



МХИТАРЯН Владимир Сергеевич — доктор экономических наук, профессор, руководитель департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук Национального исследовательского университета Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ), автор более 300 научных и учебно-методических работ по применению вероятностно-статистических методов в социально-экономических исследованиях



ШИШОВ Владимир Федорович — кандидат экономических наук, доцент, преподаватель кафедры «Автоматизированные системы управления и программное обеспечение» Пензенского филиала Военной академии МТО (Пензенский артиллерийский инженерный институт), автор более 200 научных и учебно-методических работ по применению статистических и экономико-математических методов в экономических и военно-технических исследованиях



КОЗЛОВ Андрей Юрьевич — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Автоматика и телемеханика» Пензенского государственного университета (ПГУ), автор более 100 научных и учебно-методических работ по математическому анализу данных в технических и социально-экономических приложениях

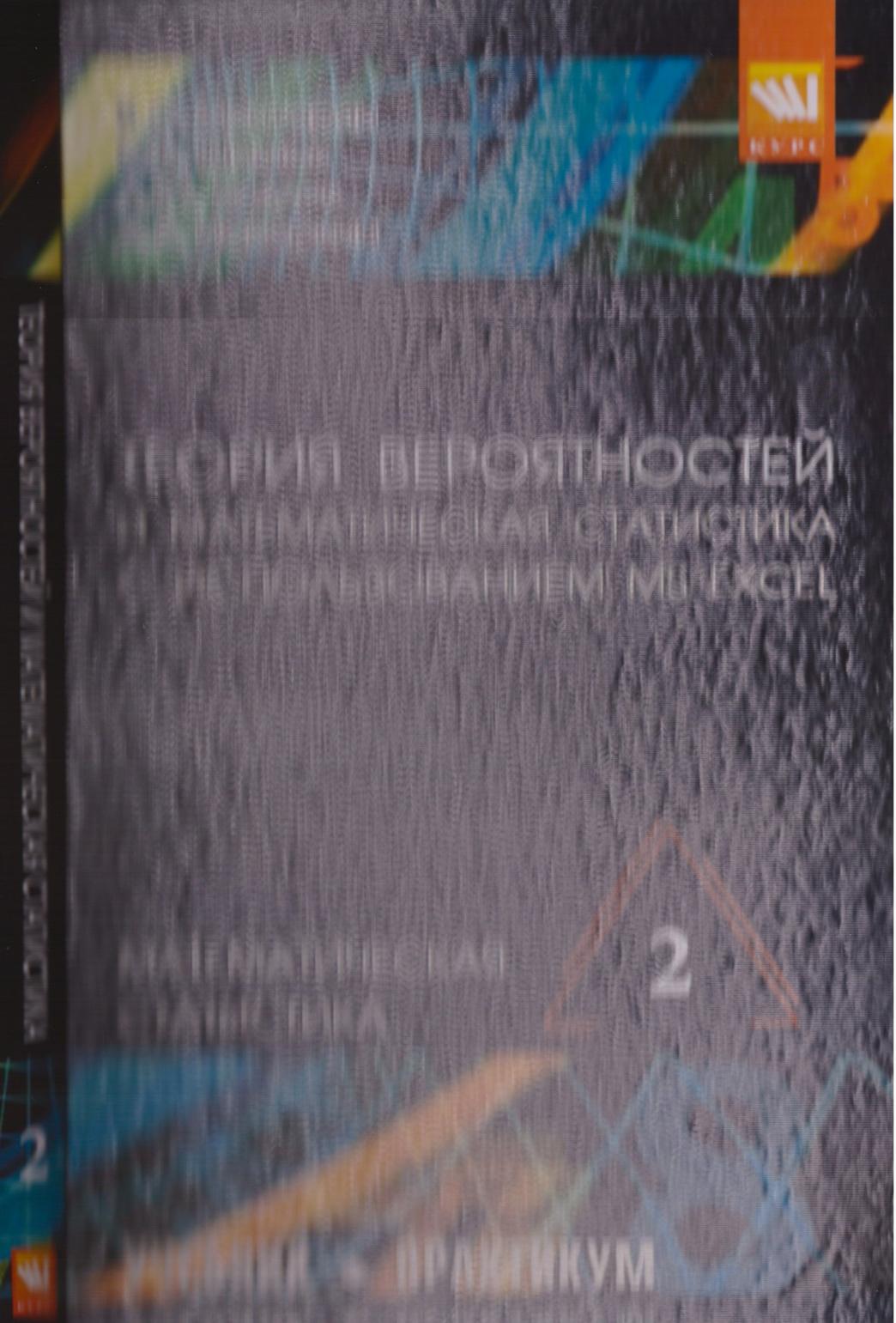


ИСКОРКИН Дмитрий Викторович — кандидат технических наук, доцент, докторант Пензенского филиала Военной академии МТО (Пензенский артиллерийский инженерный институт), автор более 100 научных и учебно-методических работ по применению математических методов в военно-технических исследованиях

ISBN 978-5-907228-09-2



9 785907 228092



**В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов,
А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

Часть 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

*Практикум с применением статистических функций,
инструментов Пакета анализа MS Excel-2016
и специальных (авторских) программ на языке VBA*

Москва
КУРС
2019

УДК 519.2
ББК 22.17
М93

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Р е ц е н з е н т ы :

Тихомиров Николай Петрович — д-р экон. наук, профессор, заведующий кафедрой математические методы в экономике Российской экономического университета им. Г.В. Плеханова;

Балаш Владимир Алексеевич — д-р экон. наук, профессор, профессор кафедры математической экономики Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Мхитарян, В.С.,

М93

Теория вероятностей и математическая статистика с использованием MS Excel. Учебник и практикум. В 2 ч. Ч. 2. Математическая статистика / В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов, А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин. — М.: КУРС, 2019. — 304 с.

