ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2020, т. 310, с. 119–134

УДК 517.938

О реализации классов топологической сопряженности каскадов Морса–Смейла на сфере S^n *

В. З. Гринес[a], **Е. Я. Гуревич**[a], **В. С. Медведев**[a]

Поступило 02.12.2019; после доработки 02.12.2019; принято к публикации 06.04.2020

Рассматривается класс $G(S^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на сфере S^n размерности $n \geq 4$, в предположении, что инвариантные многообразия различных седловых периодических точек не пересекаются. Для диффеоморфизмов из этого класса описан алгоритм реализации всех классов топологической сопряженности.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4096

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Настоящая работа является продолжением работ [4, 5, 11, 12], посвященных топологической классификации дискретных динамических систем с регулярной динамикой на многообразиях размерности $n \geq 4$. Здесь мы рассматриваем класс $G(S^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере S^n размерности $n \geq 4$ таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых периодических точек любого диффеоморфизма $f \in G(S^n)$ не пересекаются. В [11, 12] доказано, что полным топологическим инвариантом диффеоморфизмов из класса $G(S^n)$ при $n \geq 4$ является двухцветный граф, оснащенный автоморфизмом, отражающим динамику на множестве периодических точек. Этот результат контрастирует с ситуацией в размерности $n = 3$. Так, еще в 2000 г. Х. Бонатти и В.З. Гринес [1] установили существование счетного множества топологически несопряженных диффеоморфизмов из класса $G(S^3)$, имеющих один и тот цветной граф с двумя вершинами и одним ребром. Этот феномен объясняется возможностью дикого вложения замыкания инвариантных многообразий седловой неподвижной точки диффеоморфизма в размерности 3. Полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на трехмерных многообразиях получена в серии работ 2000–2019 гг. Х. Бонатти, В.З. Гринеса, О.В. Починки и Е. Пеку (см. обзор [13]). В большей размерности замыкания неустойчивых многообразий седловых периодических точек размерности $\{1, n-1\}$ не могут быть дико заузленными, что позволяет в данной работе завершить решение проблемы топологической классификации для диффеоморфизмов из $G(S^n)$ на комбинаторном языке, а именно предложить алгоритм построения стандартного представителя в каждом классе топологической сопряженности (теорема 1).

Проблема топологической классификации систем Морса–Смейла имеет долгую и богатую историю (см. обзор [13]), но в размерности 4 и выше имеется лишь небольшое число результатов. Решение задачи топологической классификации градиентно-подобных потоков без

*Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01041), за исключением доказательства леммы 1, которое выполнено при финансовой поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ и гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение №075-15-2019-1931).

[a] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия.

E-mail: vgrines@yandex.ru (В.З. Гринес), egurevich@hse.ru (Е.Я. Гуревич), medvedev-1942@mail.ru (В.С. Медведев).

гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geq 3$, принадлежит С.Ю. Пилюгину (см. [18]). В 1978 г. он получил необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности таких потоков и описал алгоритм построения модельного потока в каждом классе топологической эквивалентности. Топологический инвариант, использованный Пилюгиным и названный им фазовой диаграммой, аналогичен графу Пейшото и схеме потока Е.А. Леонтович и А.Г. Майера. Он представляет собой граф, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством состояний равновесия потока, а множество ребер соответствует множеству сепаратрис седловых состояний равновесий.

В 2008–2010 гг. в работах [4, 5] авторами была решена аналогичная задача для класса диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений в предположении, что множество всех неустойчивых сепаратрис седловых периодических точек одномерно, а сами системы заданы на многообразии размерности 4 и выше. Оказалось, что неблуждающее множество таких систем содержит в точности одну источниковую неподвижную точку, несущее многообразие является сферой, а граф Пейшото, оснащенный автоморфизмом, отражающим динамику на неблуждающем множестве, является полным инвариантом. Была решена также задача реализации классов топологической сопряженности таких систем по допустимому графу и его автоморфизму. Идеи, использованные при решении этой задачи, мы применяем и в настоящей работе.

В работах [16, 19] Починка и ее ученики доказали, что в классе потоков, рассмотренном Пилюгиным, топологическая эквивалентность влечет за собой топологическую сопряженность, и описали алгоритм построения представителей каждого класса топологической эквивалентности таких потоков, используя двухцветный граф, аналогичный графу, описываемому ниже.

В [9, 10] показано, что диффеоморфизм $f \in G(S^n)$ включается в топологический поток (топологически эквивалентный некоторому градиентно-подобному потоку), если все периодические точки диффеоморфизма f неподвижны. Этот факт, вообще говоря, неверен в трехмерном случае (см. [6, 7]).

Проблема топологической классификации динамических систем Морса–Смейла на многообразиях размерности 4 и выше, отличных от сферы, рассматривалась в [22] для потоков и каскадов с неблуждающим множеством, состоящим в точности из трех и четырех неподвижных точек.

Перейдем к формулировке результатов настоящей работы. Напомним некоторые факты, необходимые для введения понятия двухцветного графа диффеоморфизма.

Обозначим через Ω_f неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G(S^n)$ и положим $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f \mid \dim W_p^{\mathrm{u}} = i\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Периодические точки, принадлежащие множествам Ω_f^0, Ω_f^n, будем называть *стоками* и *источниками* соответственно, а точки, принадлежащие множеству Ω_f^j, при любом $j \in \{1, \dots, n-1\}$ называются *седлами*. Стоки и источники будем называть также *узлами*.

Из [8, Theorem 3] (см. также [10, Proposition 4.2] и [18, лемма 2.2]) следует, что для любого $f \in G(S^n)$ множество Ω_f^j пусто при $j \in \{2, \dots, n-2\}$.

Пусть $p \in \Omega_f^1$. Из [21, Theorem 2.3] следует, что замыкание $\operatorname{cl} W_p^{\mathrm{s}}$ устойчивого многообразия W_p^{s} точки p состоит из объединения W_p^{s} и в точности одной периодической точки (обозначим ее через α), являющейся источником. Тогда множество $\operatorname{cl} W_p^{\mathrm{s}}$ гомеоморфно сфере размерности $n-1$, гладко вложенной во всех точках, кроме, возможно, точки α. Дж. Кантрелл доказал в [3], что при $n \geq 4$ сфера S^{n-1} размерности $n-1$, вложенная в S^n, не может иметь одну точку дикости (что, вообще говоря, неверно при $n = 3$). Следовательно, сфера $\operatorname{cl} W_p^{\mathrm{s}}$ является локально плоской в каждой точке[1] и в силу результата М. Брауна [2, Theorem 4] делит

[1] Многообразие $N^k \subset M^n$ размерности k без края *локально плоско в точке* $x \in N^k$, если существуют окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi\colon U(x) \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi(N^k \cap U(x)) = \mathbb{R}^k$, где

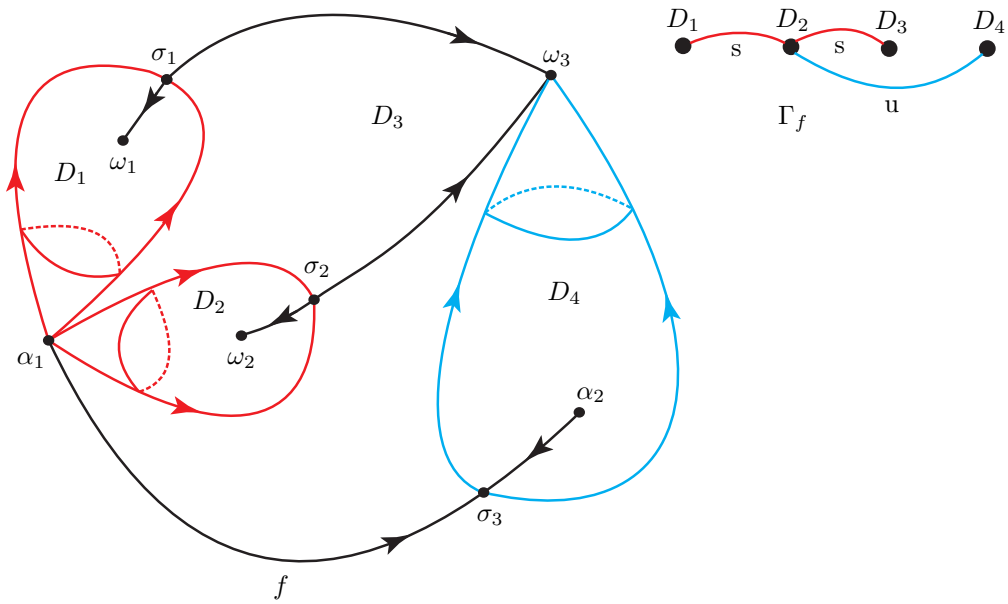

Рис. 1. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G(S^n)$ и его двухцветный граф Γ_f

несущую сферу S^n на две компоненты связности, замыкание каждой из которых является шаром.

