Институт философии РАН

Русское общество истории и философии науки

Первый Конгресс Русского общества истории и философии науки
«История и философия науки в эпоху перемен»

Том 1

Сборник научных статей

Москва
Русское общество истории и философии науки
2018

УДК 13+16 (08)
ББК 72.3+87.22
И90

Рецензенты:
Филатов Владимир Петрович, доктор философских наук, профессор
Орлов Михаил Олегович, доктор философских наук, профессор

Научная редакция и составление - И.Т. Касавин, Т.Д. Соколова, В.А. Бажанов, Е.А. Зайцев, А.Н. Кричевец, В.И. Маркин.

И90 История и философия науки в эпоху перемен: сборник научных статей / Научн. ред. и сост. И.Т. Касавина, Т.Д. Соколовой, В.А. Бажанова, Е.А. Зайцева, А.Н. Кричевец, В.И. Маркина: В 6 томах. Т. 1. [Электронный ресурс]. – Москва: Изд-во «Русское общество истории и философии науки», 2018. – 101 с. ISBN 978-5-6041212-0-7. - Режим доступа: http://rshps.ru/books/congress2018t1.pdf

ISBN 978-5-6041212-0-7 (Т. 1)
ISBN 978-5-6041212-6-9

В сборнике публикуются материалы участников Первого Конгресса Русского общества истории и философии науки (14-16 сентября 2018 года, Москва). В первый том вошли работы участников секций «История и философия математики» и «Философская логика». На Конгрессе рассматриваются современные концептуальные и методологические проблемы истории и философии науки, эпистемологии естественных, технических и социогуманитарных наук.

Для исследователей, преподавателей, аспирантов и студентов, практических работников образовательных и социальных учреждений и общественных организаций.

ISBN 978-5-6041212-0-7 (Т. 1) УДК 13+16 (08)
ББК 72.3+87.22

Издается по решению Ученого совета Института философии РАН.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект №18-011-20003 г

ЧАСТЬ 1.
ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 2
ФИЛОСОФСКАЯ ЛОГИКА

ЧАСТЬ 1

ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

ЧИСЛО В КОНТЕКСТЕ СОВРЕМЕННОЙ НЕЙРОНАУКИ[1]

Валентин Александрович Бажанов
Заслуженный деятель науки РФ, доктор философских наук, профессор, зав. кафедрой философии
Ульяновский государственный университет
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Кантианская программа в современной нейронауке рассматривается в той ее части, которая касается репрезентации «числа» и механизмов обработки дигитальной информации нейроструктурами. Показывается, что идеи Канта об априорном характере математических положений, которые были едва ли не отвергнуты в результате создания неевклидовых геометрий, оказались в высшей степени востребованными и переосмысленными в результате интенсивного прогресса современной нейронауки. Открытие явления субитации, «чувства числа» и «чувства места» (имея в виду навигационную систему мозга) заставило вспомнить о давних кантианских утверждениях, касающихся некоторых априорных конструкций. Онтологические основания такого рода явлений показывают не метафорический, а стратегический характер кантианской программы в современной нейронауке.

Ключевые слова: И. Кант, субитация, «чувство числа», «чувство места», современная нейронаука, естественный язык.

THE NUMBER FROM THE NEUROSCIENCE PERSPECTIVE

Valentin A. Bazhanov
DSC in Philosophy, Dept. of Philosophy Chairperson
Ulyanovsk State University
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

We are going to examine the nature of number under the angle of modern neuroscience, and offer possible interpretation of its innateness treats; to discuss how the brain deals with symbolic and non-symbolic represented information; what role play language in these processes; what are the conditions of “number cultures” emergence; how are “number sense” (or numerosity) and mathematical skills are related; is it conceivable to merge contradictory approaches related to the nature of “number”, and what is the shape of agency transcendentality idea capable of providing this merge.

Keywords: I. Kant, subitation, “number sense”, “sense of space”, modern neuroscience, natural language.

Бурное развитие в последнее время нейронауки затронуло и феномен числа, его репрезентации и механизмов обработки мозгом дигитальной информации. Открытие явления субитации, «чувства числа» и «чувства места» заставило вспомнить давние кантианские положения, которые касаются априоризма. Эти положения поднимают ряд вопросов:

1. Является ли число своего рода наклейкой на каких-то совокупностях предметов? В какой мере число выступает лишь обозначением и может ли зависеть или даже задаваться нейродинамическими образованиями?

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-03-00117а «Социально-культурная революция в нейронауке: предпосылки и значение для логики, эпистемологии и философии науки».

2. Идея врожденности ряда свойств живых существ, включая человека (innateness hypothesis) восходит еще к античности и проходит через ряд философских доктрин, включая современные когнитивные науки. Это касается и явления субитации, «чувства числа», и навигационной системы мозга, «чувства места». Их принято относить к элементам когнитивной универсальности. Как эти элементы функционируют?

3. Дигитальная информация может репрезентироваться в символической и несимволической форме. Как происходит восприятие и обработка мозгом этой информации? Какова роль языка в этих процессах?

4. Каковы условия существования «нечисловых» культур и их переход в категорию «числовых» культур?

5. Связаны ли «чувство числа» и математические способности? Что позволяет прогнозировать математические способности?

6. Имеются два полярных подхода к рассмотрению природы числа: один подход связывает число с врожденными особенностями мозга, а другой считает число порождением социума и культуры, в которую погружен носитель мозга. Могут ли эти полярные подходы к природе числа быть представлены как не противоречащие друг другу, а как выступающие частными случаями общей концепции?

7. Способна ли концепция деятельностного трансцендентализма претендовать на решение этой задачи?

Ответы на эти вопросы подводят к мысли о неметафорическом характере утверждения о том, что программа развития современной нейронауки может быть названа кантианской, поскольку число – это не «бирка», которая относится к некоторым множествам, а средство и итог биологической адаптации к окружающей среде. Все это говорит в пользу продолжения натуралистического поворота в современной науке.

ФИЛОСОФИЯ ПРИЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИКИ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОСУДАРСТВЕННОГО И МУНИЦИПАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Алексей Георгиевич Барабашев
Доктор философских наук, профессор
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: abarabashev@hse.ru

Рассматриваются основные особенности приложений математики в области исследований государственного управления. Показано, что существуют два основных подхода к применению математики в исследованиях по государственному управлению: структурное применение математики в области теории государственного управления, и верификационно ориентированные применения на основе массивов данных для административных целей и для аналитики практики управления. Так называемая «математизация» государственного управления приводит к переосмыслению образа прикладной математики как таковой и (может быть) к появлению нового понимания предмета и метода математики.

Ключевые слова: приложения математики; математические методы в государственном управлении; предмет и метод математики.

PHILOSOPHY OF APPLICATION OF MATHEMATICS IN THE AREA OF RESEARCH IN PUBLIC ADMINISTRATION

Alexey G. Barabashev
DSC in Philosophy, Professor
National Research University – Higher School of Economics
E-mail: abarabashev@hse.ru

Thesis is devoted to the main peculiarities of mathematics application in the area of public governance. It will be shown that two basic approaches toward applications of mathematics in the area of public governance exist: structural application of mathematics in theory of public governance, and verification oriented application of mathematics in data-targeted administrative research and in the analytics of public governance practice. The so-called “mathematization” of public governance leads toward re-shaping of the image of applied mathematics itself, and (maybe) toward establishing of a new understanding of the subject and of the methods of mathematics.

Keywords: applications of mathematics; mathematical methods in public governance; object and method of mathematics.

В предлагаемом докладе будут рассмотрены особенности использования математики в основных предметных полях области государственного и муниципального управления.

В первой части доклада будут изучены два основных подхода к использованию математики в области государственного и муниципального управления:

1) *Структурное применение математики в теории государственного и муниципального управления*. Такое применение основывается на выводе следствий из основных положений (принципов и допущений) главенствующих административных парадигм публичного управления (парадигмы идеального государства; парадигмы нового государственного управления; парадигмы государственно-публичного управления). На основе ряда примеров, взятых из современных исследовательских статей с высокими международными индексами цитирования, будет показано, что такое применение математики схоже с использованием упрощенной версии содержательного аксиоматического метода. Будет рассмотрено, какие утверждения в административных парадигмах выступают в роли аксиом, какие – в роли теорем, и как выглядит процедура вывода («доказательства», обоснования) теорем из аксиом.

2) *Верификационное применение математики в теории и практической аналитике государственного и муниципального управления*. Это применение наиболее распространено, оно связано с так называемой «цифровизацией» аналитики государственного и муниципального управления и практики управления. Тенденция принятия решений на основе сбора и обработки массивов данных, в том числе с использованием big data, привела к кардинальной трансформации аналитики (включая экспертизу) управленческих решений. Массивы данных накапливаются с увеличивающейся скоростью, сбор этих данных далеко выходит за пределы национальных статистических бюро, ведущих центров социологических исследований, отдельных государственных и муниципальных органов. Будет дана классификация собираемых для аналитики государственного и муниципального управления данных, рассмотрена специфика их статистической обработки, изучен вопрос о значимости полученных с помощью обработки данных результатов для принятия управленческих решений.

Во второй части доклада вопрос о математизации области государственного и муниципального управления будет рассмотрен с позиций самой математики. Утверждается, что ныне под воздействием комплекса потребностей социальных наук происходит изменение образа математики, ее основных прикладных задач и значимости. Среди социальных наук государственное и муниципальное управление является драйвером изменения образа математики, ибо именно к технологиям, методам управления приковано основное внимание государства. В совершенствование управления, его административных процедур, оценки эффективности программ и политик, государство готово «вкладывать» средства в первую очередь (а через него – и в математику как совокупность особых прикладных методов, подходов, структур, без которых новые методы управления разрабатывать невозможно).

В заключение доклада предполагается рассмотреть, позволяет ли возникающий в настоящее время новый образ математики, основывающийся на развитии указанных социальных приложений, выйти на новое понимание предмета и метода математики.

СИМВОЛИЗМ В МАТЕМАТИКЕ: ФИЛОСОФСКИЙ И ИСТОРИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Сергей Николаевич Бычков
Доктор философских наук
Институт «Высшая школа образования», «Московский педагогический государственный университет»
E-mail: bytc@mail.ru

Анализируются философские и исторические аспекты математического символизма. Показано, что проблема обоснования символически формализованной математики сталкивается с ещё большими трудностями, нежели это представлялось Д. Гильберту и Г. Вейлю.

Ключевые слова: математика, символ, философия, история.

SYMBOLISM IN MATHEMATICS: PHILOSOPHICAL AND HISTORICAL ASPECTS

Sergey N. Bytchkov
DSC in Philosophy
Institute «Higher School of Education», Moscow State University of Education
E-mail: bytc@mail.ru

This paper is devoted to the research of philosophical and historical aspects of symbolism in mathematics. It is shown that the problem of substantiation of mathematics is more complicated than it once seemed to D. Hilbert and H. Weyl.

Keywords: mathematics, symbol, philosophy, history.

Использование символов настолько глубоко вошло в математику, что В.И. Арнольд позволил себе в предисловии к третьему изданию «Обыкновенных дифференциальных уравнений» написать следующие строки: «Огромной заслугой Лейбница является также широкая пропаганда анализа… и доведение его алгоритмов до полного автоматизма: он изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих, – тенденция, с которой приходится бороться еще и сегодня» [Арнольд, 2000: 6]. Самое удивительное, что Лейбниц, придававший большое значение выбору удачных обозначений (см. [Погребысский, 1971: 236–238, 243–244], где описан процесс выработки им обозначений для анализа бесконечно малых, включавший в себя также преодоление ошибочных утверждений вроде $d(xy) = dx \cdot dy$), отнюдь не имел подобных намерений.

Согласно Лейбницу, наука должна стремиться к отчетливому и адекватному знанию, однако это труднодостижимо: «В большинстве… случаев… мы обращаем внимание не на всю природу предмета сразу, но пользуемся вместо предметов значками, объяснение которых... ради краткости опускается, так как оно в нашей власти, или мы думаем, что оно в нашей власти» [Лейбниц, 1908: 41]. «…Мы вынуждены прибегать к обозначению отдельных определений (признаков) с помощью символов, и такое знание Лейбниц называет адекватным и символическим (или слепым)» [Гайденко, 2000: 262].

В формировании современных взглядов на математический символизм существенную роль сыграла метаматематика Гильберта. Как пишет Г. Вейль, если для интуиционизма Брауэра символы являются всего лишь вспомогательными средствами для представления и передачи математических положений и мыслей, то для Гильберта «символы, хотя они и ничего не значат – или даже именно поэтому, – являются субстанцией математики. Говоря возвышенно, вначале был знак» [Вейль, 1989: 64].

Развивая эту мысль, Вейль продолжает: «…мы обладаем простым формализмом, который охватывает всю математику, какую мы имеем по сей день, и который *до сих пор не приводил к противоречиям*. Он обеспечивает несравненную надежность математическим операциям. Можем ли мы удовольствоваться этим? Должна ли, в самом деле, непротиворечивость быть гарантирована *на веки вечные* или же мы можем не предпринимать без надобности никакой ревизии формализма до тех пор, пока в нем фактически не появится противоречие? <…>

Предчувствие всего описанного здесь развития математики есть у Николая Кузанского, и определённее – у Лейбница. Они видят в символике представление божественного мира идей, непосредственно не доступного человеческому мышлению. Интуитивное познание, ограниченное у человека, всеведуще у Бога. Конечно, как Кузанец, так и Лейбниц еще очень далеки от строгой формулировки Гильберта. Отсутствует расслоение на свободную, чисто символическую “формальную математику” и лежащую над ней “интуиционистскую” математику, содержательные рассуждения которой направлены только к тому, чтобы доставить свидетельства в пользу непротиворечивости нижнего слоя, – хотя мысль Кузанского была, кажется, недалека от того, чтобы доказать посредством непротиворечивости конечного символизма по меньшей мере *возможность* закрытого от нас, трансцендентного божественного мира» [Вейль, 1989: 65].

Для последующего рассмотрения гильбертова замысла доказательства непротиворечивости символическим образом представленной математики важно учитывать отклонение его представлений о логическом универсуме от взглядов Лейбница.

Лейбниц писал: «Я называю миром все следствия и всю совокупность существования вещей, чтобы уже нельзя было утверждать, будто могут существовать еще многие миры в разные времена и в разных местах. Потому что все их в совокупности следует считать за один мир, или, если угодно, за один универсум» [Лейбниц, 1989: 135]. Дж. Буль следовал этому же пути: «Символ 1… должен представлять универсум, а последний следует понимать как охватывающий любой класс предметов, независимо от того, существуют в действительности эти предметы или нет» [Boole, 1847: 15].

Против подобного представления об универсуме (сходных взглядов придерживались также С. Джевонс, Р. Грассман и Г. Фреге; см. [Бирюков, 2005: 37–38]) первым выступил Э. Шрёдер, считавший, что «в действительности недопустимо понимать под 1 такой обширный, так сказать, совершенно открытый класс…» [Schröder, 1890: 235].

Д. Гильберт противопоставляет собственный подход подходу Г. Фреге и Б. Рассела, так как «в основу свой теории они положили допущение об *универсальной индивидной области,* для которой количество принадлежащих ей элементов как варьирующее рассматриваться не может» [Гильберт, 1979: 211]. Вместо неё он предпочитает «иметь дело с некоторой фиксированной системой вещей (или даже с несколькими такими системами), вводимой в качестве *области субъектов* для всех тех предикатов, из которых строятся все высказывания… теории» [Там же: 24]. Это доставляет ему определённые преимущества технического характера по сравнению с Фреге и Расселом. Однако… за всё приходится платить!

В работе [Виннер, 1997] было показано, что в рамках традиционной (неформализованной) логики необходимо различать две разновидности отрицания суждения «*S* есть *P*»: внутреннее – «*S* есть не-*P*» и внешнее – «неверно, что *S* есть *P*». Это, в свою очередь, приводит к необходимости соответствующего различения и в символической логике. В [Виннер, 1999] (см. также [Бычков, 2003: 362]) было продемонстрировано, что в чистом исчислении предикатов под знаком $\neg$ может подразумеваться только *внешнее* отрицание.

Вместе с тем в формальной арифметике, как это видно из [Гильберт, 1979: 330–331] на примере доказательства формулы $a \neq 0 \rightarrow \exists x\,(x' = a)$, отсутствие равенства между элементом a и 0 интерпретируется как *неравенство* элемента соответствующей индивидной области предметной константе из этой же предметной области. Это вытекает из того обстоятельства, что элемент a, не будучи равным 0, в то же время считается подпадающим под действие *собственных* аксиом формальной арифметики. Последнее означает, что собственные аксиомы этой теории «высекают» род из ничем не ограниченного универсума исчисления предикатов, а операция отрицания «незаметно» преобразуется из операции внешнего в операцию *внутреннего* отрицания. Ясно, что это можно расценить только как проявление непоследовательности в построении Гильбертом оснований математической логики – непоследовательности, связанной с отказом им от представления об универсальной индивидной области, которого придерживались Фреге и Рассел.

Причина указанной непоследовательности имеет сугубо историческую подоплеку и связана с тем, что в математике XX века две разновидности отрицания (аккуратно различавшиеся, например, Аристотелем [Аристотель, 1978: 198–199]) перестали различаться. В [Бычков, 1999: 316–318] продемонстрировано, что без этого отождествления логический статус знаменитой диагональной процедуры Кантора оказывается весьма и весьма проблематичным.

Мы видим, таким образом, что замысел Гильберта обоснования символически формализованной математики сталкивается с ещё большими трудностями, нежели это представлялось Г. Вейлю.

