тогда задаётся равенством

$$F^{\mathbb{P}^1}(t_*^*, q, \varepsilon) = \sum_{\substack{g,n\geq 0\\ 2g-2+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{d\geq 0}q^d\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\{1,2\}\\ d_1,\ldots,d_n\geq 0}}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n,d}^{\mathbb{P}^1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\prod_{i=1}^n\psi_i^{d_i}\right)\prod_{i=1}^n t_{d_i}^{\alpha_i}.$$

Заметим, что в отличие от предыдущих примеров потенциал теперь зависит от формальной переменной q. Поэтому уравнения, пуассонова структура и гамильтонианы иерархии топологического типа тоже зависят от формальной переменной q.

Иерархия топологического типа в данном случае тесно связана с *расширенной иерархией Тоды*, построенной в работе [16]. Приведём вкратце конструкцию этой иерархии. Пусть v^1, v^2 – формальные переменные и рассмотрим кольцо $\widehat{\mathcal{A}}_{v^1,v^2}$. Для любого формального ряда a вида

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(v_*^*, q, \varepsilon)e^{k\varepsilon\partial_x}, \quad a_k \in \widehat{\mathcal{A}}_{v^1,v^2}[q, q^{-1}],$$

положим

$$a_+ := \sum_{k\geq 0} a_k e^{k\varepsilon\partial_x} \quad \text{и} \quad \operatorname{res} a := a_0.$$

Рассмотрим оператор

$$L = e^{\varepsilon\partial_x} + v^1 + qe^{v^2}e^{-\varepsilon\partial_x}.$$

Тогда уравнения расширенной иерархии Тоды можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t^1_p} &= \varepsilon^{-1}\frac{2}{p!}[(L^p(\log L - H_p))_+, L], \quad p \ge 0,\\ \frac{\partial L}{\partial t^2_p} &= \varepsilon^{-1}\frac{1}{(p+1)!}[(L^{p+1})_+, L], \quad p \ge 0.\end{aligned}$$

Здесь $H_p := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$, если $p \ge 1$, и $H_0 := 0$. Определение логарифма $\log L$ читатель может найти в работе [16]. К примеру, у нас получаются следующие уравнения для производной $\frac{\partial}{\partial t^2_0}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^1}{\partial t^2_0} =& \frac{e^{\varepsilon\partial_x} - 1}{\varepsilon} qe^{v^2},\\ \frac{\partial v^2}{\partial t^2_0} =& \frac{1 - e^{-\varepsilon\partial_x}}{\varepsilon} v^1.\end{aligned}$$

Гамильтонова структура расширенной иерархии Тоды задаётся пуассоновым оператором

$$K^{\mathrm{Td}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}(e^{\varepsilon\partial_x} - 1)\\ \varepsilon^{-1}(1 - e^{-\varepsilon\partial_x}) & 0\end{pmatrix} \tag{4.17}$$

и гамильтонианами

$$\begin{aligned}\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}[v] &= \int \left(\frac{2}{(p+1)!}\operatorname{res}(L^{p+1}(\log L - H_{p+1}))\right) dx,\\ \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}[v] &= \int \left(\frac{1}{(p+2)!}\operatorname{res}(L^{p+2})\right) dx.\end{aligned}$$

Иерархия топологического типа связана с расширенной иерархией Тоды следующим образом. Определим матрицы $S_k = ((S_k)^\alpha_\beta)_{1\le\alpha,\beta\le 2}$, $k \ge 0$, равенствами $(S_0)^\alpha_\beta := \delta^\alpha_\beta$ и

$$(S_{2k-1})^\alpha_\beta := \begin{cases} \frac{1}{k!(k-1)!}q^k, & \text{если } \alpha = 1,\ \beta = 2,\\ -\frac{2H_{k-1}}{((k-1)!)^2}q^{k-1}, & \text{если } \alpha = 2,\ \beta = 1,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$(S_{2k})^\alpha_\beta := \begin{cases} \left(\frac{1}{(k!)^2} - \frac{2H_k}{k!(k-1)!}\right)q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 1,\\ \frac{1}{(k!)^2}q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 2,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

для $k \ge 1$. Определим сопряжённые матрицы $S^*_k = ((S^*_k)^\alpha_\beta)$ равенством $(S^*_k)^\alpha_\beta := \eta^{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}(S_k)^\nu_\mu$. Рассмотрим преобразование Миуры

$$w^1(v^*_*, \varepsilon) = \frac{\varepsilon\partial_x}{e^{\varepsilon\partial_x} - 1}v^1, \qquad w^2(v^*_*, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2\partial_x^2}{e^{\varepsilon\partial_x} + e^{-\varepsilon\partial_x} - 2}v^2. \tag{4.18}$$

Обозначим через $h^{\mathbb{P}^1}_{\alpha,p} \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{w^1,w^2}$ и $K^{\mathbb{P}^1}$ гамильтонианы и пуассонов оператор иерархии топологического типа, соответствующей нашей когомологической теории поля. Положим по определению $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,-1}[w] := \int \eta_{\alpha\mu}w^\mu dx$.

Теорема 4.10 ([21]). *Имеют место формулы*

$$\overline{h}^{\mathbb{P}^1}_{\alpha,p} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (S^*_i)^\mu_\alpha \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}[w],$$

$$K^{\mathbb{P}^1} = K^{\mathrm{Td}}_w = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon^2\partial_x^3}{e^{\varepsilon\partial_x}+e^{-\varepsilon\partial_x}-2} \\ \frac{\varepsilon^2\partial_x^3}{e^{\varepsilon\partial_x}+e^{-\varepsilon\partial_x}-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 4.11. *На проективной прямой $\mathbb{P}^1$ можно рассмотреть действие группы $\mathbb{C}^*$, $t\cdot(x:y) := (tx:y)$, $t\in\mathbb{C}^*$, $(x:y)\in\mathbb{P}^1$, и таким образом пространство стабильных отображений $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1,d)$ также наделяется $\mathbb{C}^*$-действием. В работе* [46] *А. Окуньков и Р. Пандхарипанде доказали, что соответствующая эквивариантная теория пересечений на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1,d)$ контролируется двумерной иерархией Тоды. Известно, что обычная, то есть неэквивариантная, теория пересечений получается из эквивариантной, если положить значение эквивариантного параметра равным нулю. Нам представляется интересной задача напрямую вывести теорему 4.10 из результата Окунькова-Пандхарипанде.*

4.4.4. *Класс Виттена и иерархия Гельфанда-Дикого.* Пусть $r\ge 2$. Рассмотрим когомологическую теорию поля $c^{r\text{-spin}}_{g,n}$, задаваемую r-спин классом Виттена из раздела 3.3.3. Соответствующая иерархия топологического типа тесно связана с иерархией Гельфанда-Дикого, которая определяется следующим образом.