Обозначим через $\mathcal{L}_f$ множество всех сфер $\{\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \mid p \in \Omega^1_f\}$ и $\{\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q \mid q \in \Omega^{n-1}_f\}$ и через k_f число этих сфер. Поскольку каждая $(n-1)$-мерная сфера из множества $\mathcal{L}_f$ делит сферу S^n на две связные компоненты, множество $S^n \setminus \left(\bigcup_{p\in\Omega^1_f} \operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \cup \bigcup_{q\in\Omega^{n-1}_f} \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q\right)$ состоит из k_f+1 компонент связности $D_1, \dots, D_{k_f+1}$. Обозначим через $\mathcal{D}_f$ множество всех этих компонент.

Определение 1. *Двухцветным графом диффеоморфизма* $f \in G(S^n)$ назовем граф Γ_f со следующими свойствами:

(1) множество $V(\Gamma_f)$ вершин графа Γ_f находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{D}_f$, множество $E(\Gamma_f)$ ребер графа Γ_f находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{L}_f$;

(2) вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую границу;

(3) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет “s” (или “u”), если оно соответствует многообразию $\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \in \mathcal{L}_f$ (соответственно $\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q \in \mathcal{L}_f$).

Напомним, что *деревом* называется связный граф, для любой пары вершин которого существует единственный путь из ребер и вершин, соединяющий эти вершины.

В [12] доказано, что для любого диффеоморфизма $f \in G(S^n)$ его двухцветный граф является деревом.

На рис. 1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G(S^n)$, неблуждающее множество которого состоит из восьми точек: источников α_1, α_2, седел σ_1, σ_2, σ_3 и стоков ω_1, ω_2, ω_3. Также на рисунке представлен двухцветный граф Γ_f этого диффеоморфизма.

Обозначим через $\xi\colon V(\Gamma_f) \to \mathcal{D}_f$ произвольную биекцию и определим автоморфизм $P_f\colon V(\Gamma_f) \to V(\Gamma_f)$ соотношением $P_f = \xi^{-1} f \xi|_{V(\Gamma_f)}$.[2]

$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$. Если условие локальной плоскостности нарушается в некоторой точке $x \in N^k$, то многообразие N^k называется *диким*, а точка x называется *точкой дикости*.

[2] *Автоморфизмом* графа называется взаимно однозначное отображение на множестве вершин, сохраняющее отношение инцидентности.

Определение 2. Графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $\zeta\colon V(\Gamma_f) \to V(\Gamma_{f'})$, сохраняющий цвет ребер и такой, что $P_{f'} = \zeta P_f \zeta^{-1}$.

В [11, 12] сделан первый шаг в решении задачи топологической классификации диффеоморфизмов из класса $G(S^n)$, а именно получен следующий результат.

Утверждение 1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(S^n)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы Γ_f, $\Gamma_{f'}$ изоморфны.*

В настоящей работе решается вторая часть задачи топологической классификации, которая заключается в реализации каждого класса топологической сопряженности.

Теорема 1. *Для любого дерева Γ, ребра которого окрашены в два цвета произвольным образом и который оснащен автоморфизмом $P\colon \Gamma \to \Gamma$, сохраняющим цвета ребер, существует диффеоморфизм $f \in G(S^n)$, двухцветный граф Γ_f которого изоморфен графу Γ посредством изоморфизма $\zeta\colon \Gamma_f \to \Gamma$ такого, что $P_f = \zeta^{-1} P \zeta$.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В этом разделе мы описываем вспомогательные понятия и конструкции, которые используются при доказательстве теоремы 1.

2.1. Свойства деревьев. Для графа Γ обозначим через $V(\Gamma)$ множество его вершин и через $E(\Gamma)$ множество его ребер. Для любой пары вершин $u, v \in V(\Gamma)$ обозначим через $uv \in E(\Gamma)$ ребро, инцидентное вершинам v, u. Вершину, инцидентную в точности одному ребру, будем называть *листом* (из свойств дерева следует, что множество листьев непусто). С каждым деревом Γ свяжем последовательность деревьев $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu$ такую, что $\Gamma_0 = \Gamma$, Γ_μ содержит в точности одну или две вершины и для любого $i \in \{1, \ldots, \mu\}$ дерево Γ_i получено из дерева Γ_{i-1} удалением всех его листьев и инцидентных им ребер. Вершины дерева Γ_μ будем называть *центральными вершинами дерева* Γ. Если центральных вершин две, то ребро, инцидентное двум центральным вершинам, будем называть *центральным ребром* дерева Γ. Из конструкции ясно, что любое дерево может иметь не более одного центрального ребра.

Дерево Γ называется *центральным*, если оно имеет в точности одну центральную вершину, и *бицентральным*, если центральных вершин две.

Определим ранг $\operatorname{rank}(v)$ вершины $v \in V(\Gamma)$ соотношением $\operatorname{rank}(v) = \max\{i \mid v \in V(\Gamma_i)\}$. Из определения следует справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Если вершины v, w инцидентны одному и тому же нецентральному ребру, то $|\operatorname{rank}(v) - \operatorname{rank}(w)| = 1$, а центральные вершины бицентрального дерева имеют одинаковый ранг. Кроме того, любой автоморфизм графа на себя и любой изоморфизм двух графов любую вершину ранга k преобразуют в вершину того же ранга.*

2.2. Бокс Черри. Определим вспомогательный поток φ^t системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \psi_1\bigl(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,\bigr), \\ \dot{x}_2 = x_2 \psi_2\bigl(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,\bigr), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = x_n \psi_2\bigl(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,\bigr), \end{cases}$$

где $\psi_1\colon \mathbb{R}^n \to [-1, 1]$, $\psi_2\colon \mathbb{R} \to [0, -1]$ — функции, определенные следующими соотношениями:

$$\psi_1(r) = \begin{cases} 2\exp\left(\dfrac{1}{r^2 - 1} + 1\right) - 1, & \text{если } |r| \le 1, \\ -1, & \text{если } |r| > 1, \end{cases}$$

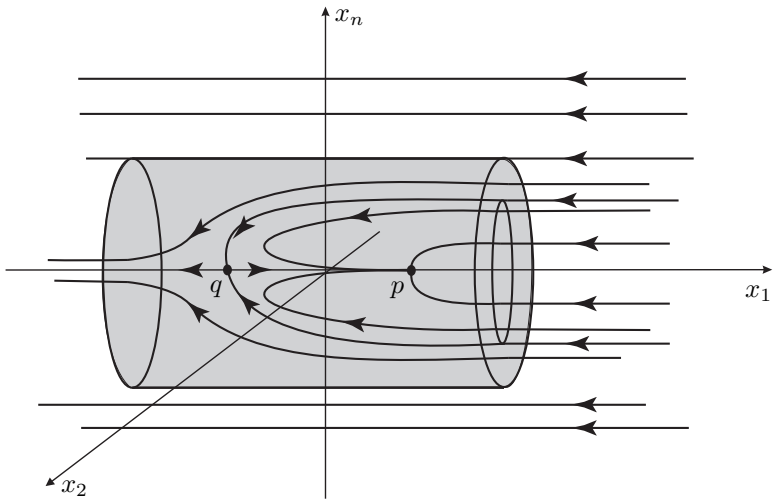

Рис. 2. Фазовый портрет потока φ^t и бокс Черри

$$\psi_2(r) = \begin{cases} -\exp\left(\dfrac{1}{r^2-1}+1\right), & \text{если } |r| \le 1, \\ 0, & \text{если } |r| > 1. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что поток φ^t удовлетворяет следующим условиям (рис. 2):

(1) неблуждающее множество потока φ^t состоит в точности из двух гиперболических состояний равновесия: седла $q = (-\sqrt{\ln 2/(1+\ln 2)}, 0, \ldots, 0)$, индекс Морса которого равен единице[3], и стока $p = (\sqrt{\ln 2/(1+\ln 2)}, 0, \ldots, 0)$;

(2) вне цилиндра $\mathbb{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\}$ и на его границе поток φ^t совпадает с потоком c^t, определенным формулой $c^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)$;

(3) сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока φ^t является диффеоморфизмом.

Положим $\mathbb{K} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \le 1,\ x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\}$. Фазовый портрет ограничения потока φ^t на множество $\mathbb{K}$ называется *боксом Черри*.