Литература

1. Аристотель. Соч. Т. 2. М.: Мысль, 1978.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 2000.
3. Бирюков Б.В. Крушение метафизической концепции универсальности предметной

области в логике. Контроверза Фреге–Шрёдер. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005.
4. Бычков С.Н., Зайцев Е.А., Шашкин Л.О. Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) // Историко-математические исследования. Вторая сер. Вып. 4 (39). М.: Янус-К, 1999. С. 303–324.
5. Бычков С.Н. Метаматематика и опыт // Математика и опыт. М.: Изд-во МГУ, 2003. С. 354–394.
6. Вейль Г. О символизме математики и математической физики // Математическое мышление. М.: Наука, 1989. С. 55–69.
7. Виннер Д.И. Виды отрицания и исчисление предикатов первого порядка // Математические методы решения инженерных задач. М.: МО РФ, 1999. С. 51–53.
8. Виннер Д.И. О различении внешнего и внутреннего отрицания в логике // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. М.: Янус-К, 1997. С. 5–21.
9. Гайденко П.П. История новоевропейской философии в её связи с наукой. М.: ПЕР СЭ; СПб.: Университетская книга, 2000.
10. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.
11. Лейбниц Г.В. Избр. филос. соч. М.: Типо-лит. Т-ва И.Н. Кушнерев и К°, 1908.
12. Лейбниц Г.В. Соч. Т. 4. М.: Мысль, 1989.
13. Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. М.: Наука, 1971.
14. Boole G. The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning. Cambridge: Macmillan, Barclay, & Macmillan; London: George Bell, 1847.
15. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd. 1. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1890.

ДОЛЖНА ЛИ МАТЕМАТИКА БЫТЬ ПОЛЕЗНОЙ?

Андрей Борисович Верёвкин
Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики политологии
Ульяновский государственный университет
E-mail: a_verevkin@mail.ru

Наталья Григорьевна Баранец
Доктор философских наук, доцент, профессор кафедры философии
Ульяновский государственный университет
E-mail: n_baranetz@mail.ru

Вопрос о полезности и предназначении математики возник только в XIX веке. Прежде потребность в математике для технических и естественнонаучных работ была реальностью, не нуждающейся в особом осмыслении. Но с расширением математических теорий и методов возник разрыв между абстрактной и прикладной математикой. К середине XX века произошла поляризация мнений отечественных математиков о предназначении своей дисциплины как науки. Мы рассмотрим эволюцию идей полезности математики в российском научном сообществе разных периодов и опишем современный спектр мнений по этому вопросу. Мы попробуем прояснить причины обращения учёных к этой тематике. Укажем влияние экстерналистских и интерналистских факторов на рефлексию отечественных математиков в течении XVIII – XX веков.
Ключевые слова: философия науки, идеал полезности науки, образ развития научной дисциплины, математическое сообщество.

SHOULD MATHEMATICS BE USEFUL?

Andrey B. Verevkin
CSc in Mathematics, Associate Professor
Ulyanovsk State University

E-mail: a_verevkin@mail.ru

Natalia G. Baranetz
DSC in Philosophy, Associate Professor, Chair of Philosophy, Sociology and Political Science
Ulyanovsk State University
E-mail: n_baranetz@mail.ru

The question of the usefulness and purpose of mathematics arose in the nineteenth century only. Before that, the need for mathematics for technical and natural science works was a reality that does not need special interpretation. But with the expansion of mathematical theories and methods, the gap between abstract and applied mathematics arose. By the middle of the twentieth century, the polarization of the opinions of Russian mathematicians about the purpose of their discipline as a science was occurred. We will consider the evolution of the ideas of the usefulness of mathematics in the Russian scientific community of different periods, and describe the contemporary spectrum of opinions on this issue. We will try to clarify the reasons for the scientists' appeal to this topic. We point out the influence of externalist and internalist factors on the reflection of native mathematicians during the 18–20th centuries.

Keywords: philosophy of science, image of scientific discipline’s development, mathematical community.

Когда математики стали задумываться о полезности своей науки, и к каким выводам они пришли? Ответы на эти вопросы следует искать в истории науки и в суждениях учёных по этому поводу.

Рассуждения учёных о научном творчестве за пределами специализации условно побуждаются двумя главными группами факторов – интерналистикими и экстеналистскими. Несомненно, значима логика развития научной дисциплины, поиски её оснований, осмысление критериев исследовательской работы и её оценки. Но также важно общение учёных разных дисциплин, необходимость обеспечения своих исследований и обоснование их полезности для общества.

С XVI века до середины XIX раздумья о пользе математики не были самостоятельной темой. Появлялись только отдельные мысли в контексте исторической и когнитивной идентификации математического сообщества. Декарт в «Рассуждениях о методе» (1637) писал: «математика представляет искуснейшее изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремёсла и уменьшить труд людей… Особенно нравилась мне математика верностью и очевидностью рассуждений, но я ещё не видел её истинного применения, а полагал, что она служит только ремёслам, и удивлялся, как на столь прочном и крепком фундаменте не воздвигнуто чего-либо возвышенного» [Декарт, 1953: 12-14].

В XVII столетии усилиями многих европейских учёных была заложена новая наука – механика, потребовавшая новых методов. Математика дала ей дифференциальное и интегральное исчисление. Ньютон разрабатывал механику как науку математическую, естественную и прикладную. В XVIII веке братья Бернулли, Эйлер, Лагранж, Лаплас развили новые методы математики, применили их к изучению движения небесных светил и земных явлений. Универсальный гений Эйлера обогатил все области математики. Он разработал её важные практические применения: учение о мореходных качествах корабля, теорию гидравлических турбин, способы расчета оптических стекол. Академик А.Н. Крылов заметил, что авторитет Эйлера побудил Парижскую Академию наук признать кораблестроение одной из важных областей приложения математики.

В конце XVIII века революционная Франция создала систему высшего специального образования. В Политехнической школе преподавали ведущие математики страны – Лагранж, Лаплас, Монж и Фурье. Они несли студентам теоретические знания в области инженерных наук. Начавшееся в Европе грандиозное строительство заводов, мостов, вокзалов, верфей требовало совершенствования теории механизмов и сопротивления материалов, а, следовательно, разработки новых математических средств. Появление новых исследовательских проблем в физике и астрономии создало поле для применения математических методов. Гаусс, Коши, Лаплас, Пуассон, Фурье изучали тепловые и электромагнитные явления, моделировали движение жидкости и решали картографические вопросы. Необходимости обосновывать полезность математики не было – это был очевидный факт.

Первый русский учёный, имевший самостоятельные работы по математике и механике, С.К. Котельников в 1761 году на собрании в Академии наук произнёс «Слово о пользе в чистых математических рассуждениях». Он обосновывал полезность математики для развития ума, для применения её в естественных науках и других областях знания.

Представления о предмете и задачах математики в первой половине XIX века опиралась на практическое применение её результатов. Н.Е. Зернов в обосновании темы своей докторской диссертации «Дифференциальное исчисление с приложением геометрии» в 1837 году писал: «Чистая математика состоит в ближайшем отношении к учению о природе: а потому те отрасли оной, кои имеют посредственное или непосредственное приложение в сем последнем, без всякого сомнения заслуживают и большего уважения пред прочим. В настоящем состоянии физики, теории бесконечно малых качаний и тепла занимают первое место между предметами исследований» [Цит.по: Лихолетов, 1955: 440]. Н.Д. Брашман в речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей» (17 июня 1841 года) сказал о значении математических дисциплин для познания мира. Он возражал шотландскому философу У. Гамильтону, отрицавшему пользу математики для развития ума, что могло способствовать уменьшению часов преподавания математики в школе. Брашман же заявлял, что «надлежащее занятие математическими науками увеличивает объём ума, изощряет его, и возвышает нравственность» [Брашман, 1841: 4]. Истинные первопричины ведомы лишь Богу, но геометры лучше философов умеют обнаруживать закономерности явлений. Чтобы разбираться в житейских вопросах, необходим практический опыт. И геометрия располагает средством, благоприятно влияющем на развитие житейского ума, – теорией вероятностей. Брашман содействовал применению математических знаний. Особой чертой его преподавания было внимание к задачам техники, решаемым методами теоретической механики и математики. В лекциях Брашман отводил значительное время изложению действия различных машин. Он давал теоретические начала для расчёта действия механизмов, используя лучшие достижения в гидравлике и машиноведении. Для диссертационных тем в 1840-х годах Брашман предлагал «Теорию водяных колес», «О воде как двигателе». Прикладные интересы Брашман передал своим ученикам: П.Л. Чебышеву, А.Ю. Давидову, А.С. Ершову. Ершов и Чебышев в Московском и Петербургском университетах читали курсы практической механики, знакомящие с основами теории механизмов и машин. Эти курсы стали передовым явлением в университетском образовании. Чебышев интересовался механикой и занимался инженерными задачами. Давидов создал школу теоретической механики в Московском университете. Её воспитанником был Н.Е. Жуковский, которому принадлежат выдающиеся исследования по аэродинамике, авиации, гидравлике, механике, математике и астрономии.

С середины XIX века вопрос о пользе математики стал чаще появляться в обсуждениях её особенностей. С распространением классических университетов и образованием в них математических кафедр, с расширением поля академической математики в ведущих европейских государствах появилась возможность занятия чистой наукой, зарабатывая преподаванием, а не решением прикладных задач. Математика рубежа XIX–XX веков переживала качественную эволюцию. В итоге проявилась проблема достоверности математических методов, потребовалось осмысление оснований. Во второй половине XIX века был создан современный аксиоматический метод математики, затронувший арифметику и геометрию. Затем были аксиоматизированы алгебра, топология и теория множеств. Д. Гильберт поставил грандиозную задачу аксиоматизации всех математических дисциплин. Для этого предполагалось доказать их непротиворечивость, полноту и категоричность как формальных логических систем. Логицизм, формализм и интуиционизм, обращённые к основаниям математики, способствовали распространению интерналистского взгляда на развитие математических идей. Так, Н.Н. Лузин в 1930-е годы в пропедевтическом курсе математики выводил её историю только из внутренней логики развития науки. Он не касался её приложений и проблем, возникших из естественнонаучных и технических задач.

После революции произошло преобразование математического сообщества. К 1930-м годам сложился государственный запрос на участие науки в социалистическом строительстве. Об этом заявил организатор московской алгебраической школы, руководитель Ассоциации естествознания Комакадемии О.Ю. Шмидт. Он считал науку несамодостаточной деятельностью, нуждающейся для развития в практике. Научные задачи следуют из потребностей промышленности и торговли. Наука – одно из орудий борьбы «передового класса» с религией и реакционными классами. Открытия происходят при практической необходимости в них, а не из внутренней логики научного развития. На Всесоюзном съезде математиков в Харькове в 1930 году Шмидт выступил с докладом «Роль математики в строительстве социализма», вызвавшем осуждение «старых профессоров» из-за классовой оценки математики. Молодым профессорам-коммунистам, напротив, доклад показался недостаточно радикальным.

Оборонные задачи Великой Отечественной войны обратили самых абстрактных математиков к прикладным областям. Они занялись теориями стрельбы, кумулятивных зарядов, крыла, колебания и регулирования, а также передачи информации по каналам связи. Это углубляло идею практической полезности математики, но позднее, с 1960-х годов, отделило прикладников, связанных с государственными проектами, от абстрактных математиков, подчёркивавших свою рафинированную позицию в науке. Воплощение нетривиальных приложений математики требовало от учёных глубокого понимания теории, организаторского таланта, коллективизма и строжайшей дисциплины научного труда. Отдавший много сил кибернетике Б.В Гнеденко возмущался распространённой среди начинающих математиков сентенцией: «если математик занимается прикладными вопросами, то это, как правило, показывает его творческое математическое бессилие. Ему нечего сказать в самой математике, и он пытается прикрыть это использованием готового математического аппарата при решении задач практики» [Гнеденко, 1970: 12].

С ростом популярности формалистических идей Бурбаки и анархистской позиции А. Гротендика пренебрежение прикладной математикой стало подаваться чертой высокого научного стиля и было формой индивидуалистического протеста научной политике государства. В 1970-80-е годы мировоззрение советских математиков фактически разделилось между полярными позициями – либо математика должна быть полезна государству и народу своими приложениями, либо она является чистым интеллектуальным удовольствием учёных и существует только для саморазвития.

Сообщество математиков-прикладников было сильно по составу участников. Они работали в междисциплинарных проектах и широко популяризировали свою позицию. Например, Н.Н Боголюбов разрабатывал приближенные методы анализа, исследовал динамические системы, получил фундаментальные результаты в области статистической физики и квантовой теории поля. И.М. Гельфанд занимался задачами спектрального анализа, создал школу применений математических методов в биологии. Б.В. Гнеденко занимался теорией вероятностей и математической статистикой, создавал теорию массового обслуживания и теорию надёжности. А.А. Ляпунов занимался кибернетикой, математической статистикой и математической лингвистикой. Л.Д. Фадеев работал в теории квантовых полей с бесконечномерной группой инвариантности, предложил строгий математический подход к квантовой проблеме трёх тел.

Не менее представительным было сообщество чистых математиков. Целью своей работы они провозглашали совершенствование здания Математики. Одним из наиболее ярких представителей этого направления можно считать И.Р. Шафаревича, чьи научные интересы лежали в области алгебраической геометрии и теории чисел. Отрицая естественнонаучный идеал полезности, он признавал лишь эстетический критерий оценки научного труда. Математика, по его мнению, даёт пример эталона красоты. Экстенсивное негармоничное развитие математики должно сдерживать религиозными средствами.

В конце 1990-х годов XX века прошла дискуссия о сущности математики между двумя выдающимися учёными В.И. Арнольдом и Ю.И. Маниным. Манин писал, что математика – это искусственный язык, необходимый для описания природы. В ходе внутреннего развития и по своей логике математика создаёт виртуальные миры, отличающиеся красотой и сложностью. При этом удивительно, что «применяя формальные правила к данному математическому тексту, можно на выходе получить текст, который, кажется, несёт новое знание» [Манин, 2008: 127]. Этими идеями возмущался Арнольд: «Математика, согласно Манину, – это отрасль лингвистики или филологии, занимающаяся преобразованием конечных цепочек символов некоторого конечного алфавита в другие такие цепочки при помощи конечного числа «грамматических» правил» [Арнольд, 2004: 14]. Манин отрицал, что математика является движущей силой прогресса. Она тормозит лихорадочное развитие индустриальной цивилизации, отвлекая на решение своих внутренних проблем наиболее способных людей.

Арнольд не соглашался и с этим мнением. Оппоненты остались при своих мнениях, только усилив свои аргументы. Ведь любой спор таит существенное различие индивидуальных судеб и исследовательских успехов. Мы полагаем, что обе позиции всегда найдут своих сторонников.

Литература

1. Арнольд В.И. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2004.
2. Брашман Н.Я. Речь о влиянии математики на развитие умственных способностей, произнесенная на акте 1841 года. М.: Тип. Имп. Моск. Ун-та, 1841.
3. Гнеденко Б.В. В.И. Ленин и методологические вопросы математики// Успехи математических наук. 1970. т. XXV, вып. 2 (152). С. 3 – 12.
4. Декарт Р. Рассуждения о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
5. Лихолетов И.И., Яновская С.А. Из истории преподавания математики в Московском университете (1804–1860) // Историко-математические исследования. Вып. VIII. М.: ГИТТЛ, 1955. С. 127 – 480.
6. Манин Ю.И. Математика как профессия и призвание// Манин Ю.И. Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008. С. 125 – 136.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ В БОГОСЛОВИИ И МАТЕМАТИКЕ: К ДИСКУССИИ АКАДЕМИКА Н.Н. ЛУЗИНА И ОТЦА ПАВЛА ФЛОРЕНСКОГО

Сергей Сергеевич Демидов

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом

Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН

Профессор механико-математического факультета

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: serd42@mail.ru

Проблема бесконечности была одной из важнейших в творчестве П.А. Флоренского и Н.Н. Лузина. Первый ещё студентом проявил большой интерес к теоретико-множественным идеям Г. Кантора. Однако к теории множеств Флоренский подходил с позиций философствующего богослова. Лузин же примкнул к сторонникам той точки зрения, что теоретико-множественные понятия и принципы нуждаются в пересмотре, что неограниченное употребление в математике понятия бесконечного и аксиомы выбора может приводить к выводам, лишенным гносеологического смысла. В итоге позиции, которые заняли Лузин и Флоренский, оказались совершенно различными. Рассмотрение генезиса этого расхождения и является темой настоящего доклада.

Ключевые слова: актуальная бесконечность, континуум, небесная иерархия, дескриптивная теория множеств, аксиома выбора, эффективизм.

INFINITY IN THEOLOGY AND MATHEMATICS: TO THE DISCUSSION OF ACADEMICIAN N.N. LUZIN AND FATHER PAVEL FLORENSKY

Sergey S. Demidov

DSC in History of Science, Head of Department

S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Russian Academy of Sciences

Professor in the Department of Mathematics and Mechanics

M.V. Lomonosov Moscow State University

E-mail: serd42@mail.ru

The problem of infinity has been one of the most important problems in the works of P. A. Florensky and N. N. Luzin. The former was keenly interested in G. Cantor's set-theoretic ideas in his student years. However, he considered Cantor's set theory from the standpoint of a philosophizing theologian. Luzin joined the supporters of the viewpoint that set-theoretic concepts and principles needed to be revisited, that an unlimited use of the notion of the infinite and the axiom of choice in mathematics could lead to conclusions devoid of epistemological meaning. As a result, Luzin and Florensky held opposite positions on this matter. Exploring the origin of this discrepancy is what this paper is devoted to.

Keywords: actual infinity, continuum, celestial hierarchy, descriptive set theory, axiom of choice, effectivism.

