

О ТОПОЛОГИИ ПЛОСКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 8

© 2019 г. И.М. БОРИСОВ, Г.М. ПОЛОТОВСКИЙ

АННОТАЦИЯ. Рассматривается задача топологической классификации расположений в вещественной проективной плоскости объединения неособых кривых степеней 2 и 6 при некоторых условиях максимальности и общего положения. После перечисления подлежащих исследованию допустимых топологических моделей таких расположений с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, доказываем, что большинство из этих моделей не могут быть реализованы кривыми степени 8.

Ключевые слова: M -распадающиеся кривые, топологическая классификация, метод Оревкова.

AMS Subject Classification: 14P25, 14N99

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение, постановка задачи	1
2. Перечисление допустимых моделей	4
3. Метод Оревкова	9
4. Запреты взаимных расположений коники и секстики с помощью метода Оревкова	11
5. Статистика результатов	14
Список литературы	14

1. ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о систематическом исследовании топологии вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, впервые была поставлена Д.А. Гудковым в 1969 году в предисловии к книге [19] для случая распадающихся кривых степени 6 – первого (т. е. низшей степени) нетривиального случая. Эта задача, непосредственно связанная с вопросом о топологии неособых кривых степени 6, включённом Д. Гильбертом в его 16-ю проблему, была решена (при естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей) вторым из авторов настоящей статьи в [2],[11]. В последующие годы было предпринято исследование аналогичного вопроса для кривых степени 7. Этот вопрос оказался более трудным, для его решения, которое после длинной серии работ [1], [3] – [9], [12] – [17], [20], [22] – [32] нескольких авторов сейчас близко к завершению, потребовалось применение новых методов. Настоящая работа начинается аналогичное исследование распадающихся кривых степени 8. Именно, мы будем заниматься топологической классификацией кривых степени 8, распадающихся в произведение неособой кривой степени 2 (коники) и неособой кривой степени 6 (секстики) при некоторых дополнительных условиях.

Напомним основные определения и некоторые известные сведения из теории плоских алгебраических кривых.

Определение 1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2 , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

Определение 2. *Множество $\mathbb{R}C_m$ ($\mathbb{C}C_m$) точек $(x_0 : x_1 : x_2)$ ($(z_0 : z_1 : z_2)$) вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$), удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m .*

Определение 3. *Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).*

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек неособой кривой C_m (коротко – вещественная ветвь кривой) гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а второго – внешней. Если степень кривой C_m нечётна, то среди компонент связности множества $\mathbb{R}C_m$ имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, она называется *нечётной ветвью*.

Оценку на возможное число вещественных ветвей неособой кривой даёт классическая

Теорема 1.1 (Теорема Харнака (1876)). *Пусть N – число компонент связности множества вещественных точек плоской вещественной проективной кривой степени m . Тогда $N \leq (m-1)(m-2)/2 + 1$, причём эта оценка точна для любого m .*

Множество $\mathbb{R}C_m$, рассматриваемое с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$, называется *вещественной схемой кривой C_m* . Назовём набор из s попарно непересекающихся топологических окружностей в $\mathbb{R}P^2$, где $0 \leq s \leq (m-1)(m-2)/2 + 1$, *формальной схемой степени m* .

Вещественную схему неособой кривой (и аналогично – формальную схему) можно описать графом, вершинам которого соответствуют овалы кривой¹, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие овалы расположены один внутри другого и не разделены никаким третьим овалом. Легко видеть, что вещественная схема неособой кривой является графом типа ”лес”, в котором каждому внешнему овалу (т. е. овалу, не лежащему во внутренней области какого-либо другого овала) отвечает своё дерево.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *M-кривыми*. Схемы с таким числом овалов (как схемы M-кривых, так и формальные) будем называть *M-схемами*. Хорошо известно, что вещественная схема неособой коники либо пуста, либо состоит из одной вершины. Из теоремы Харнака следует, что число вершин M-схем степеней 6 и 8 равно 11 и 22 соответственно.

Задачу топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых, поставленную Д. Гильбертом в первой части его 16-й проблемы, можно сформулировать теперь следующим образом: *для каждого натурального m найти список формальных схем степени m , которые могут быть реализованы как вещественные схемы некоторых кривых степени m .*

¹Нечётная ветвь не ограничивает область в $\mathbb{R}P^2$, поэтому включать её в описание не надо – нужно лишь помнить, что в случае нечётной степени имеется ещё ровно одна такая ветвь.

В настоящее время полный ответ на эту задачу известен для $m \leq 7$. В первом нетривиальном случае $m = 6$, особо отмеченном Гильбертом, ответ был получен Д.А. Гудковым в [19]. Фрагмент классификации Гудкова, касающийся случая M -кривых, может быть сформулирован так:

Теорема 1.2 (Теорема Гудкова (1969)). *Неособыми кривыми степени 6 реализуются M -схемы $\frac{1}{1}9$, $\frac{5}{1}5$, $\frac{9}{1}1$ и только эти M -схемы.*

Здесь, следуя Гудкову, для кодировки схем мы применяем следующее соглашение: запись вида $\frac{\alpha}{1}\beta$ означает схему, состоящую из $\beta + 1$ овалов вне друг друга, внутри одного из которых лежат ещё α овалов вне друг друга¹.

Таким образом, множество вещественных точек каждой M -кривой степени 6 содержит ровно один непустой овал (т. е. овал, во внутренней области которого имеется другой овал), он обозначен единицей «в знаменателе» кода; в дальнейшем будем называть непустой овал кривой степени 6 *главным*, овалы, расположенные внутри главного овала – *внутренними*, а овалы, расположенные вне главного овала – *внешними*.

Говорят, что овал, содержащий в своей внутренней области s овалов, последовательно окружающих друг друга, имеет вес $s+1$, а схему, состоящую из внешнего (т. е. не лежащего внутри других овалов) овала веса $s+1$ и всех овалов, лежащих внутри него, будем называть *гнездом веса $s + 1$* . Таким образом, внешний пустой овал считается гнездом веса один, и можно сказать, что M -кривая степени 6 является объединением одного гнезда веса два и гнёзд веса один.

На основании своих результатов Д.А. Гудковым была высказана в виде гипотезы

Теорема 1.3 (Сравнение Гудкова (1969)). *Для эйлеровой характеристики $\chi(B_+)$ ориентируемой части B_+ дополнения в $\mathbb{R}P^2$ к множеству вещественных точек M -кривой степени $2k$ выполняется сравнение $\chi(B_+) \equiv k^2 \pmod{8}$.*

Позже такое сравнение по $\text{mod } 4$ было доказано В.И. Арнольдом, а затем В.А. Рохлин доказал теорему 1.3 полностью.