2.3. Каноническая окрестность седлового состояния равновесия. Напомним, что *n-шаром* (или *n-диском*) называется многообразие B^n, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\}$, $n \ge 1$. *Открытым n-шаром* называется многообразие, гомеоморфное внутренности шара $\mathbb{B}^n$; *сферой* S^{n-1} называется многообразие, гомеоморфное границе $\mathbb{S}^{n-1}$ шара $\mathbb{B}^n$; $(n-1)$-*кольцом* называется многообразие A^{n-1}, гомеоморфное прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{B}^1$.

Для седлового состояния равновесия q потока φ^t, построенного в предыдущем пункте, выберем окрестность $u_q \subset \operatorname{int} \mathbb{K}$ такую, что $p \notin u_q$ и $u_q \setminus W_q^{\mathrm{s}}$ состоит из двух компонент связности. Выберем гладкие $(n-1)$-диски $D_+ \subset u_q$, $D_- \subset u_q$, трансверсальные к многообразию W_q^{u} и траекториям потока φ^t и лежащие в разных компонентах связности множества $u_q \setminus W_q^{\mathrm{s}}$. Из λ-леммы (см., например, [17, лемма 7.2]) следует, что найдется гладкое $(n-1)$-кольцо A, трансверсальное к многообразию W_q^{s} и траекториям потока φ^t, такое, что для любой точки $x \in \partial A$ найдутся точка $y \in D_+ \cup D_-$ и траектория потока φ^t, соединяющая точки x, y.

Обозначим через v_q компактную окрестность точки q, ограниченную дисками D_+, D_-, кольцом A и отрезками траекторий потока φ^t, соединяющих границы дисков D_+, D_- с компонентами связности края кольца A. Положим $V_q = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^t(v_q)$ и назовем V_q *канонической окрестностью седлового состояния равновесия q*.

[3]Индексом Морса состояния равновесия q потока называется число, равное размерности многообразия W_q^{u}.

Пусть g^t — поток на многообразии M^n, неблуждающее множество которого содержит изолированное седловое состояние равновесия σ индекса Морса 1, для которого существуют окрестность u_σ и диффеоморфизм $h_\sigma\colon u_\sigma \to u_q$ такие, что

$$\varphi^t h_\sigma = h_\sigma g^t \tag{2.1}$$

всюду, где левая и правая части равенства определены.

Положим $v_\sigma = h_\sigma^{-1}(v_q)$, $V_\sigma = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} g^t(v_\sigma)$ и назовем V_σ *канонической окрестностью седла* σ. Определим диффеоморфизм $H_\sigma\colon V_\sigma \to V_q$ такой, что $\varphi^t H_\sigma = H_\sigma g^t$, следующим образом. Каждой точке $x \in V_\sigma \setminus v_\sigma$ поставим в соответствие $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $g^{t_x}(x) \subset v_\sigma$, и положим

$$H_\sigma(x) = \begin{cases} h_\sigma(x), & x \in v_\sigma, \\ \varphi^{-t_x}(h_\sigma(g^{t_x}(x))), & x \in V_\sigma \setminus v_\sigma. \end{cases}$$

Отображение H задается однозначно независимо от выбора времени t_x. Действительно, если $\tau \neq 0$ таково, что $g^{-t_x-\tau}(x) \subset v_\sigma$, то в силу соотношения (2.1) верно равенство $h_\sigma(g^{-t_x}(x)) = \varphi^\tau h_\sigma g^{-\tau}(g^{-t_x}(x))$. Тогда

$$\varphi^{t_x+\tau}(h_\sigma(g^{-t_x-\tau}(x))) = \varphi^{t_x}\big(\varphi^\tau(h_\sigma(\varphi^{-\tau}(g^{-t_x}(x))))\big) = \varphi^{t_x}(h(g^{-t_x}(x)));$$

таким образом, отображение $H(x)$ корректно определено.

Если неблуждающее множество потока g^t содержит изолированное седловое состояние равновесия σ индекса Морса $n-1$, в окрестности которого поток g^t гладко сопряжен с потоком φ^{-t}, то перейдем к потоку g^{-t} и определим каноническую окрестность V_σ аналогично определению канонической окрестности седлового состояния равновесия индекса 1.

2.4. Продолжение диффеоморфизмов дисков. Следующее утверждение является переформулировкой теорем 3.1 и 3.2 из книги [15].

Предложение 2. *Пусть M^n — связное гладкое ориентируемое n-многообразие без края размерности $n \geq 2$, $e_i, e_i'\colon \mathbb{B}^n \to M^n$ $(i \in \{1,\dots,s\})$ — такие гладкие сохраняющие ориентацию вложения шара $\mathbb{B}^n$, что $e_i(\mathbb{B}^n) \cap e_j(\mathbb{B}^n) = e_i'(\mathbb{B}^n) \cap e_j'(\mathbb{B}^n) = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,s\}$, и N — компактное подмножество многообразия M^n такое, что $e_i(\mathbb{B}^n) \cup e_i'(\mathbb{B}^n) \subset \operatorname{int} N$ для любого $i \in \{1,\dots,s\}$. Тогда существует диффеотопный тождественному диффеоморфизм $\Phi\colon M^n \to M^n$ такой, что $\Phi e_i = e_i'$ для всех $i \in \{1,\dots,s\}$ и $\Phi|_{M^n\setminus N} = \mathrm{id}$.*[4]

3. АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССОВ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ИЗ КЛАССА $G(S^n)$ ПО ДВУХЦВЕТНОМУ ГРАФУ И ЕГО АВТОМОРФИЗМУ

В этом разделе доказывается теорема 1. Следующая лемма описывает структуру неблуждающего множества диффеоморфизма $f \in G(S^n)$.

Будем говорить, что седловая точка $\sigma \in \Omega_f$ имеет *положительный* (*отрицательный*) тип ориентации, если ограничение $f|_{W^{\mathrm{u}}_\sigma}$ диффеоморфизма f на многообразие W^{u}_σ сохраняет (меняет) его ориентацию. Так как f является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом, то из условия сохранения (обращения) ориентации W^{u}_σ ограничением $f|_{W^{\mathrm{u}}_\sigma}$ следует сохранение (обращение) ориентации W^{s}_σ ограничением $f|_{W^{\mathrm{s}}_\sigma}$.

Лемма 1. *Пусть $f \in G(S^n)$. Тогда*

(1) *множество $\Omega^1_f \cup \Omega^{n-1}_f$ содержит не более одной точки отрицательного типа ориентации; если такая точка существует, то замыкание ее инвариантного многообразия размерности $n-1$ соответствует центральному ребру графа Γ_f;*

[4]Диффеотопией называется изотопия $H(x,t)\colon X \times [0,1] \to Y$ такая, что для любого $t \in [0,1]$ отображение $H(x,t)\colon X \times \{t\} \to Y$ является диффеоморфизмом.

(2) *множество* Ω_f *содержит по крайней мере две неподвижные точки*;

(3) *если множество неподвижных точек* Fix_f *исчерпывается двумя точками* p, q, *то возможен в точности один из следующих случаев*:

(а) p — *сток,* q — *источник*;

(б) p — *сток,* q — *седло индекса* $n-1$ *отрицательного типа ориентации*;

(в) p — *источник,* q — *седло индекса* 1 *отрицательного типа ориентации.*

Доказательство. 1. Предположим, что множество Ω_f^1 содержит точку σ отрицательного типа ориентации периода m_σ. Тогда замыкание ее инвариантного многообразия W^{s}_σ делит сферу S^n на две компоненты связности D_+, D_- такие, что $f^{m_\sigma}(D_+) = D_-$. Тогда вершины, инцидентные ребру e_σ, принадлежат одной орбите автоморфизма P_f. В силу предложения 1 эти вершины имеют одинаковый ранг, а ребро e_σ является центральным. Так как любое дерево имеет не более одного центрального ребра, то σ является единственным седлом отрицательного типа ориентации и $m_\sigma = 1$. В случае $\sigma \in \Omega_f^{n-1}$ доказательство аналогично.

2. Положим $A_f = \bigcup_{p\in\Omega_f^0\cup\Omega_f^1} W^{\mathrm{u}}_p$ и $R_f = \bigcup_{q\in\Omega_f^{n-1}\cup\Omega_f^n} W^{\mathrm{s}}_p$. Аналогично [14] и [5, свойство 2.5] доказывается, что множества A_f, R_f связны и являются вложенными в S^n деревьями, вершины которых соответствуют узловым периодическим точкам, а ребра — одномерным инвариантным многообразиям седловых периодических точек. Ограничение диффеоморфизма f на множество узловых точек определяет автоморфизмы деревьев A_f, R_f, индуцирующие автоморфизмы на множестве ребер этих деревьев. Из предложения 1 следует, что каждое из деревьев A_f, R_f имеет либо неподвижную вершину (в этом случае диффеоморфизм f имеет неподвижную узловую точку), либо неподвижное ребро (в этом случае диффеоморфизм f имеет неподвижное седло). Отсюда следует, что множество Fix_f содержит по крайней мере две неподвижные точки.