Ещё будучи студентом-математиком первого курса физико-математического факультета Московского университета, П.А. Флоренский познакомился с канторовской теорией множеств и стал её приверженцем и пропагандистом. Он подготовил и в 1904 году опубликовал в журнале «Новый путь» статью «О символах бесконечности», ставшую первым развёрнутым изложением канторовских идей на русском языке. В новой теории его привлекал, прежде всего, богословский аспект теоретико-множественных построений Г. Кантора. Канторовская идея трансфинитных порядковых чисел для Флоренского – это, прежде всего, ключ к решению проблемы небесной иерархии, представление о которой в христианской (в том числе в православной) богословской традиции восходит к сочинению «О небесной иерархии», написанному на рубеже IV – V вв. и традиционно приписываемому Дионисию Ареопагиту. Лузин же, ещё в студенческие годы познакомившийся со знаменитой дискуссией об аксиоме выбора, развернувшейся в 1905 году между Ж. Адамаром, Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом [Медведев, 1978], принял позицию «реалистов», считавших, что неограниченное употребление в математике понятия бесконечного и аксиомы выбора может приводить к выводам, лишённым гносеологического смысла, и поэтому считавших необходимым точно отделить математические сущности, которые математик может рассматривать как действительно существующие, от тех, которые лишь кажутся таковыми, но которым «реально» ничего не соответствует. Относительно аксиомы выбора было высказано сомнение в её применимости даже к случаю, когда множества, из которых производится выбор, являются подмножествами континуума. Позиция Лузина нашла своё отражение в его знаменитой диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915). По существу, своё видение этого вопроса Лузин отчётливо выразил уже в своём письме Флоренскому от 4 августа 1915 года [Переписка, 1989: 178]:

«Вы (богословы – добавим мы) ищете бестрепетного сердца непреложной Истины, оснований всему, смело шагаете через всё, сметая теории, как карточные домики, а я … я не жду последних «как» и «почему», и, боясь бесконечного, я сторонюсь его, я не верю в него.

<u>Нет актуальной бесконечности!</u> А когда мы усиливаемся говорить о ней, мы <u>фактически</u> всегда говорим о конечном и о том, что за n есть $n + 1$ …, вот и всё!».

Для Лузина актуальная бесконечность если и существует, то вне математики – например, в богословии. Своё наиболее отчётливое выражение взгляды Лузина на бесконечность получили в его знаменитых «Лекциях об аналитических множествах и их приложениях», опубликованных в Париже в 1930 году.

Если оправданность канторовского несчётного арифметического континуума ставится Лузиным и его последователями под сомнение, то он оказался необходимым самому Кантору и следовавшим ему математикам (в том числе и самому Лузину) как та область изменения, в которой развивалась математическая мысль.

Литература

1. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. М.: Наука. 1978.
2. Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским. Публикация и примечания С.С. Демидова, А.Н. Паршина, С.М. Половинкина и П.В. Флоренского // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 125–191.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МАТЕМАТИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ В XVII В.[2]

Евгений Алексеевич Зайцев
Кандидат физико-математических наук, заведующий сектором истории математики
Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН
E-mail: e_zaitsev@mail.ru

Статья посвящена исследованию логических и исторических проблем, связанных с математизацией движения в классической механике XVII в. Показано, что теоретическими предпосылками математизации движения являются новые для механики представления: об аддитивности сил, участвующих в движении, и о принципиальной возможности создания равномерного перемещения. Показано, что в основе этих представлений лежат успехи в практическом преобразовании движений, достигнутые механиками в XV–XVI вв. Проанализировано значение кривошипно-шатунных механизмов с маховиком, использовавшихся для преобразования движений и регуляризации скорости, а также противовесов, применявшихся для облегчения перемещения тяжестей в подъемных механизмах.

Ключевые слова: научная революция XVII в., математизация движения, история механики, аддитивность сил, регулярное движение.

TECHNOLOGICAL PREREQUISITES FOR THE MATHEMATIZATION OF MOTION IN THE 17TH C.

Evgeny A. Zaytsev
CSc in History of Science, Head of the Department of History of Mathematics
S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Russian Academy of Sciences
E-mail: e_zaitsev@mail.ru

The article is devoted to the logical and historical problems associated with the mathematization of motion in classical mechanics in the 17th . It is shown that the theoretical prerequisites for the mathematization of motion were created by two new ideas: about the additivity of forces involved in the movement, and on possibility of uniform motion in sublunary world. It is shown that at the basis of these ideas lays the success in the transformation of movements in technical mechanics of the 15–16th centuries. In this context, crank mechanisms with flywheels and lifting devices with counterweights are analyzed.

Keywords: scientific revolution of the 17th c., mathematization of motion, history of mechanics, additivity of forces, regular motion.

Применение математики для описания перемещений в подлунном мире является одной из характерных черт научной революции XVII в. Первые попытки математизации движения были сделаны еще в античности в рамках «аристотелевской динамики» (*Физика* VII, 5). В средние века была разработана специальная «наука о движении», в которой для выражения соотношения между силами и скоростями использовалась логарифмическая «функция Брадвардина». Особенность этой «науки» состояла в том, что она описывала движение не в реальной, а в некоторой виртуальной природе, в которой – в силу тезиса о Божественном всемогуществе (*potentia Dei absoluta*) – могли быть выполнены условия постоянства действующих сил. Представление о том, что средствами математики можно адекватно описывать реальное физическое движение, рождается только в XVII в.

Несмотря на усилия историков, вопрос о том, почему идея количественного описания природного движения возникла именно в эту эпоху, все еще остается открытым. Причина в том, что исследователи обычно анализируют представления о движении в целом, не делая различия между природным и искусственным движением. Между тем, с точки зрения методологии указанное различие является принципиальным. Дело в том, что

---

[2] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект «От средневековой науки о движении к механике Галилея: социокультурные предпосылки развития», № 15-03-00218а.

естествоиспытатели прошлого обычно описывали природные движения через призму представлений, которые формировались, исходя из технических движений. Последние неизбежно являются «исторически нагруженными»: их структура существенно зависит от уровня развития техники в ту или иную эпоху. В силу этого, решение вопроса о математизации движения следует искать не в области общемировоззренческих представлений (сдвиги здесь важны, но вторичны), а в сфере механических технологий. В данной статье мы попытаемся развить эту идею, выделив ряд технических нововведений XVI в., способствовавших рождению представления о квантификации физического движения.

На пути идеи квантификации стояло несколько препятствий. Во-первых, считалось, что в подлунном мире движение с постоянной скоростью невозможно. Во вторых, в доклассической механике было широко распространено представление о неаддитивности действия сил, участвующих в движении. Считалось, что объединенная сила оказывает действие, которое превосходит сумму действий частичных сил. Именно этот тезис, указывающий на непропорциональное возрастание объединенной силы, не позволял привлечь математику для описания движений. Величины, изучаемые математикой, всегда являются аддитивными, т.е. равными сумме своих частей. Еще одним препятствием для математизации движения было представление о невозможности инерциального движения или, скажем точнее, движения, которое осуществлялось бы при помощи «бесконечно малой» силы. Согласно Аристотелю, всякое движение требует наличия постоянно действующей внешней силы. Согласно схоластике, это условие не является обязательным (теория импетуса). Однако даже под действием импетуса тело не может двигаться бесконечно долго. Его движение рано или поздно прекращается в силу исчерпания импетуса и естественного стремления тела к покою (*inclinatio ad quietem*) [Зайцев, 2015].

Развитие практической механики в XVI в. создало предпосылки для преодоления указанных стереотипов.

Начнем с вопроса о равномерности движения. Согласно Аристотелю, мнение которого разделяла средневековая традиция, во всяком движении, осуществляющемся в подлунном мире, обязательно присутствует ускорение, которое наступает либо в начале, либо в конце, либо в середине (*О небе* II, 6). Равномерное движение возможно только для небесной сферы, движимой волением бестелесных двигателей (интеллигенций), или «с точки зрения Божественного всемогущества», т.е. в логически возможном мире.

Представление о том, что равномерное движение может быть реализовано в реальном подлунном мире, обязано своим происхождением ряду технических нововведений, получивших распространение в начале Нового времени. Речь идет о кривошипно-шатунных механизмах, снабженных маховым колесом. В качестве примера рассмотрим токарный станок.

До XVI в. в ходу были исключительно станки лучкового типа, в которых вращение рабочего вала осуществлялось попеременно то в одном, то в другом направлении. Во время рабочего хода происходило натягивание «лука», инициировавшего затем обратное холостое вращение. В таких станках было в принципе невозможно реализовать равномерное движение, ибо при смене направления происходит его замедление и ускорение. Необходимым условием достижения постоянства скорости является одностороннее вращение вала, идея которого была впервые реализована на рубеже XV–XVI вв. В этот период началось использование кривошипно-шатунных механизмов (для преобразования поступательного движения педали во вращательное движение вала), снабженных маховыми колесами (для демпфирования неравномерностей, вызванных периодическим нажатием педали). Сочетание кривошипа и маховика стали затем применять и в других механических устройствах: тестомесильных машинах, машинах для чесания шерсти и др. [Зайцев, 2016].

Перейдем к предпосылкам идеи аддитивности движущих сил.

Отношение к принципу аддитивности может служить своеобразной лакмусовой бумажкой для различения классической и доклассической механики. В классической механике этот принцип считается автоматически выполненным. В доклассической механике, напротив, господствовало представление о том, что совместное действие может дать результат, больший, нежели сумма результатов частичных действий [Зайцев, 2017].

В основе этого представления лежит опыт совместного действия, в котором в качестве «двигателя» используется физическая сила человека. Так, при подъеме или волочении тяжелого груза, объединяя усилия, можно достичь результатов, превосходящих сумму результатов, полученных при помощи индивидуальных усилий. На это обстоятельство обратил внимание еще Аристотель, отметивший, что один волочильщик (речь идет о вытаскивании тяжелой триеры) может рассматриваться только как потенциально действующий, поскольку его действие актуализируется лишь в составе команды (*Физика* VII, 5).

Преодоление представления о неаддитивности или непропорциональном возрастании движущей силы стало возможным лишь после того, как на смену физической силе пришла механическая сила тяжести. Это случилось в XVI в., когда на строительных площадках городов и в морских портах стали применяться подъемные механизмы, снабженные противовесом. Предварительное уравновешивание тяжести позволяло уменьшать размеры рабочих рычагов и, в конечном итоге, размеры самих машин, что было важно на ограниченном пространстве. Кроме того, в них достигалось значительное снижение физических затрат человека. Значение таких подъемных устройств состоит в том, что в них обе силы (движения и сопротивления) являются однородными. Однородность позволяет сравнивать силы между собой не только по принципу больше или меньше (как в подъемных машинах предшествующего периода), но и выражать соотношения между ними в терминах количества. Практика уравновешивания вытеснила традиционное представление о непропорциональном увеличении объединенной силы и способствовала принятию тезиса об аддитивности сил [Зайцев, 2017]. Идея аддитивности сил была впоследствии распространена с силы тяжести на другие природные силы. Поскольку противовесы позволяли перемещать тяжести посредством «бесконечно малой» силы, их применение косвенным образом способствовало также рождению идеи инерциального движения.

Литература

1. Зайцев Е.А. У истоков теоретической механики: история превращения технического искусства в научную дисциплину // Институт истории естествознания и техники РАН. Годичная научная конференция 2015. Т.1. М., 2015. С. 132–141.
2. Зайцев Е.А. Идеальное движение // Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования. 2016. Т.2. № 2(8). С. 34–42.
3. Зайцев Е.А. Всеобщее содержание природы в зеркале развития практической механики // Научные ведомости БелГУ. Философия. Социология. Право. 2017. Вып. 41. С. 12–19.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕВОЛЮЦИЯ И МАТЕМАТИКА

Галина Александровна Зверкина
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики
Российский университет транспорта (МИИТ)
Старший научный сотрудник
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: zverkina@gmail.com

Научно-техническая революция привела к изменению структуры математического сообщества, в результате чего произошли существенные изменения в самой математике.

Ключевые слова: Научно-техническая революция, математическое сообщество, структура математики, математическое знание.

INDUSTRIAL REVOLUTION AND MATHEMATICS

Galina A. Zverkina
CSc in History of Science, Associate Professor
Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
Senior Researcher
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences
E-mail: zverkina@gmail.com

The industrial revolution led to changes in the structure of the community of mathematicians. These changes resulted in significant changes in the structure of mathematics.
Keywords: industrial revolution, mathematical community, structure of mathematics, mathematical knowledge.

Около 1760 и до 1820-1840 гг. происходил переход на новые технологические процессы: от ручного труда к производству с помощью механизмов, химическому производству, производству стали и чугуна, к паровым станкам, к фабрично-заводской системе. Развивались транспорт, банки, межрегиональная и международная торговля.

Новые предприятия, машины и источники энергии требовали подготовленных рабочих, инженеров и техников для обслуживания сложных механизмов. Стало нужно образование для рабочих, техников и инженеров.

До этого времени немногим людям было доступно образование. Оно было, как правило, теологическим. В университетах изучали *свободные искусства*, в т.ч. арифметику и геометрию. Но математическое образование было индивидуальным.

Промышленность и транспорт требовали образованных людей. Новые рабочие должны были знать математику, уметь читать чертежи и обслуживать сложные машины; и основой технического образования была математика. В кон. XVIII – нач. XIX вв. появилось много начальных школ в Европе и в Америке, началось развитие средних школ. Создавались высшие технические учебные заведения. Выпускник средней школы мог обучать в начальной школе; преподаватель средней школы или училища был выпускник университета. Количество университетских профессоров математики соответственно увеличилось. Стало меняться математическое сообщество. Ранее были две группы математиков: *учителя* и *практики*. Они были во всех древних цивилизациях. Всегда математики решали задачи практики. Первые *абстрактные* математические задачи возникают в арабской средневековой математике; там появилась новая группа *абстрактных* математиков (*чистых теоретиков*), однако, решавших и прикладные задачи.

Возрождение вернуло античную науку в Европу через Восток. В Европе появился интерес к абстрактным задачам. Закончилось время рыцарей, и ныне дворяне привлекали внимание дам своим интеллектом. Стали популярны головоломки. Появилась новая группа математиков: *любители*. Они ставили и решали задачи в алгебре и теории чисел. И учителя математики сочиняли задачи для обучения школьников; их можно считать *любителями математики*. Итак, сообщество математиков состояло из *учителей*, *практиков* и *любителей*. Обычно любители были *теоретиками*. Но некоторые учителя и практики тоже занимались *теоретическими* задачами, не имевшими очевидных приложений.

В то время профессора были учителями и практиками: университеты и академии выполняли государственные задания по научной поддержке важных областей государственной деятельности (навигация, проектирование и создание новых транспортных средств, разработка оружия, учёт финансов, и т.д.). Также они занимались и популярными абстрактными задачами. И *каждый профессор должен был вести исследования и публиковать результаты: без этого он не может занимать кресло профессора*. До XIX в. задач для исследований профессорам хватало. И были математики: учителя, практики, теоретики, любители. Обычно теоретики были любители. Часто в алгебре и теории чисел.

А университетские профессора решали прикладные задачи: создавали математическую модель реальной ситуации и изучали её поведение. Обычно прикладные задачи были связаны с характеристиками технических, физических и других систем, и с оптимизацией. Поэтому развивались дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, статистика и вычислительные методы.

К XIX в. увеличилось число образовательных учреждений и число учителей, появилось много новых ВУЗов для подготовки учителей средних, технических и инженерных школ. Число профессоров математики увеличилось. Им уже не хватало прикладных задач для обеспечения научной деятельности. Многие занялись *теоретическими вопросами математики*.

Это было: (1) упорядочение и структурирование математических знаний; (2) обобщение ряда задач и понятий; (3) произвольное изменение параметров ранее изученных задач; и т.п.

(1) Быстрое развитие технического образования требовало решения методологических проблем математики, т.к.: удачно сформулированные понятия и удобные обозначения упрощают исследования; для хорошего обучения математике нужны унификация и адаптация математических понятий и результатов для учащихся высших учебных заведений (в основном технических).

Учёные использовали интуитивные представления для таких объектов, как функция, предел, исчисление бесконечно малых и др. Доказательства и логические конструкции не были строгими. Но в прикладных задачах это не приводило к значительным ошибкам.

Для массового обучения нужна некоторая структура, которая объединяет достаточно развитый математический аппарат. Математики стали создавать структуру новой математики по образцу «Начал» Евклида. Коши ввел ряд критериев строгости доказательства в математическом анализе; это было продолжено Вейерштрассом. Вейерштрасс, Коши, Гейне и Больцано формализовали понятие предела и бесконечно малого, непрерывность и т.д. Далее, Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор ответили на вопрос: «Что есть число?».

Учёные пытались создать универсальный язык для вывода всех возможных математических фактов из неких базовых положений. Это привело к созданию и развитию математической логики и теории множеств. Тогда же были созданы основы современной идеологии преподавания высшей математики. Практически все реформаторы математики были профессорами; они хотели создать строгую логическую структуру математики, что заменило бы интуицию при решении математических задач строгими логическими структурами. Профессора-теоретики подготовили студентов-теоретиков; утверждение «*математика = логика*» становится символом университетской математики второй половины XIX в.

(2) В прикладных задачах появились новые объекты исследования. Так, сначала функции были только многочленами; затем – это многочлены и тригонометрические функции; потом к ним добавили логарифм и экспоненту; далее понятие функции было обобщено сначала Эйлером, затем Больцано, Дирихле и Лобачевским. Это определение функции порождало необычные функции, например, функции Дирихле и Римана. Возможность определить функцию как предел последовательности функций приводила к физически невозможным объектам, например, функции Кантора.

