



КУРС



МХИТАРЯН Владимир Сергеевич — доктор экономических наук, профессор, руководитель департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук Национального исследовательского университета Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ), автор более 300 научных и учебно-методических работ по применению вероятностно-статистических методов в социально-экономических исследованиях

ШИШОВ Владимир Федорович — кандидат экономических наук, доцент, преподаватель кафедры «Автоматизированные системы управления и программное обеспечение» Пензенского филиала Военной академии МТО (Пензенский артиллерийский инженерный институт), автор более 200 научных и учебно-методических работ по применению статистических и экономико-математических методов в экономических и военно-технических исследованиях



КОЗЛОВ Андрей Юрьевич — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Автоматика и телемеханика» Пензенского государственного университета (ПГУ), автор более 100 научных и учебно-методических работ по математическому анализу данных в технических и социально-экономических приложениях

ИСКОРКИН Дмитрий Викторович — кандидат технических наук, доцент, докторант Пензенского филиала Военной академии МТО (Пензенский артиллерийский инженерный институт), автор более 100 научных и учебно-методических работ по применению математических методов в военно-технических исследованиях



ISBN 978-5-907064-96-6

9 785907 064966



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

1

УЧЕБНИК ПРАКТИКУМ

**В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов,
А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин**

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
MS EXCEL**

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

Часть 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Практикум с применением статистических функций,
инструментов Пакета анализа MS Excel-2016
и специальных (авторских) программ на языке VBA*

Москва
КУРС
2019

УДК 519.2
ББК 22.17
М93

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

Тихомиров Николай Петрович — д-р экон. наук, профессор, заведующий кафедрой математические методы в экономике Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова;

Балаш Владимир Алексеевич — д-р экон. наук, профессор, профессор кафедры математической экономики Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Мхитарян, В.С.,

М Теория вероятностей и математическая статистика с использованием MS Excel. Учебник и практикум в 2-х частях. Ч. 1. Теория вероятностей / В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов, А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин. — М.: КУРС, 2019. — 240 с.

ISBN 978-5-907064-96-6

Учебник охватывает все основные разделы курса теории вероятностей и математической статистики. В первой части учебника «Теория вероятностей» изложены основные сведения, относящиеся к изучению случайных событий, случайных величин и законов их распределения, систем случайных величин, законов распределения функций случайных величин, предельных теорем теории вероятностей.

В каждом разделе излагаются основные теоретические положения, поясняются предпосылки применения вероятностных методов. По каждому разделу приводятся подробные решения типовых задач, предлагаются задачи для самостоятельной работы студентов. Особую ценность учебнику придает множество примеров, почерпнутых из практики и решенных с помощью инструментов Пакета анализа, Статистических функций MS Excel-2016, а также специальных (авторских) программ, выполненных на объектно-ориентированном языке программирования VBA. Все решенные таким образом примеры, используемые при этом программы, представлены на сайте по адресу, указанному на с. 5.

Учебник написан в соответствии с Государственными образовательными стандартами направления подготовки «Экономика» и предназначен для студентов данного и других направлений подготовки, а также может быть рекомендован аспирантам и преподавателям вузов, широкому кругу читателей, применяющих методы теории вероятностей в своей научной и практической деятельности.

УДК 519.2
ББК 22.17



ISBN 9-978-907064-96-6

© В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов,
А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин, 2019
© КУРС, 2019

ВВЕДЕНИЕ

В научных исследованиях, экономике, технике и массовом производстве часто приходится встречаться с явлениями, которые при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта в неизменных условиях протекают каждый раз несколько по-иному. Такие явления называются случайными.

По мере развития многих отраслей науки становится необходимым изучать случайные явления, для того чтобы научиться предвидеть действия случайных факторов и учитывать их на практике.

Математическая наука, изучающая общие закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на рассматриваемые явления, называется **теорией вероятностей**.

Основой научного исследования в теории вероятностей является опыт и наблюдение. На практике часто приходится проводить опыты, в результате которых получают различные данные в зависимости от того комплекса условий, при которых они проводятся. Результаты опыта можно характеризовать качественно и количественно. Качественная характеристика результата опыта есть событие. Например, появление на выходе приемника радиопомехи в некотором интервале времени является событием. Появление бракованного изделия в партии готовой продукции является тоже событием. Факт, что при изменении некоторой величины получена величина меньше некоторого числа, является событием и т.д.

Количественная характеристика результата опыта, которая может принимать одно из ряда возможных значений (заранее неизвестно, какое именно) называется **случайной величиной**.