Пусть $f_0,f_1,\ldots,f_{r-2}$ – формальные переменные, и рассмотрим пространство псевдодифференциальных операторов с коэффициентами в кольце $\mathcal{A}_{f_0,f_1,\ldots,f_{r-2}}$. Производные $\partial_x^n f_i$ мы будем обозначать через $f_{i,n}$. Рассмотрим оператор

$$L = \partial_x^r + f_{r-2}\partial_x^{r-2} + \ldots + f_1\partial_x + f_0.$$

Иерархией Гельфанда-Дикого называется следующая система дифференциальных уравнений в частных производных с зависимыми переменными $f_0,\ldots,f_{r-2}$ и временами T_m, $m\ge 1$:

$$\frac{\partial L}{\partial T_m} = [(L^{m/r})_+, L],\quad m\ge 1. \tag{4.19}$$

Мы видим, что зависимость от времени T_{rk} тривиальная, $\frac{\partial L}{\partial T_{rk}}=0$, и поэтому времена T_{rk} можно не рассматривать. Поскольку $(L^{1/r})_+=\partial_x$, мы получаем $\frac{\partial f_i}{\partial T_1}=(f_i)_x$, следовательно мы можем отождествить $T_1=x$.

Опишем теперь конструкцию гамильтоновой структуры для иерархии Гельфанда-Дикого. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$X = \partial_x^{-(r-1)}\circ X_{r-2} + \ldots + \partial_x^{-1}\circ X_0,\quad X_0,X_1,\ldots,X_{r-2}\in\mathcal{A}_{f_0,\ldots,f_{r-2}}.$$

Несложное вычисление показывает, что оператор $[X,L]_+$ имеет вид

$$[X,L]_+ = \sum_{0\le\alpha,\beta\le r-2} ((K^{\mathrm{GD}})^{\alpha\beta}X_\beta)\partial_x^\alpha,$$

где

$$(K^{\mathrm{GD}})^{\alpha\beta} = \sum_{i\ge 0}(K^{\mathrm{GD}})^{\alpha\beta}_i\partial_x^i,\quad (K^{\mathrm{GD}})^{\alpha\beta}_i\in\mathcal{A}_{f_0,\ldots,f_{r-2}}.$$

Последняя сумма является конечной. Оператор $K^{\mathrm{GD}} = ((K^{\mathrm{GD}})^{\alpha\beta})_{0\le\alpha,\beta\le r-2}$ является пуассоновым. Определим локальные функционалы $\overline{h}^{\mathrm{GD}}_m\in\Lambda_{f_0,\ldots,f_{r-2}}$, $m\ge 1$, формулой

$$\overline{h}^{\mathrm{GD}}_m := -\frac{r}{m+r}\int \operatorname{res} L^{(m+r)/r}dx,\quad m\ge 1.$$

Имеет место равенство

$$\left\{\overline{h}^{\mathrm{GD}}_m,\overline{h}^{\mathrm{GD}}_n\right\}_{K^{\mathrm{GD}}} = 0,\quad m,n\ge 1.$$

Гамильтонова структура иерархии Гельфанда-Дикого (4.19) задаётся локальными функционалами $\overline{h}^{\mathrm{GD}}_m$ и пуассоновым оператором K^{GD}. Более подробно теорию иерархии Гельфанда-Дикого читатель может изучить по книге [18].

Иерархия топологического типа, соответствующая когомологической теории поля $c^{r\text{-spin}}_{g,n}$, получается из иерархии Гельфанда-Дикого следующей заменой переменных. Пусть $w^1,\ldots,w^{r-1}$ – формальные переменные, и рассмотрим замену

$$f_\alpha \mapsto w^\alpha(f_{*,*}) = \frac{1}{(r-\alpha)(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}}\operatorname{res} L^{(r-\alpha)/r}, \quad 1\le\alpha\le r-1.$$

Несложно понять, что эта замена является треугольной, а точнее говоря, она имеет вид

$$w^\alpha(f_{*,*}) = \frac{1}{r(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}} f_{\alpha-1} + P_\alpha, \quad P_\alpha\in\mathcal{A}_{f_\alpha,\ldots,f_{r-2}},$$

и, значит, она обратима. Определим пуассонов оператор $K^{r\text{-spin}} = ((K^{r\text{-spin}})^{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le r-1}$ и локальные функционалы $\overline{h}^{r\text{-spin}}_{\alpha,d}\in\Lambda_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$, $1\le\alpha\le r-1$, $d\ge 0$, равенствами

$$\begin{aligned}
K^{r\text{-spin}} &:= (-r)^{\frac{r}{2}} K^{\mathrm{GD}}_w,\\
\overline{h}^{r\text{-spin}}_{\alpha,d} &:= \frac{1}{(-r)^{\frac{r+k-1}{2}-d}k!_r}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[w],
\end{aligned}$$

где $k:=\alpha+rd$ и $k!_r := \prod_{i=0}^d(\alpha+ri)$. Напомним, что через K^{GD}_w мы обозначаем оператор K^{GD}, переписанный в переменных w^α и вычисляемый по формуле (4.6).

Замечание 4.12. *Любому локальному функционалу $\overline{h}=\sum_{i\ge0}\overline{h}_i\in\Lambda_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$, $\deg\overline{h}_i = i$, можно сопоставить локальный функционал $\overline{h}'\in\widehat{\Lambda}^{[0]}_{w_1,\ldots,w^{r-1}}$ равенством $\overline{h}' := \sum_{i\ge0}\varepsilon^i\overline{h}_i$. Ту же процедуру можно проделать и с пуассоновым оператором вида $K=(K^{\mu\nu})$, где*

$$K^{\mu\nu} = \sum_{i,j\ge0} K^{\mu\nu}_{i,j}\partial_x^i, \quad K^{\mu\nu}_{i,j}\in\mathcal{A}_{w^1,\ldots,w^{r-1}}, \quad \deg K^{\mu\nu}_{i,j} = j \quad \text{и} \quad K^{\mu\nu}_{0,0}=0.$$

Сопоставим такому оператору K оператор $K'=((K')^{\mu\nu})$, где $(K')^{\mu\nu} := \sum_{i,j\ge0}K^{\mu\nu}_{i,j}\varepsilon^{i+j-1}\partial_x^i$. Таким образом, пространство $\Lambda_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$ можно рассматривать как подпространство в пространстве $\widehat{\Lambda}^{[0]}_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$, а оператор, задающий скобку Пуассона на пространстве $\Lambda_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$ можно рассматривать как оператор, задающий скобку Пуассона на пространстве $\widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^{r-1}}$.

Теорема 4.13 ([56, 23])**.** *Иерархия топологического типа, соответствующая когомологической теории поля $c^{r\text{-spin}}_{g,n}$, задаётся локальными функционалами $\overline{h}^{r\text{-spin}}_{\alpha,d}$ и пуассоновым оператором $K^{r\text{-spin}}$.*

В качестве примера, рассмотрим случай $r=3$. Пуассонов оператор $K^{3\text{-spin}}$ и гамильтониан $\overline{h}^{3\text{-spin}}_{2,0}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
K^{3\text{-spin}} &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_x\\ \partial_x & 0\end{pmatrix},\\
\overline{h}^{3\text{-spin}}_{2,0} &= \int\left(\frac{(w^1)^2}{2}+\frac{(w^2)^3}{18}+\varepsilon^2\frac{w^2w^2_{xx}}{72}\right)dx,
\end{aligned}$$

и мы получаем следующие уравнения для производной $\frac{\partial}{\partial t^2_0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^1}{\partial t^2_0} &= \frac{w^2w^2_x}{3}+\varepsilon^2\frac{w^2_{xxx}}{36},\\
\frac{\partial w^2}{\partial t^2_0} &= w^1_x.
\end{aligned}$$

5. Циклы двухточечных ветвлений

В этом разделе мы приведём определение циклов двухточечных ветвлений и опишем их основные свойства.