3. Если множество неподвижных точек диффеоморфизма f исчерпывается двумя точками p, q, то возможны, вообще говоря, только следующие варианты:

(1) $p \in A_f$ — сток, $q \in R_f$ — источник;

(2) $p \in A_f$ — сток, $q \in R_f$ — седло;

(3) $p \in R_f$ — источник, $q \in A_f$ — седло;

(4) $p \in A_f$, $q \in R_f$ — седла.

Ситуация (4) невозможна, так как если седловая точка $p \in A_f$ неподвижна, то замыкание ее устойчивой сепаратрисы является f-инвариантным, что влечет за собой наличие неподвижного источника $\alpha \in \mathrm{cl}\, W^{\mathrm{s}}_p$; тогда множество неподвижных точек не исчерпывается седловыми точками p, q.

Напомним, что индекс ind_p гиперболической неподвижной точки p диффеоморфизма $f \in G$ определяется формулой

$$\mathrm{ind}_p = (-1)^{\dim W^{\mathrm{u}}_p} \nu_p,$$

где $\nu_p = 1$, если $f|_{W^{\mathrm{u}}_p}$ сохраняет ориентацию W^{u}_p, и $\nu_p = -1$, если $f|_{W^{\mathrm{u}}_p}$ меняет ориентацию W^{u}_p (см., например, [21, Proposition 4.11]). Из формулы Лефшеца (см., например, [20, Theorem 5.5]) следует, что для произвольного сохраняющего ориентацию гомеоморфизма сферы S^n сумма индексов его неподвижных точек равна 2 при четных n и 0 при нечетных n. Таким образом,

$$\sum_{p\in\mathrm{Fix}_f} \mathrm{ind}_p = \begin{cases} 2, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Из формулы (3.1) непосредственно следует, что в случаях (2), (3) седловая точка q имеет отрицательный тип ориентации. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть Γ — произвольное дерево с k вершинами, ребра которого окрашены в два цвета произвольным образом, оснащенное автоморфизмом $P\colon \Gamma \to \Gamma$, сохраняющим цвета. Покажем, что существует диффеоморфизм $f \in G(S^n)$, двухцветный граф Γ_f которого изоморфен графу Γ посредством изоморфизма $\zeta\colon \Gamma_f \to \Gamma$ такого, что $P_f = \zeta^{-1}P\zeta$.

В дальнейшем будем предполагать, что граф Γ удовлетворяет следующим условиям.

Предположение 1. 1. Если граф Γ центральный, то по крайней мере одно ребро, инцидентное центральной вершине, окрашено в цвет “s”.

2. Если граф Γ бицентральный, то его центральное ребро окрашено в цвет “s”.

Это предположение не уменьшает общности, так как если оно не выполняется, то можно обратить цвета всех ребер графа, заменив цвет “s” (“u”) на “u” (“s”), и, следуя предложенному ниже алгоритму, построить диффеоморфизм g, являющийся обратным к искомому. Тогда для получения исходного диффеоморфизма достаточно взять g^{-1}.

Опишем алгоритм построения диффеоморфизма f по графу Γ по шагам.

Шаг 1. *Построение потока g^t в $\mathbb{R}^n$ и гомеоморфизма $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ со следующими свойствами*:

(1) *неблуждающее множество Ω_{g^t} потока g^t состоит из гиперболических состояний равновесия, индексы Морса которых принадлежат множеству $\{0, 1, n-1, n\}$*;

(2) *инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются*;

(3) *существует шар B^n, содержащий все состояния равновесия потока g^t и такой, что его граница является сферой без контакта для g^t и все траектории из множества $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ идут внутрь шара B^n*;

(4) *число седловых состояний равновесия индекса* 1 (*индекса* $n-1$) *равно числу ребер графа* Γ, *окрашенных в цвет* “s” (*соответственно* “u”);

(5) *имеется взаимно однозначное соответствие $\xi_E\colon \mathcal{L}_{g^t} \to E(\Gamma)$ между множеством $\mathcal{L}_{g^t} = \{\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \mid p \in \Omega^1_{g^t}\} \cup \{\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q \mid q \in \Omega^{n-1}_{g^t}\}$ и множеством ребер графа Γ; множество всех подпространств, соответствующих элементам из $\mathcal{L}_{g^t}$, делит $\mathbb{R}^n$ на компоненты связности $D_1, \dots, D_k$, и имеется взаимно однозначное соответствие $\xi_V\colon \{D_i\}_{i=1}^k \to V(\Gamma)$ между этими компонентами и вершинами графа Γ*;

(6) *вершины $v, w \in V(\Gamma)$ инцидентны ребру $e \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда пересечение замыканий областей $\xi_V^{-1}(v)$, $\xi_V^{-1}(w)$ содержит множество $\xi_E^{-1}(e)$*;

(7) *H является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, узловых состояний равновесия потока g^t*;

(8) *$Hg^t = g^tH$ и $H(D_i) = \xi_V^{-1}P\xi_V(D_i)$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Построение потока g^t опишем по отдельности для двух случаев:

(i) граф Γ центральный;

(ii) граф Γ бицентральный.

Рассмотрим случай (i). Пусть v — центральная вершина. Обозначим через $e_{v,1}, \dots, e_{v,k_v}$, $e_{v,k_v+1}, \dots, e_{v,n_v}$ все ребра, инцидентные вершине v, занумерованные таким образом, что ребра $e_{v,1}, \dots, e_{v,k_v}$ имеют цвет “s”, а ребра $e_{v,k_v+1}, \dots, e_{v,n_v}$ имеют цвет “u”. По предположению 1 справедливо неравенство $1 \le k_v \le n_v$.

Определим поток g_0^t в пространстве $\mathbb{R}^n$ формулой $g_0^t(x_1, \dots, x_n) = (e^{-t}x_1, \dots, e^{-t}x_n)$. Неблуждающее множество потока g_0^t состоит из единственной стоковой точки O, находящейся в начале координат. Модифицируем поток g_0^t, используя вспомогательный поток φ^t, введенный

в п. 2.2. Напомним, что неблуждающее множество потока φ^t состоит из двух гиперболических состояний равновесия: седла q индекса 1 и стока p. Цилиндр

$$\mathbb{G} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\right\}$$

является инвариантным для потока φ^t, и ограничение потока φ^t на границу цилиндра определяется соотношением

$$\varphi^t\big|_{\partial\mathbb{G}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - t, x_2, \ldots, x_n).$$

Выберем на сфере

$$\mathbb{S}_1^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\right\}$$

попарно не пересекающиеся гладко вложенные $(n-1)$-диски $D_1^{n-1}, \ldots, D_{n_v}^{n-1}$ и положим

$$G_i = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} g_0^t(D_i^{n-1}), \qquad K_i = \bigcup_{t\in[-1,1]} g_0^t(D_i^{n-1}), \qquad i \in \{1, \ldots, n_v\}.$$

Определим диффеоморфизмы

$$h_i\colon \mathbb{G} \to G_i, \qquad i \in \{1, \ldots, n_v\},$$

следующим образом.

Пусть $\mathbb{D}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0,\ x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ и $\eta_i\colon \mathbb{D}^{n-1} \to D_i^{n-1}$ — произвольный диффеоморфизм. Положим $h_i(x_1, \ldots, x_n) = g_0^{-x_1}(\eta_i(0, x_2, \ldots, x_n))$ для $i \in \{1, \ldots, k_v\}$, $h_j(x_1, \ldots, x_n) = g_0^{x_1}(\eta_j(0, x_2, \ldots, x_n))$ для $j \in \{k_v + 1, \ldots, n_v\}$. Диффеоморфизмы $h_i\colon \mathbb{G} \to G_i$ удовлетворяют следующим условиям:

- $g_0^t|_{\partial G_i} = h_i \varphi^t h_i^{-1}|_{\partial G_i}$, $i \in \{1, \ldots, k_v\}$;
- $g_0^t|_{\partial G_i} = h_i \varphi^{-t} h_i^{-1}|_{\partial G_i}$, $i \in \{k_v + 1, \ldots, n_v\}$;
- $K_i = h_i(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \ldots, n_v\}$.