Легко видеть, что M -кривая задаётся неприводимым многочленом. Перейдём к рассмотрению распадающихся кривых.

Определение 4. *Кривая C_m называется M -распадающейся кривой степени m , если:*

- (i) $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$, где $k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$;
- (ii) C_k и C_{m-k} являются M -кривыми;
- (iii) множество $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$ состоит из $k \cdot (m - k)$ попарно различных точек;
- (iv) все точки множества $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$ лежат на одной ветви кривой C_k и на одной ветви кривой C_{m-k} ;
- (v) при некотором выборе направлений обхода пересекающихся ветвей точки пересечения (т. е. точки множества $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$) лежат на них в одном порядке.

Овалы кривых C_{m-k} и C_k , не имеющие точек пересечения, будем называть *свободными* овалами.

Задача топологической классификации распадающихся кривых степени m ставится следующим образом: найти топологическую классификацию троек $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_m, \mathbb{R}C_k)$, где $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$. В настоящей работе эта задача рассматривается для случая $m = 8, k = 2$ при условии, что кривая C_8 M -распадающаяся, т. е. выполняются требования (i) – (v) определения 4.

Обычно для решения задачи классификации алгебраических кривых какого-либо класса сначала перечисляют допустимые (т. е. не запрещаемые известными на данный момент

¹ Эта кодировка легко обобщается на леса с более высокими деревьями – см., например, [4].

ограничениями) топологические модели кривых этого класса. Затем каждую допустимую модель пытаются реализовать алгебраической кривой рассматриваемого класса (“построить”) или доказать, что сделать это невозможно (“запретить”). Далее для сформулированной выше задачи будут изложены перечисление допустимых моделей и запреты, которые удалось найти с помощью метода Оревкова, основанного на применении теории кос и зацеплений.

2. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ МОДЕЛЕЙ

Начнём с формулировки применяемой ниже классической теоремы о независимости возмущений особых точек *простой* кривой.

Теорема 2.1 (Теорема Брюотти (1921)). *Пусть кривая C_m не имеет кратных компонент и все её особые точки простые двойные. Тогда с помощью достаточно малых изменений коэффициентов кривой C_m можно получить вещественную кривую степени m , которая в окрестности каждой особой точки типа “крест” (трансверсальное пересечение ветвей) будет иметь один из заранее выбранных видов A, B, C , и в окрестности каждой уединённой особой точки – один из заранее выбранных видов A', B', C' (см. рис.1).*

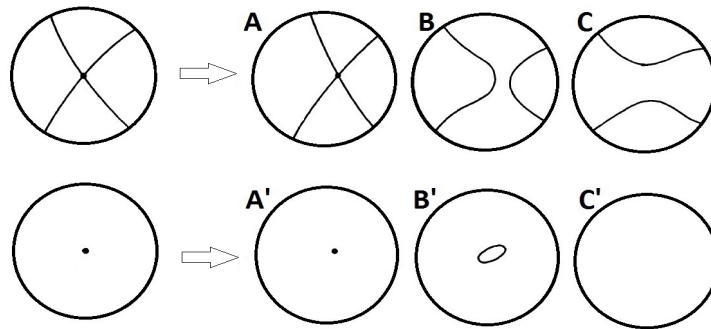


Рис. 1.

Напомним теперь известные сведения о M -схемах кривых степени 8.

- 1) В силу теоремы Харнака M -кривая степени 8 состоит из 22 овалов.
- 2) В силу топологических следствий теоремы Безу, применённой к пересечению кривой степени 8 с прямой или с коникой, M -кривая степени 8 может иметь только одну из следующих вещественных схем:
 - а) объединение гнёзд веса один и не более трёх гнёзд веса два;
 - б) объединение гнёзд веса один и одного гнезда веса три.
- 3) M -кривая степени 8 удовлетворяет сравнению Гудкова с $k = 4$; в частности, отсюда следует, что 22 овала M -кривой степени 8 не могут располагаться все вне друг друга.

Перечисленные условия допускают 89 попарно различных формальных M -схем степени 8, из которых к настоящему времени 83 реализованы M -кривыми степени 8, а вопрос о такой реализуемости остальных шести схем остаётся открытым. Список всех 89 схем можно найти в [22].

Расположение двух простых замкнутых кривых, пересекающихся в 12 точках, лежащих на этих кривых в одинаковом порядке, может принадлежать одному из двух топологически неэквивалентных типов I и II, показанных на рис.2. На этом рисунке более жирной линией показана коника, тонкой линией – несвободный овал схемы степени 6, а греческими буквами обозначены области, в которых α и β могут лежать свободные овалы схемы степени 6.

Теперь для каждого из случаев I, II нам нужно перечислить допустимые распределения 10 свободных овалов в обозначенных греческими буквами областях для каждой из M -схем $\frac{1}{1}9$, $\frac{5}{1}5$, $\frac{9}{1}1$ степени 6, считая несвободный овал либо внешним, либо главным, либо внутренним. Идея этого перечисления состоит в следующем.

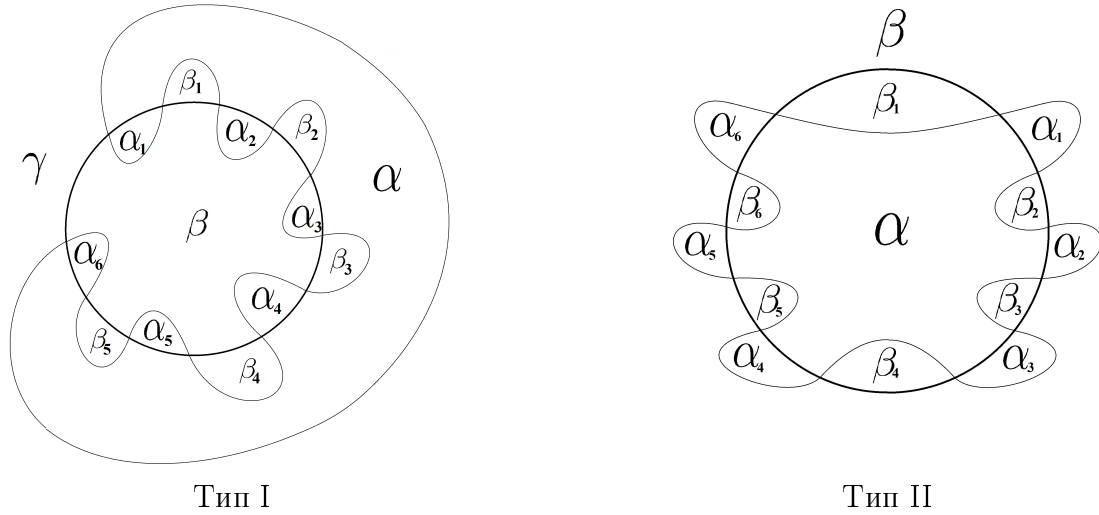


РИС. 2. Типы расположения пересекающихся овалов и обозначения областей.