ISBN 978-5-907228-09-2

Во второй части учебника «Математическая статистика» подробно рассмотрены требования к статистическим оценкам, точечное и интервальное оценивание параметров распределения, параметрические и непараметрические методы проверки статистических гипотез, дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ.

По каждому разделу приводятся подробные решения типовых задач, предлагаются задачи для самостоятельной работы студентов. Особую ценность учебнику придает множество примеров, взятых из практики и решенных с помощью инструментов Пакета анализа, Статистических функций MS Excel-2016, а также специальных (авторских) программ, выполненных на объектно-ориентированном языке программирования VBA. Все решенные таким образом примеры, используемые при этом программы, представлены на сайте по адресу, указанному на с. 4.

Учебник написан в соответствии с Государственными образовательными стандартами направления подготовки «Экономика» и предназначен для студентов данного и других направлений подготовки, а также может быть рекомендован аспирантам и преподавателям вузов, широкому кругу читателей, применяющих методы теории вероятностей в своей научной и практической деятельности.

УДК 519.2
ББК 22.17

© В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов,
А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин, 2019
© КУРС, 2019



ISBN 978-5-907228-09-2

Подписано в печать 31.05.2019.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 19,0.

Тираж 500 экз. Заказ № 5396

TK 695705-990770-310519

ООО Издательство «КУРС»

127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.

Тел.: (495) 203-57-83.

E-mail: kursizdat@gmail.com http://kursizdat.ru

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории вероятностей, рассмотренные в первой части учебника, служат для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, при оценке качества продукции, в военном деле и для многих других целей.

Определение различных параметров случайных величин и процессов на основе статистических наблюдений проводят с использованием зависимостей математической статистики.

Математическая статистика — это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей и получения обоснованных рекомендаций, направленных на совершенствование практической деятельности.

