

01 Сложная динамика неавтономного осциллятора с управляемой фазой внешнего воздействия

© Е.П. Селезнев^{1,2}, Н.В. Станкевич^{1,3,4,¶}

¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

² Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

³ Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

⁴ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 25 июля 2018 г.

Исследуется динамика неавтономного осциллятора, в котором фаза внешнего воздействия зависит линейно от динамической переменной. Такое управление фазой внешнего воздействия приводит к тому, что в поведении осциллятора наблюдается иерархия различных периодических и хаотических колебаний. Изучена структура пространства управляющих параметров. Показано, что в динамике системы наблюдаются колебательные режимы, аналогичные режимам неавтономного осциллятора с потенциалом в виде периодической функции.

DOI: 10.21883/0000000000

Во многих системах, включая радиофизические, биологические и др., наблюдаются колебательные процессы, при которых один объект, входящий в систему, воздействует на другой периодическим сигналом, но при изменении условий функционирования частота воздействия изменяется. Например, в системах передачи информации для обеспечения высокой устойчивости используется так называемая фазовая автоподстройка частоты [1]. Система сердечно-сосудистой регуляции живых организмов при изменении нагрузки увеличивает или уменьшает частоту сердцебиений [2]. При такого рода взаимодействиях зависимость фазы от динамической переменной может привести к возникновению в системе сложной динамики.

В качестве простейшего объекта исследования такой системы выберем классическую модель теории колебаний [3] — RLC -контур, возбуждаемый внешним колебанием:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = V \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где x, \dot{x} — динамические переменные, α — коэффициент диссипации, ω_0 — собственная частота колебаний контура, V, ω и φ — амплитуда, частота и фаза внешнего воздействия. Если $\varphi = \text{const}$, то уравнение (1) описывает поведение линейного неавтономного осциллятора. Если фаза зависит от динамической переменной, то уравнение (1) становится нелинейным. Рассмотрим наиболее простой вариант, когда фаза меняется по линейному закону

$$\varphi(t) = kx(t), \quad (2)$$

где k — постоянный коэффициент, $x(t)$ — динамическая переменная уравнения (1).

После перехода к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$ уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = V \sin(p\tau + kx), \quad (3)$$

где $p = \omega/\omega_0$ — нормированная частота внешнего воздействия. По сравнению с предыдущими случаями уравнение (3) содержит нелинейность типа $\sin(kx)$. В такой системе возможно появление сложных периодических и хаотических колебаний [4–7]. Особо отметим недавнюю работу [8], в которой было показано формирование мультистабильных хаотических аттракторов в неавтономной системе с синусоидальной нелинейностью.

Перейдем к численному исследованию системы (3). Анализ характера вынужденных колебаний осуществлялся на основе оценки спектра показателей Ляпунова, а также с помощью анализа сечения Пуанкаре. В качестве управляющих параметров использовались амплитуда V , частота p и коэффициент фазовой перестройки k . Для анализа на устойчивость уравнение (3) было преобразовано в систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\alpha y - x + V \sin z, \\ \dot{z} &= p + ky. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 1,а представлена карта динамических режимов системы (4) на плоскости параметров (k, p) при значении амплитуды воздействия $V = 1$. Различными оттенками серого цвета обозначены области периодических колебаний в соответствии с палитрой, представленной на рис. 1 внизу; хаотические колебания отмечены черным цветом. Штриховыми линиями отмечены резонансная и кратные ей частоты системы (3). Как видно из рис. 1,а, область сложных колебаний ограничена частотами воздействия, значения которых