Добавим к расположению типа I или II, показанному на рис. 2, каким-то определённым образом распределённые по областям 10 свободных овалов схемы степени 6. Затем, имея в виду теорему Брюзотти, устраним все двойные точки на соответствующем расположении так, чтобы образовалась схема с максимально возможным числом овалов (т. е. превратим каждый двугольник в овал; в случае I из пересекающихся овалов получится схема $\frac{11}{1}$, а в случае II – 12 овалов вне друг друга). В результате мы получим M -схему степени 8. Если эта схема не входит в упомянутый выше список из 89 M -схем степени 8, то рассматриваемое расположение свободных овалов нереализуемо. В противном случае вопрос о реализуемости исходной схемы распадающейся кривой подлежит дальнейшему исследованию.

А. Расположение типа I.

A1. Несвободный овал – внешний.

Области α и все α_i не содержат овалов, поскольку несвободный овал внешний. Области β_i тоже не могут содержать овалов – иначе получится схема, не удовлетворяющая ограничению 2) на типы M -схем степени 8.

Рассмотрим схему степени 6 вида $\frac{1}{1}9$. Тогда остаются следующие возможности: в одной из областей β, γ свободные овалы образуют схему $\frac{1}{1}t$, а в другой – схему “8 – t овалов вне друг друга”, где $0 \leq t \leq 8$. Легко проверяется, что сравнение Гудкова выполняется только при $t \in \{3, 7\}$, когда гнездо $\frac{1}{1}$ в области β , и при $t \in \{1, 5\}$, если гнездо $\frac{1}{1}$ в области γ .

Итоги перечисления занесены в строки 1 – 4 таблицы 1; смысл символа \star и последних столбцов в этой и следующих таблицах будет разъяснён ниже в п. 4.

Схемы степени 6 вида $\frac{5}{1}5$ и $\frac{9}{1}1$ рассматриваются совершенно аналогично. Первой из них отвечают строки 5, 6 таблицы 1, а для второй допустимых возможностей нет.

A2. Несвободный овал – главный.

В этом случае внутренние овалы схемы степени 6 надо распределить между областями $\alpha, \alpha_1 - \alpha_6$, причём области α_i и $\alpha_{7-i}, i \in \{1, 2, 3\}$, равноправны ввиду симметрии, и, в силу ограничения 2) на типы M -схем степени 8, непустой может быть только одна из областей α_i .

ТАБЛИЦА 1. Тип I, внешний несвободный овал.

№пп	Схема степени 6	β	γ	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	$\frac{1}{1}3$	5	Построение Гильберта	
2	-- " --	$\frac{*1}{1}7$	1	✓	×
3	-- " --	7	$\frac{1}{1}1$	нет М-пучка	
4	-- " --	3	$\frac{1}{1}5$	нет М-пучка	
5	$\frac{5}{1}5$	$\frac{*5}{1}3$	1	✓	✓
6	-- " --	3	$\frac{5}{1}1$	нет М-пучка	

ТАБЛИЦА 2. Тип I, главный несвободный овал.

№пп	Схема степени 6	α	$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$	$\beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$	β	γ	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	1		★ 5	3	1	×	–
2	-- " --	1		★ 4	3	2	×	–
3	-- " --	1		★ 3	3	3	×	–
4	-- " --	1		★ 2	3	4	×	–
5	-- " --	1		★ 1	3	5	×	–
6	-- " --	1		★ 1	7	1	×	–
7	-- " --	1			7	2	нет М-пучка	
8	-- " --	1			3	6	нет М-пучка	
9	-- " --		★ 1		8	1	×	–
10	-- " --		★ 1		4	5	✓	✓
11	-- " --		★ 1			9	×	–
12	$\frac{5}{1}5$	5		★ 1	3	1	×	–
13	-- " --	5			3	2	нет М-пучка	
14	-- " --	4	★ 1		4	1	×	–
15	-- " --	4	★ 1			5	×	–
16	-- " --	3	★ 2		1	4	×	–
17	-- " --	2	★ 3		2	3	✓	×
18	-- " --	1	★ 4		3	2	×	–
19	-- " --		★ 5		4	1	×	–
20	-- " --		★ 5			5	×	–
21	$\frac{9}{1}1$	8	★ 1			1	✓	×
22	-- " --	4	★ 5			1	×	–
23	-- " --	0	★ 9			1	×	–

А3. Несвободный овал – внутренний.

В этом случае главный овал охватывает всю конфигурацию из двух пересекающихся овалов, показанных на рис. 2 слева ("Тип I"). Области $\beta_1 - \beta_5$ не могут содержать овалов в силу условия 2) – иначе образуется гнездо веса 4.

Для схемы $\frac{1}{1}9$ единственная возможность – 9 свободных овалов вне друг друга лежат в области γ – противоречит ограничению 3) для М-схем степени 8.

Для случаев двух других схем – $\frac{5}{1}5$ и $\frac{9}{1}1$ – обозначим через γ_1 часть области γ , расположенную внутри главного овала (в рассматриваемом случае не показанного на рис. 2), а

через γ_2 – часть области γ , расположенную вне главного овала. Так же, как выше, получаем результаты, показанные в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3. Тип I, внутренний несвободный овал.

№пп	Схема степени 6	β	γ_1	γ_2	М-Т	Ф-М
1	$\frac{5}{1}5$	$\star 2$	2	5	✓	✓
2	$\frac{9}{1}1$	$\star 2$	6	1	×	–
3	$\frac{9}{1}1$	6	2	1	Построение Гильберта	

В. Расположение типа II.

В1. Несвободный овал – внешний.

Так как в этом случае несвободный овал пустой, то свободные овалы могут лежать только в областях $\beta_i, 1 \leq i \leq 6$ и β . При этом, в силу ограничения 2), если главный овал лежит в одной из них, то остальные из этих областей должны быть пустыми, а если главный овал лежит в области β , то непустыми могут быть не более двух из областей β_i . Учитывая, что все области β_i равноправны, а в случае, когда непусты две из областей β_i , имеются три попарно неэквивалентные возможности (в порядке обхода по овалу коники

ТАБЛИЦА 4. Тип II, внешний несвободный овал.

