Топология симплектических частично гиперболических автоморфизмов 4-мерного тора

Л. М. Лерман, К. Н. Трифонов

Ключевые слова: автоморфизм тора, частичная гиперболичность, симплектический, классификация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12819

Изучаются топологические свойства автоморфизмов 4-мерного тора $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$, порожденные целочисленными симплектическими преобразованиями в $\mathbb{R}^4$. Обычно такие преобразования называются симплектическими автоморфизмами тора. Целью является классификация возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов на $\mathbb{T}^4$.

Для автоморфизмов тора справедлива, в частности, следующая классическая теорема Халмоша [1]

Теорема 1 (Халмош). *Непрерывный автоморфизм f компактной абелевой группы G эргодичен (и перемешивающий) тогда и только тогда, когда индуцированный им автоморфизм группы характеров G^* не имеет конечных орбит.*

Из этой теоремы следует, в частности, что автоморфизм f_A, порожденный целочисленной унимодулярной матрицей A на $\mathbb{T}^n$, является эргодическим и перемешивающим тогда и только тогда, когда матрица A не имеет собственных значений, являющихся корнями из единицы.

В случае четной размерности тора $n = 2m$ можно рассматривать симплектические автоморфизмы, если в $\mathbb{R}^{2m}$ ввести симплектическую структуру. Зададим в $\mathbb{R}^{2m}$ невырожденную кососимметрическую целочисленную унимодулярную матрицу J. Такая матрица определяет в $\mathbb{R}^{2m}$ билинейную 2-форму

$$[x, y] = (Jx, y),$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – стандартное координатное скалярное произведение относительно стандартных координат. Такую форму называют еще кососкалярным произведением [2]. Линейное отображение $S\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ называется *симплектическим*, если для него справедливо тождество $[Sx, Sy] = [x, y]$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$. Это влечет следующее тождество для матрицы S симплектического отображения:

$$S^\top JS = J.$$

При

$$J = I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2m}$ будем называть *стандартной*, при $J \neq I$ – *нестандартной*.

В случае 4-мерного тора симплектические автоморфизмы с положительной топологической энтропией, в силу формулы Боуэна [3]

$$h_d(f_A) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log|\lambda_i|,$$

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственных значения матрицы A, могут быть гиперболическими или частично гиперболическими, причем частично гиперболический автоморфизм задается целочисленной унимодулярной матрицей, имеющей два комплексно-сопряженных собственных значения на единичной окружности и два действительных собственных значения вне единичной окружности λ, λ^{-1}. Напомним, что класс гиперболических диффеоморфизмов на гладких многообразиях был впервые введен и изучен в [4], а класс частично гиперболических диффеоморфизмов – в [5].

При изучении частично гиперболических автоморфизмов с различной динамикой, полезно изучить возможное поведение при проектировании на $\mathbb{T}^4$ собственных прямых l^s, l^u для вещественных собственных значений λ, λ^{-1}. Оно зависит от того, как соответствующая прямая расположена относительно целочисленной решетки $\mathbb{Z}^4$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Замыкание неустойчивого* (*устойчивого*) *слоя частично гиперболического симплектического автоморфизма*, *проходящего через неподвижную точку* $\widehat{O} \in \mathbb{T}^4$, *является гладким инвариантным тором размерности* 2 *или* 4.

В случае, когда замыкание неустойчивого слоя 4-мерный тор, будем называть автоморфизм транзитивным. В этом случае устойчивое слоение будет также транзитивным.

Предложение 2. *Если* f_A *является транзитивным симплектическим автоморфизмом* $\mathbb{T}^4$, *то слои его устойчивого слоения также всюду плотны*.

Теорема 2. *Пусть* A *– частично гиперболическая целочисленная унимодулярная матрица*, *порождающая транзитивный автоморфизм* f_A. *Тогда* f_A *является симплектическим на* $\mathbb{T}^4$, *относительно нестандартной симплектической структуры. Автоморфизм* f_A *целочисленно унимодулярно сопряжен с автоморфизмом* f_B, *где* B *– сопровождающая матрица* [6] *характеристического многочлена матрицы* A.