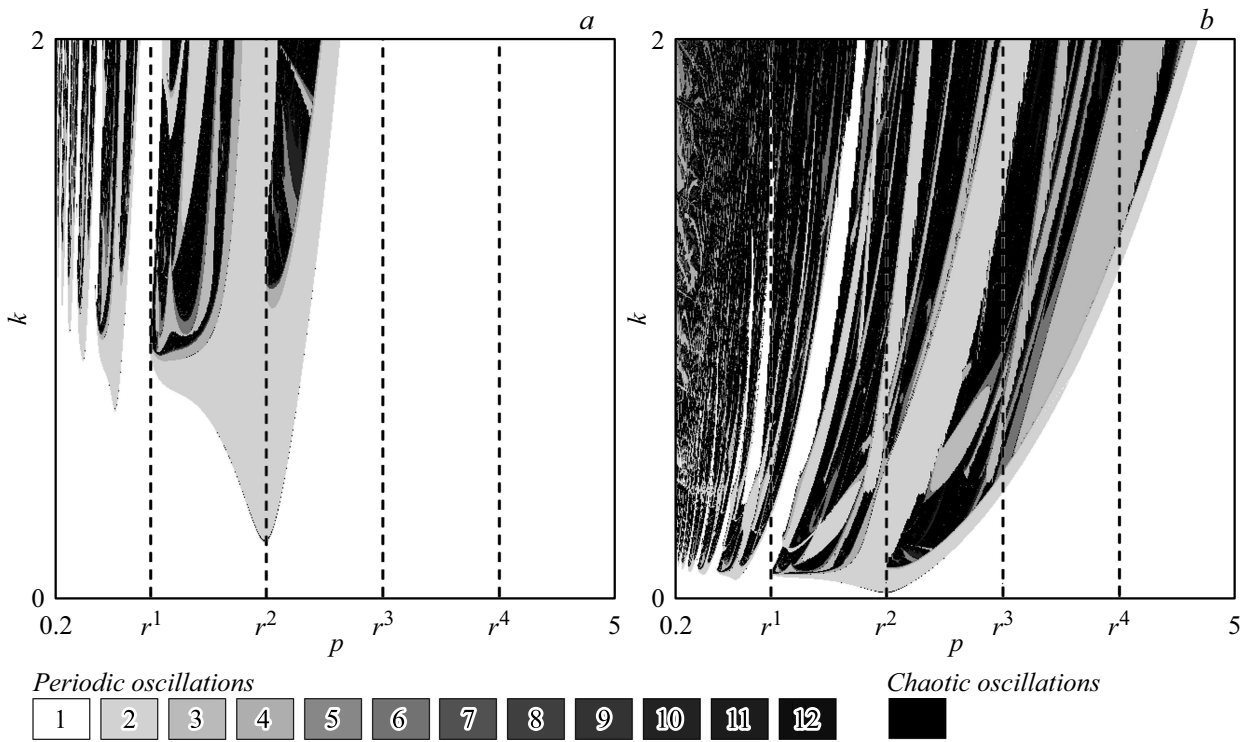


Рис. 1. Карты динамических режимов модели (4) при $\alpha = 0.1$. $V = 1$ (a) и 10 (b).

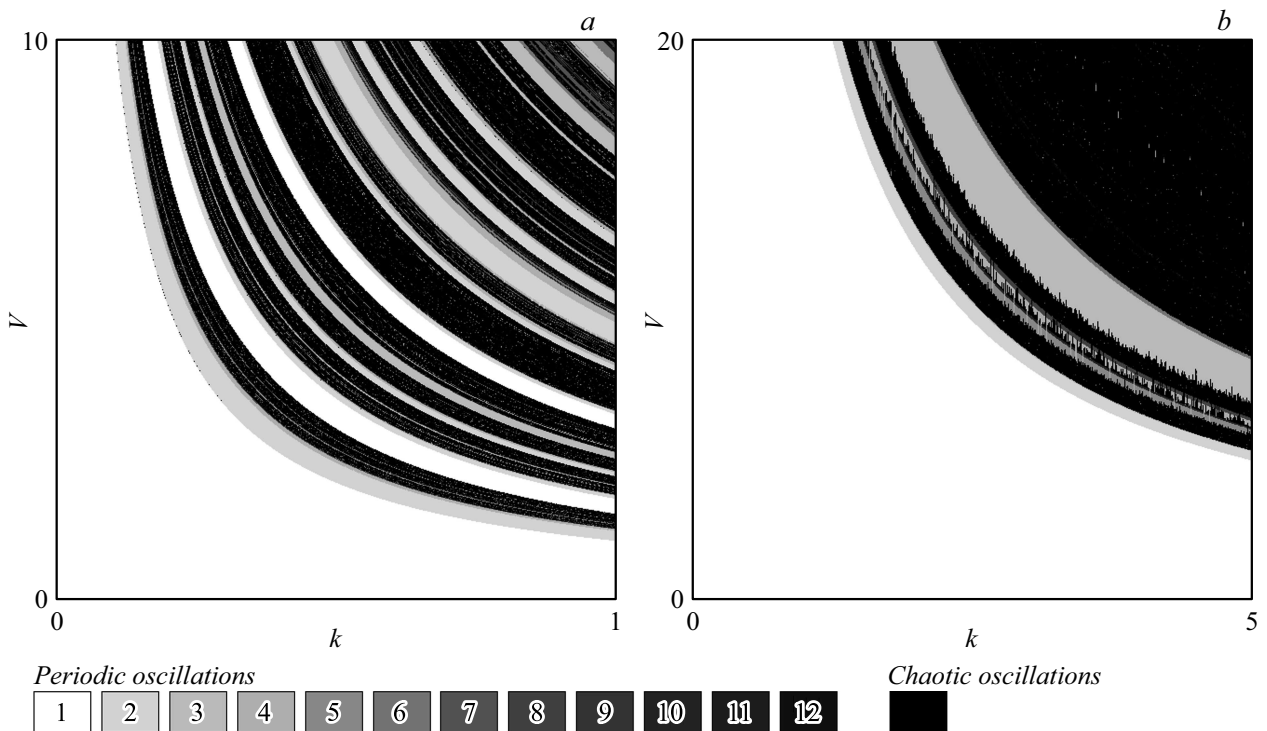


Рис. 2. Карты динамических режимов модели (4) при $\alpha = 0.1$. $p = 0.25$ (a) и 5 (b).