№пп	Схема степени 6	β	β_1	$\beta_j, j = 2 \vee 3 \vee 4$	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	$\frac{1}{1}6$	2	0	нет М-пучка	
2	--" --	--" --	1	1	--" --	
3	--" --	$\frac{1}{1}2$	6	0	--" --	
4	--" --	--" --	5	1	--" --	
5	--" --	--" --	3	3	--" --	
6	--" --	6	$\frac{1}{1}2$		Построение Гильберта	
7	--" --	2	$\frac{\star 1}{1}6$		✓	✓
8	$\frac{5}{1}5$	$\frac{5}{1}2$	2	0	нет М-пучка	
9	--" --	--" --	1	1	--" --	
10	--" --	2	$\frac{\star 5}{1}2$		✓	✓

непустые области либо соседние, либо разделены одной пустой, либо разделены двумя пустыми), получаем список допустимых расположений, приведённых в таблице 4.

В2. Несвободный овал – главный.

Здесь, как и в предыдущем случае, области α_i равноправны друг другу, и области β_i равноправны друг другу. В силу ограничения 2) одновременно могут содержать овалы не более трёх из этих 12 областей. Если непусты (т. е. содержат свободные овалы) ровно две из них, то, как и в предыдущем случае, с точностью до циклического (вдоль овала коники) порядка областей имеются по три попарно различных случая для номеров i и j этих областей: $(i, j) \in M_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$. Если непусты три области одного сорта (т. е. все три области из набора α_i или все три – из β_i), то имеются тоже по три возможности: $(i, j, k) \in M_2 = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 5)\}$. Если непусты две области одного сорта

и одна область другого сорта – например, α_i , α_j и β_k , – то имеются 9 попарно неэквивалентных возможностей:

$$(i, j, k) \in M_3 = \{(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2), (1, 4, 3)\}.$$

ТАБЛИЦА 5. Тип II, главный несвободный овал, схемы $\frac{1}{1}9$ и $\frac{5}{1}5$.

№пп	Схема степени 6	α	α_1	α_2	α_3	β	β_1	β_2	β_3	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	1				6	3			Построение Гильберта	
2	--" --	★ 1				6	2	1		✓	×
3	--" --	★ 1				6	1	1	1	✓	×
4	--" --	★ 1				2	7			×	–
5	--" --	★ 1				2	6	1		×	×
6	--" --	★ 1				2	5	2		×	×
7	--" --	★ 1				2	5	1	1	×	–
8	--" --	★ 1				2	4	3		×	×
9	--" --	★ 1				2	3	3	1	×	–
10	--" --		1			7	2			нет М-пучка	
11	--" --		1			7	1	1		нет М-пучка	
12	--" --		1			3	6			нет М-пучка	
13	--" --		1			3	5	1		нет М-пучка	
14	--" --		1			3	3	3		нет М-пучка	
15	$\frac{5}{1}5$	★ 5				2	3			×	×
16	--" --	★ 5				2	2	1		×	×
17	--" --	★ 5				2	1	1	1	×	×
18	--" --	★ 4	1			3	2			×	–
19	--" --	★ 4	1			3	1	1		✓	×
20	--" --	★ 3	2			4	1			✓	✓
21	--" --	★ 3	2				5			✓	×
22	--" --	★ 3	1	1		4	1			✓	×
23	--" --	★ 3	1	1			5			×	×
24	--" --	★ 2	3			5				✓	×
25	--" --	★ 2	3			1	4			✓	×
24	--" --	★ 2	3			1	3	1		✓	×
25	--" --	★ 2	2	1		5				✓	×
26	--" --	★ 2	1	1	1	5				✓	×
27	--" --	★ 1	4			2	3			✓	×
28	--" --	★ 1	3	1		2	3			✓	×
29	--" --		5			3	2			нет М-пучка	
30	--" --		5			3	1	1		нет М-пучка	

Допустимые возможности для рассматриваемого случая перечислены в таблицах 5 и 6, причём в заголовке таблицы указано только по одному элементу (т. е. набору значений индексов) из каждого из указанных выше множеств M_1, M_2, M_3 , поскольку вычисления в п. 4 и их результаты не зависят от выбора этих элементов.

ТАБЛИЦА 6. Тип II, главный несвободный овал, схема $\frac{9}{1}1$.

№пп	Схема степени 6	α	α_1	α_2	α_3	β	β_1	β_2	β_3	М-Т	Ф-М
31	$\frac{9}{1}1$	★ 7	2				1			✓	×
32	-- " --	★ 7	1	1			1			×	–
33	-- " --	6	3			1				Построение Гильберта	
34	-- " --	★ 6	2	1		1				✓	✓
35	-- " --	★ 6	1	1	1	1				✓	×
36	-- " --	★ 3	6				1			✓	×
37	-- " --	★ 3	5	1			1			✓	×
38	-- " --	★ 3	3	3			1			✓	×
39	-- " --	★ 2	7			1				✓	×
40	-- " --	★ 2	6	1		1				×	–
41	-- " --	★ 2	5	2		1				✓	×
42	-- " --	★ 2	5	1	1	1				✓	×
43	-- " --	★ 2	4	3		1				×	–
44	-- " --	★ 2	3	3	1	1				✓	×

ТАБЛИЦА 7. Тип II, внутренний несвободный овал.

№пп	Схема степени 6	β_1	β'	β''	М-Т	Ф-М
1	$\frac{5}{1}5$	★ 1	3	5	✓	✓
2	$\frac{9}{1}1$	★ 1	7	1	✓	×
3	$\frac{9}{1}1$	5	3	1	Построение Гильберта	

Заметим¹, что в случае набора индексов из множества M_2 если числа овалов в каждой из трёх соответствующих этим индексам непустых областей одинаковы, то соответствующим строкам таблицы (например, строке 3 таблицы 5) отвечают по три попарно неизотопных расположения. Если же совпадают только два из этих трёх чисел (как, скажем, в строке 7 таблицы 5), то (с точностью до циклического порядка областей вдоль овала коники) получаются по 5 попарно различных возможностей². Аналогично для случая множества M_3 : если числа овалов в двух непустых областях одного сорта одинаковы, то соответствующим строкам таблицы (например, строкам 11 и 14 таблицы 5) отвечают по девять попарно неизотопных расположений, а если эти числа не совпадают (как, скажем, в строке 13 таблицы 5), то получаются по 15 попарно различных возможностей.

В3. Несвободный овал – внутренний.