Новые и непривычные математические объекты не обладали свойствами математических понятий, связанных с практическими приложениями. Многие интуитивные предположения об их свойствах были ложными. Поэтому многие *контрпримеры появились как важная часть математической проверки новых гипотез.*

Обобщение позволяет создать общее доказательство для многих теорем или универсальный метод решения многих задач. Например, некоторые 1-, 2-, и 3-мерные задачи имеют сходные решения; тогда можно предложить понятие многомерного (евклидова) пространства и сформулировать обобщённую n-мерную задачу с обобщённым решением. Т.е. обобщение может дать полезный метод доказательства, но произвольное обобщение может привести к противоречию или к задаче без решения.

Важным шагом в развитии абстрактного математического знания является обобщение алгебраических понятий и их применение в различных областях анализа, геометрии и дифференциальных уравнений.

(3) В XIX в. многие математики уже не участвовали в экспериментальных и технических исследованиях. Они решали задачи, сформулированные другими исследователями. Не зная причин возникновения конкретной задачи, математик обобщал её, вводя дополнительные условия и обобщения используемых понятий. Складывалось мнение, что все математические задачи суть продукт человеческой мысли, но не следствие практики.

Вообще говоря, если математическая задача правильно сформулирована и имеет основу в реальных природных процессах, то она всегда имеет единственное решение, описывающее исходный процесс в природе. Но когда математики пытались решить обобщённую задачу с произвольно изменёнными параметрами, они обнаруживали, что такая задача не всегда имеет решение. Так в XIX в. в математическом исследовании появилась новая тема: теорема существования и единственности.

Растущее математическое знание нуждалось в упорядочивании и представлении о перспективах его развития. В 1872 г. Ф. Клейн предложил общий алгебраический подход к различным геометрическим теориям и наметил пути их развития (*Эрлангенская программа*). Алгебраизация геометрии способствовала решению многих проблем, но эти методы переводили геометрические факты на алгебраический язык, и сущность геометрии стала представать как абстракция. Позже выдающиеся теоретики Ф. Клейн и Г. Кантор инициировали международные конгрессы математиков. В 1897 г. на Конгрессе в Цюрихе обсуждались вопросы об обосновании математики, основанном на теории множеств, и о проблемах математического образования.

Вопросы об обосновании математики вызвали много споров. Предполагалось строить всю математику на основе теории множеств. Однако этот подход чреват многими парадоксами. Многие высказывали другие взгляды на принципы развития математики.

Одним из таких принципов была формализация математических знаний и доказательств теорем, основанная на логических структурах. Другим вариантом развития математики является конструктивная математика, т.е. математическое доказательство существования решения является алгоритмом построения этого решения, без закона исключенного третьего. Третий предложенный способ развития математики - это интуиционизм, где математика считается чистым результатом конструктивной умственной деятельности людей, а не открытием фундаментальных принципов, соответствующих объективной реальности.

До промышленной революции почти все исследования в области математики были конструктивными. Математики решали некие задачи и находили их конкретные решения. Для некоторых типов схожих задач были разработаны общие методы получения решений.

Новая абстрактная математика доказывала существование решения, но не всегда давала алгоритм его получения. Завершением первого этапа реформы математики стала работа Гильберта. Затем были Уайтхед, Рассел, Бурбаки и т.д. Без реформирования математики, возникшей в результате промышленной революции, современная математика была бы иной, чем та, которую мы имеем сейчас.

ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ: ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ И ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТИВИЗМ КАК ПРОГРАММА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Сергей Леонидович Катречко
Кандидат философских наук, доцент философского факультета
Государственный Академический Университет Гуманитарных Наук
E-Mail: skatrechko@gmail.com.

Трансцендентальная философия Канта нацелена на исследование как человеческого способа познания в целом, так и отдельных форм познания.. Задачей данной статьи является экспликации кантовского понимания абстрактного характера математического (по)знания как «конструирования [из] понятий» [В 741]), основательность [которой] «зиждется на дефинициях, аксиомах и демонстрациях» [В 754]. Математические предметы, в отличие от физических предметов, имеют абстрактный характер и вводятся посредством принципа абстракции Юма — Фреге. Кант на основе своего учения о схематизме развивает оригинальную концепцию абстракции: кантовские схемы выступают как способы конструирования математических предметов, как «действия чистого мышления» [В 81]. Математика рассматривается при этом как двух–уровневая система рассудка и чувственности, между которыми в ходе математической деятельности осуществляется взаимный переход.

Ключевые слова: трансцендентальная философия Канта, трансцендентальный конструктивизм, математика как познание посредством конструирования понятий.

THE TRANSCENDENTAL PHILOSOPHY OF MATHEMATICS: TRANSCENDENTAL ANALYSIS OF MATHEMATICAL COGNITION AND TRANSCENDENTAL CONSTRUCTIVISM AS THE FOUNDATION OF MATHEMATICS

Sergey L. Katrechko
CSc in Philosophy, Associative Professor of Faculty of Philosophy
State Academic University of the Humanities
E-mail: skatrechko@gmail.com

Kant's transcendental philosophy focuses on both the human method of cognition in general and certain types of cognition. This paper aims to explicate Kant's understanding of the abstract nature of mathematics as "construction of concepts in intuition", which is "thoroughly grounded on definitions, axioms, and demonstrations" [CPR, B 754]. Mathematical objects are abstract nature and introduced within Hume's principle of abstraction. Mathematical activity is considered as a two-level system, which supposes a "descent" from the level of concept understanding to the level of sensual intuition and a return "rise". On this basis, we are developing theory of transcendental constructivism (pragmatism).

Keywords: Transcendental philosophy, transcendental constructivism, mathematical cognition as construction of concepts in intuition.

В своей философии Кант осуществляет *трансцендентальный сдвиг* от изучения предметов к исследованию [трансцендентальных] условий возможности их познания [B 25][3]. Этим полагается новая методологическая стратегия, которую Кант именует «измененным методом мышления» [B XVIII, B XXII], в соответствии с которой «если мы спрашиваем о возможности познания a priori, то исходим не из предмета, а из [*трансцендентальных*] условий, которые делают его объектом [возможного] познания». Специфика же разных видов человеческого познания связана с различным соотношением в составе нашего *способа познания* «двух основных стволов человеческого познания… *чувственность* и *рассудок*» [B 29].

* * *

Таким *видом познания* в нашем случае выступает математическая деятельность, суть которой определяется Кантом как «конструирование [конструкция из] понятий» [B741], что предполагает совместную работу *рассудка* и *воображения*, поскольку «конструировать понятие — значит показать a priori соответствующее ему созерцание» [*там же*]. При этом важнейшим для понимания кантовской концепции математики является проводимое им различие между «эмпирическим созерцанием» — например, вот этим нарисованным треугольником — и «общезначимым созерцанием» как «*действием* по конструированию понятия» [*там же*]. Математика может ограничиться единичными созерцаниями, так как это лишило бы ее статуса *аподиктичного* знания. Кантовские *общезначимым созерцания* — это трансцендентальные *схемы* («трансцендентальный продукт воображения» [B 181]), которые являются способами конструирования, «правилами синтеза [чистых чувственных понятий]» [B 180], каковыми являются математические предметы.

Для понимания кантовской концепции математики надо учесть также то, что наряду с *остенсивным* геометрическим конструированием (введенным в фр. [B 741]) Кант рассматривает также *символическое конструирование*, характерным для алгебры [B 745].

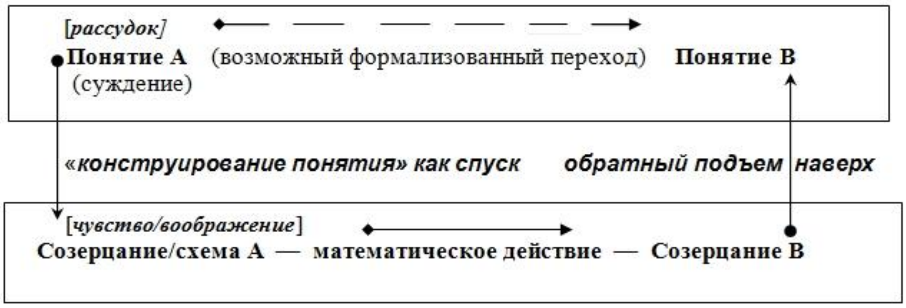
При анализе алгебры как абстрактном типе математической деятельности хотелось бы обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, одной из конституирующих черт алгебры является использование «языка ***x***–ов и ***y***–ов», или переход к метаязыку *переменных*. Во-вторых, язык алгебры обладает выразительными возможностями для выражения не только абстрактных символов, но и *операций* («действий»), производимых с ними. По сути, алгебраический язык является языком особого рода — *процедурным*, а не декларативным языком, фиксирующим способы работы с математическим объектами, т.е. *как* надо осуществлять соответствующее математическое действие.

В своих работах [Катречко, 2014] мы показали, что в современной математике действуют оба типа кантовского конструирования, которые тесно переплетены между собой в рамках единой математической конструкции, а кантовский трансцендентализм (трансцендентальная философия математики) является адекватным средством анализа современной математической деятельности. Более того, кантовский конструктивизм применим и к анализу логики, если

[3] Здесь и далее указание на «Критику чистого разума» будем давать в стандартной пагинации [*A* (1-е изд.) // *B* (2-е изд.)].

логику трактовать как формальные системы по поиску и построению *выводов* (типа *секвенциальных деревьев* или *субординантных выводов натуральных исчислений*), т.е. можно выделить третий тип — *логическое конструирование*.

Конструктивное понимание математической деятельности, восходящее к *генетическому* методу Евклида, является важной новацией Канта[4]. В рамках кантовского трансцендентального конструктивизма математику можно представить как двухуровневый способ познания, предполагающий первоначальный «спуск» с уровня рассудочных понятий на уровень созерцаний (схем), где собственно и осуществляются математические действия, и обратный «подъем» наверх:



* * *

Вместе с тем основательность математики, по Канту, «зиждется на *дефинициях*, *аксиомах* и *демонстрациях*» [B 754]. Здесь хотелось бы обратить внимание на *математические дефиниции*, которые «*создают* само [математическое] понятие», и, тем самым, «дают *первоначальное* и *полное* изложение вещи [т.е. действительного предмета] в его *границах*» [B 756]. Математические предметы, в отличие от «физических» предметов, которые даются посредством чувственного созерцания, вводятся посредством рассудочных дефиниций, т.е. имеют абстрактный (формальный) характер [Катречко, 2104; 2016]. В современной математике аналогом кантовских дефиниций выступает *принцип абстракции* Юма – Фреге: *для любых* α, β [(∑(α) = ∑(β)) ↔ (α ≈ β)], где ∑(α)/∑(β) обозначает вновь вводимый абстрактный объект с помощью символа метаязыка ∑. Соответственно, аксиомы выражают закономерные отношения и взаимосвязи между абстрактными объектами математики (логики)[5].

Абстрактный характер математики предполагает решение трех принципиальных вопросов. Первый из них — вопрос об онтологическом статусе математических объектов. В отличие от программы *эрлангенского конструктивизма* (П. Лоренцен и др.), где математические объекты и процедуры рассматриваются как аналоги физических объектов (процедур) и, поэтому, должны соотноситься с определенными физическими действиями, *трансцендентальный конструктивизм* вполне совместим с платоновским пониманием идеальной природы математических абстрактов (см. [Катречко, 2013])[6].

Второй вопрос — это проблема порождения абстрактных объектов. Понятно, что это не может быть восходящая к Аристотелю и Локку эмпирическая абстракция как отвлечение от каких-либо характеристик конкретных объектов. Выше мы обозначили в качестве основного принцип абстракции Юма – Фреге. В качестве альтернативы или дополнения мы рассматриваем гуссерлевскую процедуру варьирования, лежащую в основе его эйдетической интуиции («усмотрения сущностей»).

Третий вопрос связан с обоснованием вводимых посредством принципа абстракции математических объектов: не порождаются ли таким способом «монстры», ведущие к математическим (логическим) парадоксам? (Заметим, что именно принцип абстракции Фреге,

[4] На этой основе мы развиваем концепцию *трансцендентального конструктивизма* (прагматизма) [Катречко, 2015; 2016].

[5] О *демонстрациях* как *выводах* в логико-математических исчислениях мы уже говорили выше.

[6] Такую трактовку математики в той или иной мере разделяют многие философы и математики в XIX — XXI вв.: Кантор, Фреге, Гильберт, Клини, Гудстейн, Колмогоров, Хинтикка, Залта, Пенроуз, Шафаревич, Манин и др. Хотя, конечно, есть и противники подобного «платонистического (абстрактного)» понимания математики.

выраженный в его аксиоме V, позволил Б. Расселу сформулировать свой известный парадокс.) Тем самым возникает проблема различения «хороших» и «плохих» математических объектов. Одним из подходов решения этой проблемы как раз и является *трансцендентальный конструктивизм*, связанный с исследованием «*действий чистого рассудка*» [B 81], в нашем случае — в математике. Соответственно, можно сформулировать *трансцендентальный критерий* существования (введения) математических объектов: приемлемыми математическими объектами являются лишь конструктивные объекты, т.е. такие математические абстракции, которые могут быть сконструированы посредством тех или иных ментальных конструкций.

Таким образом, кантовский трансцендентализм выступает концептуальным (философским) основанием таких программ обоснования математики как *формализм* (*структурализм*), *интуитивизм* и *конструктивизм*. С одной стороны, он постулирует *абстрактный* характер математического знания, что нашло свое развитие в таких программах как *формализм* и *структурализм*. С другой стороны, трансцендентальный конструктивизм настаивает на конструктивном характере работы с математическими объектами, что нашло свое последующее развитие в *интуиционизме* и *конструктивизме*.

Литература

1. Катречко С.Л. Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике, М., КД «ЛИБРОКОМ», 2014, с.86 – 120.
2. Катречко С.Л. Математика как «работа» с абстрактными объектами: онтолого–трансцендентальный статус математических абстракций // Математика и реальность. Труды Московского семинара по философии математики. М., Изд-во Московского университета, 2014, с. 421–452.
3. Катречко С.Л. Трансцендентальный анализ математики: конструктивный анализ математической деятельности // Кантовский сборник, 2016, №1(55), с.16–33 (http://kant-online.ru/?p=3322).
4. Катречко С.Л. Платоновский четырехчастный отрезок (Линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА, Т. 14, вып. 3, 2013, с.172–177.
5. Katrechko S. Transcendental Analysis of Mathematics: the Transcendental Constructivism (Pragmatism) as the Foundation of Mathematics // Working papers by Basic Research Programme. Series "Humanities", №109, 2015.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В НОВОЙ СОЦИАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ

Анатолий Николаевич Кричевец
Доктор философских наук
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: ankrich@mail.ru

Предмет доклада – современная ситуация в области статистического оценивания результатов исследований в психологии и некоторых других областях науки. Комбинация подходов Фишера и Неймана-Пирсона, которая развилась вместе с развитием статистических компьютерных программ, была упрощена в массовой науке до уровня, доступного человеку, не желающему вникать в математические и логические тонкости предмета. Затем и система образования была приведена в соответствие с этим потребителем. В докладе рассматриваются следствия этого упрощения и шаги, которые предпринимает сообщество, чтобы нормализовать ситуацию.

Ключевые слова: статистические методы, образование, изменения.

THE STATISTICAL HYPOTHESIS TESTING AT THE NEW SOCIAL SITUATION

Anatoly N. Krichevets
DSC in Philosophy
Lomonosov MSU
E-mail: ankrich@mail.ru

The subject of the presentation is current situation in the field of statistical estimation of results in psychology and some other sciences. The combination of Neuman-Pirson and Fisher's approach that was provided by statistical computer programs was simplified in the mass science to make it available to the user not having a sufficient mathematical knowledge and logical skill, and then all the system of statistical education was simplified for these users. The consequences of this process, their analysis, and steps being necessary to normalize the situation in the statistic use are considered at the presentation.

Keywords: statistical methods, education, changes.

Среди радикальных изменений, которые пришли в нашу жизнь с компьютерами, многие коснулись областей, связанных с математикой. Одно из них мы рассмотрим в данной заметке.

С начала девяностых в социологию, психологию и медицину пришли компьютерные статистические пакеты – программы, которые позволяют быстро обрабатывать данные. Основная часть методов в этих пакетах опирались на идеологию проверки статистических гипотез, разработанную в тридцатые годы прошлого века в работах Р.Фишера, Э.Пирсона и Е. Неймана, позже получившую название Null Hypothesis Significance Testing (NHST). Хотя подходы Фишера и Неймана-Пирсона существенно различаются, компьютерная реализация обработки данных привела к их слиянию, вполне, с нашей точки зрения, разумному. Однако одновременно массовый научный работник, получивший возможность быстро и с небольшими усилиями проводить статистическую обработку, получил «легкую» версию этой идеологии, которая сводилась к сравнению полученной статистической значимости результата с принятым порогом 0.05 (возможно, основой этого послужила базовая статья Фишера, где этот порог был принят в качестве разумного в конкретной ситуации, да и то с оговорками). Ориентируясь на порог 0.05, массовый работник науки утверждал истинность или ложность соответствующей гипотезы, не принимая во внимание контекст своей работы.

Под упрощенную версию понимания статистики было выстроено массовое образование вместе с руководствами и учебниками. Упрощение не обошло даже экспертов и рецензентов в ведущих научных журналах. В результате к началу текущего десятилетия более здравая часть сообщества осознала серьезную опасность такого упрощения. Американская Психологическая Ассоциация провела специальное исследование, повторив эксперименты, отчеты о которых были опубликованы в ведущих научных журналах. В результате репликации лишь меньше половины результатов оказались «значимыми» по критерию сравнения значимости с 0.05. Легкость статистической обработки привела к массовому использованию статистики и, главное, к смещению отбора результатов для публикаций в сторону почти автоматической оценки ценности результата его значимостью. Это, в свою очередь, вывело на поверхность проблему реализации маловероятных событий при массовых испытаниях.