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – набор из $n \geq 0$ целых чисел с нулевой суммой. *Цикл двухточечных ветвлений* $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)$ является классом когомологий степени $2g$ в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Общее его определение довольно сложно, однако ограничение $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)|_{\mathcal{M}_{g,n}} \in H^{2g}(\mathcal{M}_{g,n},\mathbb{Q})$ имеет простую геометрическую интерпретацию. В разделе 5.1 мы приведём эту интерпретацию, а в разделе 5.2 уже дадим общее определение. В разделе 5.3 мы обсудим основные свойства циклов двухточечных ветвлений.

5.1. **Циклы двухточечных ветвлений на пространстве $\mathcal{M}_{g,n}$.** Пусть $n \geq 0$ и $a_1,\ldots,a_n$ – целые числа с нулевой суммой. Предположим, что не все эти числа равны нулю. Обозначим через $Z_g(a_1,\ldots,a_n)$ подмножество в пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, состоящее из классов изоморфизма помеченных гладких комплексных кривых $(C;p_1,\ldots,p_n)$ таких, что дивизор $a_1p_1+\ldots+a_np_n$ является главным. Это означает, что на кривой C существует ненулевая мероморфная функция f такая, что её дивизор (f) совпадает с дивизором $a_1p_1+\ldots+a_np_n$. Подмножество $Z_g(a_1,\ldots,a_n)\subset\mathcal{M}_{g,n}$ образует комплексное подорбиобразие, возможно особое, комплексной коразмерности g. Ограничение

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)|_{\mathcal{M}_{g,n}} \in H^{2g}(\mathcal{M}_{g,n},\mathbb{Q})$$

можно определить как класс когомологий, двойственный по Пуанкаре подорбиобразию $Z_g(a_1,\ldots,a_n)\subset\mathcal{M}_{g,n}$.

5.2. **Пространство модулей стабильных относительных отображений.** Предположим, что $g,n_0,n_1,n_2,d\geq 0$ и пусть $\mu^1=(\mu^1_1,\ldots,\mu^1_{n_1})$, $\mu^2=(\mu^2_1,\ldots,\mu^2_{n_2})$ – два набора из целых положительных чисел таких, что $\sum_{i=1}^{n_j}\mu^j_i=d$, $j=1,2$. Стабильное относительное отображение в непараметризованную проективную прямую $\mathbb{P}^1$

$$[(C;p_1,\ldots,p_{n_0},q^1_1,\ldots,q^1_{n_1},q^2_1,\ldots,q^2_{n_2})\xrightarrow{f}(T;q_1,q_2)]$$

состоит из следующих данных:

(1) $(C;p_1,\ldots,p_{n_0},q^1_1,\ldots,q^1_{n_1},q^2_1,\ldots,q^2_{n_2})$ – помеченная нодальная кривая рода g;
(2) $(T;q_1,q_2)$ – помеченная нодальная кривая рода 0, представляющая из себя цепочку проективных прямых, причём точки q_1 и q_2 лежат на концевых компонентах этой цепочки;
(3) $f\colon C\to T$ – аналитическое отображение, для которого выполняются следующие два условия:
   а) $f^{-1}(q_j)=\{q^j_1,\ldots,q^j_{n_j}\}$, $j=1,2$, причём порядок ветвления отображения f в точке q^j_i равен μ^j_i;
   б) Прообразом каждой точки простого самопересечения на кривой T является объединение точек простого самопересечения на кривой C. Более того, пусть $q\in T$ – простая точка самопересечения и $p\in f^{-1}(q)$. Тогда требуется, чтобы можно было представить кривые C и T в окрестности точек p и q в виде $\{uv=0\}$ и $\{xy=0\}$, соответственно, таким образом, чтобы отображение f имело вид $(u,v)\mapsto(u^m,v^m)=(x,y)$ для некоторого целого числа $m\geq 1$;
(4) Требуется, чтобы описанная выше структура имела конечную группу автоморфизмов. Под автоморфизмом мы понимаем пару автоморфизмов $\alpha\colon C\to C$ и $\beta\colon T\to T$, которые сохраняют отмеченные точки и коммутируют с отображением f.

Пример стабильного относительного отображения изображён на рисунке 3. Неприводимая компонента кривой, содержащая на рисунке точку p_2, отображается под действием отображения f в точку.

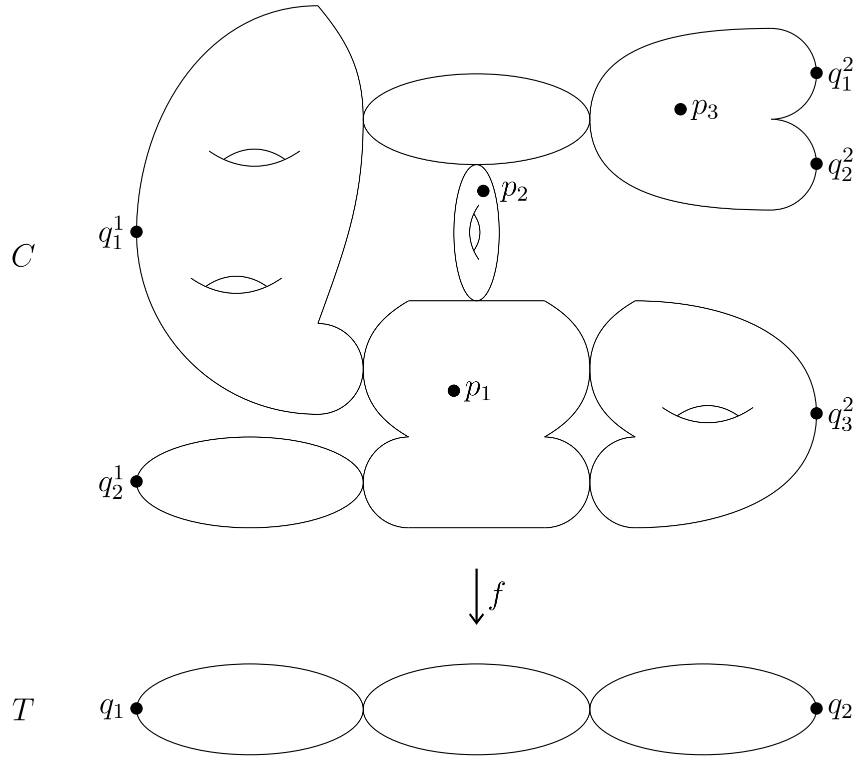

Рис. 3. Стабильное относительное отображение

Стабильные относительные отображения $[C \xrightarrow{f} T]$ и $[C' \xrightarrow{f'} T']$ считаются изоморфными, если существуют изоморфизмы $\alpha\colon C \to C'$ и $\beta\colon T \to T'$, которые сохраняют отмеченные точки и коммутируют с отображениями f и f'. Множество классов изоморфизма стабильных относительных отображений в непараметризованную проективную прямую $\mathbb{P}^1$ обозначается через $\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)$ и называется *пространством модулей стабильных относительных отображений* [26]. Оно является компактным топологическим пространством, и на нём имеется структура стэка Делиня-Мамфорда. Так же, как и в случае пространства модулей стабильных отображений (см. Раздел 3.3.2), пространство модулей стабильных относительных отображений $\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)$ обладает виртуальным фундаментальным классом

$$[\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)]^{\mathrm{virt}} \in H_e(\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n}(\mu^1,\mu^2),\mathbb{Q})$$