Как и в случае внутреннего несвободного овала для конфигурации типа I (случай А3 выше), главный овал охватывает всю конфигурацию из двух пересекающихся овалов, и содержать свободные овалы могут только одна из равноправных областей β_i , $1 \leq i \leq 6$, и части β' (внутри главного овала) и β'' (вне главного овала) области β . Список допустимых возможностей приведён в таблице 7.

¹Это замечание учитывается в приведённой в конце статьи статистике результатов.

²В обоих случаях M_2 и M_3 ситуация, когда эти три числа все различны, в таблицах не встречается.

3. МЕТОД ОРЕВКОВА

Применяемый в следующем параграфе метод Оревкова для запретов изотопических типов алгебраических кривых с помощью теории кос и зацеплений неоднократно излагался в литературе (кроме основополагающей работы [26], см., например, [16], [22], [27]), поэтому здесь дадим лишь его краткое изложение, необходимое для понимания дальнейшего.

Пусть C_m – кривая, все особенности которой – невырожденные двойные точки. Предположим, что существует точка $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_m$ такая, что пучок L_p прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

- а) в L_p найдется прямая l_0 , пересекающая кривую $\mathbb{R}C_m$ в m различных точках (максимальная прямая);
- б) любая прямая $l \in L_p$ пересекает кривую $\mathbb{R}C_m$ не менее, чем в $m-2$ различных точках;
- с) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_m$, т. е. каждая из таких критических прямых либо касается $\mathbb{R}C_m$, либо пересекает $\mathbb{R}C_m$ в её двойной точке без касания.

Пучок, удовлетворяющий условиям а) – с), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия с) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l_0 (а следовательно, и точка p) оказалась в бесконечности и пучок L_p превратился в пучок параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. рис. 3, слева), где l_t – прямая, заданная уравнением $x = t$.



Рис. 3.

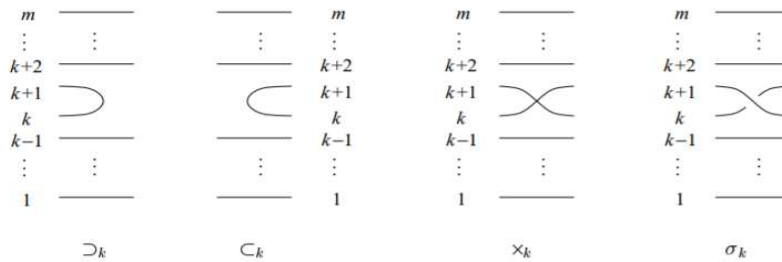


Рис. 4. Символы \times -кода и стандартные образующие группы кос.

Пусть $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_s}\}$ – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию t_i . Схема расположения кривой $\mathbb{R}C_m$ относительно пучка L_p кодируется словом $u_1 \dots u_s$, где буква u_i характеризует расположение кривой $\mathbb{R}C_m$ в окрестности прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ ($k \in \{1, \dots, m-1\}$) в соответствии с рис. 4¹; пару расположенных подряд символов \subset_k, \supset_k будем заменять одним символом o_k (“свободный овал в $(k-1)$ -й полосе, считая снизу”), а кодирующее слово называть \times -кодом.

Рассмотрим в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ множество $M = \mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$, где $\mathbb{C}L_p$ – пучок комплексных прямых $\mathbb{C}l$. Множество M гомеоморфно набору окружностей,

¹Рисунок 4 взят нами из [16].

некоторые из которых попарно склеены в двойных точках кривой $\mathbb{R}C_m$ и в точках касания прямых пучка L_p с этой кривой (см. рис. 3, справа²).

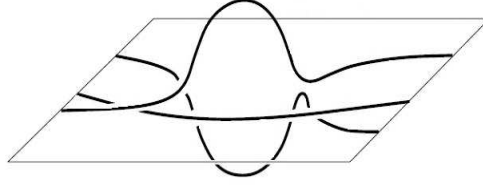


Рис. 5.

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (см. рис. 5; подробности см. в [26],[16]), получим зацепление $K(C_m, p)$. Пусть $b(C_m, p)$ – коса из m нитей, замыкание которой совпадает с $K(C_m, p)$. Для дальнейшего важно, что, в силу предположения о максимальности пучка, коса $b(C_m, p)$ однозначно (с точностью до сопряжённости в группе B_m кос из m нитей) определяется взаимным расположением в $\mathbb{R}P^2$ кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p .

Напомним, что группа B_m имеет копредставление через стандартные образующие σ_k :

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ при } |i - j| = 1 \rangle.$$

Из [21] известно, что полученная описанным выше способом коса $b(C_m, p)$ должна быть квазиположительной, т. е. допускать запись в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где $\omega_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, – некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{m-1}^{-1}\}$. Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой $\mathbb{R}C_m$ при каждом возможном взаимном расположении пучка L_p и этой модели коса $b(C_m, p)$ не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени m .

В качестве необходимого условия квазиположительности С.Ю. Оревкин в [26] предложил использовать неравенство Мурасуги-Тристрама, а затем в [17], [22] – условие Фокса-Милнора.

Неравенство Мурасуги-Тристрама. Если $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ – квазиположительная коса из m нитей, то для её замыкания выполняется неравенство

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b)$ и $n(b)$ – сигнатура и дефект замыкания косы b , $e(b) = \sum k_j$ – алгебраическая степень косы b .

Условие Фокса-Милнора. Пусть b – квазиположительная коса из m нитей. Если $e(b) = m - 1$, то должен существовать многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что многочлен Александра $\Delta_L(t)$ замыкания L косы b представляется в виде $\Delta_L(t) \doteq f(t) \cdot f(t^{-1})$, где \doteq означает равенство с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$; если $e(b) < m - 1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$ (подробнее см. [20]).

Утверждение 1. Для того, чтобы многочлен Александра удовлетворял условию Фокса-Милнора, его значение при $t = -1$ должно быть квадратом целого числа.

Утверждение 2. Если в разложении многочлена Александра на неприводимые множители есть симметричный многочлен в нечётной степени, то многочлен Александра не представляется в виде, указанном в условии Фокса-Милнора.

²Этот рисунок условный – “мнимая ось” V двумерна.

4. ЗАПРЕТЫ ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ КОНИКИ И СЕКСТИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОРЕВКОВА

Проиллюстрируем применение метода Оревкова в нашей задаче примерами и опишем полученные результаты.

Пример 1. Рассмотрим гипотетическое расположение коники и секстики, указанное в строке 1 таблицы 2 – см. рис. 6, на котором внешняя окружность – граница модели проективной плоскости, т. е. диаметрально противоположные точки этой окружности считаются отождествлёнными.