Определим поток g_1^t следующим образом:

$$g_1^t(x) = \begin{cases} g_0^t(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n_v} G_i, \\ h_i(\varphi^t(h_i^{-1}(x))), & x \in G_i,\ i \in \{1, \ldots, k_v\}, \\ h_i(\varphi^{-t}(h_i^{-1}(x))), & x \in G_i,\ i = \{k_v + 1, \ldots, n_v\}. \end{cases}$$

Неблуждающее множество потока g_1^t состоит в точности из k_v седловых состояний равновесия $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k_v}$ индекса 1, $n_v - k_v$ седловых состояний равновесия $\sigma_{k_v+1}, \ldots, \sigma_{n_v}$ индекса $n-1$, а также $n_v + 1$ стоковых состояний равновесия $O, \omega_1, \ldots, \omega_{n_v}$ и $n_v - k_v$ источниковых состояний равновесия $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_v - k_v}$.

Все состояния равновесия потока g_1^t, отличные от стока O, лежат в объединении боксов Черри $\bigcup_{i=1}^{n_v} K_i$, вне которых поток g_1^t совпадает с потоком g_0^t. По построению каждому ребру e_i поставлено в соответствие инвариантное многообразие размерности $n-1$ седлового состояния равновесия $\sigma_i = h_i(q)$, $i \in \{1, \ldots, n_v\}$. Узловые точки ω_i, α_j удовлетворяют соотношениям $\omega_i = h_i(p)$, $i \in \{1, \ldots, k_v\}$, и $\alpha_j = h_{k_v+j}(p)$, $j \in \{1, \ldots, n_v - k_v\}$.

Если ранг μ вершины v равен 1, то поток g_1^t является искомым потоком g^t. Если $\mu > 1$, то для каждой вершины v_i, инцидентной v, обозначим через $e_{v_i,1}, \ldots, e_{v_i,n_{v_i}}$ ребра, инцидентные вершине v_i, не совпадающие с ребром vv_i. Пусть ребра $e_{v_i,1}, \ldots, e_{v_i,k_{v_i}}$ окрашены в цвет “s”, а ребра $e_{v_i,k_{v_i}+1}, \ldots, e_{v_i,n_{v_i}}$ окрашены в цвет “u” ($k_{v_i} \geq 0$, $n_{v_i} \geq 0$, $n_{v_1}^2 + \ldots + n_{v_{n_v}}^2 > 0$).

Для каждого $i \in \{1, \dots, k_v\}$ на множестве $W^{\mathrm{s}}_{\omega_i} \cap \mathbb{S}^n_{e^2}$ выберем попарно не пересекающиеся $(n-1)$-диски $D^{n-1}_{i,1}, \dots, D^{n-1}_{i,n_{v_i}}$, для каждого $i \in \{k_v+1, \dots, n_v\}$ выберем попарно не пересекающиеся $(n-1)$-диски $D^{n-1}_{i,1}, \dots, D^{n-1}_{i,n_{v_i}}$, принадлежащие множеству $\mathbb{S}^n_{e^{-2}} \cap W^{\mathrm{u}}_{\alpha_i}$.

Положим

$$G_{i,j} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} g^t_1(D^{n-1}_{i,j}), \qquad K_{i,j} = \bigcup_{t \in [-1,1]} g^t_1(D^{n-1}_{i,j})$$

и обозначим через

$$h_{i,j}\colon \mathbb{G} \to G_{i,j}, \qquad i \in \{1, \dots, n_v\}, \quad j \in \{1, \dots, n_{v_i}\},$$

диффеоморфизмы, удовлетворяющие следующим условиям:

- $g^t_1|_{\partial G_{i,j}} = h_{i,j}\varphi^t h^{-1}_{i,j}|_{\partial G_{i,j}}$, $j \in \{1, \dots, k_{v_i}\}$;
- $g^t_1|_{\partial G_{i,j}} = h_{i,j}\varphi^{-t} h^{-1}_{i,j}|_{\partial G_{i,j}}$, $j \in \{k_{v_i}+1, \dots, n_{v_i}\}$;
- $K_{i,j} = h_{i,j}(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \dots, n_v\}$, $j \in \{1, \dots, n_{v_i}\}$.

Положим

$$g^t_2(x) = \begin{cases} g^t_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n_v} \bigcup\limits_{j=1}^{n_{v,i}} G_{i,j}, \\ h_{i,j}(\varphi^t(h^{-1}_{i,j}(x))), & x \in G_{i,j},\ i \in \{1, \dots, n_v\},\ j \in \{1, \dots, k_{v_i}\}, \\ h_{i,j}(\varphi^{-t}(h^{-1}_{i,j}(x))), & x \in G_{i,j},\ i \in \{1, \dots, n_v\},\ j \in \{k_{v_i+1}, \dots, n_{v_i}\}. \end{cases}$$

Если $\mu = 2$, то искомый поток g^t совпадает с потоком g^t_2. По построению каждому ребру $e_{v_i,j}$ поставлено в соответствие инвариантное многообразие размерности $n-1$ седлового состояния равновесия $\sigma_{i,j} = h_{i,j}(q)$, $i \in \{1, \dots, n_v\}$, $j \in \{1, \dots, n_{v_i}\}$. Если $\mu > 2$, то продолжим процесс присоединения состояний равновесия. Поскольку граф Γ связен и не содержит циклов, после конечного числа шагов получим поток g^t_μ, который будет искомым потоком g^t. Обозначим через $H_{\mathbb{G}}\colon \mathbb{G} \times \mathbb{Z}_{k-1} \to \bigcup_{i=1}^{n_v} G_i \cup \bigcup_{j=1}^{n_{n_i}} G_{i,j} \cup \dots$ отображение, ограничение которого на каждую копию $\mathbb{G} \times \{l\}$, $l \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, цилиндра $\mathbb{G}$ совпадает с одним из диффеоморфизмов $h_i, h_{i,j}, \dots$.

На рис. 3 приведен пример графа Γ, имеющего центральную вершину v ранга $\mu = 2$, и соответствующего ему потока g^t.

Автоморфизм P графа Γ индуцирует подстановку P_* на множестве состояний равновесия потока g^t следующим образом. В процессе построения потока g^t возникло взаимно однозначное соответствие $\xi_E\colon \mathcal{L}_{g^t} \to E(\Gamma)$ между множеством $\mathcal{L}_{g^t} = \{\operatorname{cl} W^{\mathrm{s}}_p \mid p \in \Omega^1_{g^t}\} \cup \{\operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_q \mid q \in \Omega^{n-1}_{g^t}\}$ и множеством ребер графа Γ, которое естественным образом определяет взаимно однозначное соответствие $\widetilde{\xi}_E\colon \Omega^1_{g^t} \cup \Omega^{n-1}_{g^t} \to E(\Gamma)$. Автоморфизм P индуцирует подстановку P_E на множестве ребер графа Γ следующим образом: если $uv \in E(\Gamma)$, то $P_E(uv) = P(u)P(v)$. Пусть σ — седловое состояние равновесия. Тогда $P_*(\sigma) = (\widetilde{\xi}_E)^{-1} P_E\, \widetilde{\xi}_E$.

По построению замыкание каждого инвариантного многообразия седлового состояния равновесия размерности $n-1$ потока g^t либо совпадает с ним самим, либо содержит, кроме самого многообразия, единственное узловое состояние равновесия (сток, если это многообразие неустойчиво, и источник, если оно устойчиво). Это позволяет однозначно определить подстановку P_* на множестве стоковых и источниковых состояний равновесия, принадлежащих замыканию хотя бы одного инвариантного многообразия размерности $n-1$, следующим образом. Пусть $\sigma \in \Omega^{n-1}_{g^t}$ и ω — стоковое состояние равновесия такое, что $\omega \in \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_\sigma$. Тогда найдется единственная стоковая точка ω_* такая, что $\omega_* \in \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_{P_*(\sigma)}$. Положим $P_*(\omega) = \omega_*$.