в степени

$$e = 2(2g-3+n_0+n_1+n_2). \tag{5.1}$$

Предположим, что $2g-2+n_0+n_1+n_2>0$. Тогда каждому стабильному относительному отображению $[(C;p_1,\ldots,p_{n_0},q^1_1,\ldots,q^1_{n_1},q^2_1,\ldots,q^2_{n_2}) \xrightarrow{f} (T;q_1,q_2)]$ можно сопоставить стабилизацию помеченной нодальной кривой $(C;p_1,\ldots,p_{n_0},q^1_1,\ldots,q^1_{n_1},q^2_1,\ldots,q^2_{n_2})$. Таким образом, мы получаем отображение $\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n_0+n_1+n_2}$, которое мы обозначим через st.

Пусть $g,n\ge 0$, $2g-2+n>0$, и $a_1,\ldots,a_n$ – набор из целых чисел такой, что $\sum a_i=0$. Пусть $1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n_1}\le n$ – индексы, нумерующие положительные числа среди набора $a_1,\ldots,a_n$, а $1\le j_1<j_2<\ldots<j_{n_2}\le n$ – индексы нумерующие отрицательные числа. Таким образом, оставшиеся $n_0:=n-n_1-n_2$ чисел из набора $a_1,\ldots,a_n$ равны нулю. Определим наборы $\mu^1=(\mu^1_1,\ldots,\mu^1_{n_1})$ и $\mu^2=(\mu^2_1,\ldots,\mu^2_{n_2})$ равенствами $\mu^1_k:=a_{i_k}$ и $\mu^2_k:=-a_{j_k}$. Рассмотрим пространство модулей стабильных относительных отображений $\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)$. *Цикл двухточечных ветвлений* определяется как

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n) := \mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)]^{\mathrm{virt}}\right)\right) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

Напомним, что через PD мы обозначаем отображение двойственности Пуанкаре

$$\mathrm{PD}\colon H_k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})\to H^{2(3g-3+n)-k}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

Из формулы (5.1) следует, что

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)\in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

5.3. **Основные свойства.** В роде ноль цикл двухточечных ветвлений устроен очень просто:

$$\mathrm{DR}_0(a_1,\ldots,a_n)=1\in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{Q}).$$

Пусть $\pi\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – отображение забывания последней отмеченной точки. Тогда выполняется следующее свойство:

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n,0)=\pi^*\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n).$$

Полезно также иметь ввиду следующий факт:

$$\mathrm{DR}_g(0,0,\ldots,0)=(-1)^g\lambda_g\in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

Наконец, наиболее важен для нас следующий результат. Пусть $0\le h\le g$ и $I\subset\{1,\ldots,n\}$, причём $2h-1+|I|>0$ и $2(g-h)-1+|I^c|>0$, где $I^c:=\{1,\ldots,n\}\backslash I$. Рассмотрим пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{h,|I|+1}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{g-h,|I^c|+1}$, при этом мы занумеровываем отмеченные точки на кривых из пространства $\overline{\mathcal{M}}_{h,|I|+1}$ числами из множества $I\cup\{n+1\}$, а отмеченные точки на кривых из пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g-h,|I^c|+1}$ – числами из множества $I^c\cup\{n+2\}$. Рассмотрим отображение склейки

$$\mathrm{gl}\colon\overline{\mathcal{M}}_{h,|I|+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g-h,|I^c|+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n},$$

отождествляющее отмеченные точки, занумерованные числами $n+1$ и $n+2$. Определим класс $\delta_h^I\in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$ равенством $\delta_h^I:=\mathrm{gl}_*(1\times 1)$. Напомним, что через $\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}$ мы обозначаем открытое подорбиобразие в пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, состоящее из классов изоморфизма стабильных кривых, двойственный граф которых является деревом.

Теорема 5.1 ([29, 41])**.** *Имеет место следующая формула:*

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}}=\frac{1}{g!}\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2\psi_i}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\|I|\ge 2}}a_I^2\delta_0^I-\frac{1}{4}\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}}\sum_{h=1}^{g-1}a_I^2\delta_h^I\right)^g. \tag{5.2}$$

Из теоремы следует, что ограничение $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}}$ является однородным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1,\ldots,a_n$ с коэффициентами в пространстве $H^{2g}(\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n},\mathbb{Q})$. В общем случае, класс $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)$ является чётным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1,\ldots,a_n$ с коэффициентами в пространстве $H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$, и для него имеется красивая явная формула, обобщающая формулу (5.2) (см. [31]). Дальнейшее обсуждение свойств циклов двухточечных ветвлений читатель может найти в работах [31, 15].

6. DR иерархии и гипотеза об эквивалентности

В данном разделе мы приведём конструкцию DR иерархии и обсудим ряд её свойств, важнейшим из которых является гипотетическая связь с иерархией топологического типа.

Раздел 6.1 содержит конструкцию DR иерархии. Далее в разделе 6.2 мы обсудим ряд примеров, в каждом из которых мы явно укажем преобразование Миуры, связывающее DR иерархию и иерархию топологического типа. В разделе 6.3 мы сформулируем гипотезу об эквивалентности DR иерархии и иерархии топологического типа. В разделе 6.4 мы обсудим оператор рекурсии, позволяющий восстановить всю бесконечную последовательность гамильтонианов DR иерархии, зная лишь один из них. Раздел 6.5 содержит определение потенциала DR иерархии, которое позволяет очень коротко переформулировать гипотезу об эквивалентности двух иерархий. В разделе 6.6 мы кратко упомянем ряд других свойств DR иерархии.

6.1. **Конструкция DR иерархии.** Зафиксируем произвольную когомологическую теорию поля, задаваемую набором линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$. Пусть фазовое пространство V имеет размерность N. Зафиксируем базис $e_1,\ldots,e_N$ в пространстве V таким образом, чтобы вектор e_1 совпадал с единицей $\mathbb{1}$ нашей когомологической теории поля.