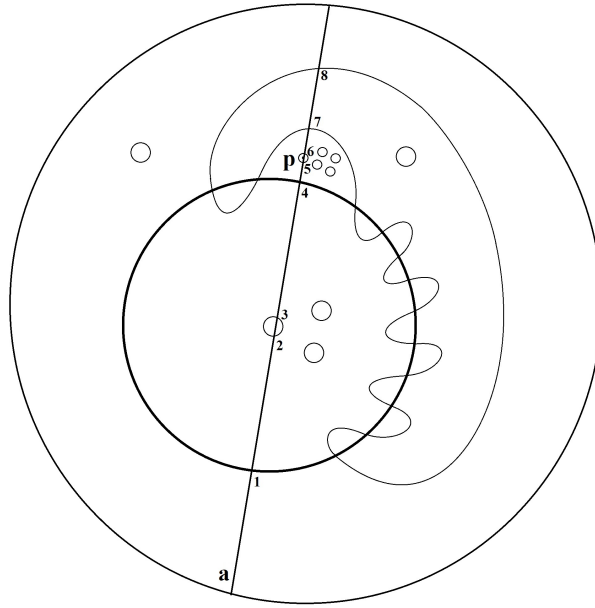


Рис. 6. p – центр максимального пучка, a – максимальная прямая l_0 .

Выберем центр p максимального пучка внутри одного из овалов, лежащих в области β_1 , и прямую a , проходящую через точку p и точку внутри одного из овалов, лежащих в области β , в качестве прямой l_0 (см. рис. 6).

Замечание. Как уже отмечалось выше, при наличии максимального пучка коса $b(C_m, p)$ однозначно определяется ”вещественной картинкой” (т. е. взаимным расположением кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p в $\mathbb{R}P^2$). Для немаксимального пучка не видно, как переплетаются нити в мнимой области. В случаях, когда найти максимальный пучок прямых не удавалось, рассмотрения не проводились, такие случаи отмечены в таблицах. Хотя в принципе метод Оревкова применим и в этих случаях (см. [22], [26]), рассмотрение имеющихся возможностей здесь довольно сложно и требуются слишком объёмные вычисления.

Выбирая теперь аффинную систему координат так, как описано в п. 3 выше, получим ”развёртку” кривой рис. 6, показанную на рис. 7, где латинскими буквами с индексами обозначены области, в которых могут располагаться свободные овалы, а в подписи к рисунку запись вида $|U|$ обозначает число овалов в области U и записаны условия на эти числа, соответствующие рассматриваемому примеру; \times -код для рис. 7, не учитывающий ненарисованные свободные овалы, имеет вид $\supset_5 o_5 o_5 \subset_5 \times_6 \times_4 \supset_5 \subset_4 \times_3^{10} \supset_2 \subset_3$, где \times_3^{10} означает повторенный десять раз подряд символ \times_3 .

Теперь нужно осуществить перебор логически возможных распределений свободных овалов по областям, обозначенным буквами, и вставить в соответствующие места выписанного \times -кода нужные символы o_i . Далее для каждого \times -кода из полученного в результате

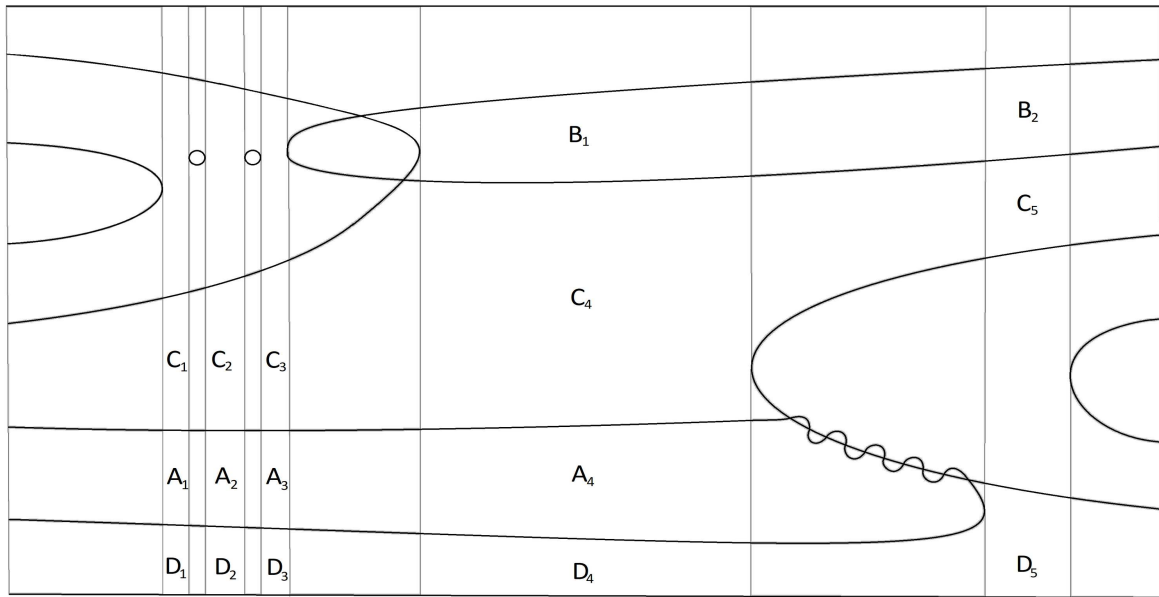


Рис. 7. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_1 \cup B_2| = 1$, $|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5| = 1$, $|D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5| = 4$; в силу теоремы Безу овалы не могут находиться в вертикальных полосах, не содержащих областей, обозначенных буквами.

списка \times -кодов проверяем выполнимость неравенства Мурасуги-Тристрама для соответствующего зацепления. Если для каждого случая это неравенство не выполняется, то данное расположение не реализуется никакой кривой степени 8. Именно такой результат и дают вычисления для рассмотренного примера. Тот факт, что расположение запрещается таким способом, отмечен знаком \times в соответствующих строках колонок "М-Т" таблиц п. 2. В таких случаях проверка выполнения условия Фокса-Милнора, как правило, не производилась, что отмечено прочерком в соответствующих клетках колонки "Ф-М".

Если применение неравенства Мурасуги-Тристрама не дало запрета (см. пример 2 ниже), т. е. хотя бы для одного распределения овалов это неравенство выполняется, в соответствующих клетках колонки "М-Т" поставлен значок \checkmark . В таких случаях вычислялся полином Александера и проверялось выполнения условия Фокса-Милнора; результаты вычислений таким же образом отмечены в столбцах "Ф-М".