меньше третьей резонансной частоты r^3 . На малых частотах на плоскости параметров в динамике системы наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся переходом к хаосу. Линии

бифуркаций удвоения периода имеют характерный вид языков с некоторым порогом по параметру k . Так, для первой линии удвоения периода минимум расположен на удвоенной резонансной частоте r^2 , что характерно

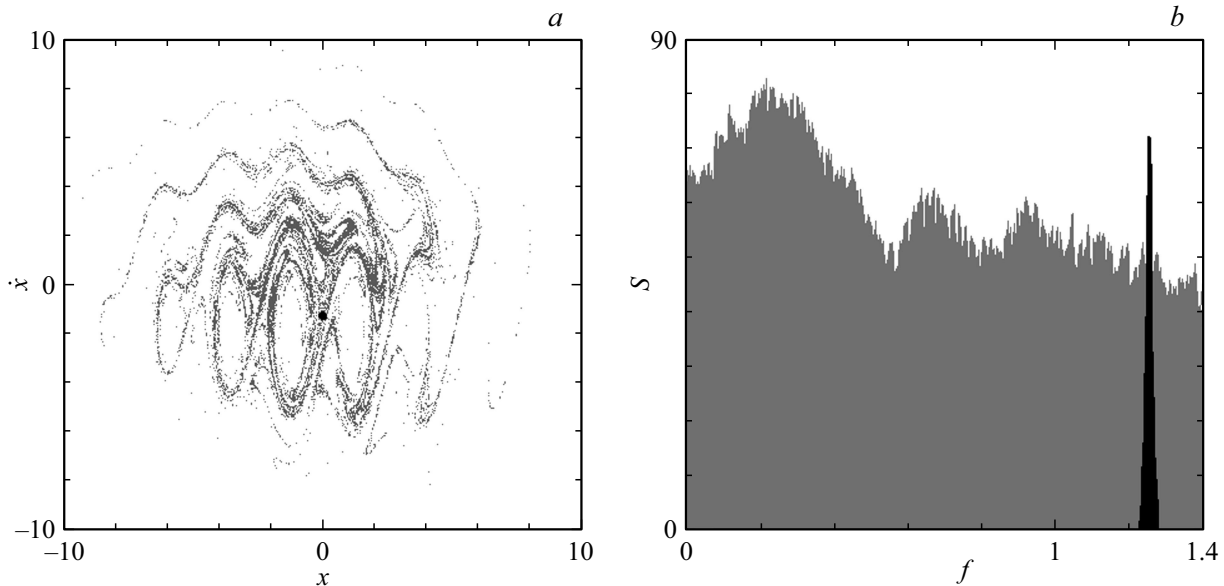


Рис. 3. *a* — фазовый портрет модели (4) в стробоскопическом сечении при $\alpha = 0.1$, $p = 5$, $k = 2.5$, $V = 8.4$, $x_0 = -0.0267$, $y_0 = -1.2176$ (черный цвет — периодический режим) и $x_0 = 2.1878$, $y_0 = -4.8897$ (серый цвет — хаотический режим); *b* — спектры Фурье сосуществующих режимов.

для структуры пространства управляющих параметров неавтономного нелинейного осциллятора [2–7]. С уменьшением частоты воздействия наблюдаются аналогичные линии удвоения периода на частотах, отвечающих субрезонансам. С уменьшением частоты порог бифуркации удвоения периода увеличивается.

С увеличением параметра k наблюдается развитие хаоса, обусловленное уменьшением связности хаотического аттрактора, чередуемое с появлением зон периодических колебаний. В целом структура плоскости управляющих параметров (рис. 1, *a*) во многом напоминает аналогичную для неавтономного нелинейного осциллятора [6,7]: можно выделить отдельные зоны сложного поведения, связанные с так называемыми резонансами на высших гармониках.