Рассмотрим формальные переменные p^α_n, $1\le\alpha\le N$, $n\in\mathbb{Z}$. Для любых $1\le\alpha\le N$ и $d\ge 0$ определим выражение $g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)$ следующим образом:

$$g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon):=\sum_{\substack{g\ge0,\,n\ge1\\2g-1+n>0}}\frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!}\times$$
$$\times\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}\\1\le\alpha_1,\ldots,\alpha_n\le N}}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i,a_1,\ldots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)\left(\prod_{i=1}^n p^{\alpha_i}_{a_i}\right)e^{ix\sum a_j}.$$

Мы рассматриваем выражение $g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)$ как формальный ряд Фурье с коэффициентами из кольца $\mathbb{C}[[p^*_*,\varepsilon]]$. Рассмотрим формальные переменные $u^1,\ldots,u^N$ и кольцо дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_{u^1,\ldots,u^N}$. Рассмотрим замену переменных

$$u^\alpha(x,p^*_*):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}p^\alpha_k e^{ikx}.$$

Мы утверждаем, что эта замена позволяет переписать выражение $g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)$ в виде дифференциального многочлена $g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon)\in\widehat{\mathcal{A}}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N}$.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(a_1,\ldots,a_n)=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i,a_1,\ldots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).\tag{6.1}$$

Как уже обсуждалось в разделе 5.3, класс $\mathrm{DR}_g(-\sum a_i,a_1,\ldots,a_n)|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}}$ является однородным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1,\ldots,a_n$ с коэффициентами в пространстве $H^{2g}(\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n+1},\mathbb{Q})$. Хорошо известно, что

$$\lambda_g|_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\setminus\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}}=0.$$

Отсюда следует, что интеграл (6.1) является однородным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1,\ldots,a_n$. Запишем его в виде

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_n\ge0\\b_1+\ldots+b_n=2g}}P^{b_1,\ldots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n},\quad P^{b_1,\ldots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, выражение $g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)$ можно переписать как

$$g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)=\sum_{\substack{g\ge0,\,n\ge1\\2g-1+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}\\1\le\alpha_1,\ldots,\alpha_n\le N}}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_n\ge0\\b_1+\ldots+b_n=2g}}P^{b_1,\ldots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\prod_{j=1}^n\left((ia_j)^{b_j}p^{\alpha_j}_{a_j}e^{ia_jx}\right).$$

Теперь уже очевидно, что для дифференциального многочлена $g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon)\in\widehat{\mathcal{A}}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N}$, задаваемого формулой

$$g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon):=\sum_{\substack{g\ge0,\,n\ge1\\2g-1+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{1\le\alpha_1,\ldots,\alpha_n\le N}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_n\ge0\\b_1+\ldots+b_n=2g}}P^{b_1,\ldots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}u^{\alpha_1}_{b_1}\cdots u^{\alpha_n}_{b_n},$$

выполняется равенство $g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon)|_{u^\gamma_n=\partial_x^n u^\gamma(x,p^*_*)}=g_{\alpha,d}(x,p^*_*,\varepsilon)$.

Рассмотрим локальные функционалы

$$\overline{g}_{\alpha,d} = \int g_{\alpha,d}(u^*_*, \varepsilon)dx \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N} \tag{6.2}$$

и оператор Пуассона $\eta\partial_x = (\eta^{\alpha\beta}\partial_x)$.

Теорема 6.1 ([4])**.** *Для любых* $1 \le \alpha_1, \alpha_2 \le N$ *и* $d_1, d_2 \ge 0$ *выполняется равенство*

$$\{\overline{g}_{\alpha_1,d_1}, \overline{g}_{\alpha_2,d_2}\}_{\eta\partial_x} = 0.$$

Гамильтонова система уравнений, задаваемая локальными функционалами $\overline{g}_{\beta,d}$, $1 \le \beta \le N$, $d \ge 0$, вместе с пуассоновым оператором $\eta\partial_x$,

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_d} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x \frac{\delta \overline{g}_{\beta,d}}{\delta u^\mu}, \quad 1 \le \alpha, \beta \le N, \quad d \ge 0, \tag{6.3}$$

называется *DR иерархией.*

Из свойств когомологической теории поля несложно вывести (см. [4]), что

$$\overline{g}_{1,0} = \int \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta dx.$$

Отсюда сразу следует, что уравнение DR иерархии (6.3) для производной $\frac{\partial}{\partial t^1_0}$ имеет вид

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^1_0} = u^\alpha_x.$$

Эта позволяет нам отождествить переменные t^1_0 и x, как и в случае с иерархией топологического типа.

Подчеркнём, что в описанной выше конструкции мы не налагаем никаких ограничений на когомологическую теорию поля. В этом состоит важное отличие DR иерархии от иерархии топологического типа, существование которой в общем случае не известно.

6.2. **Примеры.**

6.2.1. *Тривиальная когомологическая теория поля.*

Теорема 6.2 ([4])**.** *DR иерархия, соответствующая тривиальной когомологической теории поля (см. разд. 4.4.1), совпадает с иерархией КдФ.*

Доказательство. Приведём доказательство из работы [4]. Для вычисления DR иерархии нам нужно вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i, a_1, \ldots, a_n\right)\lambda_g\psi_1^d, \tag{6.4}$$

где $d \ge 1$. Если $g = 0$, то $\mathrm{DR}_0(-\sum a_i, a_1, \ldots, a_n) = \lambda_0 = 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}, \mathbb{Q})$, и поэтому интеграл (6.4) равен 1, если $n = d+2$, и равен 0 иначе. Таким образом, мы получаем, что

$$\overline{g}_d = \int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx + O(\varepsilon^2). \tag{6.5}$$

Вычислим теперь гамильтониан $\overline{g}_1$. Рассмотрим интеграл (6.4) при $d = 1$ и $g \ge 1$. Степень класса когомологий под знаком интеграла равна $2(2g+1)$, а вещественная размерность пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ равна $2(3g-2+n)$, поэтому интеграл (6.4) не равен нулю только если $2g+1 = 3g-2+n \Leftrightarrow g-3+n = 0$. Значит нам нужно рассмотреть только два случая: $(g,n) = (1,2)$ и $(g,n) = (2,1)$. С помощью формулы (5.2) можно посчитать, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \mathrm{DR}_1(-a_1-a_2, a_1, a_2)\lambda_1\psi_1 = \frac{a_1^2+a_2^2}{24},$$

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \mathrm{DR}_2(-a, a)\lambda_2\psi_1 = \frac{a^4}{1152},$$

откуда мы заключаем, что $g_1 = \frac{u^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{uu_{xx}}{24} + \varepsilon^4 \frac{u_{xxxx}}{1152}$ и

$$\overline{g}_1 = \int \left(\frac{u^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{uu_{xx}}{24} \right) dx. \tag{6.6}$$

Гамильтонианы иерархии КдФ удовлетворяют свойствам

$$\overline{h}_d^{\mathrm{KdV}} = \int \frac{w^{d+2}}{(d+2)!} dx + O(\varepsilon^2), \qquad \overline{h}_1^{\mathrm{KdV}} = \int \left(\frac{w^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{ww_{xx}}{24} \right) dx,$$

а скобка Пуассона задаётся оператором ∂_x. По Лемме 2.4 из работы [5], для любого $d \geq 0$ существует единственный локальный функционал $\overline{g}_d \in \widehat{\Lambda}_u^{[0]}$ вида (6.5), удовлетворяющий коммутационному соотношению $\{\overline{g}_1, \overline{g}_d\}_{\partial_x} = 0$. Отсюда мы заключаем, что DR иерархия, соответствующая тривиальной когомологической теории поля, совпадает с иерархией КдФ. $\square$

Учитывая теорему 4.7, мы получаем, что в случае тривиальной когомологической теории поля DR иерархия совпадает с иерархией топологического типа.

6.2.2. *Классы Ходжа.* Рассмотрим теперь когомологическую теорию поля $c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}$, задаваемую классом $1 + \mu\lambda_1 + \ldots + \mu^g \lambda_g \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ (см. разд. 4.4.2).

Теорема 6.3 ([4]). *DR иерархия, соответствующая когомологической теории поля $c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}$, совпадает с иерархией уравнения двухслойной жидкости.*

Из теорем 4.8 и 6.3 следует, что для когомологической теории поля $c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}$ DR иерархия и иерархия топологического типа связаны преобразованием Миуры (4.16).