Пример 2. Рассмотрим гипотетическое расположение коники и секстики, указанное в строке 2 таблицы 7 – см. рис. 8. Развёртка для рис. 8 показана на рис. 9.

Здесь имеются 120 попарно различных распределений семи овалов в областях A_1, A_2, B_1, B_2 . Вычисления показывают, что для каждого из них соответствующее зацепление удовлетворяет неравенству Мурасуги-Тристрама. Тогда применяем условие Фокса-Милнора, т. е. вычисляем для каждого из этих зацеплений многочлен Александера. В 68 случаях значение многочлена Александера в точке -1 не является квадратом целого числа, следовательно (см. Утверждение 1 в п. 3), соответствующие расположения не реализуются кривыми степени 8. В каждом из остальных 52 случаев вычисления дают, что в разложении многочлена Александера на множители имеется симметричный многочлен в нечётной степени, поэтому условие Фокса-Милнора не выполняется в силу Утверждения 2 из п. 3. Таким образом, расположение из строки 2 таблицы 7 запрещено, что указано значком \times в колонке "Ф-М".

Выбор центра пучка и построение послыоного расположения для записи исходного \times -кода производятся вручную. Символ \star в таблицах возле числа, указывающего количество овалов в данной области, означает, что центр пучка выбирался внутри этого или

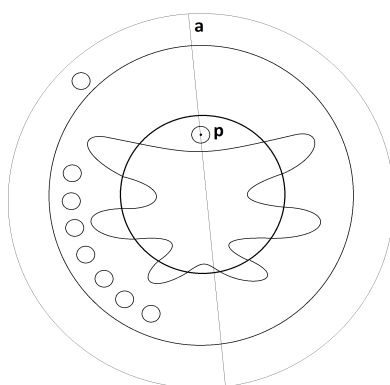


Рис. 8. p – центр максимального пучка, a – максимальная прямая l_0 , внешняя окружность – граница модели проективной плоскости.

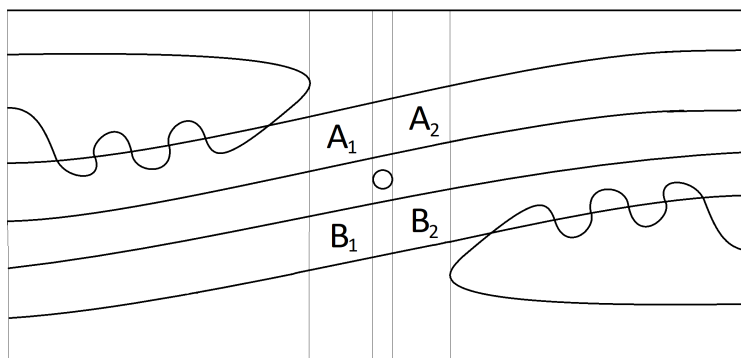


Рис. 9. $|A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2| = 7$.

одного из этих овалов; при этом в каком именно из овалов, если число больше единицы, и в какой области, если в заголовке таблицы область не указана однозначно, для вычислений значения не имеет.

Все остальные вычисления выполняются с помощью компьютера. Именно, перечисление допустимых расположений свободных овалов для каждого послыоного расположения, вычисление по \times -кодам соответствующих кос, вычисление всех инвариантов зацеплений, входящих в неравенство Мурасуги-Тристрама, выполнялись с помощью программы, написанной М.А. Гущиным¹, неоднократно применявшейся раньше (например, в [9], [27]) при классификации других классов распадающихся кривых.

Вычисление полинома Александера зацепления и проверка его свойств из утверждений 1 и 2 производились с помощью программы, написанной для этой работы первым из авторов.

5. СТАТИСТИКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Всего имеется 323 попарно неизотопных схем кривых рассматриваемого в работе вида.

Шесть из них могут быть реализованы кривыми степени 8 в процессе построения неособых кривых чётной степени *методом Гильберта*. Поскольку построения методом Гильберта неоднократно описаны в литературе (см., например, [4],[10],[18]), ограничимся указанием в таблицах “Построение Гильберта”.

¹В то время – студентом механико-математического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Среди оставшихся 317 схем максимальный пучок есть для 245 схем. Из них 231 запрещены в этой работе, и для 14 схем, показанных на рис. 10, вопрос о реализуемости открыт.