Дальнейшее расширение и повышение эффективности современного производства, внедрение автоматизации и механизации совершающихся в нем процессов, повышение качества продукции неразрывно связано с применением новых математических методов, к числу которых относятся методы математической статистики, дающие возможность правильно организовать контроль технологии производства, существенно сократить брак, более эффективно использовать материалы.

Технологический процесс производства массовой продукции на любом предприятии организуется на основе проекта и предварительно проведенных научно-технических расчетов. Однако, как бы ни были точны и совершенны инженерные расчеты, в них не представляется возможным заранее предусмотреть всё разнообразие случайных факторов, оказывающих влияние на качество выпускаемой продукции.

В этих условиях возможный путь изучения причин отклонений характеристик выпускаемой продукции от номинала — проведение наблюдений (измерений, опытов). Выводы о закономерностях, которым подчиняются явления, изучаемые методами математической статистики, всегда основываются на ограниченном, выборочном числе наблюдений. При большем числе наблюдений эти выводы могут оказаться иными. Для вынесения более определенного заключения о закономерностях явлений математическая статистика опирается на теорию вероятностей.

Для экономиста и инженера, применяющего математическую статистику в своей практической деятельности, важно умение распознать в реальной задаче её вероятностные черты, поставить, если

Таблица 15

Таблица Фишера—Ийтса

Значения r_{kp} , найденные для уровня значимости α и чисел степеней свободы $k = n - 2$ в случае парной корреляции и $k = n - l - 2$, где l — число исключенных величин в случае частной корреляции.

k	Двусторонние границы				k	Двусторонние границы			
	0,05	0,02	0,01	0,001		0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,997	1,000	1,000	1,000	16	0,468	0,543	0,590	0,708
2	0,950	0,980	0,990	0,999	17	0,456	0,529	0,575	0,693
3	0,878	0,934	0,959	0,991	18	0,444	0,516	0,561	0,679
4	0,811	0,882	0,917	0,974	19	0,433	0,503	0,549	0,665
5	0,754	0,833	0,875	0,951	20	0,423	0,492	0,537	0,652
6	0,707	0,789	0,834	0,925	25	0,381	0,445	0,487	0,597
7	0,666	0,750	0,798	0,898	30	0,349	0,409	0,449	0,554
8	0,632	0,715	0,765	0,872	35	0,325	0,381	0,418	0,519
9	0,602	0,685	0,735	0,847	40	0,304	0,358	0,393	0,490
10	0,576	0,658	0,708	0,823	45	0,288	0,338	0,372	0,465
11	0,553	0,634	0,684	0,801	50	0,273	0,322	0,354	0,443
12	0,532	0,612	0,661	0,780	60	0,250	0,295	0,325	0,408
13	0,514	0,592	0,641	0,760	70	0,232	0,274	0,302	0,380
14	0,497	0,574	0,623	0,742	80	0,217	0,257	0,283	0,338
15	0,482	0,558	0,606	0,725	90	0,205	0,242	0,267	0,338
					100	0,195	0,230	0,254	0,321
k	0,025	0,010	0,005	0,0005	k	0,025	0,010	0,005	0,0005
	Односторонние границы					Односторонние границы			