В силу теоремы Арова [7], если два эргодических автоморфизма топологически эквивалентны, то их матрицы подобны. Отсюда получаем

Теорема 3. *Два транзитивных частично гиперболических автоморфизма тора сопряжены тогда и только тогда*, *когда их характеристические полиномы одинаковы*.

Приведем пример транзитивного симплектического автоморфизма тора. Для этого, следуя [8], рассмотрим неприводимый над полем рациональных чисел квадратичный полином с целыми коэффициентами $y^2 - 3y + 1$, корни которого больше 2 и меньше 2 по модулю. Сделаем замену переменной в этом полиноме $y = x + x^{-1}$ и получим полином четвертой степени $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, который неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Его корни – алгебраические числа степени четыре. Через A обозначим сопровождающую матрицу этого полинома.

Обозначим через λ вещественное собственное значение матрицы A, большее единицы. Собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, есть $\gamma_u = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$. Фактор-классы $\mathbb{R}^4/l^u$ по аддитивной подгруппе, соответствующей l^u, образуют слоение из аффинных прямых, инвариантное относительно L_A. Эти прямые проектируются на $\mathbb{T}^4$ в траектории векторного поля

$$\dot{x}_1 = 1, \qquad \dot{x}_2 = \lambda, \qquad \dot{y}_1 = \lambda^2, \qquad \dot{y}_2 = \lambda^3.$$

Чтобы доказать, что траектории этого векторного поля транзитивны в $\mathbb{T}^4$, нужно проверить, что вектор γ является несоизмеримым, т.е. $(m, \gamma) \neq 0$ при любых ненулевых $m \in \mathbb{Z}^4$. Это следует из того факта, что число λ является корнем неприводимого многочлена P четвертой степени с целыми коэффициентами, поэтому оно не может быть корнем многочлена меньшей степени с рациональными (целыми) коэффициентами.

Для случая, когда замыкание неустойчивой кривой является двумерным тором, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Если замыкание неустойчивой* (*устойчивой*) *инвариантной кривой* $\widehat{O}$ *является двумерным тором*, *то характеристический многочлен матрицы* A *приводим над полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$, *т.е. является произведением двух монических многочленов с целыми коэффициентами. В частности*, *собственные значения матрицы* A, *лежащие на единичной окружности*, *являются корнями из единицы степени* 3, 4, *или* 6.

Из предыдущего утверждения следует теорема о строении разложимого частично гиперболического симплектического автоморфизма.

Теорема 4. *Если* f_A *является разложимым симплектическим автоморфизмом на* $\mathbb{T}^4$, *то* f_A *сопряжен прямому произведению двух автоморфизмов* f_H *и* f_P *на* $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, *заданных гиперболической матрицей* H *и периодической матрицей* P *такой*, *что* $P^k = E$, *где* $k \in \{3, 4, 6\}$. *Автоморфизмом* f_S, *задающий сопряжение*, *порожден целочисленной унимодулярной матрицей* S *в* $\mathbb{R}^4$.

Доказательства всех утверждений работы появятся в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. R. Halmos, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**:8 (1943), 619–624. **[2]** В. И. Арнольдь, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974. **[3]** R. Bowen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 401–414. **[4]** Д. В. Аносов, Тр. МИАН СССР, **90**, 1967, 3–210. **[5]** М. И. Брин, Я. Б. Песин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:1 (1974), 170–212. **[6]** R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985. **[7]** Д. З. Аров, *УМН*, **18**:5 (113) (1963), 133–138. **[8]** A. B. Katok, A. Nitica, *Rigidity in Higner Rank Abelian Group Actions*. V. 1. *Introduction and Cocycle Problem*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011. **[9]** L. M. Lerman, K. N. Trifonov, *Dynam. Syst.*, **35** (2020) (в печати).

Л. М. Лерман
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал);
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: lermanl@mm.unn.ru

Поступило
06.02.2020
Принято к публикации
19.02.2020

К. Н. Трифонов
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kostya_31_08@mail.ru