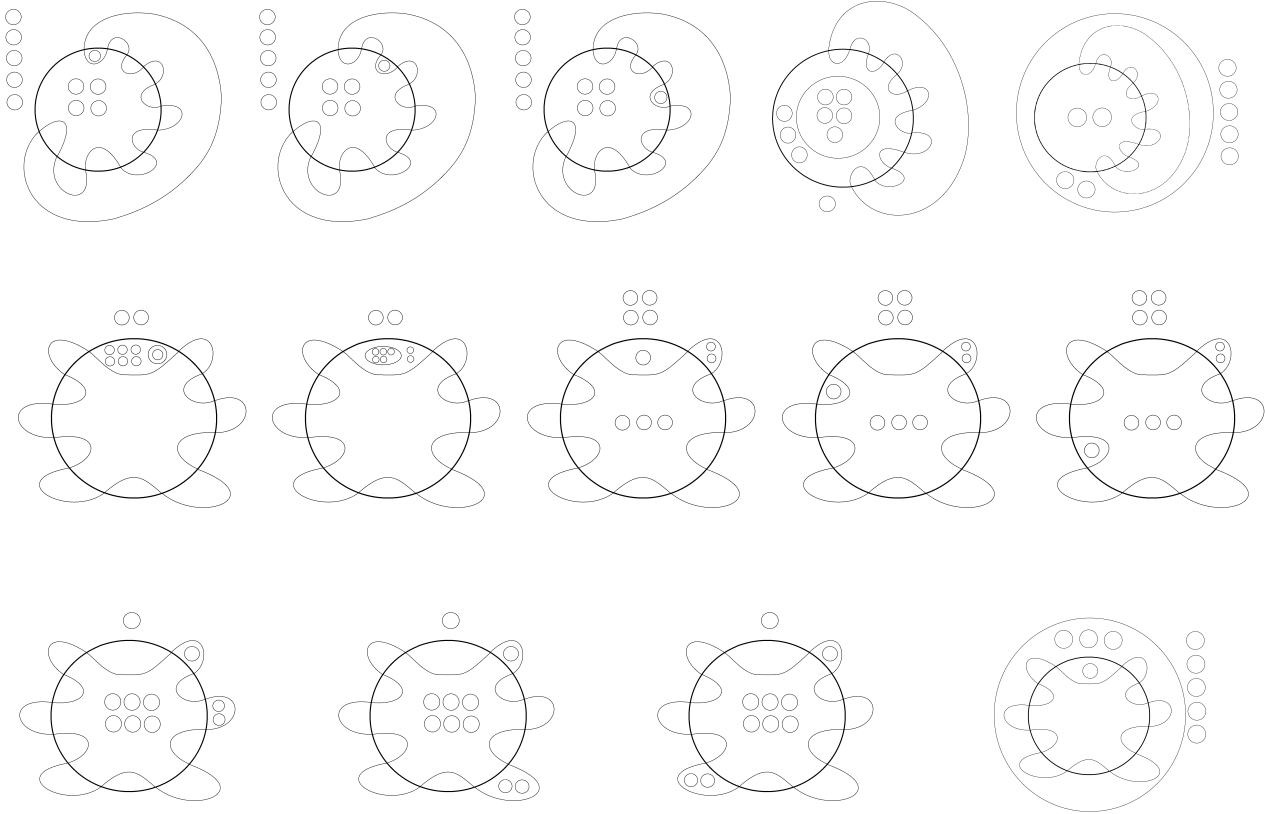


Рис. 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Б. Корчагин, Е. И. Шустин, “Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52:6** (1988), 1181–1199.
 [2] Г. М. Полотовский, “Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка”, *ДАН СССР*, **236:3** (1977), 548–551.
 [3] М. А. Гуцин, “Коника и M -квintика с одной точкой на бесконечности”, *Записки научн. семин. ПОМИ*, 2005, № 329, 14–27.
 [4] Г. М. Полотовский, “К задаче топологической классификации расположения овалов неособых алгебраических кривых в проективной плоскости”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, 1975, № 1, 101–128.
 [5] Е. И. Шустин, “К изотопической классификации аффинных M -кривых степени 6”, *Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горький: Из-во ГГУ*, 1988, 97–105.
 [6] С. Ю. Оревков, “Новая аффинная M -секстика”, *Фуцц. анализ и его приложения*, **32** (1998), 141–143.
 [7] С. Ю. Оревков, “Новая аффинная M -секстика II”, *УМН*, **53:5(323)** (1998), 243–244.
 [8] А. Н. Коробейников, “Новые построения распадающихся кривых”, *Вестник ННГУ, сер. матем. моделирование и оптимальное управление*, 2001, № 1(23), 17–27.
 [9] А. Б. Корчагин, Г. М. Полотовский, “О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых”, *Алгебра и анализ*, **21:2** (2009), 92–112.
 [10] О. Я. Виро, “Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией”, *Алгебра и анализ*, **1:5** (1989), 1–73.
 [11] Г. М. Полотовский, “Полная классификация M -распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости”, *Деп. в ВИНТИ*, **1349-78** (1978), 1–103.

- [12] М. А. Гуцин, А. Н. Коробейников, Г. М. Полотовский, “Построение взаимных расположений кубики и кватрики методом кусочного конструирования”, *Записки научн. семин. ПОМИ, "Геометрия и топология"*. 5, **267** (2000), 119–132.
- [13] С. Ю. Оревкин, “Построение расположений M -кватрики и M -кубики с максимально пересекающимся овалом и нечетной ветвью”, *Вестник ННГУ, сер. матем. моделирование и оптимальное управление*, 2002, № 1(25), 12–48.
- [14] М. А. Гуцин, “Построения некоторых расположений коники и M -квинтики с одной точкой на бесконечности”, *Вестник ННГУ, сер. мат.*, 2004, № 1(2), 43–52.
- [15] С. Ю. Оревкин, “Проективные коники и M -квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 632–635.
- [16] С. Ю. Оревкин, Г. М. Полотовский, “Проективные M -кубики и M -кватрики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов”, *Алгебра и анализ*, **11**:5 (1999), 166–184.
- [17] С. Ю. Оревкин, “Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь”, *Алгебра и анализ*, **19**:4 (2007), 174–242.
- [18] Д. А. Гудков, “Топология вещественных проективных алгебраических многообразий”, *УМН*, **29**:4(178) (1974), 3–79.
- [19] Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, “Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта)”, *Ученые записки Горьковского ун-та*, **87** (1969), 1–214.
- [20] Г. М. Полотовский, “ $(M - 2)$ -кривые 8-го порядка: построения, открытые вопросы”, *Деп. ВИНТИ*, 1985, № 1185-85, 1–194.
- [21] Lee Rudolf, “Algebraic functions and closed braids”, *Topology*, 1983, № 22, 191–202.
- [22] S. Yu. Orevkov, “Classification flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *GAFA, Geom. funct. anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.
- [23] S. Fiedler-Le Touz'e, S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, “Corrigendum to the paper "A flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable"”, (В печати; см. arXiv:1801.04905v2 [math.AG] 27 Jun 2018)., 1–10.
- [24] S. Fiedler-Le Touz'e, S. Yu. Orevkov, “Flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable”, *J. Algebraic Geom.*, 2002, № 11, 293–310.
- [25] S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, “Flexible, algebraically unrealizable curves: rehabilitation of the Hilbert-Rohn-Gudkov approach”, *J. reine und angew. Math.*, **551** (2002), 145–172.
- [26] S. Yu. Orevkov, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curve”, *Topology*, **38** (1999), 779–810.
- [27] A. B. Korchagin, G. M. Polotovskii, “On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines”, *Communications in Contemporary Mathematics*, **5**:1 (2003), 1–24.
- [28] A. A. Binstein, G. M. Polotovskiy, “On the Mutual Arrangement of a Conic and a Quintic in the Real Projective Plane”, *AMS Translations, Ser. 2, "Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics"*, **200** (2000), 63–72.
- [29] G. M. Polotovskii, “On the Classification of Decomposable 7-th Degree Curves”, *Contemporary Mathematics*, **253** (2000), 219–234.
- [30] G. M. Polotovskii, “On the classification of decomposing plane algebraic curves”, *Lect. Notes in Math.*, **1524** (1992), 52–74.
- [31] G. M. Polotovskiy, “On the classification of 7th degree real decomposable curves”, *Advanced Studies in Pure Mathematics (Singularity Theory and Its Applications)*, 2006, № 43, 369–382.
- [32] S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, “Pseudoholomorphic algebraically unrealizable curves”, *Moscow Math. J.*, **3**:3 (2003), 1053–1083.

Борисов Иван Михайлович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ
- Нижний Новгород)

E-mail: i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Григорий Михайлович

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени
Н.И. Лобачевского (ФГАОУ ВО ННГУ)

E-mail: polotovskiy@gmail.com