Таблица 16

Таблица Z-преобразования Фишера

$$Z = \frac{1}{2} \{\ln(1+r) - \ln(1-r)\}$$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0101	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3767	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5764	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6932	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9077	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,589	1,6584	1,7381	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6467
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	8
1.1. Генеральная и выборочная совокупности	8
1.2. Вариационные ряды. Графическое изображение вариационных рядов	13
1.3. Понятие об оценке параметров, требования к статистическим оценкам.....	18
1.4. Методы оценивания параметров распределения	22
1.4.1. Метод моментов.....	22
1.4.2. Метод максимального правдоподобия	23
1.5. Оценка математического ожидания по выборке	26
1.5.1. Измерения неравноточные	27
1.5.2. Измерения равноточные	30
1.5.3. Обработка нескольких серий измерений	31
1.6. Оценка дисперсии по выборке	35
1.6.1. Истинное значение измеряемой величины известно	35
1.6.2. Истинное значение измеряемой величины неизвестно	39
1.6.3. Статистическая оценка среднего квадратического отклонения	41
1.6.4. Обработка нескольких серий измерений	45
1.7. Статистическая оценка корреляционного момента (ковариации)	47
1.8. Выборочные начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс	50
1.9. Задачи для самостоятельного решения	55
Глава 2. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	61
2.1. Понятие доверительного интервала. Доверительная вероятность	61
2.2. Распределения, используемые при интервальном оценивании	62
2.2.1. Распределение $\chi^2(\chi^2 : k)$	63
2.2.2. Распределение Стьюдента $T : k$	70
2.3. Построение доверительного интервала для математического ожидания при известном σ	77
2.4. Построение доверительного интервала для математического ожидания при неизвестном σ	82
2.5. Построение доверительного интервала для дисперсии (среднего квадратического отклонения)	86
2.6. Интервальные оценки генеральной доли или вероятности p	92
2.7. Задачи для самостоятельного решения	96
Глава 3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ	100
3.1. Понятие статистической гипотезы	100
3.2. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению	107
3.2.1. Дисперсия генеральной совокупности известна	107
3.2.2. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна	110
3.3. Мощность критерия	112
3.4. F-распределение (распределение Фишера) ($F: k_1, k_2$)	120
3.5. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей	129
3.6. Проверка гипотезы о равенстве дисперсии σ^2 генеральной совокупности заданному нормативному значению	132

3.7.	Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних двух нормальных совокупностей.....	135
	3.7.1. Дисперсии известны	135
	3.7.2. Дисперсии неизвестны, но равны	138
	3.7.3. Дисперсии неизвестны и не равны	141
	3.7.4. Проверка гипотезы о равенстве средних для двух выборок из одной генеральной совокупности.....	145
3.8.	Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий по выборкам различного объема. Критерий Бартлетта	148
3.9.	Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий по выборкам одинакового объема. Критерий Кохрана.....	151
3.10.	Проверка гипотез о вероятности в случае биномиального распределения.....	154
	3.10.1. Проверка гипотезы о значении вероятности.....	154
	3.10.2. Проверка гипотезы об однородности ряда вероятностей.....	156
3.11.	Проверка гипотезы о виде закона распределения	158
	3.11.1. Критерий согласия Пирсона (χ^2).....	159
	3.11.2. Критерий согласия Колмогорова	169
	3.11.3. Критерий согласия ω^2	172
3.12.	Оценка сомнительных результатов	175
3.13.	Задачи для самостоятельного решения	179

Глава 4. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ 188

4.1.	Основные понятия	188
4.2.	Критерий знаков	189
4.3.	Критерий Вилкоксона.....	192
4.4.	Критерий серий знаков	196
4.5.	Критерий Спирмена	200
4.6.	Задачи для самостоятельного решения	202

Глава 5. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ 207

5.1.	Однофакторный дисперсионный анализ.....	207
5.2.	Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений	213
5.3.	Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями	219
5.4.	Задачи для самостоятельного решения	224

Тема 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ 233

6.1.	Корреляционный анализ	233
	6.1.1. Двумерная модель	233
	6.1.2. Проверка значимости и интервальная оценка параметров связи.....	238
	6.1.3. Множественная корреляция	244
6.2.	Регрессионный анализ.....	246
	6.2.1. Двумерное (парное) линейное уравнение регрессии	247
	6.2.2. Проверка значимости уравнения регрессии.....	252
	6.2.3. Интервальные оценки параметров регрессии	255
	6.2.4. Определение параметров параболической функции	258
	6.2.5. Построение множественного уравнения регрессии	259
6.3.	Временные ряды и прогнозирование	268
	6.3.1. Основные понятия.....	268
	6.3.2. Адаптивные методы прогнозирования	269
6.4.	Задачи для самостоятельного решения	274

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 283

ПРИЛОЖЕНИЕ 285