Случайные величины могут иметь различный характер. Например, можно рассматривать скалярные случайные величины, случайные векторы, случайные функции и т.д. Каждое возможное значение скалярной случайной величины есть число. Каждое возможное значение случайного вектора есть вектор, который характеризуется совокупностью соответствующего количества чисел (системы случайных величин). Каждое возможное значение случайной функции представляет собой некоторую конкретную функцию, которая называется реализацией случайной функции. Примерами случайных величин могут служить ошибки измерения длины, массы, времени и т.п. Примерами случайных векторов могут служить совокупности ошибок совместного измерения нескольких постоянных скалярных

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Список статистических функций и специальных (авторских) программ, используемых в первой части учебника.....	6
Глава 1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	8
1.1. Понятие события. Классификация случайных событий.....	8
1.2. Сумма и произведение событий.....	10
1.3. Частость события и ее свойства.....	12
1.4. Вероятность события.....	14
1.5. Аксиоматика теории вероятностей.....	27
1.6. Условная вероятность события. Теоремы умножения вероятностей.....	29
1.7. Теоремы сложения вероятностей.....	32
1.8. Повторение испытаний. Формула Бернулли.....	35
1.9. Вероятность появления события хотя бы один раз и хотя бы k раз.....	39
1.10. Наивероятнейшее число наступления события при повторении испытаний.....	44
1.11. Полная вероятность события.....	45
1.12. Теорема гипотез (формула Бейеса).....	48
1.13. Задачи для самостоятельного решения.....	50
Глава 2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	53
2.1. Понятие случайной величины.....	53
2.2. Законы распределения случайных величин.....	54
2.2.1. Законы распределения дискретной случайной величины.....	55
2.2.2. Законы распределения непрерывной случайной величины.....	58

2.3. Смешанная случайная величина.....	65
2.4. Числовые характеристики случайной величины.....	68
2.4.1. Характеристики положения случайной величины.....	68
2.4.2. Характеристики рассеивания случайной величины.....	74
2.5. Моменты случайной величины.....	79
2.6. Распределения непрерывных случайных величин.....	84
2.6.1. Равномерное распределение $R: a, b$	84
2.6.2. Нормальное распределение $N: m, \sigma$	89
2.6.3. Показательное распределение $E: \lambda$	105
2.6.4. Гамма-распределение $\Gamma: \alpha, \beta$	108
2.6.5. Бета-распределение $B: \alpha, \beta$	113
2.6.6. Распределение Вейбулла $W: \alpha, \beta$	117
2.6.7. Логнормальное распределение $L: m, \sigma$	119
2.7. Распределения дискретных случайных величин.....	123
2.7.1. Биномиальное распределение $B: n, p$	123
2.7.2. Отрицательное биномиальное распределение $Y: r, p$	126
2.7.3. Распределение Пуассона $P: \lambda$	129
2.7.4. Гипергеометрическое распределение $H: N, M, n, k$	132
2.8. Задачи для самостоятельного решения.....	135

Глава 3 СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	138
3.1. Понятие о системе случайных величин.....	138
3.2. Законы распределения системы дискретных случайных величин.....	139
3.3. Законы распределения системы непрерывных случайных величин.....	141
3.4. Законы распределения случайных величин, входящих в систему.....	147
3.5. Зависимые и независимые случайные величины.....	151
3.6. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.....	155
3.7. Условные числовые характеристики системы двух случайных величин. Регрессия.....	160
3.8. Законы распределения и числовые характеристики n -мерного случайного вектора.....	164

3.9.	Нормальное распределение системы двух случайных величин.....	168
3.10.	Нормальное распределение системы трех и n случайных величин.....	178
3.11.	Задачи для самостоятельного решения.....	179

Глава 4

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....

4.1.	Закон распределения функции одной случайной величины.....	182
4.2.	Закон распределения функции двух случайных величин.....	189
4.3.	Закон распределения функции нескольких случайных величин.....	192
4.3.1.	Распределение суммы двух случайных величин.....	193
4.3.2.	Распределение разности двух случайных величин.....	194
4.3.3.	Распределение произведения двух случайных величин.....	194
4.3.4.	Распределение частного от деления двух случайных величин.....	195
4.4.	Математическое ожидание функции случайных величин. Теоремы о математических ожиданиях.....	195
4.5.	Дисперсия функции случайных величин. Теоремы о дисперсиях.....	201
4.6.	Задачи для самостоятельного решения.....	206

Глава 5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....

5.1.	Предварительные замечания.....	210
5.2.	Неравенство Чебышева.....	211
5.3.	Теорема Чебышева.....	213
5.4.	Теоремы Бернулли и Пуассона.....	215
5.5.	Центральная предельная теорема. Характеристические функции.....	218
5.6.	Теоремы Муавра—Лапласа.....	224
5.7.	Задачи для самостоятельного решения.....	229

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....

ПРИЛОЖЕНИЕ.....

Учебное издание

КОПИРОВАНИЕ ЗАПРЕЩЕНО

*Владимир Сергеевич Мхитарян
Владимир Федорович Шишов
Андрей Юрьевич Козлов
Дмитрий Викторович Искоркин*

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

Учебник и практикум

Часть 1 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 31.05.2019.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 15,0.
Тираж 500 экз. Заказ № 5394

ТК 695683-990729-310519

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.
Тел.: (495) 203-57-83.
E-mail: kursizdat@gmail.com <http://kursizdat.ru>