Можно сказать, что история «фальсифицировала» теоретические соображения, оправданные в одном контексте, но ошибочные в другом – статистическое оценивание и принятие решения разведены. Последнее использует и статистическую значимость и другие возможные статистические показатели, однако теперь при принятии решения сообщество обязано учитывать также и более широкий контекст. В частности, исследование не может оценивать истинность гипотезы по полученным результатам, если аналогичные исследования проводятся многими лабораториями. Неудачи (с точки зрения достижения «значимости») должны публиковаться, и более или менее «окончательное» решение об истинности гипотезы может быть принято только в результате мета-анализа всего доступного набора результатов.

О БЕСКОНЕЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ПРЯМЫХ В АРАБСКИХ ВЕРСИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЕВКЛИДА

Ирина Олеговна Лютер
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН
E-mail: bastet_13@list.ru

Евклид, определяя параллельные как прямые, которые можно продолжать в обе стороны неограниченно, по существу, вводит бесконечное в геометрию, что, помимо обращения к понятию бесконечности в рамках античной и средневековой геометрии с ее ограниченными прямыми и плоскостями, противоречит космологии Аристотеля, в соответствии с которой мир конечен и ограничен сферой неподвижных звезд. Анализируются попытки представителей Восточного перипатетизма (главным образом Ибн ал-Хайсама и Асир ад-Дина ал-Абхари) разрешить эти противоречия.

Ключевые слова: бесконечность, параллельные, Аристотель, Симпликий, ал-Хайсам, экстенсивная бесконечность, ал-Абхари, Ибн Сина, ат-Туси.

ON INFINITE CONTINUATION OF STRAIGHT LINES IN ARABIC VERSIONS OF EUCLID’S DEFINITION OF PARALLEL STRAIGHT LINES

Irina O. Lyuter
CSc in History of Science, Senior Researcher
S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Russian Academy of Sciences
E-mail: bastet_13@list.ru

Ancient and medieval geometry with its limited objects rejected infinity. The existence of infinite objects contradicted Aristotle’s cosmology according to which the world is finite and bounded by the sphere of fixed stars. No wonder that the «introduction» of the infinite in geometry via Euclid’s definition of parallel straight lines in which he spoke about their infinite continuation compelled medieval representatives of the Oriental Peripatetism to look for the ways of eliminating the discrepancy between Euclid’s enunciation and Aristotle’s standpoint. The paper deals with the solutions of the problem by Ibn al-Haytham and Athir al-Din al-Abhari.

Keywords: infinity, parallels, Aristotle, Simplicius, al-Haytham, extensive infinity, al-Anhari, Ibn Sina, al-Tusi.

Евклид, определяя параллельные как «прямые, которые будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой “стороны” между собой не встречаются» [Евклид, 1950: 14], по существу вводит бесконечное в геометрию, что, помимо обращения в рамках античной геометрии с ее ограниченными прямыми и плоскостями к понятию бесконечности, противоречит космологии Аристотеля, в соответствии с которой мир конечен и ограничен сферой неподвижных звезд.

Античный философ-неоплатоник Симпликий (ок. 490–560) в своих комментариях к определению параллельных Евклида, анализируя необходимость и сущность каждой фразы, не оставил без внимания утверждаемое в нем бесконечное продолжение прямых, что, по его мнению, реализуется в воображении: «Что касается его[, Евклида,] высказывания “если будут продолжены продолжением постоянным неограниченно”, то он говорил об этом, только как о воображаемом, чтобы не надлежало им прекращение этого, чтобы их продолжение допускалось сферой неподвижных звезд» [Abu’l-’Abbas an-Nayrizi, 2002: 39].

Эти рассуждения Симпликия из несохранившегося греческого текста его комментария к введениям (определениям, аксиомам и постулатам первой книги) «Начал» Евклида, наряду с другими обширными цитатами из этого сочинения, приводятся в комментариях к «Началам» Евклида астронома и математика Абу-л-ʿАббаса ан-Найризи (ум. ок.922). Комментарии ан-Найризи представляли особый интерес для средневековых мусульманских математиков как важный источник сведений историко-математического и методологического характера.

Возможно, комментарий ан-Найризи был доступен и выдающемуся арабоязычному ученому Ибн ал-Хайсаму (965–1039/40, Альхазен), отдельно рассмотревшему в своем «Комментарии к введениям ["Начал"] Евклида» фразу о бесконечном продолжении прямых из определения параллельных Евклида. Он подверг критике это определение, вследствие невозможности представить утверждаемое в нем и «не достигающее конца» (бесконечное) продолжение прямых и существование самих бесконечных прямых. В отличие от Симпликия, Ибн ал-Хайсам отвергает саму возможность вообразить, помыслить что-либо бесконечное: представить можно все только ограниченное, в том числе и линии.

В качестве разрешения этой трудности ал-Хайсам предлагает оригинальный метод, позволяющий, по его мнению, представить существование бесконечных прямых, в основании которого можно усмотреть аристотелевское понятие бесконечного от прибавления или экстенсивной бесконечности: необходимо взять отрезок и приставить к нему другой отрезок, сохраняя направление первого, при этом такой составленный отрезок существует, затем к свободному концу второго отрезка приставить в его направлении еще один отрезок и т.д.; аналогичные действия необходимо предпринять по отношению к другому концу первого отрезка. Именно так, утверждает ал-Хайсам, можно представить существование «ограниченной прямой», продолжающейся в обе стороны бесконечно, поскольку ее можно неограниченно продлевать в обе стороны другими присоединенными к ее концам «ограниченными прямыми» [Розенфельд, Юшкевич, 1982: 49–50].

Комментарий к «Началам» Евклида ал-Хайсама был известен многим средневековым мусульманским ученым. В частности, это сочинение, как было показано [Лютер, 2014: 88–91], послужило Асир ад-Дину ал-Абхари (ок.1200–ок.1265) одним из источников при составлении трактата «Улучшение "Начал" Евклида». Приведенные выше рассуждения ал-Хайсама, вероятно, не остались без внимания ал-Абхари и, можно предположить, обусловили предпринятую им своеобразную, с грамматической точки зрения, редакцию определения параллельных (ал-Абхари добавляет еще и альтернативное определение параллельных как эквидистантных – утверждение, фактически эквивалентное пятому постулату Евклида): «Две параллельные линии – те, которые находятся на одной плоскости, и если бы были продолжены [неограниченно] прямолинейно в обе стороны, никогда бы не встретились. Говорится [также]: две параллельные линии – это две линии, которые находятся на одной плоскости, и если бы были продолжены по прямой неограниченно, расстояние между ними было бы всегда одним [и тем же]. Расстояние – кратчайшая линия, соединяющая их» [Асир ад-Дин ал-Абхари, Ms Ar 3424: л.2].

Особенность формулировок ал-Абхари заключается в том, что говоря о неограниченном продолжении прямых, он прибегает к арабской конструкции условно-ирреального предложения, выражающего условно-ирреальное действие. В русском переводе этой конструкции соответствует условное предложение с глаголами в сослагательном наклонении гипотетического значения. По-видимому, учитывая рассуждения ал-Хайсама и во избежание противоречий с учением Аристотеля, ал-Абхари преднамеренно облек в такую «условно-ирреальную» грамматическую форму фразу о бесконечном продолжении прямых. Напомним, что ал-Абхари – известный представитель Восточного перипатетизма (фальсафы). Составленное им «Руководство по философии» представляет собой изложение учения Аристотеля в том виде, в котором оно было воспринято и истолковано арабо-мусульманскими философами.

Подобный грамматический прием характерен и для более ранней редакции определения параллельных выдающегося представителя фальсафы Ибн Сины (ок. 980–1037, Авиценна): «две параллельные линии – те, которые, если будут продолжены их концы в обе стороны, даже если бы [были продолжены и] неограниченно, не встретятся» [Ibn Sina, 1977: 18].

В этой связи интересны геометрические аргументы, опровергающие существование бесконечной протяженности, приведенные, однако, без атрибуции наиболее последовательным сторонником Ибн Сины, философом и математиком Насир ад-Дином ат-Туси (1201–1274) в небольшом метафизическом сочинении «О делении сущих». Допускается, что бесконечная протяженность возможна; тогда стороны, например, угла могут быть бесконечно продолжены; если стороны угла бесконечны, то и расстояние между ними также будет бесконечным; но это расстояние заключено между сторонами угла, а все, что охватывается двумя вещами, обладает первым и последним элементом; следовательно, это расстояние не бесконечно; итак, то, что мыслилось бесконечным, оказалось конечным, следовательно, бесконечная протяженность невозможна [Nasir al-Din al-Tusi, 1992: 30]. Примечательно, что основная идея этих геометрических аргументов, весьма вероятно, почерпнута из космологических аргументов Аристотеля («О Небе», I, 5 271b26), доказывающих, что тело, движущееся по кругу, по необходимости должно быть конечным, в противном случае движение невозможно, из чего следует, что суточное движение небес будет невозможно, если Вселенная будет бесконечна.

Литература

1. Abu'l-'Abbas an-Nayrizis Exzerpte aus (Ps.-?) Simplicius Kommentar zu den Definitionen, Postulaten und Axiomen in Euclids Elementa I / Eingeleitet, ediert und mit arabischen und lateinischen Glossaren versehen von R.Arnzen. Köln, 2002. – 140 p.
2. Асир ал-Дин ал-Абхари. Ислах ал-китаб ал-Истиксат / Chester Beatty Library (Dublin). Ms Ar 3424. Fols. 1v–126v.
3. Евклид. Начала. Книги I–VI / Пер. с греч. и ком. Д.Д.Мордухай-Болтовского при ред. участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского. М.–Л.: ГТТИ, 1950. – 447 с.
4. Ibn Sina. al-Shifa'. Usul Al-Handasah (Mathématique, Géométrie) / Texte établi par A.H.Sabra, A.H.Lotfi, revu et préfacé par I.Madkour. Cairo: al-Hay'a al-Misriya al-'Amma li-l-Kitab / L'Organisation Egyptienne Générale du Livre, 1977.
5. Лютер И.О. Первые результаты исследования трактата ал-Абхари «Улучшение "Начал" Евклида» по его дублинской рукописи // Историко-математические исследования. Вып. 15(50). М.: Янус-К, 2014. С. 84–119.
6. [Nasir al-Din al-Tusi] Treatise on the proof of a necessary [being] // The Metaphysics of Tusi / Persian text established by the Institute for Cultural Studies: Tehran, Iran; Engl. transl. by P.Morewedge. Tehran: Publications of SSIPS, 1992. P. 1–57.
7. Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П. Теория параллельных линий на средневековом Востоке, IX–XIV вв. М., 1983. – 128 с.

КОНЦЕПЦИИ КОНСТРУКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Виктор Тихонович Мануйлов
Кандидат философских наук, доцент,
Московский институт государственного управления и права, филиал в Курской области
E-mail: manvict@yandex.ru

Рассматриваются типы конструктивности математических знаний на трех уровнях исследований по философии математики. Рассмотрена классификация типов конструктивности математических знаний, основанная на гносеологических основаниях конструктивности. Рассмотрены типы диалогов, специфичных для разных типов конструктивного математического знания на разных уровнях исследований по философии математики.

Ключевые слова: конструктивность, философия математики, логика и методология математики.

CONCEPTIONS OF THE CONSTRUCTIVITY OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Victor T. Manuylov
CSc in Philosophy
Moscow Institute of Public Administration and Law, branch in the Kursk region
E-mail: manvict@yandex.ru

The types of constructivity of mathematical knowledge are examined at three levels of research on the philosophy of mathematics. The classification of types of constructivity of mathematical knowledge, which is based on epistemological foundations of constructivity, is considered. Types of dialogues specific for different types of

constructive mathematical knowledge at different levels of research in the philosophy of mathematics are considered.

Keywords: constructivity, philosophy of mathematics, logic and methodology of mathematics.

Конструктивность математического знания – одно из важнейших методологических требований, предъявляемых к математической теории в исследованиях по основаниям математики [Мануйлов, 2003: 105]. В структуре «конструктивной (в каком-либо смысле) математической теории» выделяются две части, условно называемые: «конструктивный базис» и «логика». «Конструктивный базис» содержит «конструкции», то есть методы построения индивидуальных предметов, составляющих предметную область математической теории, а в логической части теории указывается язык логики и аппарат логического вывода, позволяющий строить предложения математической теории (определения, аксиомы, постулаты, теоремы) как описания тех свойств математических объектов, которые определяются «конструкциями» «конструктивного базиса». Проблема конструктивности математического знания рассматривается на трёх уровнях исследования: собственно математика; логика и методология математики; философия математики ([Мануйлов, 2015: 127]; [Мануйлов, 2008: 60]; [Мануйлов, 2009: 94]) (Схема 1):

[Математика]-1	[Логика и методология математики]-1	[Философия математики]-1
[Математика]-2	[Логика и методология математики]-2	[Философия математики]-2
[Математика]-3	[Логика и методология математики]-3	[Философия математики]-3

Схема 1.

Первая строка Схемы 1 представляет слой «собственно математики». Основные «жители» этой области: теории, рассматриваемые как интерпретированные или неинтерпретированные исчисления, строящиеся в формальных языках и проверяемые на выполнение определенных семиотических критериев (непротиворечивости, полноты, независимости аксиом и т.д.). [Логика и методология математики]-1 сводится к разработке методов решения логико-семиотических проблем, возникающих в конкретной работе математиков, причем логико-методологический «органон» этого уровня – математическая логика – рассматривается как специальная математическая теория. [Философия математики]-1 (philosophy of mathematics в англоязычной традиции) сводит классические философские проблемы математического познания к логико-семиотическим проблемам и решает их методами математической логики. На уровне [Философии математики]-1 исследуются следующие понятия математической конструктивности [Мануйлов, 2003: 106]:

1) алгорифмическая конструктивность;
2) конструктивность оперативной математики П. Лоренцена;
3) интуиционистская конструктивность;
4) предикативистская конструктивность;
5) конструктивность фрагмента аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля, определяемого «конструктивными аксиомами» («конструктивность по Френкелю-Бар-Хиллелу»);
6) конструктивность Геделевской модели «конструктивных множеств»;
7) конструктивность финитной метаматематики Д. Гильберта;
8) конструктивность различных расширений финитной установки.

Каждый из перечисленных смыслов конструктивности опирается на упрощения, идеализации, огрубления, накладываемые на деятельность предполагаемого теорией при ее гносеологической интерпретации идеализированного субъекта, – гносеологические основания конструктивности математической теории [Мануйлов, 2003: 107].

Центральный пункт второго уровня –*логика и методология математического знания*, – в немецкоязычной традиции является частью Wissenschaftstheorie (теория науки) ([Wohlrapp, 1979: 349], [Butts, Brown, 1979: ix]). На уровне [Логики и методологии математики]-2 на основе оперативной логики и математики П. Лоренцена сложились две концепции математического знания: аналитическая (в составе “analytische Wissenschaftstheorie“) и противопоставляемая ей конструктивная (в составе “konstruktive Wissenschaftstheorie“) [Wohlrapp, 1979: 349]. Метод аналитической философии науки характеризуется как «исследование» или «путь (метод) исследования» («die Forschung» [Wohlrapp, 1979: 349] и «the way of research» [Lorenz, 1989: 7]) в противоположность методу конструктивной философии науки, характеризуемому как «представление» или «путь (метод) представления» («die Vorstellung» [Wohlrapp, 1979: 349] и «the way of representation» [Lorenz, 1989: 7]). В качестве «конструкции» здесь рассматривается «исчисление»; логическая часть конструктивной философии математики представлена так называемой диалогической логикой [Lorenzen, 1987].

Основную часть третьего слоя исследований в области оснований математического знания составляют философские (в традиционном понимании) концепции: *философия математики* Платона, Аристотеля, Лейбница, Канта, Гегеля, Маркса, Хайдеггера и т.д. В каждой из этих концепций складывается собственный «образ» математики, оригинальное понимание ее методов и приемов: [Математика]-3 и [Логика и методология математики]-3. [Конструктивная логика и методология]-3 представлена «философскими» диалогами [Мануйлов, 2003: 119].

Целью «философского» диалога является выработка участниками диалога общего тезиса за счет развития каждым своей системы. В результате философского диалога между «конструктивистами» и «платонистами» в античности появились «Начала» Евклида, где «конструкция» трактуется как вспомогательный приём на пути от «мнения» к «эпистеме» [Мануйлов, 2008: 70]. В философии математики И. Канта наличие в структуре доказательства «конструкции понятия» («die Konstruktion des Begriffs») становится отличительным признаком интуитивного синтетического суждения *a priori* как суждения математики [Мануйлов, 2001: 38]. У Канта арифметическая и геометрическая конструкция разведены по двум «математическим» категориям: число рассматривается как трансцендентальная схема категории количества, в которой схвачена дискретность времени, а величина отождествляется с трансцендентальной схемой категории качества, в которой схвачена непрерывность времени. Классический математический анализ сохранил связь с геометрическим методом античной математики. При арифметизации анализа и особенно при сведении понятия натурального числа к теоретико-множественной конструкции это геометрическое происхождение понятий действительного числа и континуума было забыто. Гильберт и его последователи главный путь обоснования математики видели в доказательстве непротиворечивости математической теории. Альтернативную к формализму позицию занял основатель интуиционизма Брауэр, «второй акт интуиционизма» которого имеет целью создать адекватную теорию континуума на основе понятия «последовательности свободного выбора». Парадоксальные результаты решения «континуум-проблемы» Д. Гильберта подтверждают вывод о фундаментальном значении геометрического континуума для развития математики.