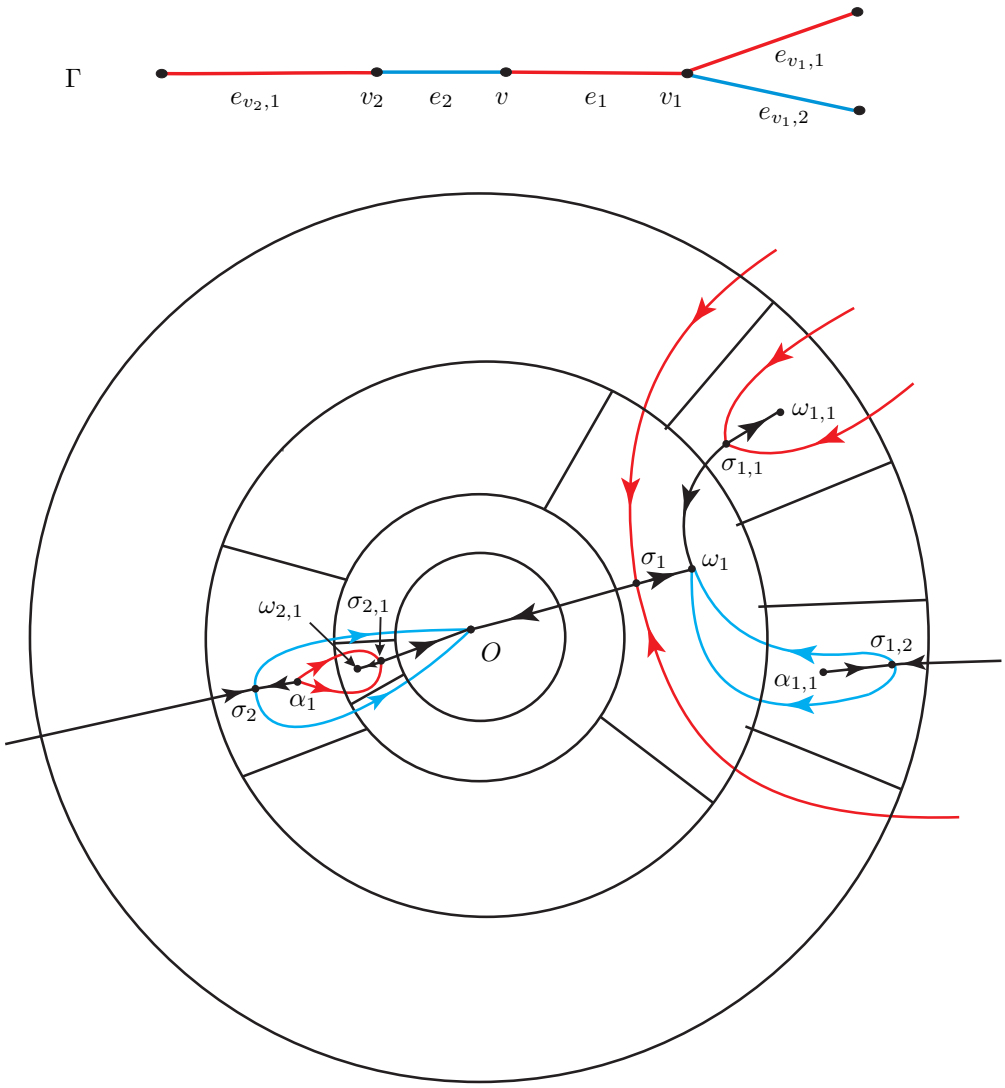

Рис. 3. Граф Γ и соответствующий ему поток g^t

Пусть ω — стоковое состояние равновесия, которое не принадлежит замыканию никакого инвариантного многообразия седлового состояния равновесия размерности $n-1$. Тогда сток ω содержится в замыкании по крайней мере одного одномерного инвариантного многообразия седловой периодической точки. Пусть $\sigma_1,\dots,\sigma_{\lambda_\omega}\in\Omega^1_{g^t}$ $(\lambda_\omega\geq 1)$ — все седловые состояния равновесия такие, что $\omega\in\operatorname{cl}W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$ для любого $i\in\{1,\dots,\lambda_\omega\}$. Положим $P_*(\omega)=\omega_*$ тогда и только тогда, когда $\omega_*\subset\operatorname{cl}W^{\mathrm{u}}_{P_*(\sigma_i)}$ для всех $i\in\{1,\dots,\lambda_\omega\}$. Для источниковых точек автоморфизм P_* определяется аналогично.

Выберем в окрестности каждого стокового состояния равновесия потока g^t сферу без контакта следующим образом.

Положим $\Sigma_O=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1^2+\ldots+x_n^2\leq e^{-10\mu}\}$. По построению Σ_O не пересекается ни с какими образами $K_i,K_{i,j},\dots$, $i\in\{1,\dots,n_v\}$, $j\in\{1,\dots,n_{v_i}\}$, бокса Черри. Поэтому Σ_O является сферой без контакта для траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию стоковой точки O.

Пусть $\mathcal{O}_{\omega_0}=\{\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{m_{\omega_0}-1}\}$ $(m_{\omega_0}>1)$ — набор попарно различных стоковых состояний равновесия, отличных от точки O и таких, что

$$\omega_1=P_*(\omega_0),\quad \omega_2=P_*^2(\omega_0),\quad \dots,\quad \omega_{m_{\omega_0}-1}=P_*^{m_{\omega_0}-1}(\omega_0),\quad \omega_0=P_*^{m_{\omega_0}}(\omega_0).$$

Пусть $u_p \in \mathbb{G} \setminus \{q\}$ — окрестность состояния равновесия p потока φ^t и $\Sigma_p \subset u_p$ — сфера без контакта для потока φ^t. Обозначим через Σ_{ω_i} сферы без контакта в окрестностях стоковых точек из множества $\mathcal{O}_{\omega_0}$, являющиеся образами сферы Σ_p при отображении $H_{\mathbb{G}}$.

Пусть $\mathcal{O}_{\sigma_0} = \{\sigma_0, \dots, \sigma_{k_{\sigma_0}}\}$ $(k_{\sigma_0} \geq m_{\omega_0})$ — набор попарно различных седловых состояний равновесия потока g^t таких, что

$$\sigma_1 = P_*(\sigma_0), \quad \sigma_2 = P_*^2(\sigma_0), \quad \dots, \quad \sigma_{k-1} = P_*^{k-1}(\sigma_0), \quad \sigma_0 = P^{k_{\sigma_0}}(\sigma_0)$$

и для каждого $i \in \{0, \dots, k_{\sigma_0} - 1\}$ найдется $j \in \{0, \dots, m_{\omega_0} - 1\}$ такое, что $\omega_j \subset \operatorname{cl} W^{\mathrm{u}}_{\sigma_i}$. Обозначим через $V_{\sigma_0}, \dots, V_{\sigma_{k_{\sigma_0}}}$ попарно не пересекающиеся канонические окрестности точек $\sigma_0, \dots, \sigma_{k_{\sigma_0}}$, являющиеся образами канонической окрестности V_q точки q потока φ^t относительно диффеоморфизма $H_{\mathbb{G}}$, и через $h_{\sigma_i} \colon V_q \to V_{\sigma_i}$ диффеоморфизм, являющийся ограничением диффеоморфизма $H_{\mathbb{G}}$ на множество $V_q \times \{l\}$, такой, что $h_{\sigma_i}(V_q \times \{l\}) = V_{\sigma_i}$. Из построения следует, что $h_{\sigma_i} g^t|_{V_{\sigma_i}} = \varphi^t h_{\sigma_i}|_{V_{\sigma_i}}$, если $\sigma_0 \in \Omega^1_{g^t}$, и $h_{\sigma_i} g^t|_{V_{\sigma_i}} = \varphi^{-t} h_{\sigma_i}|_{V_{\sigma_i}}$, если $\sigma_0 \in \Omega^{n-1}_{g^t}$, для любого $i \in \{1, \dots, k_{\sigma_0}\}$. Определим диффеоморфизм

$$H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}} \colon \bigcup_{i=0}^{k_{\sigma_0}} V_{\sigma_i} \to \bigcup_{i=0}^{k_{\sigma_0}} V_{\sigma_i}$$

следующим образом:

$$H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}(x) = \begin{cases} h^{-1}_{\sigma_{i+1}}(h_{\sigma_i}(x)), & x \in V_{\sigma_i},\ i \in \{0, \dots, k_{\sigma_0} - 2\}, \\ h^{-1}_{\sigma_0}\bigl(h_{\sigma_{k_{\sigma_0}-1}}(x)\bigr), & x \in V_{\sigma_{k_{\sigma_0}-1}}. \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}$ удовлетворяет следующим условиям:

- $H^{k_{\sigma_0}}_{\mathcal{O}_{\sigma_0}} = \mathrm{id}$;
- $g^t H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}} = H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}} g^t$;
- $H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}(V_{\sigma_i}) = V_{P_*(\sigma_i)}$, $i \in \{0, \dots, k_{\sigma_0} - 1\}$;
- $H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}(V_{\sigma_i} \cap \Sigma_{\omega_j}) = V_{P_*(\sigma_i)} \cap \Sigma_{P_*(\omega_j)}$.

Из предложения 2 следует, что существует диффеоморфизм

$$h_\Sigma \colon \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} \Sigma_{\omega_i} \to \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} \Sigma_{\omega_i}$$

такой, что

- $h_\Sigma(\Sigma_{\omega_i}) = \Sigma_{P_*(\omega_i)}$, $i \in \{0, \dots, m_{\omega_0} - 1\}$;
- $h_\Sigma\big|_{\left(\bigcup_{j=0}^{m_{\omega_0}} \Sigma_{\omega_j}\right) \cap \left(\bigcup_{0=1}^{k_{\sigma_0}-1} V_{\sigma_i}\right)} = H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}\big|_{\left(\bigcup_{j=0}^{m_{\omega_0}} \Sigma_{\omega_j}\right) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k_{\sigma_0}-1} V_{\sigma_i}\right)}$;
- $h^{m_{\omega_0}}_\Sigma = \mathrm{id}$.