6.2.3. *Теория Громова-Виттена проективной прямой.*

Теорема 6.4 ([13]). *Рассмотрим теорию Громова-Виттена проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и соответствующую когомологическую теорию поля (см. разд. 4.4.3). DR иерархия в этом случае связана с иерархией топологического типа преобразованием Миуры*

$$u^\alpha(w_*^*, \varepsilon) = \frac{e^{\frac{\varepsilon}{2}\partial_x} - e^{-\frac{\varepsilon}{2}\partial_x}}{\varepsilon \partial_x} w^\alpha.$$

6.2.4. *Класс Виттена.*

Теорема 6.5 ([8]). *Пусть $r \geq 3$. Рассмотрим когомологическую теорию поля, задаваемую r-спин классом Виттена (см. разд. 3.3.3). Если $r = 3$, то DR иерархия совпадает с иерархией топологического типа. В случаях $r = 4$ и $r = 5$ иерархии связаны следующими преобразованиями Миуры:*

$$\begin{cases} w^1 = u^1 + \dfrac{\varepsilon^2}{96} u^3_{xx}, \\ w^2 = u^2, \\ w^3 = u^3, \end{cases} \qquad \text{для } r = 4;$$

$$\begin{cases} w^1 = u^1 + \dfrac{\varepsilon^2}{60} u^3_{xx}, \\ w^2 = u^2 + \dfrac{\varepsilon^2}{60} u^4_{xx}, \\ w^3 = u^3, \\ w^4 = u^4, \end{cases} \qquad \text{для } r = 5.$$

6.3. **Гипотеза об эквивалентности.** В работе [4] была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза 6.6. ([4]) *Для любой полупростой когомологической теории поля соответствующие DR иерархия и иерархия топологического типа связаны преобразованием Миуры* (4.4)*, удовлетворяющим свойству* $f_0^\alpha = w^\alpha$.

В работе [6] эта гипотеза была существенно усилена, а именно было явно описано преобразование Миуры, которое должно гипотетически связывать две иерархии. Ниже мы сформулируем эту более сильную гипотезу.

Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ с фиксированным базисом $e_1,\ldots,e_N$ в пространстве V таким, что вектор e_1 совпадает с единицей когомологической теории поля. Рассмотрим потенциал $F(t^*_*,\varepsilon)$ и напомним, что ряды $(w^{\mathrm{top}})^\alpha(t^*_*,\varepsilon)$ определяются как $(w^{\mathrm{top}})^\alpha := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial t^\mu_0 \partial t^1_0}$.

Предложение 6.7 ([6])**.** *Существует единственный дифференциальный многочлен* $\mathcal{P} \in \widehat{\mathcal{A}}^{[-2]}_{w^1,\ldots,w^N}$ *такой, что ряд* $F^{\mathrm{red}} \in \mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$*, задаваемый равенством*

$$F^{\mathrm{red}} := F + \mathcal{P}(w^{\mathrm{top}}, w^{\mathrm{top}}_x, w^{\mathrm{top}}_{xx},\ldots,\varepsilon), \tag{6.7}$$

удовлетворяет свойству

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g}} \left.\frac{\partial^n F^{\mathrm{red}}}{\partial t^{\alpha_1}_{d_1}\ldots\partial t^{\alpha_n}_{d_n}}\right|_{t^*_*=0} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n d_i \le 2g-2. \tag{6.8}$$

Ряд F^{red} называется *приведённым потенциалом* когомологической теории поля.

Предположим, что наша когомологическая теория поля является полупростой. Через $\overline{g}_{\alpha,d} \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N}$ мы будет обозначать гамильтонианы DR иерархии, а через $\overline{h}_{\alpha,d} \in \widehat{\Lambda}^{[0]}_{w^1,\ldots,w^N}$ и K – гамильтонианы и пуассонов оператор иерархии топологического типа. Введём формальные переменные $\widetilde{u}^1,\ldots,\widetilde{u}^N$ и рассмотрим преобразование Миуры

$$u^\alpha \mapsto \widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon) := \eta^{\alpha\mu}\frac{\delta\overline{g}_{\mu,0}}{\delta u^1}.$$

Рассмотрим также следующее преобразование Миуры, связывающее переменные $\widetilde{u}^\alpha$ и w^α:

$$w^\alpha \mapsto \widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon) := w^\alpha + \eta^{\alpha\mu}\partial_x\{\mathcal{P},\overline{h}_{\mu,0}\}_K, \tag{6.9}$$

где скобка $\{f,\overline{h}\}_K$ дифференциального многочлена $f \in \widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N}$ и локального функционала $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_{w^1,\ldots,w^N}$ определяется как

$$\{f,\overline{h}\}_K := \sum_{p\ge 0}\frac{\partial f}{\partial w^\mu_p}\partial_x^p\left(K^{\mu\nu}\frac{\delta\overline{h}}{\delta w^\nu}\right) \in \widehat{\mathcal{A}}_{w^1,\ldots,w^N}.$$

Наконец, рассмотрим преобразование $\widetilde{u}^\alpha \mapsto w^\alpha(\widetilde{u}^*_*,\varepsilon)$, обратное к преобразованию (6.9). Следующая гипотеза является усилением гипотезы 6.6.

Гипотеза 6.8 ([6])**.** *Для любой полупростой когомологической теории поля композиция преобразований Миуры*

$$u^\alpha \mapsto \widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon) \quad \text{и} \quad \widetilde{u}^\alpha \mapsto w^\alpha(\widetilde{u}^*_*,\varepsilon)$$

переводит DR иерархию в иерархию топологического типа.

Эта гипотеза называется гипотезой об эквивалентности. В следующей теореме перечислены случаи, для которых эта гипотеза доказана.

Теорема 6.9 ([6, 7, 9])**.** *Гипотеза 6.8 верна в следующих случаях:*

- *для всех примеров, разобранных в разделах 6.2.1–6.2.4 (*[6]*),*
- *для всех полупростых когомологических теорий поля ранга* 1 *в приближении вплоть до рода* 5 *включительно (*[7]*),*
- *для всех полупростых когомологических теорий поля в приближении вплоть до рода* 2 *включительно (*[9]*).*

6.4. **Оператор рекурсии.** Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ с фиксированным базисом $e_1,\ldots,e_N$ в пространстве V таким, что вектор e_1 совпадает с единицей $1\!\!1$. Определим оператор $D\colon \widehat{\mathcal{A}}_{u^1,\ldots,u^N} \to \widehat{\mathcal{A}}_{u^1,\ldots,u^N}$ равенством

$$D := \sum_{k\geq 0}(k+1)u^\alpha_k \frac{\partial}{\partial u^\alpha_k}.$$

Введём дифференциальные многочлены $g_{\alpha,-1}$ равенством $g_{\alpha,-1} := \eta_{\alpha\mu}u^\mu$.