Литература

1. Мануйлов В. Т. Конструктивное обоснование математического знания в философии математики И. Канта // Мануйлов В.Т. (ред.) Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск первый. Курск: Изд-во Курск. гос. пед. ун-та, 2001. С. 29-61.
2. Мануйлов В. Т. Конструктивное обоснование научного знания в «немецком конструктивизме //Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Философия. Политология. Культурология. Том 2 (68). 2016. № 4. С.127–136.
3. Мануйлов В.Т. Конструктивность античной математики// Мануйлов В.Т. (ред.) Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей: выпуск 11. Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2008. С. 59-84.
4. Мануйлов В.Т. Конструктивность как принцип обоснования научного знания // Философские науки. 2003. № 10. С.104–121.
5. Мануйлов В. Т. Конструктивность классического математического анализа// Мануйлов В.Т. (ред.) Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей: выпуск 12. Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2009. С. 93-110.
6. Мануйлов В. Т. Методологические принципы «Немецкого конструктивизма» // Ученые

записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Философия. Политология. Культурология. Том 1 (67). 2015. № 1. С. 126–147.

7. Butts R. E., Brown J. R. Introduction // Butts R. E. Brown J. R. (ed.) Constructivism and science: essays in recent German philosophy. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1989. P. ix-x.

8. Lorenz K. Science, a rational enterprise? Some remarks on the consequences distinguishing science as a way of presentation and science as a way of research // Butts R. E., Brown J. R. (ed.) Constructivism and science. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ. 1989. P. 3–18.

9. Lorenzen P. Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. – Mannheim; Wien; Zürich: BI – Wissenschaftsverlag, 1987.

10.Wohlrapp H. Analytischer versus konstruktiver Wissenschaftsbegriff // Lorenz K. (Hrsg.) Konstruktionen versus Positionen. Bd. II. Allgemeine Wissenschaftstheorie. Berlin; N. Y.: Bruyter, 1979. S. 348-377.

ДЕЯТЕЛЬНОСТНАЯ ИНТУИЦИЯ И НАДЕЖНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Василий Яковлевич Перминов
Доктор философских наук, профессор
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
E-mail: perminov_v@list.ru

Обсуждается проблема надежности математического доказательства, обосновывается то положение, что математическое доказательство, базирующееся онтологических интуициях, достигает абсолютной и окончательной строгости.

Ключевые слова: деятельностная интуиция, надежность доказательства.

PRAXEOLOGICAL INTUITION AND RELIABILITY OF MATHEMATICAL PROOF

Vasily Y. Perminov
DSC in Philosophy
Lomonosov Moscow State University
E-mail: perminov_v@list.ru

We discuss the problem of reliability of mathematical proof. We show that mathematical proofs are based on ontological intuitions and that they eventually reach absolute rigor.

Keywords: proof, praxeological intuition, reliability of proof.

1. Существует четыре вида интуиции, действующей в рамках научного познания: эмпирическая интуиция, позволяющая на основе предшествующего опыта предвосхищать результаты будущего опыта, интеллектуальная интуиция, позволяющая усматривать некоторый теоретический результат при отсутствии достаточных рациональных оснований, мистическая интуиция, обеспечивающая выход в трансцендентное, и деятельностная или онтологичекая интуиция как необходимая система представлений, навязанная включенностью сознания в деятельность.

2. В основе элементарной математики лежит деятельностная интуиция. Это обстоятельство мы можем прояснить на примере арифметики. Чтобы действовать, мы должны разделять реальность на части, выделять изолированные части как определенного рода единичности и целостности. В основе нашего мышления лежит представление об онтологической единичности Арифметика - не наука о вещах как эмпирических единичностях, а наука об идеализированных, онтологических единичностях как об устойчивых элементах мира, которые не исчезают, не изменяются и не смешиваются с другими единичностями. Онтологическая единичность – абсолютное представление нашего сознания, порождаемое деятельностью, и арифметика является абсолютной понятийной системой, отражающей определенный аспект абсолютной деятельностной онтологии. Мы не должны здесь смешивать

онтологическую единичность с эмпирической. Известное шуточное опровержение арифметики состоит в том, что если в клетку с тигром поместить зайца, то мы убедимся, что 1 + 1 = 1. Ошибка этого довода состоит в том, что онтологические единичности заменены эмпирическими, которые могут исчезать и уничтожать друг друга. Арифметические операции всегда истинны, ибо это операции с онтологическими единичностями.

3. Евклидова геометрия – отражение представление о твердых телах и их движениях Гельмгольц и Пуанкаре были правы, настаивая на связи геометрических аксиом с представлением о твердом теле. Их ошибка состояла в том, что они относили понятие твердого тела к физике и тем самым неявно приписывали геометрии эмпирические истоки. В действительности, понятие твердого тела не физическое и вообще не эмпирическое, а деятельностное понятие, которое формируется в нашем сознании задолго до всякой теоретической науки. Идеализированное представление о твердом теле – это онтологическая интуиция, необходимый элемент обыденного сознания, включенного в деятельность. С этой точки зрения евклидова геометрия это понятийная структура, базирующаяся на абсолютных деятельностных идеализациях.

4. Правила классической логики также абсолютны, ибо все они проистекают из деятельностной ориентации нашего мышления. Почему мы принимаем закон непротиворечия в качестве необходимого? Ответ на этот вопрос мы получаем из рассмотрения общих целей нашего мышления. Задача нашего мышления в отношении будущего состоит в том, чтобы из картины будущего исключить возможно больше альтернатив и сузить набор вариантов возможного. Но исключение альтернатив возможно только через их сравнение по компонентам бытия и небытия вещей и свойств. Закон непротиворечия необходим, ибо отказ от этого закона (признание А и не-А совместимыми в одном суждении) привел бы к признанию всех альтернатив как законных и лишил бы наши мыслительные процедуры всякого смысла, ибо информация о возможности А и не А одновременно не является практически значимой.

5. Для понимания надежности математического доказательства важно уяснить статус структур элементарной математики как обусловленных онтологически и в этом смысле абсолютных. Арифметика, евклидова геометрия и классическая логика представляют собой абсолютное, онтологически обусловленное ядро математики. Высшие разделы математики существенно отличны от элементарной математики по структуре своих объектов. Но если мы говорим о математическом доказательстве, то здесь положение другое. В любой математической теории мы движемся по строго определенному пути: если мы, имея утверждения А, В и С, переходим к утверждению D, то мы можем совершить этот шаг, либо опираясь на аксиому, либо на доказанную теорему, либо исходя из содержания определений, либо используя правило логики. Усложнение математических теорий не усложняет логику доказательства. Если бы Евклид проснулся, то он не понял бы многих идей современной математики, но безусловно понял бы, что если приняты некие А, В и С, то из них несомненно следует D. Мы должны понять тот простой факт, что рост и совершенствование содержания математики как науки никак не усложняет и не может усложнить логику математического доказательства, обеспечивающую связь математических суждений. В определенном смысле она всегда элементарна и полностью базируется на интуициях элементарной математики. В.Я. Цингер в свое время справедливо говорил, что, хотя неевклидова геометрия по своим внутренним определениям имеет содержание, отличное от евклидовой, все доказательства неевклидовой геометрии базируются на интуициях геометрии евклидовой. Процедура математического доказательства, в какой бы области математики они не совершались, не выходит за пределы интуиций элементарной математики. Но это значит, что математическое доказательство онтологически детерминировано и в этом смысле достигает завершенности и абсолютной надежности.

6. Человек как психическая организация не гарантирован от ошибок. Известно, что около 20 процентов статей, опубликованных в известных математических журналах, содержит ошибки, которые обнаруживаются позднее. Но этот факт не является доводом против надежности математических доказательств. Нас здесь интересует не вопрос о том, ошибаются ли математики, а вопрос, достигает ли математическое доказательство в процессе своего очищения от дефектов завершенного состояния, либо такого состояния оно никогда не достигает. Мы имеем основания утверждать, что в отличие от эмпирического закона математическая теорема эквифинальна: либо через некоторое время она отбрасывается как содержащая неустранимые разрывы в доказательстве, либо она принимается как окончательно

доказанная. Сфера онтологической интуиции общезначима и внеисторична: если математическое сообщество в определенный момент соглашается с тем, что каждый шаг доказательства аподиктически ясен, то теорема не может быть отклонена ни современниками, ни будущими математиками. Центральные теоремы математических теорий абсолютны в смысле завершенности своих доказательств. Никто не допускает, что среди теорем, попавших в учебники по математическому анализу или по теории вероятностей, при некоторых усилиях можно обнаружить теоремы сомнительные, не имеющие убедительного и окончательного доказательства

7. Идея о том, что математическое рассуждение может отклоняться от достоверности, впервые появилось, по-видимому, в «Логике» Гегеля. Эту идею затем выдвинул Спенсер в плане своей эволюционной теории познания. В начале прошлого века Брауэр усомнился в надежности классической логики и классических доказательств вообще. Г. Харди, исходя из того допущения, что в основе доказательства лежит игра человеческого воображения, высказал предположение, что все математические доказательства, даже те, которые мы предлагаем студентам в качестве образцовых, вполне возможно, содержат в себе некоторые, пока не видимые, дефекты. Эта идея была поддержана американским математиком Р. Уальдером, который считал, что степень надежности математического доказательства зависит от эпохи, к которой оно относится. В 60-годах прошлого века И. Лакатос попытался осуществить систематическое обоснование относительности математического доказательства исходя из различения логики доказательства и логики анализа доказательства. Его основная идея состояла в том, что каждая эпоха углубляет анализ доказательства и выдвигает новые требования к нему и теоремы, доказанные в современных критериях строгости, могут оказаться не соответствующими критериям будущего. Установки Лакатоса были приняты многими математиками и философами как вполне обоснованные. Представляется, однако, что здесь мы имеем дело с заблуждением проистекающим из непонимания онтологического статуса элементарной математики и того факта, что логика математического доказательства базируется на интуициях элементарной математики, которые не могут быть поставлены под сомнение.

ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ ГУДКОВ – ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК И ИССЛЕДОВАТЕЛЬ БИОГРАФИИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Григорий Михайлович Полотовский
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
E-mail: polotovsky@gmail.com

Описываются жизнь и деятельность профессора Нижегородского университета Д.А. Гудкова (1918–1992). Его главный математический результат (1969) – классификация вещественных неособых кривых степени 6 – относится к известной своей трудностью 16-й проблеме Гильберта. Тогда же Гудков сформулировал гипотезу («Сравнение Гудкова») о топологических характеристиках неособых кривых чётной степени. Работы В.И. Арнольда (1971) и В.А, Рохлина (1972) по доказательству этой гипотезы открыли современный этап в развитии предмета. В книге Гудкова «Н.И. Лобачевский. Загадки биографии» (1992) на основании архивных документов доказано, что отцом Николая Лобачевского и его братьев был нижегородский землемер С.С. Шебаршин. Сейчас это положение стало общепринятым фактом для специалистов.

Ключевые слова: Д.А. Гудков, топология алгебраических кривых, биография Н.И. Лобачевского

DMITRY ANDREEVICH GUDKOV – AN OUTSTANDING MATHEMATICIAN AND RESEARCHER OF LOBACHEVSKY'S BIOGRAPHY (TO THE 100TH ANNIVERSARY)

Grigory M. Polotovskiy
CSc In Mathematics, Associate Professor
of Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod
E-mail: polotovsky@gmail.com

Life and activities of Professor D.A. Gudkov (1918–1992) are described. His main mathematical result (1969) – the classification of real nonsingular 6th-degree curves – belongs to the difficult 16th problem of Hilbert. Gudkov formulated a conjecture ("Gudkov's congruence") about topology of nonsingular curve of any even degree. Arnold's (1971) and Rokhlin's (1972) works, proving this conjecture, have opened the modern stage in the development of the subject. Gudkov's book "N.I. Lobachevsky. Biography Riddles" (1992) proved that the father of Nikolay Lobachevsky and his brothers was a Nizhny Novgorod land surveyor S.S. Shebarshin. Now this statement is generally accepted by experts.

Keywords: D.A. Gudkov, topology of algebraic curves, N.I. Lobachevsky's biography.

Математик, решивший одну из проблем
Гильберта, занимал тем самым почётное
место в математическом сообществе.
Герман Вейль

Дмитрий Андреевич Гудков родился 18 мая 1918 г. в Вологде. Его отец Андрей Фёдорович (1893–1919), окончив сельскохозяйственные курсы в Санкт-Петербурге, получил профессию землемера, но в Первую мировую войну был мобилизован. Став затем офицером Красной Армии, он пропал без вести в 1919 г. Мать Дмитрия Андреевича, Нина Павловна (1893–1972), была дворянского происхождения, знала иностранные языки, играла на фортепиано. После учёбы в Томском мединституте она с 1925 г. всю жизнь работала врачом.

В 1926 г. Дима с мамой переехали в Нижний Новгород, затем – в затон «Память Парижской коммуны» недалеко от города. Здесь Дима учился в фабрично-заводской школе, получая грамоты «Ударное удостоверение». Нина Павловна, вновь выйдя замуж, в 1931 г. родила второго сына. Второе замужество оказалось недолгим, Дима заменил своему брату отца и наставника.

Школу Дима окончил в Горьком, куда семья вернулась для поступления Димы в университет. 2 июля 1941 г. он получил диплом с отличием об окончании физмата, а 7 июля был мобилизован. После ускоренных артиллерийских курсов в Москве он с октября 1941 г. был на фронте, участвовал во взятии Берлина, награждён боевыми медалями и орденом.

В 1946 г. Дмитрий Андреевич вернулся в университет:

- 1946 – ассистент кафедры алгебры и анализа;
- 1948 – аспирант, ассистент (1952), доцент (1954) кафедры матанализа;
- 1961–1978 – заведующий кафедрой математики радиофака (1971 – профессор);
- 1978–1988 – заведующий кафедрой геометрии и высшей алгебры мехмата;
- 1988–1992 – профессор этой кафедры.

В 1953 г. Дмитрий Андреевич женился. Его жена Наталия Васильевна училась на физфаке в группе, где он вёл практические занятия. Их дети Юрий и Александра окончили этот же факультет.

13 марта 1992 г. после случившегося у него инфаркта Дмитрий Андреевич скончался.

С начала 30-х годов в Горьком работала научная школа, руководимая академиком А.А. Андроновым. Физик по специальности, Андронов обратил внимание на аналогию между изучением топологии динамических систем и топологии алгебраических кривых. В 1948 г. Андронов и его сотрудник профессор А.Г. Майер предложили Гудкову разработать теорию бифуркаций алгебраических кривых, основанную на понятии грубости, первоначально введённом в [Андронов, Понтрягин, 1937] для динамических систем. В 1950 г. И.Г.

Петровский, автор замечательной работы [Petrovsky, 1938] об алгебраических кривых, посоветовал: «Развивая такую теорию, полезно иметь в виду какую-нибудь конкретную цель – например, задачу о кривых степени 6». Напомню, что эта задача входит в известную своей трудностью 16-ю проблему Гильберта.

Теория бифуркаций алгебраических кривых в основном была построена в кандидатской диссертации Гудкова (1953 г.) и послужила базой для изучения перестроек кривой при непрерывных изменениях её коэффициентов. Идея такого изучения восходит к Д. Гильберту. К. Роон и ученицы Гильберта Г. Кан и К. Лёбенштейн пытались доказать так невозможность ряда взаимных расположений овалов кривой степени 6, однако успеха не добились: «Без классификации по степеням негрубости практически невозможно разобраться в многочисленных логически возможных усложнениях, которые возникают при применении метода» ([Гудков, 1974: 44]). Но и заявленная Гудковым в 1953 г. классификация кривых степени 6 содержала ошибки. Гудков обнаружил их под влиянием казанского математика В.В. Морозова (см. [Полотовский, 2012]). Верный ответ Гудков нашёл в 1969 г. При этом с помощью квадратичных преобразований, которые ранее в этой задаче не применялись, он построил кривую степени 6, состоящую из шести овалов вне друг друга, внутри одного из которых лежат ещё пять овалов вне друг друга. Гильберт предполагал, что такая кривая не существует.

Результаты Гудкова оказали определяющее влияние на развитие предмета: в 1969 г. он сформулировал гипотезу о неособых кривых чётной степени, которая была доказана в работах В.И. Арнольда (1971, частично) и В.А. Рохлина (1972, полностью). После этого «исследования по топологии вещественных алгебраических многообразий влились в общий поток исследований по дифференциальной топологии» [Гудков, 1974:5]. Рохлин привлёк к этой тематике группу своих сильных студентов (О.Я. Виро, В.М. Харламов, Т. Фидлер, В.И. Звонилов и др.), Дмитрий Андреевич – своих учеников (Г.М. Полотовский, Е.И. Шустин, А.Б. Корчагин, Г.Ф. Небукина). Интерес к этой проблематике возродился на Западе. Подробно об истории изучения вещественных алгебраических кривых см. [Полотовский, 2011].

Дмитрий Андреевич внёс важный вклад в изучение биографии Н.И. Лобачевского. Подробно об исследованиях биографии Лобачевского см. [Полотовский, 2007], напомню лишь, что по разным причинам не было ответа на важные вопросы:

1. Когда родился Н.И. Лобачевский?
2. Где родился Н.И. Лобачевский?
3. Кто был его отцом?
4. Какова родословная его матери Прасковьи Александровны?
5. Каково содержание рукописи Лобачевского 1826 г. «Exposition succincte des principes de la Géomètrie avec une démonstration du théorème des parallèles»?

Ответы на первые два вопроса – 1 декабря (по новому стилю) 1792 г. в Нижнем Новгороде – были найдены небольшой исследовательской группой А.А. Андронова; впервые они опубликованы в газетной заметке [Андронов, 1948], а в научном издании – в [Андронов, 1956] и [Привалова, 1956].