Каждой точке $x \in W^{\mathrm{s}}_{\omega_i}$ поставим в соответствие время $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $g^{t_x}(x) \in \Sigma_{\omega_i}$, и определим диффеоморфизм

$$H_{\mathcal{O}_{\omega_0}} \colon \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{\omega_i} \to \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{\omega_i}, \qquad H_{\mathcal{O}_{\omega_0}}(x) = g^{-t_x}(h_\Sigma(g^{t_x}(x))), \quad x \in \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{\omega_i}.$$

Обозначим через $\widetilde{\Omega}^0_{g^t} \subset \Omega^0_{g^t}$, $\widetilde{\Omega}^1_{g^t} \subset \Omega^1_{g^t}$, $\widetilde{\Omega}^{n-1}_{g^t} \subset \Omega^{n-1}_{g^t}$ множества всех состояний равновесия потока g^t такие, что никакие два состояния равновесия $p, q \in \widetilde{\Omega}^i_{g^t}$ не принадлежат одной орбите отображения P_* и для любого $p \in \Omega^i_{g^t}$ найдутся $q \in \widetilde{\Omega}^i_{g^t}$ и целое $l \neq 0$ такие, что $p = P_*^l(q)$. Тогда

для любого $x \in S^n \setminus \Omega^n_{g^t}$ найдется такое $\omega_0 \in \widetilde{\Omega}^0_{g^t}$ или $\sigma_0 \in \widetilde{\Omega}^1_{g^t} \cup \widetilde{\Omega}^{n-1}_{g^t}$, что $x \in \bigcup_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{P^i_*(\omega_0)}$ или $x \in \bigcup_{i=0}^{k_{\sigma_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{P^i_*(\sigma_0)}$.

Положим

$$H(x) = \begin{cases} H_{\mathcal{O}_{\omega_0}}(x), & x \in \bigcup\limits_{i=0}^{m_{\omega_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{P^i_*(\omega_0)}, \\ \\ H_{\mathcal{O}_{\sigma_0}}(x), & x \in \bigcup\limits_{i=0}^{k_{\sigma_0}-1} W^{\mathrm{s}}_{P^i_*(\sigma_0)}. \end{cases}$$

Продолжив отображение H по непрерывности на множество $\Omega^n_{g^t}$, получим искомый гомеоморфизм.

Рассмотрим случай (ii). Пусть u, v — центральные вершины графа Γ и их ранг равен μ. По предположению 1 ребро uv окрашено в цвет “s”.

Определим поток g^t_1 в $\mathbb{R}^n$ следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = -x_{n-1}, \\ \dot{x}_n = x_n(a^2 - x_n^2), \end{cases}$$

где $a = 2\mu + 2$. Неблуждающее множество потока g^t_1 состоит из одного седлового состояния равновесия индекса 1, находящегося в начале координат O, и двух стоковых состояний равновесия $\omega_+ = (0, \dots, 0, a)$, $\omega_- = (0, \dots, 0, -a)$. Устойчивое многообразие седловой точки O совпадает с координатной гиперплоскостью $x_n = 0$, неустойчивое многообразие совпадает с осью Ox_n. Существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что сферы

$$S^{n-1}_+ = \bigl\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n - a)^2 = \varepsilon^2\bigr\},$$
$$S^{n-1}_- = \bigl\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n + a)^2 = \varepsilon^2\bigr\}$$

являются сферами без контакта для траекторий, принадлежащих множествам $W^{\mathrm{s}}_{\omega_+} \setminus \omega_+$, $W^{\mathrm{s}}_{\omega_-} \setminus \omega_-$ соответственно.

Обозначим через $e_{u,1}, \dots, e_{u,n_u}$ все ребра, инцидентные вершине u, и через $e_{v,1}, \dots, e_{v,n_v}$ все ребра, инцидентные вершине v, отличные от ребра uv.

Далее рассмотрим два случая:

(а) вершины u, v неподвижны;

(б) вершины u, v образуют орбиту периода 2.

В случае (а) выберем на сфере S^{n-1}_+ (S^{n-1}_-) попарно не пересекающиеся $(n-1)$-диски $D^{n-1}_1, \dots, D^{n-1}_{n_u}$ ($D^{n-1}_1, \dots, D^{n-1}_{n_v}$), положим $G_i = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} g^t_1(D^{n-1}_i)$, $K_i = \bigcup_{t \in [-1,1]} g^t_1(D^{n-1}_i)$ и далее продолжим процесс добавления состояний равновесия аналогично случаю (i). Гомеоморфизм H строится полностью аналогично случаю (i).

В случае (б) граф Γ делится ребром uv на две компоненты связности Γ_u, Γ_v такие, что $P(\Gamma_u) = \Gamma_v$.

Выберем на сфере $\mathbb{S}^{n-1}_+$ попарно не пересекающиеся $(n-1)$-диски $D^{n-1}_1, \dots, D^{n-1}_{n_u}$, далее добавим все состояния равновесия, соответствующие подграфу Γ_u, и обозначим полученный поток через g^t_+. Положим $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Аналогично случаю (i) построим гомеоморфизм $H_+ \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ такой, что

- H_+ является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, узловых состояний равновесия потока g^t_+;

- $H_+g^t = g^tH_+$ и $H(D_i) = \xi_V^{-1}P^2\xi_V(D_i)$ для любого $i \in \{1,\dots,k\}$;
- $H_+|_{W^{\mathrm{s}}_O} = \mathrm{id}$.

Пусть $\eta_{uv}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, заданный соотношением $\eta_{uv}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n) = (-x_1,x_2,\dots,x_{n-1},-x_n)$. Определим искомый поток g^t соотношением

$$g^t(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} g^t_+(x_1,\dots,x_n), & x_n \geq 0,\\ \eta_{uv}^{-1}g^t_+\eta_{uv}(x_1,\dots,x_n), & x_n < 0.\end{cases}$$

Наконец, определим гомеоморфизм $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ соотношением

$$H(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} H_+(x_1,\dots,x_n), & x_n \geq 0,\\ \eta_{uv}^{-1}H_+\eta_{uv}(x_1,\dots,x_n), & x_n < 0.\end{cases}$$

Шаг 2. *Построение гомеоморфизма $\widehat{f}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ такого, что*

(1) *$\widehat{f}$ является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, конечного числа притягивающих и отталкивающих периодических точек*;

(2) *неблуждающее множество $\Omega_{\widehat{f}}$ гомеоморфизма $\widehat{f}$ состоит из конечного числа седловых гиперболических периодических точек индексов 1, $n-1$ и конечного числа притягивающих и отталкивающих периодических точек, в окрестности которых $\widehat{f}$ топологически сопряжен с гладким гиперболическим отображением*;

(3) *имеется взаимно однозначное соответствие $\xi_E\colon \mathcal{L}_{\widehat{f}} \to E(\Gamma)$ между множеством $\mathcal{L}_{\widehat{f}} = \{\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{s}}_p \mid p \in \Omega^1_{\widehat{f}}\} \cup \{\mathrm{cl}\,W^{\mathrm{u}}_q \mid q \in \Omega^{n-1}_{\widehat{f}}\}$ и множеством ребер графа Γ; множество всех сфер, соответствующих элементам из $\mathcal{L}_{\widehat{f}}$, делит $\mathbb{S}^n$ на компоненты связности $D_1,\dots,D_k$, и имеется взаимно однозначное соответствие $\xi_V\colon \{D_i\}_{i=1}^k \to V(\Gamma)$ между этими компонентами и вершинами графа Γ*;

(4) *вершины $v,w \in V(\Gamma)$ инцидентны ребру $e \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда пересечение замыканий областей $\xi_V^{-1}(v)$, $\xi_V^{-1}(w)$ содержит множество $\xi_E^{-1}(e)$*;

(5) *$\widehat{f}(D_i) = \xi_V^{-1}P\xi_V(D_i)$ для любого $i \in \{1,\dots,k\}$*;

(6) *$\widehat{f}(l) = \xi_E^{-1}P\xi_E(l)$ для любого $l \in \mathcal{L}_{\widehat{f}}$.*

Обозначим через N точку в $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью $x_{n+1} = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим через $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ стереографическую проекцию, которая точке $P \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точку $\pi(P) = P'$, принадлежащую пересечению сферы $\mathbb{S}^n$ с прямой линией, проходящей через точки N, P.