Теорема 6.10 ([13]). *Выполняется следующее соотношение:*

$$\partial_x((D-1)g_{\alpha,d+1}) = \{g_{\alpha,d},\overline{g}_{1,1}\}_{\eta\partial_x},\quad 1\leq\alpha\leq N,\quad d\geq -1. \tag{6.10}$$

Нетрудно понять, что соотношение (6.10) позволяет вычислить все дифференциальные многочлены $g_{\alpha,d}$, зная лишь гамильтониан $\overline{g}_{1,1}$. К примеру, для тривиальной когомологической теории поля рекурсия (6.10) позволяет быстро вычислить первые несколько дифференциальных многочленов g_d:

$$\begin{aligned}
g_{-1} &= u,\\
g_0 &= \frac{u^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{24}u_2,\\
g_1 &= \frac{u^3}{6}+\frac{\varepsilon^2}{24}uu_2+\frac{\varepsilon^4}{1152}u_4,\\
g_2 &= \frac{u^4}{24}+\frac{\varepsilon^2}{48}u^2u_2+\left(\frac{7u_2^2}{5760}+\frac{uu_4}{1152}\right)\varepsilon^4+\frac{\varepsilon^6}{82944}u_6,\\
g_3 &= \frac{u^5}{120}+\frac{\varepsilon^2}{144}u^3u_2+\left(\frac{7uu_2^2}{5760}+\frac{u^2u_4}{2304}\right)\varepsilon^4+\left(\frac{u_3^2}{362880}+\frac{u_2u_4}{15360}+\frac{uu_6}{82944}\right)\varepsilon^6+\frac{\varepsilon^8}{7962624}u_8,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Отметим, что рекурсия (6.10) не встречалась ранее в литературе. Даже для случая тривиальной когомологической теории поля эта рекурсивная процедура даёт новый способ построения плотностей для гамильтонианов иерархии КдФ.

6.5. **Потенциал DR иерархии.** Рассмотрим произвольную когомологическую теорию поля $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})$ с фиксированным базисом $e_1,\ldots,e_N$ в пространстве V таким, что вектор e_1 совпадает с единицей $1\!\!1$. Определим дифференциальные многочлены $h^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p}\in\widehat{\mathcal{A}}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N}$, $1\leq\alpha\leq N, p\geq -1$, равенством

$$h^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p} := \frac{\delta\overline{g}_{\alpha,p+1}}{\delta u^1}.$$

Предложение 6.11 ([6]). *Для любых $1\leq\alpha,\beta\leq N$ и $p,q\geq 0$ существует единственный дифференциальный многочлен $\Omega^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p;\beta,q}\in\widehat{\mathcal{A}}^{[0]}_{u^1,\ldots,u^N}$, удовлетворяющий равенствам*

$$\partial_x\Omega^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p;\beta,q} = \left\{h^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p-1},\overline{g}_{\beta,q}\right\}_{\eta\partial_x}\quad \textit{и}\quad \Omega^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p;\beta,q}\big|_{u^*_*=0}=0.$$

Обозначим через $(u^{\mathrm{str}})^\alpha(t^*_*,\varepsilon)$ решение DR иерархии, задаваемое начальным условием

$$(u^{\mathrm{str}})^\alpha\big|_{\substack{t^2_0=\ldots=t^N_0=0\\ t^*_{\geq 1}=0}} = \delta^{\alpha,1}x.$$

Предложение 6.12 ([6]). *Существует единственный ряд $F^{\mathrm{DR}}(t^*_*,\varepsilon)\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$, удовлетворяющий свойствам*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F^{\mathrm{DR}}}{\partial t^\alpha_p\partial t^\beta_q}=\Omega^{\mathrm{DR}}_{\alpha,p;\beta,q}\big|_{u^\gamma_n=\partial_x^n(u^{\mathrm{str}})^\gamma},\quad 1\le\alpha,\beta\le N,\quad p,q\ge 0,\\
&F^{\mathrm{DR}}\big|_{t^*_*=0}=0,\\
&\frac{\partial F^{\mathrm{DR}}}{\partial t^1_0}=\sum_{n\ge 0}t^\alpha_{n+1}\frac{\partial F^{\mathrm{DR}}}{\partial t^\alpha_n}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}t^\alpha_0t^\beta_0.
\end{aligned}$$

Ряд F^{DR} называется *потенциалом DR иерархии.*

Оказывается, что свойство (6.8) выполняется также и для потенциала DR иерархии.

Предложение 6.13 ([6]). *Для любой когомологической теории поля потенциал F^{DR} удовлетворяет свойству*

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g}}\left.\frac{\partial^n F^{\mathrm{DR}}}{\partial t^{\alpha_1}_{d_1}\dots\partial t^{\alpha_n}_{d_n}}\right|_{t^*_*=0}=0,\quad \text{если}\quad \sum_{i=1}^n d_i\le 2g-2.$$

В работе [6] доказано, что гипотезу 6.8 можно следующим образом переформулировать с помощью потенциалов F^{DR} и F^{red}.

Теорема 6.14 ([6]). *Рассмотрим произвольную полупростую когомологическую теорию поля. Гипотеза об эквивалентности верна тогда и только тогда, когда*

$$F^{\mathrm{DR}}=F^{\mathrm{red}}.$$

Заметим, что для определения потенциалов F^{DR} и F^{red} требование полупростоты когомологической теории поля не нужно. Отсюда естественно предположить, что выполняется следующее утверждение.

Гипотеза 6.15 ([6]). *Для любой когомологической теории поля выполняется равенство $F^{\mathrm{DR}}=F^{\mathrm{red}}$.*

Замечание 6.16. *На самом деле, можно пойти ещё дальше и сформулировать гипотезу 6.15 для частичных когомологических теорий поля, представляющих собой обобщение понятия когомологической теории поля, где мы не требуем выполнения свойства* (3.3) *(см.* [6]*).*

6.6. **Дальнейшие свойства.** DR иерархия обладает рядом других интересных свойств, которые мы вкратце здесь упомянем.

В работах [7] и [9] были получены геометрические интерпретации потенциалов F^{DR} и F^{red}. На основании этих результатов в работе [9] была предложена система из гипотетических соотношений в когомологиях пространства модулей кривых, из которой следует гипотеза 6.15. В этой системе соотношений было выделена подсистема, конечная в каждом роде, которая достаточна для доказательства гипотезы 6.8. Соотношения из этой подсистемы были проверены вплоть до рода 2 включительно, и это позволило доказать гипотезу 6.8 в приближении вплоть до рода 2 включительно.

Упомянем также, что для любой когомологической теории поля в работе [12] получена простая конструкция квантования DR иерархии. В случае тривиальной когомологической теории поля эта конструкция даёт квантование иерархии КдФ по отношению к оператору ∂_x, которое ранее известно не было.

Для дальнейшего ознакомления с теорией DR иерархий и иерархий топологического типа мы можем порекомендовать читателю обзор [51].

Список литературы

[1] K. Behrend, Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke Mathematical Journal 85 (1996), no. 1, 1–60.

[2] K. Behrend, *Gromov-Witten invariants in algebraic geometry*, Inventiones Mathematicae 127 (1997), no. 3, 601–617.

[3] A. Brini, G. Carlet, S. Romano, P. Rossi, *Rational reductions of the 2D-Toda hierarchy and mirror symmetry*, Journal of the European Mathematical Society 19 (2017), 835–880.

[4] A. Buryak, *Double ramification cycles and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics 336 (2015), no. 3, 1085–1107.