По вопросу 3 в 1929 г. нижегородский архивариус И.И. Вишневский высказал гипотезу, что отцом Н.И. Лобачевского был макарьевский землемер С.С. Шебаршин. По свидетельству Гудкова, так думал и Андронов. В результате многолетних архивных изысканий Гудков нашёл новые документы и обосновал эту гипотезу. Свои аргументы Д.А. Гудков изложил в замечательной книге [Гудков, 1992], опубликованной уже посмертно. Сначала воспринятая настороженно, эта версия стала практически общепринятой.

О родословной П.А. Лобачевской имеется определённая версия, которая не нашла (пока?) достаточного подтверждения; в отношении вопроса 5 оптимизма нет, поскольку, скорее всего, рукопись безвозвратно утрачена.

Литература

1. Андронов А.А. Где и когда родился Н.И. Лобачевский // Горьковская коммуна. 9 мая 1948. №109. С. 2.
2. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. 14:5. С. 247–252.
3. Андронов А.А. Где и когда родился Н.И. Лобачевский (Записка о месте и дате рождения Н.И. Лобачевского) // Историко-математические исследования. 1956. Вып. IX. С. 9–48.

4. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. 29:4 (178). С. 3–79.
5. Гудков Д.А. Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 240 с.
6. Petrovsky I. On the topology of real plane algenraic curves // Ann. of Math. 1938. 39:1. P. 187–209.
7. Полотовский Г.М. В.В. Морозов, Д.А. Гудков и первая часть 16-ой проблемы Гильберта // Учён. Зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. 2012. Т.154, кн.2. С. 31–43.
8. Полотовский Г.М. Топология вещественных алгебраических кривых: история и результаты // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2011. Вып. 14(49). С.177–212.
9. Полотовский Г.М. Как изучалась биография Н.И. Лобачевского // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2007. Вып. 12(47). С. 32– 49.
10. Привалова Н.И. Дом, в котором родился Н.И. Лобачевский // Историко-математические исследования. 1956. Вып. IX. С. 49–64.

СТАНОВЛЕНИЕ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ДО 1758 Г.

Галина Ивановна Синкевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

История математики как наука формировалась наряду с развитием самой математики. Античные работы излагали последовательность математических открытий по принципу «кто что открыл», «кто кого учил», «кто после кого». Представление о математике как о незыблемом корпусе знаний, господствовавшее до XVI в., к XVII в. сменилось осознанием прогресса математики. История математики обогатилась методами палеографии, исторической критики, хронологии, учением об исторических документах. Произошло упорядочение математических событий по единой хронологии и во взаимосвязи с развитием в различных национальных культурах. История математики постепенно переходила от хроники открытий и биографий к описанию истории идей.
Ключевые слова: история математики, историография, хронология, классическая античность, Средние века, Возрождение.

THE FORMATION OF THE HISTORY OF MATHEMATICS UP TO 1758

Galina I. Sinkevich
CSc in History of Science, Associate Professor of Mathematics
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

The history of mathematics was evolving together with the mathematics itself. The literature of antiquity exposed it following the principle of “who did discover what,”, “who after whom.” The idea of mathematics as an unshakable body of knowledge was by the 17th century replaced by the idea of progress of mathematics. The history of mathematics was enriched by the methods of scientific research of historical documents, historical criticism, and chronology. Mathematical events in various national cultures were ordered in a single chronology. The history of mathematics as a chronicle of discoveries and biographies has become a history of ideas.
Keywords: history of mathematics, historiography, chronology, Classical antiquity, the Middle Ages, the Renaissance.

История математики возникла вместе с самой математикой. Античные работы излагали последовательность математических открытий по принципу «кто что открыл», «кто кого учил», «кто после кого». Эвдем Родосский сравнивал тематически близкие сочинения. Прокл начал разделять научные и педагогические работы. Начиная с Дионисия Лаэртского в историю математики приходит биография. История математики была локализована в рамках одной национальной культуры.

Феномен научного перевода как искусства и его систематизация возникает в арабской культуре VIII-XII веков. Благодаря арабским переводам сохранилось античное наследие. Традиция перевода была продолжена в христианском средневековье. Появились компендиумы – сокращённые пересказы классиков, содержавшие исторические сведения. В XIV-XVII веках в мусульманской культуре большое значение придаётся учёту и классификации рукописей, их описанию со сведениями о биографии авторов (XIV в., Ибн-Хальдун [Les Prolégomènes d'Ibn Khaldoun, 1938]); создаются первые каталоги (XVII в. Кятиб Челеби [Katib Çelebi, 1835–1858]). С XII века в Англии началось коллекционирование рукописей, привезённых с Востока, возникли университетские библиотеки, например, Бодлианская библиотека (XIV в.). Появление книгопечатания дало стимул распространению работ античных классиков, их комментированию и обсуждению, включая критику. Выход книги стал учитываться как самостоятельное научное событие (1650, Гергард Иоганн Фосс [Vossius, 1650]). Но до XVI в. весь корпус математических знаний представлялся статичным, не развивающимся. Рассматривалось только развитие методов преподавания (1567, Пьер де ла Раме [Ramus, 1569]). В XVII в. появилось понятие прогресса математики (1650, Гергард Иоганн Фосс [Vossius, 1650, 1660]; 1674, К.-Ф. Де-Шаль [Chales, 1674]). На смену истории открытий постепенно приходит история созидания.

Хронологически научные работы упорядочивались внутри каждой культуры: античный счёт времени по олимпиадам, от сотворения Рима; мусульманский – от хиджры, китайский по династиям, христианский от Рождества Христова и т.д. События, в том числе математические, произошедшие в различных культурах, не связывались между собой, история каждой культуры излагалась независимо. Это приводило также к «национальной близорукости», когда открытия соотечественников казались ближе и значимее (1685, Джон Валлис [Wallis, 1685]; 1741, Христиан Вольф [Wolfius, 1741]).

Реформа летоисчисления XVI–XVII вв. позволила привести исторические события в соответствие с астрономическими явлениями и свести их к единой шкале, имеющей точку отсчёта, а также прямой и обратный отсчёт (после Рождества Христова, до Рождества Христова). Заметим, что к этому времени пришло осознание нуля как реперной точки, и отрицательного числа как возможности обратного отсчёта шагов, времени, температуры. В историю математики стали включать не только христианских, но и мусульманских математиков (конец XVI в., Бернардино Бальди [Baldi, 1707]; 1615, Иосиф Бланканус [Blancanus, 1615]).

В историю математики пришли методы других исторических наук: палеографии, исторической критики, хронологии, учение об исторических документах, о признаках их достоверности, способах отличать фальсификацию, о древних письменных инструментах и материалах, о стилях (1681, Ж. Мабильон [Mabillon, 1681]). В XVII веке в книгах впервые появляются именные указатели (Бальди; Фосс).

Делаются попытки изложить историю математики не как хронику, а как историю идей (1559, Иоганн Бутео [Buteo, 1559]; 1685, Джон Валлис [Wallis, 1685]). Последняя из книг рассматриваемого периода (1742, И.Х. Хайльброннер), Historia matheseos, выгодно отличается двумя особенностями. Во-первых, к европейской истории добавлены небогатые сведения из истории арабской и китайской математики (имена и открытия); и, во-вторых, все эти различные национальные истории приведены к единой временной шкале. Хайльброннер использовал достижения хронологии последнего столетия, и каждое математическое событие датировал несколькими способами: указывал происходившие тогда затмения (Eclipsis) или другие небесные явления с характеристиками из астрономических таблиц (Птолемея и других), год от сотворения мира (ad annum Mundi), от основания Рима (ab urbe condita), год до Рождества Христова (ante Christum natum, ante Christi nativitatem), или после Рождества Христова (ab Anno Christi). В книге Хайльброннера, несмотря на много ошибок, впервые возникает образ истории всемирной математики, соединены истории различных культур.

Всё это подготовило историю математики к следующему периоду её становления, который начинается в 1758 г. с появлением «Истории математики» Монтюкла. В течение первых двух тысячелетий своего существования история математики начала формировать научную методологию: научный анализ работ, источников (оригинальных, переводных, пересказов и комментариев), отделения фактов от интерпретации, составление каталогов и справочников; вопросы персонального и коллективного авторства (национальной школы), анализ применения и преподавания математических методов, хронология. Зарождался текстологический анализ, не выделялась цель написания математических работ (исследование, преподавание). Не рассматривалась роль и взаимное влияние древних цивилизаций, - историю математики, как правило, начинали с греков и рассматривали преимущественно в латинской культуре. Начинали входить в обиход арабские рукописи, едва упоминались китайские, почти неизвестны индийские. Вопросы национальных приоритетов решались просто: каждый историк хорошо знал математическую литературу своей страны, отдавая приоритет соотечественникам (как, например, Валлис или Вольф). Так утверждалась историко-математическая память нации, формирование её менталитета. Вплоть до XVII века шло становление абсолютной хронологии, благодаря чему сопоставление математических достижений в социальном времени различных цивилизаций только начиналось. Не выделялись этапы развития, периоды упадка и подъёма, направленность эволюции математики, её самостоятельность, степень зависимости от потребностей времени. Изложение истории математики постепенно прошло этапы изложения открытий и биографий по типу хроник к генезису идей, к пониманию прогресса математики.

Литература

1. Baldi B. Cronica de’ matematici: overo Epitome dell' istoria delle vite loro. Urbino: Angelo Antonio Monticelli, 1707. – 156 p.
2. Blancanus J. De mathematicarum Natura dissertatio. Una cum Clarorum mathematicorum chronologia. Bologna: apud Bartholomaeum Cochium, 1615. – 53 p.
3. Buteo I. De quadratura circuli libri duo : vbi multorum quadraturae confutantur & ab omnium impugnatione defenditur Archimedes; eiusdem Annotationum opuscula in errores Campani, Zamberti, Orontij, Peletarij, Io. Penae interpretum Euclidis. Lyon: apud Gulielmum Rovillium, 1559. – 283 p.
4. Chales (Dechales) C.-F. Cursus seu Mundus Mathematicus. In 3 volumes. Lyon: ex officina Annisoniana, 1674. V.1 – 763 p., V.2 –731 p., V.3 – 863 p.
5. Heilbronner J.C. Historia matheseos universae a mundo condito ad saeculum post Christ. nat. XVI. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum atque historia arithmetices ad nostra tempora. Leipzig: Gleditsch, 1742. – 924 с.
6. Katib Çelebi. Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum, a Mustafa Ben Abdallah Katib Jelebi dicto et nomine Haji Khalfa celebrato compositum. Ad codicum Vindobonensium, Parisiensium, et Berolinensis fidem primum edidit Latine vertit et commentario indicibusque instruxit Gustavus Fluegel. In VII volumes. Leipzig: Flügel, Gustav Leberecht, 1835–1858.
7. Les Prolégomènes d’Ibn Khaldoun. Troisième partie. Traduits en Français et commentés par William Mac Guckin, Baron de Slane, membre de l’Institut. Troisième partie des tomes XIX, XX et XXI des Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale publiés par l’Institut de France (1863). Новое издание: Paris: Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1938. – 574 p., p. 94–127.
8. Mabillon J. De re diplomatica, libri VI. Paris: Louis Billaine, 1681. – 634 p.
9. Ramus P. Scholarum mathematicarum libri unus et triginta. Basel: Eusebius Episcopius, 1569. – 320 p.
10. Vossius, G.J. De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amsterdam: ex typogr. J. Blaeu, 1650. – 473+32 p.
11. Vossius G.J. De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis. Cui operi subjungitur Chronologia Mathematicorum. Libri tres. Amsterdam: ex typographeio Ioannis Blaeu, 1660. – 467+ 35 p.
12. Wallis J. Treatise of algebra both Historical and Practical. Shewing, the Original, Progress and Advancement thereof, from time to time; and by what Steps it hath attained to the Heighth at which now it is. With some additional Treatises. London: Richard Davis. M.DC.LXXXV (1685). – 374 p.
13. Wolfius Chr. Elementa matheseos Universae. Tomus V. Halle: Renger, 1741. – 340 p.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ФОРМАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ И СИСТЕМАМИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИХ РАЗВИТИЯ

Андрей Валентинович Титов
Кандидат технических наук, доцент,
Российский университет транспорта (МИИТ)
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поднимается проблема разработки моделей, описывающих состояние сложных объектов и систем в задачах управления и прогнозирования их развития. Приводятся основные методы моделирования состояния сложных систем при наличии неполной и противоречивой информации, описывается проблема выбора шкал, используемых при оценке параметров моделирования, определяются пути разрешения поднимаемой проблемы.

Ключевые слова: модель, оценка, математическая структура, категория, сложность.

METHODOLOGICAL PROBLEMS IN THE TASKS OF FORMAL MODELING IN THE MANAGEMENT OF COMPLEX OBJECTS AND SYSTEMS AND PREDICTION OF THEIR DEVELOPMENT

Andrey V. Titov
CSc in Technology, Associate Professor
Russian University of transport (MIIT)
The Bauman Moscow state technical University

Raises the problem of development of models that describe the state of complex objects and systems in problems of control and forecasting of their development. The principal methods of modeling of complex systems in the presence of incomplete and contradictory information, describes the problem of choice of the scales used in the evaluation of modeling parameters, are determined by solutions to the raised problems.

Keywords: model, estimation, mathematical structure, category, complexity.

Эффективность управления сложными объектами и системами во многом зависит от того, насколько правильно определены основные стратегические и вытекающие из них тактические цели, на достижение которых ориентировано управление и от умения формировать прогнозы развития ситуации в зависимости от принимаемых решений. Эффективность прогноза обеспечивается с одной стороны адекватностью выбранной модели описываемой ситуации, с другой точностью измерений и достоверностью оценоки состояния рассматриваемого объекта.

В основу моделирования задач прогнозирования может быть заложен ситуационный принцип, заключающийся в том, что в каждый момент времени рассматривается пространство возможных состояний ***ситуации управления***, под которой в общем случае будем понимать состояние объекта управления и состояние среды, в которую «погружен» объект управления. При этом вероятность нахождения ситуации управления в том или ином состоянии может быть не только неизвестна, но и сам вопрос о существовании этой вероятности может быть не корректным в связи, например, с ее уникальностью. В то же время сценарий развития ситуации зависит от того, в каком именно состоянии она находится на момент, принятый за начальный. В частности, если ситуация описывается аналитически уравнениями с переменными коэффициентами (параметрами), то различные диапазоны изменения коэффициентов могут приводить к качественно различным решениям. По этой причине адекватность результата моделирования зависит как от адекватности самой модели, так и, в не меньшей степени, от того, насколько правильно выбраны шкалы для оценки состояния объекта моделирования и проведена оценка в выбранных шкалах.

«Классические» подходы не всегда позволяют получать адекватный объекту или процессу результат моделирования.

К способам повышения степени адекватности моделей сложных объектов и процессов, для которых, как уже говорилось, не эффективно классическое «жесткое моделирование», относится, в частности, «мягкое моделирование».

Мягкие модели могут оказаться полезным инструментом для моделирования сложных объектов, поскольку на основе использования мягких моделей, можно, делать выводы для целого ряда жестких моделей, получаемых с помощью исходной мягкой модели путем вариации значений коэффициентов модели, что, может отражать изменение степени весомости параметров влияющих на оценку состояния объекта описания. В частности, при изменении коэффициентов модели экспоненциальный рост может меняться в определенных «точках перегиба» на более медленный. Мягкие модели позволяют также учитывать при описании сложных объектов некоторые «подводные камни» жестких моделей.

Однако при моделировании сложных объектов и процессов приходится сталкиваться с моделированием задач при условиях недостаточности и противоречивости данных: в них присутствуют факторы нечеткости и неопределенности.

В этих условиях параметры модели оцениваются в шкалах, обладающих меньшей информативностью, чем привычные шкалы, используемые в измерениях параметров технических объектов, что не всегда принимается во внимание.

В частности, в областях, где важно не только наличие того или иного свойства у предмета описании, но важно то, на сколько сильно проявляется данное свойство, возникла потребность описывать такие объекты средствами математического моделирования, в которых предусмотрено использование многозначной логики. В результате необходимости моделирования подобных объектов – слабоформализуемых, с дефицитом информации об их свойствах – т.е. объектах, которые обобщенно можно охарактеризовать как «сложные», зародились такие новые средства моделирования, как эвристические методы, теория нечетких множеств, теория фракталов, в которой развивается принцип самоподобия систем в процессе их развития и появляется возможность рассматривать объекты со сложной геометрией, теория экспертных оценок.

Для описания динамики состояний сложных объектов и перехода их в новые фазовые состояния полезными могут оказаться фрактальные модели в их сочетании с нечеткими и эвристическими моделями. В частности параметры модели развития: $\mathbf{Z_{n+1} = K(t)Z^p_n + C(t)}$ могут иметь не только сложную структуру и нечетких характер, но и обладать динамическими свойствами как в «мягких» моделях В.И.Арнольда.

Суть описания динамики развития состояний объекта управления в их **подобии** некоему исходному эталонному образу, т.е. в описании процесса самоподобия и определения зоны его устойчивости.

При использовании перечисленных методов моделирования следует уделять пристальное внимание правильному выбору шкал, в которых проводится оценка состояния исследуемого объекта по основным параметрам его функционирования. При этом при оценках сложных объектов могут использоваться как количественные, так и качественные шкалы.

В качестве основной шкалы для придания количественного значения субъективным показателям, заданным в вербальном выражении, используется шкала Харингтона.

Использование вербальных шкал оценки связано с тем, что по ряду показателей оценка альтернативы не может быть произведена непосредственно в численном виде. Численные значения придаются таким оценкам с помощью использования шкалы Харрингтона [Литвак, 1996: 120], с помощью которой оценивается степень выраженности критериального свойства.

Однако возникновение всех этих новых направлений не носило системного характера и часто их построение не соответствовало по строгости требованиям, принятым в классической математике.