На рис. 1, *b* представлена карта режимов колебаний системы (4) на плоскости параметров (k, p) при значении амплитуды воздействия $V = 10$. Из сравнения с рис. 1, *a* видно, что увеличение амплитуды привело к расширению областей существования сложных колебательных режимов, а также к появлению в области существования хаоса новых зон периодических колебаний. Но минимум первой линии бифуркации удвоения периода по-прежнему находится на удвоенной резонансной частоте r^2 , как и при малой амплитуде. Возникновение зон периодических режимов в области существования хаоса носит жесткий характер. При этом в динамике системы появляются режимы колебаний, соответствующие так называемой динамике нелинейного осциллятора с „многоямной“ потенциальной функцией. В частности, подобная динамика наблюдается в обобщенном уравнении Дуффинга [2–5]. Переход от периодического режима к хаосу также происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Обратимся к анализу плоскости параметров амплитуда воздействия–фазовая расстройка. На рис. 2, *a* и *b* представлены карты динамических режимов на плоскости параметров (V, k) для двух значений параметра p : $p = 0.25$ (*a*) и 5 (*b*). С ростом V и k в поведении исследуемой системы (рис. 2, *a*) наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний. В области хаоса жестким образом формируются новые области периодических колебаний, переход от которых к хаосу также происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. При значении параметра $p = 5$ (рис. 2, *b*) структура карты параметров качественно повторяется, что иллюстрирует многообразие зон существования различных режимов колебаний. Как и на рис. 2, *a*, с ростом параметров V и k в поведении исследуемой системы наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний; в области хаоса формируются новые области колебаний периодов 3 и 5; имеется обширная область хаоса с узкими зонами периодических колебаний.

При больших значениях параметра p на карте хорошо видны жесткие переходы между различными динамическими режимами. Такая картина указывает на наличие в системе мультистабильности. Анализ системы на мультистабильность показал, что в системе возможно возникновение различных типов сосуществующих аттракторов. Могут сосуществовать периодические аттракторы с различным периодом, возможна также мультистабильность между периодическими и хаотическими колебаниями.

На рис. 3, *a* представлены сосуществующие аттракторы: с предельным циклом периода 1 (черный цвет) и хаотический аттрактор (серый цвет). На рисунке показаны аттракторы в стробоскопическом сечении, т.е. через период внешнего воздействия, построенные для

одних и тех же параметров $\alpha = 0.1$, $p = 5$, $k = 2.5$, $V = 8.4$, но для различных начальных значений численного интегрирования: при $x_0 = -0.0267$, $y_0 = -1.2176$ фазовая траектория приходит на устойчивый предельный цикл периода 1, а при $x_0 = 2.1878$, $y_0 = -4.8897$ — на хаотический аттрактор. Как видно из рисунка, в стробоскопическом сечении предельному циклу соответствует одна неподвижная точка. Хаотический аттрактор представляет собой сложную структуру, аналогичную структуре аттрактора неавтономной системы в работе [8]. На рис. 3, *b* представлены спектры Фурье сосуществующих режимов: по-прежнему серый цвет соответствует хаотическому режиму, черный — периодическому. Из рис. 3, *b* хорошо видно, что спектральный состав сигналов сильно различается. Основной пик хаотического колебания находится на более низких частотах, при этом спектр довольно широкий. Хаотический аттрактор характеризуется следующими показателями Ляпунова: $\Lambda_1 = 0.2332$, $\Lambda_2 = 0.0$, $\Lambda_3 = -0.3431$.

Таким образом, введение линейной зависимости фазы внешнего воздействия от динамической переменной в неавтономном осцилляторе приводит к формированию в динамике системы иерархии периодических и хаотических колебаний. При малой амплитуде воздействия область существования сложных колебаний ограничена по частоте значением, примерно равным утроенной резонансной частоте. Увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к расширению областей существования сложных режимов колебаний, а также к появлению в области существования хаоса новых зон периодических колебаний. При этом в динамике системы появляются режимы колебаний, соответствующие так называемой динамике нелинейного осциллятора с периодическим потенциалом. Наблюдаются также мультистабильности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-12-01008).

Список литературы

- [1] Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2013. 336 с.
- [2] Гайтон А.К., Холл Дж.Э. Медицинская физиология / Пер. с англ. под ред. В.И. Кобрин. М.: Логосфера, 2008. 1296 с.
- [3] Рожнев А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
- [4] Li T.Y., Yorke J.A. // Am. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
- [5] Humieres D.D., Beasley M.R., Huberman B.A., Libhaber A. // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. N 6. P. 3484–3496.
- [6] Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 12. С. 2558–2566.
- [7] Безручко Б.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 19. С. 75–79.
- [8] Tang Y.-X., Khalaf A.J.M., Rajagopal K., Pham V.-T., Jafari S., Tian Y. // Chin. Phys. B. 2018. V. 27. N 4. P. 040502.