[5] A. Buryak, *Dubrovin-Zhang hierarchy for the Hodge integrals*, Communications in Number Theory and Physics 9 (2015), no. 2, 239–272.

[6] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi, *Tau-structure for the Double Ramification Hierarchies*, arXiv:1602.05423.

[7] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi, *Integrable systems of double ramification type*, arXiv:1609.04059.

[8] A. Buryak, J. Guéré, *Towards a description of the double ramification hierarchy for Witten's r-spin class*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 106 (2016), no. 5, 837–865.

[9] A. Buryak, J. Guéré, P. Rossi, *DR/DZ equivalence conjecture and tautological relations*, arXiv:1705.03287.

[10] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin, *On deformations of quasi-Miura transformations and the Dubrovin-Zhang bracket*, Journal of Geometry and Physics 62 (2012), no. 7, 1639–1651.

[11] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin, *A polynomial bracket for the Dubrovin-Zhang hierarchies*, Journal of Differential Geometry 92 (2012), no. 1, 153–185.

[12] A. Buryak, P. Rossi, *Double Ramification Cycles and Quantum Integrable Systems*, Letters in Mathematical Physics 106 (2016), no. 3, 289–317.

[13] A. Buryak, P. Rossi, *Recursion Relations for Double Ramification Hierarchies*, Communications in Mathematical Physics 342 (2016), no. 2, 533–568.

[14] A. Buryak, P. Rossi, S. Shadrin, *Bi-Hamiltonian structure for the double ramification hierarchy*, in preparation.

[15] A. Buryak, S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine, *Integrals of ψ-classes over double ramification cycles*, American Journal of Mathematics 137 (2015), no. 3, 699–737.

[16] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, *The extended Toda hierarchy*, Moscow Mathematical Journal 4 (2004), no. 2, 313–332, 534.

[17] A. Chiodo, *The Witten top Chern class via K-theory*, Journal of Algebraic Geometry 15 (2006), no. 4, 681–707.

[18] L. A. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, second edition, Advanced Series in Mathematical Physics, 26, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[19] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants*, arXiv:math/0108160.

[20] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants*, новая версия статьи arXiv:math/0108160, 2005.

[21] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy*, Communications in Mathematical Physics 250 (2004), no. 1, 161–193.

[22] C. Faber, *A conjectural description of the tautological ring of the moduli space of curves*, Moduli of curves and abelian varieties, 109–129, Aspects Math., E33, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1999.

[23] C. Faber, S. Shadrin, D. Zvonkine, *Tautological relations and the r-spin Witten conjecture*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Quatriéme Série 43 (2010), no. 4, 621–658.

[24] H. Fan, T. Jarvis, Y. Ruan, *The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory*, Annals of Mathematics 178 (2013), no. 1, 1–106.

[25] E. Getzler, *The Virasoro conjecture for Gromov-Witten invariants*, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), 147–176, Contemp. Math., 241, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[26] T. Graber, R. Vakil, *Relative virtual localization and vanishing of tautological classes on moduli spaces of curves*, Duke Mathematical Journal 130 (2005), no. 1, 1–37.

[27] S. Grushevsky, I. Krichever, *The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces*, Surveys in differential geometry. Vol. XIV. Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces, 111–129, Int. Press, Somerville, MA, 2009.

[28] S. Grushevsky, I. Krichever, *Real-normalized differentials and the elliptic Calogero-Moser system*, Complex geometry and dynamics, 123–137, Abel Symp., 10, Springer, Cham, 2015.

[29] R. Hain, *Normal functions and the geometry of moduli spaces of curves*, Handbook of moduli, Vol. I, 527–578, Adv. Lect. Math. (ALM), 24, Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[30] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of curves*, Graduate Texts in Mathematics, 187, Springer-Verlag, New York, 1998.

[31] F. Janda, R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine, *Double ramification cycles on the moduli spaces of curves*, Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques 125 (2017), 221–266.

[32] M. E. Kazarian, S. K. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, Journal of the American Mathematical Society 20 (2007), no. 4, 1079–1089.

[33] M. Kazarian, *KP hierarchy for Hodge integrals*, Advances in Mathematics 221 (2009), no. 1, 1–21.

[34] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Communications in Mathematical Physics 147 (1992), no. 1, 1–23.

[35] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Communications in Mathematical Physics 164 (1994), no. 3, 525–562.

[36] И. М. Кричевер, *Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло*, Функциональный анализ и его приложения, 2012, 46:2, 37–51.

[37] J. Li, G. Tian, *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties*, Journal of the Americal Mathematical Society 11 (1998), no. 1, 119–174.

[38] S.-Q. Liu, Y. Zhang, C. Zhou, *Fractional Volterra Hierarchy*, arXiv:1702.02840.

[39] E. Looijenga, *Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 369–400, Progr. Math., 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[40] Yu. I. Manin, P. Zograf, *Invertible cohomological field theories and Weil-Petersson volumes*, Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier 50 (2000), no. 2, 519–535.

[41] S. Marcus, J. Wise, *Stable maps to rational curves and the relative Jacobian*, arXiv:1310.5981.

[42] D. Maulik, R. Pandharipande, *New calculations in Gromov-Witten theory*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 4 (2008), no. 2, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov, Part 1, 469–500.

[43] M. Mirzakhani, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, Journal of the American Mathematical Society 20 (2007), no. 1, 1–23.

[44] T. Mochizuki, *The virtual class of the moduli stack of stable r-spin curves*, Communications in Mathematical Physics 264 (2006), no. 1, 1–40.

[45] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 271–328, Progr. Math., 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[46] A. Okounkov, R. Pandharipande, *The equivariant Gromov-Witten theory of* $\mathbb{P}^1$, Annals of Mathematics 163 (2006), no. 2, 561–605.

[47] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models*, Algebraic geometry–Seattle 2005. Part 1, 325–414, Proc. Sympos. Pure Math., 80, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[48] R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine, *Relations on* $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ *via* 3*-spin structures*, Journal of the American Mathematical Society 28 (2015), no. 1, 279–309.

[49] R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine, *Tautological relations via r-spin structures*, arXiv:1607.00978.

[50] A. Polishchuk, A. Vaintrob, *Algebraic construction of Witten's top Chern class*, Advances in algebraic geometry motivated by physics (Lowell, MA, 2000), 229–249, Contemp. Math., 276, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[51] P. Rossi, *Integrability, quantization and moduli spaces of curves*, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications 13 (2017), 060.

[52] S. Shadrin, *BCOV theory via Givental group action on cohomological fields theories*, Moscow Mathematical Journal 9 (2009), no. 2, 411–429.

[53] C. Teleman, *The structure of 2D semi-simple field theories*, Inventiones Mathematicae 188 (2012), no. 3, 525–588.

[54] R. Vakil, *The moduli space of curves and Gromov-Witten theory*, Enumerative invariants in algebraic geometry and string theory, 143–198, Lecture Notes in Math., 1947, Springer, Berlin, 2008.

[55] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 243–310, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[56] E. Witten, *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity*, Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 235–269, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[57] D. Zvonkine, *Strebel differentials on stable curves and Kontsevich's proof of Witten's conjecture*, arXiv:math/0209071v2.

[58] D. Zvonkine, *An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory*, Handbook of Teichmüller theory, Volume III, 667–716, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 17, Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.