Определим отображение $\widehat{f}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ формулой

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} x, & x = N,\\ \pi(H(g^1(\pi^{-1}(x)))), & x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}.\end{cases}$$

Отображение $\widehat{f}|_{\mathbb{S}^n\setminus\{N\}}$ топологически сопряжено с суперпозицией Hg^1 сдвига g^1 на единицу времени вдоль траекторий потока g^t и гомеоморфизма H, построенных на шаге 1. Точка N является неподвижной отталкивающей для отображения $\widehat{f}$. Так как проекция π является диффеоморфизмом, то $\widehat{f}$ является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, отталкивающих и притягивающих периодических точек.

Шаг 3. *Сглаживание отображения* $\widehat{f}$.

Построим диффеоморфизм $f\colon S^n \to S^n$, топологически сопряженный с отображением $\widehat{f}$, неблуждающее множество которого будет состоять из гиперболических точек. Тогда f будет искомым диффеоморфизмом.

Пусть ω — притягивающая точка отображения $\widehat{f}$ периода m_ω и

$$\mathcal{O}_\omega = \bigl\{\omega_0 = \omega,\ \omega_1 = \widehat{f}(\omega),\ \dots,\ \omega_{m_\omega - 1} = \widehat{f}^{\,m_\omega - 1}(\omega)\bigr\}.$$

Из построений следует, что отображение $\widehat{f}^{\,m_\omega}$ в окрестности точки ω включается в гладкий поток $\pi g^t \pi^{-1}$, поэтому существует гладко вложенная сфера Σ_ω, ограничивающая шар $B^n_\omega \supset \omega$, такая, что $f^{m_\omega}(B^n_\omega) \subset \operatorname{int} B^n_\omega$.

Положим

$$K^n_\omega = B^n_\omega \setminus \operatorname{int}\bigl(\widehat{f}^{\,m_\omega}(B^n_\omega)\bigr), \qquad \mathbb{K}^n = \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{int}\bigl(g_0^{m_\omega}(\mathbb{B}^n)\bigr),$$

где $g_0^{m_\omega}$ — сдвиг на время $t = m_\omega$ вдоль траекторий потока g_0^t, введенного на шаге 1.

Обозначим через $h_\omega\colon K^n_\omega \to \mathbb{K}^n$ диффеоморфизм такой, что

$$\widehat{f}^{\,m_\omega}\big|_{\Sigma_\omega} = h_\omega^{-1} g_0^{m_\omega} h_\omega\big|_{\Sigma_\omega}.$$

Пусть $O_0 = O, O_1, O_2, \dots, O_{m_\omega - 1}$ — точки из $\mathbb{R}^n$ такие, что для любых $i, j \in \{0, \dots, m_\omega - 1\}$, $i \neq j$, расстояние между точками O_i, O_j больше единицы. Обозначим через $\psi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейный сдвиг пространства $\mathbb{R}^n$ на вектор $\overrightarrow{OO_i}$, положим $\mathbb{B}^n(O_i) = \psi_i(g_0^i(\mathbb{B}^n))$ и определим гладкое вложение

$$A\colon \bigcup_{i=0}^{m_\omega - 1} \mathbb{B}^n(O_i) \to \bigcup_{i=0}^{m_\omega - 1} \mathbb{B}^n(O_i)$$

формулой

$$A(x) = \begin{cases} \psi_{i+1} g_0^1 \psi_i^{-1}(x), & x \in \mathbb{B}^n(O_i),\ i \in \{0, \dots, m_\omega - 2\}, \\ g_0^1 \psi_{m_\omega - 1}^{-1}(x), & x \in \mathbb{B}^n(O_{m_\omega - 1}). \end{cases}$$

Точки $O_0, \dots, O_{m_\omega - 1}$ образуют стоковую периодическую орбиту отображения A периода m_ω. Положим $\mathbb{K}^n = \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{int}(g^{m_\omega}(\mathbb{B}^n))$ и определим диффеоморфизм

$$H_\omega\colon \bigcup_{i \geq 0} f^i(K^n_\omega) \to \bigcup_{i \geq 0} A^i(\mathbb{K}^n), \qquad H_\omega(x) = \begin{cases} h_\omega(x), & x \in K^n_\omega, \\ \widehat{f}^{\,i}\bigl(h_\omega(\widehat{f}^{\,-i}(x))\bigr), & x \in \widehat{f}^{\,i}(K^n_\omega),\ i \geq 0. \end{cases}$$

Обозначим через

$$S^n_\omega = (\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{O}_\omega) \cup_{H_\omega} \left(\bigcup_{i=0}^{m_\omega - 1} A^i(\mathbb{B}^n) \right)$$

гладкую сферу, полученную из многообразий $\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{O}_\omega$ и $\bigcup_{i=0}^{m_\omega - 1} A^i(\mathbb{B}^n)$ отождествлением точек $x \in \bigcup_{i \geq 0} f^i(K^n_\omega)$ и $H_\omega(x)$. Пусть

$$p_\omega\colon\ (\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{O}_\omega) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{m_\omega - 1} A^i(\mathbb{B}^n) \right) \to S^n_\omega$$

— естественная проекция.

Определим отображение $\widetilde{f}_\omega\colon S^n_\omega \to S^n_\omega$ формулой

$$\widetilde{f}_\omega = p_\omega \widehat{f} p_\omega^{-1}.$$

Так как ограничение отображения p_ω на множество $S^n \setminus \mathcal{O}_\omega$ является диффеоморфизмом, то ограничение отображения $\widetilde{f}_\omega$ на множество $S^n_\omega \setminus \left(\Omega^0_{\widetilde{f}} \cup \Omega^n_{\widetilde{f}}\right)$ — также диффеоморфизм. Ограничение отображения $\widetilde{f}_\omega$ на множество $p_\omega\left(\bigcup_{i=0}^{m_\omega-1} f^i(B^n_\omega)\right)$ совпадает с отображением $p_\omega A p_\omega^{-1}$; следовательно, ограничение отображения $\widetilde{f}_\omega$ на это множество — диффеоморфизм, а орбита точки $p_\omega(\omega)$ является гиперболической. Таким образом, отображение $\widetilde{f}_\omega$ является диффеоморфизмом на множестве $\left(S^n_\omega \setminus \left(\Omega^0_{\widetilde{f}} \cup \Omega^n_{\widetilde{f}}\right)\right) \cup \mathcal{O}_{p_\omega(\omega)}$, топологически сопряженным с $\widehat{f}$.

Применим аналогичную процедуру сглаживания к отображению $\widetilde{f}_\omega$ в окрестностях всех его притягивающих и отталкивающих периодических орбит (за исключением орбиты точки $p_\omega(\omega)$) и через конечное число шагов получим требуемое отображение f. По построению двухцветный граф Γ_f диффеоморфизма f изоморфен графу Γ посредством изоморфизма $\zeta\colon \Gamma_f \to \Gamma$ такого, что $P_f = \zeta^{-1} P \zeta$.

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bonatti C., Grines V.Z.* Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6, N 4. P. 579–602.
2. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. Math. Ser. 2. 1962. V. 75, N 2. P. 331–341.
3. *Cantrell J.C.* Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69, N 5. P. 716–718.
4. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 61–86.
5. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С.* О классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис // Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 62–85.
6. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., Починка О.В.* О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 791–794.
7. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., Починка О.В.* О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 12. С. 81–104.
8. *Grines V.Z., Gurevich E.Ya., Pochinka O.V.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // J. Math. Sci. 2015. V. 208, N 1. P. 81–90.
9. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Починка О.В.* О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере в топологический поток // УМН. 2016. Т. 71, № 6. С. 163–164.
10. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms into topological flows // Moscow Math. J. 2019. V. 19, N 4. P. 739–760.
11. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Починка О.В.* Комбинаторный инвариант для каскадов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geq 4$ // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 1. С. 136–141.
12. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O., Malyshev D.* On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n: E-print, 2019. arXiv: 1911.10234 [math.DS].
13. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Жужома Е.В., Починка О.В.* Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий // УМН. 2019. Т. 74, № 1. С. 41–116.
14. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 111–133.
15. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
16. *Круглов В.Е., Починка О.В.* Критерий топологической сопряженности многомерных градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на сфере // Проблемы мат. анализа. 2020. Т. 104. С. 21–28.
17. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986.
18. *Пилюгин С.Ю.* Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах // Диф. уравнения. 1978. Т. 14, № 2. С. 245–254.
19. *Pochinka O.V., Galkina S.Yu., Shubin D.D.* Modeling of gradient-like flows on n-sphere // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 6. С. 63–72.
20. *Robinson C.* Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
21. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 6. P. 747–817.
22. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 5. С. 69–92.