Разработанные профессором А.И.Субетто принципы **синтетической квалиметрии** позволяют классифицировать и упорядочить основные методы моделирования задач комплексной оценки объектов различной природы и на этой основе начать разработку универсального аппарата математического моделирования таких задач. Принципы, выработанные в синтетической квалиметрии лежат в основе разработки универсального языка моделирования состояния объектов сложной природы на основе логико-алгебраического подхода [Титов, 2016:161-171].

Обобщение методов формализации задач оценки состояний и управления сложными объектами возможно на основе использованием языка теории категорий [Титов, 2015: 221].

Категорный подход основан на том, что нечеткое множество связывается с некоторым топосом (т.е. категорией, обладающей конечными пределом и копределом, классификатором подобъектов и допускающей экспонирование), что позволяет для таких множеств определить теоретико-множественные конструкции.

Нечеткое множество может быть определено через описанное выше отношение равенства, которое удобно иллюстрируется на топосе **Bn** (I) расслоений над индексным множеством I. Если заданы стрелки f,g на классе морфизмов $I \rightarrow A$ (где A-пространство расслоения) то:

$[\mathbf{f} \approx \mathbf{g}] = \{ i \in I: \mathbf{f}(\mathbf{i}) = \mathbf{g}(\mathbf{i}) \}$ Тогда $[\mathbf{f} \approx \mathbf{f}] = \{ \mathbf{i} \in \mathbf{I}: \mathbf{f}(\mathbf{i}) = \mathbf{f}(\mathbf{i}) \}$

и принадлежность можно рассматривать как отношение $[\mathbf{f} \approx \mathbf{f}] / \mathbf{I}$, которому соответствует выражение: □ $= n^{(1)}/ m$, описывающее относительный коэффициент принадлежность признаков качеству.

Здесь $n^{(1)} = \mathbf{n}^{(1,1)}$ при $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_j$ [Субетто, 1994: 181].

Теоретико-категорный язык позволяет расширить описанный подход на случай алгебры оценок с дополнительной структурой и связан с условием сохранения дополнительной структуры на ней. При этом представлении подход, основанный на семантическом анализе типов логический исчислений, моделируется функторами, сохраняющими дополнительную категорную структуру, из категории, соответствующей данной формальной теории в категорную структуру, на которой принимают значения оценки, в случае обобщения структур, являющихся решетками это скелетная категория порядка с произведением и копроизведением. Применительно к задачам, решаемым в синтетической квалиметрии это означает моделирование задачи комплексной оценки состояний объектов и процессов функторами, сохраняющими структуру из категории состояний объектов оценки в категорию оценок.

При анализе возможности использования языка теории категорий к описанию задач квалиметрии и было показано, что язык теории категорий, в частности использование понятия подобъекта и классификатора подобъектов позволяет сформировать базис для фундаментального обоснования теории нечетких множеств и тем самым ввести качественные характеристики объектов оценки в область формального описании.

Литература

1. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: Издательство «Патент», 1996. 271 С.
2. Субетто А.И. Метаклассификация как наука о механизмах и закономерностях классифицирования. С-Петербург - Москва.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1994. 254 с.
3. Титов А.В. Алгебро-логические методы в формализации задач управления и прогнозирования развитием сложных систем / Ученые записки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия, Культурология, Политология, Социология. 2016. Т.2 (68). №3. С. 161-171.
4. Титов А.В. Методологические проблемы моделирования задач прогнозирования и управления развитием сложных и крупномасштабных систем // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD`2015: Материалы восьмой международной конференции. Том 2. М.: ИПУ РАН, 2015. С.221-222.

КОНТРИНТУИТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ В МАТЕМАТИКЕ

Ольга Дмитриевна Фролкина

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

E-mail: olga-frolkina@yandex.ru

Мы обсуждаем значение контринтуитивных примеров в математике. Мы напоминаем о их роли в истории математики и в развитии новых понятий и теорем. Во многих случаях, «дикие» объекты являются типичными (в смысле категории

Бэра), поэтому изучение «необычных» конструкций важно не только для студента, но и для работающего математика.
Ключевые слова: развитие математики, интуиция, контринтуитивный пример, контрпример.

COUNTERINTUITIVE EXAMPLES IN MATHEMATICS

Olga D. Frolkina
Lomonosov Moscow State University
E-mail: olga-frolkina@yandex.ru

We discuss the role of counterintuitive examples in mathematics. We recall their importance in the history of mathematics and in development of new notions and theorems. In many situations, “wild” objects are typical (in the sense of Baire theorem), therefore the study of “unusual” constructions is important not only for students, but also for working mathematicians.
Keywords: development of mathematics, intuition, counterintuitive example, counterexample.

Всякая математическая теория фактически есть собрание теорем, выводимых из некоторого ограниченного набора основных утверждений, принимаемых без доказательства – аксиом. Однако огромную роль в развитии математической теории играют контрпримеры. Контрпример в широком смысле – это всякая новая неожиданная, противоречащая интуиции основной массы действующих на тот момент математиков, конструкция. Она заставляет пересмотреть, уточнить, а возможно, и исправить определения, теоремы и основания теории; осмыслить понятие строгого доказательства, см. [Лакатос, 1967], [Босс, 2015], [Grant, Kleiner, 2015]. Точнее такие построения следует называть контринтуитивными примерами. Среди них: комплексные числа, неевклидова геометрии (много лет потребовалось для преодоления предубеждения о ее «бессмысленности»), парадоксы теории множеств, «парадокс» Банаха-Тарского, всевозможные «странные» функции (непрерывная нигде не дифференцируемая функция, всюду разрывная функция), простая дуга бесконечной длины, сапог Шварца, и огромное множество других изобретений [Гелбаум, Олмстед, 1997], [Босс, 2015]. Математику можно мыслить как большое дерево, где каждая точка ветвления есть новый противоречащий интуиции пример, новый взгляд на старую теорию; между двумя соседними такими точками математическая теория развивается «спокойно».

Велика важность контрпримеров в обучении студентов-математиков. К сожалению, подавляющее большинство учебников по математическим дисциплинам по большей части состоит из теорем. Поэтому часто студенты превращают изучение предмета в простой разбор доказательств из учебника (и иногда даже в механическое заучивание). Однако для понимания предмета совершенно необходимы примеры, противоречащие интуиции, заставляющие задуматься, почему теоремы имеют именно такие формулировки, а не другие, почему нельзя отбросить какие-то из условий. В.И. Опойцев (В. Босс) очень удачно сравнивает такие примеры с лакмусовыми бумажками, определяющими, правильно ли мы мыслим: исходим ли мы из точных данных и верных логических рассуждений или же из своих неверных представлений, отсебятины. Не страшно, если такие примеры будут демонстрироваться и обсуждаться в учебниках или в специальных книгах. Как пишет Н.Н. Лузин: «Вообще, я люблю старинные курсы, где есть все, что относится к делу, и где, еще больше, есть то, что прямо не относится к делу, но что важно для проникновения наукой. Современные же курсы напоминают мне французские канцелярии, где могут и накричать, если позабыл снять шляпу, и отправить с формальной отпиской» [Лузин, 2003: 19].

Из истории науки нам известно, что и знаменитые математики делали ошибки в рассмотрениях, сложно поддающихся интуитивному постижению. Очень долго ошибочно считалось, что если члены сходящегося ряда являются непрерывными функциями, то и сумма ряда непрерывна; и что интеграл от суммы сходящегося ряда равен сумме интегралов от отдельных членов, и т.д.; устранение пробелов в рассуждениях привело к четким формулировкам и отделению понятий поточечной и равномерной сходимости [Хайрер, Ваннер, 2008: 213, 230].

Может создаться впечатление, что речь идет о каких-то исключениях, не требующих самостоятельного обучения, о патологических конструкциях, которые следует отбросить. Часто так и поступают, ограничивая изучение «хорошими» функциями, «хорошими» пространствами. Но почему и в какой мере надо считать эти конструкции «необычными», «контрпримерами»? Надо ли их считать патологическими? Ведь, скажем, в определенном смысле – с точки зрения категории Бэра – «большинство» непрерывных функций являются нигде не дифференцируемыми [Окстоби, 1974: глава 11], а «большинство» узлов – дикими [Milnor, 1964]. Отбрасываем мы их просто потому, что не знаем, как изучать, потому, что ясные методы имеем только для «хороших» объектов; но, оказывается, в очень многих ситуациях «хорошие» объекты редки. Актуальны слова А.Пуанкаре: «Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок» [Пуанкаре, 1990: 461]. Интересно, что труд «Наука и метод» написан в 1908 году, а теорема Банаха-Мазуркевича о «типичности» нигде не дифференцируемых функций относится к 1931 году.

Итак, «странные» примеры нельзя отбрасывать как «патологические». Понятие «патологический» здесь вовсе не подходит. Конструкции не содержат никаких противоречий, просто могут показаться непривычными. Но всякий «дикий» пример углубляет наши знания, заставляет уточнять понятия «регулярных» объектов, возможно, пересматривать некоторые теоремы, а зачастую служит отправной точкой для новой теории. «Дикие» примеры отбрасывают для простоты, как правило, мы мало умеем с ними работать и тем более не имеем общих теорий.

Интересно здесь привести точку зрения выдающегося польского тополога Б.Кнастера. Как пишет А.Лелек, Кнастер всегда больше интересовался парадоксальными, странными, необычными феноменами, и говорил, что отличие странного от обычного часто есть иллюзия: вещи, которые выглядят сперва необычными, при дальнейшем рассмотрении оказываются более рядовыми, чем те, которые выглядели «нормально». «May be it is a joke nature plays on us» [Lelek, 2005: 416].

Укажу также на близкую точку зрения известного американского тополога Дж.Кэннона [Cannon, 2011]. Что, спрашивает он, должны математики делать с «плохими» примерами, то есть теми, которые сложнее («хуже») всех ранее известных? Кэннон обсуждает три возможных выхода. Первый состоит в том, чтобы наложить дополнительные требования на рассматриваемые пространства и их отображения, и строить теорию, избавленную от «диких» примеров; но, как показывает практика, достаточно сложные, противоречащие интуиции примеры появляются даже при достаточно сильных ограничениях. Второй выход – полностью отбросить геометрические постановки, заменить их алгебраическими аналогами, и считать «хорошими» те конструкции, для которых «хороши» соответствующие алгебраические аналоги. Но наиболее разумным представляется Кэннону третий выход: принять факт существования «сложных», «диких» примеров, считать их пополнением множества «обычных», «хороших» примеров, аналогично тому, как иррациональные числа пополняют множество «хороших» («понятных») рациональных чисел. И эти «дикие» примеры следует изучать. Иными словами, не следует искусственно пытаться сузить горизонт исследований, но необходимо исследовать объекты, находящиеся на границе между «обычным» и «диким».

В 2011 году на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова был расширен геометро-топологический цикл предметов. В рамках новых топологических курсов удается обсудить «необычные» метрические пространства и их отображения, среди которых: канторово множество, кривые Пеано, ожерелье Антуана, рогатая сфера Александера и т.п. Подобные примеры не только расширяют кругозор – они также развивают геометрическую интуицию; позволяют упражняться в записи формальных доказательств; наконец, могут служить введением в область, содержащую множество открытых проблем. Представляется актуальным высказывание П.С.Александрова: «…приведенные немногие примеры именно из *общей* геометрической топологии. Сама эта область представляется мне в высшей степени заслуживающей дальнейшей разработки. В настоящее время, когда среди различных опасностей, нависающих над математикой, в частности над общей топологией, нависла опасность сплошной бурбакизации [в известном высказывании К.Л.Зигель считает эту опасность даже смертельной], важным и утешительным представляется наличие проблем и результатов, непосредственно убедительных для нашего геометрического воззрения» [Александров, 1964: 9].

Мы видим, что изучение «необычных» объектов крайне важно не только для обучения студентов, но и для всей математики: она развивается в постоянном столкновении интуитивно ясного и парадоксального, «нормального» и «ненормального».

Литература

1. Александров П.С. О некоторых основных направлениях в общей топологии // УМН. 1964. Т.19. 6 (120). С. 3-46.
2. Босс В. Лекции по математике, т.12: Контрпримеры и парадоксы. М.: УРСС, 2009. 216 с.
3. Босс В. Интуиция и математика. М.: УРСС, 2015. 224 с.
4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Платон, 1997. 252 с.
5. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967. 152 с.
6. Лузин Н.Н. О бесконечно малых величинах в преподавании и в науке // Матем. обр., 2003. 4(27). С. 16-27. (Впервые опубликовано в сборнике научно-методических статей по математике «Проблема преподавания математики в вузах», вып. 7, М.: Высшая школа, 1978.)
7. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974. 158 с.
8. Пуанкаре А. Наука и метод // О науке. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 736 с.
9. Хайрер Э., Ваннер Г. Математический анализ в свете его истории. М.: Научный мир, 2008. 396 с.
10. Cannon J.W. Embeddings in manifolds, by R.J.Daverman and G.A.Venema // Bull. Amer. Math. Soc. 2011. 48. 3. P. 485-490.
11. Grant H., Kleiner I., Turning Points in the History of Mathematics. Birkhauser, Springer, 2015. 117 c.
12. Milnor J.W. Most knots are wild // Fund. Math. 1964. 54. C. 335-338.
13. Lelek A. Dilemma in topology (and in science): bizarre vs. common // Topol. Proc. 2005. 29. P. 415-420.

ИНТЕНСИОНАЛЬНОСТЬ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ И САМОРЕФЕРЕНТНОСТЬ[7]

Виталий Валентинович Целищев

Доктор философских наук, профессор

Институт философии и права СО РАН

Новосибирский государственный университет

E-mail: leitval@gmail.com

В статье обсуждается различие Первой и Второй теорем Геделя о неполноте в свете возможной реабилитации Программы Гильберта. Сущность различия заключается в экстенсиональном характере Первой теоремы и интенсиональном характере – Второй. Ввиду наличия способов выражения концепции непротиворечивости, нарушающих Вторую теорему, рассматривается вопрос, что может считаться формальным выражением значимой концепции непротиворечивости.

Ключевые слова: интенсиональность, самореференция, теоремы Геделя, непротиворечивость, диагональная лемма.

[7] Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Российским научным фондом, грант 16-18-00359.

INTENSIONALITY OF GODEL'S SECOND INCOMPLETENESS THEOREM AND SELF-REFERENCE

Vitaliy V. Tselishchev
DSC in Philosophy, Professor
Institute of Philosophy and Law, SB RAS
Novosibirsk State University
E-mail: leitval@gmail.com

The difference between the First and Second Gödel' s theorems is discussed in perspective of possible rehabilitation of the Hilbert Program. The essence of the difference lies in the fact that if the First theorem is extensional, then the Second theorem is intensional.The formalization of the consistency concept used in the proof of the Second Theorem is considered, particularly, the other ways of expressing the consistency property that are not subject to this theorem. In this paper, we investigate what can be considered a formal expression of a meaningful concept of consistency.

Keywords: Intensionality, self- reference, Gödel's theorems, consistency, diagonal lemma.

Как известно, сам Гедель не стал доказывать Вторую теорему, сделав лишь несколько замечаний о возможности такого доказательства. Оно появилось во втором томе «Оснований математики» Гильберта и Бернайса [Гильберт, Бернайс, 1979.] . Помимо исторических деталей о разном происхождении доказательств двух теорем, важно и различение их характера. Эта тема долгое время вообще не обсуждалась, и до сих пор является относительно неизвестной [Smorynski, 2010: 122-127.]

Между тем, обнаружение отличия Второй теоремы от Первой имеет первостепенное значение для возможной реабилитации Программы Гильберта. При этом нужно учесть, что сам Гедель не усматривал во Второй теореме непосредственную угрозу этой программе. Согласно Г. Крайзелю: как подчеркивал сам Гедель еще в 1931 году: «…его Вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о непротиворечивости. Ведь если Con_T сомнительна, то почему ее надо доказывать в T (а не в системе, несравнимой с T)?» [Крайзель, 2003: 48].

Прозрения Геделя по этому поводу не были подкреплены каким-либо аргументами в то время, и только спустя три десятилетия, С. Феферман озвучил причину того, почему Вторая теорема не можем быть интерпретирована как столь же радикальный приговор для программ в основаниях математики, как Первая теорема. Суть отличия заключается в том, что если Первая теорема, согласно терминологии С. Фефермана, является экстенсиональной, то Вторая теорема – интенсиональной [Feferman, 1960:35-92.].

Причины относительной неизвестности этой проблематики таковы. Как известно, популярная интерпретация геделева предложения (инициированная, кстати, самим Геделем), состоит в том, что это предложение говорит о самом себе, что оно не доказуемо, и поскольку оно на самом деле недоказуемо, оно оказывается истинным. Как свидетельствует К. Сморински, одной из причин слабого интереса математиков к проблематике самореференции в связи с геделевскими теоремами о неполноте является их «замешательство» перед вопиющей интенсиональностью этих теорем [Smorynski, 1991: 110.]. На самом деле, речь должна идти о своеобразии и необычности Второй теоремы: дело в том, что семантика математического дискурса характеризуется экстенсиональностью теоретико-модельного рода. Редкие исследования посвящены интенсиональным аспектам математики [Castonguay, 1972.], а интенсиональная семантика *Principia Mathematica* была отвергнута в пользу экстенсиональной аксиоматической теории множеств Цермело.

Оживление интереса к интенсиональному аспекту Второй теоремы было связано с сомнениями ряда исследователей в давно провозглашенном вердикте о провале Программы Гильберта [Curtis, 2009.]. Эти сомнения идут с двух сторон. Во-первых, демонстрируется, что методология финитарной арифметики не может быть схвачена формальной системой типа Арифметики Пеано. Во-вторых, оспаривается формализация концепции непротиворечивости, используемая в доказательстве Второй теоремы, поскольку есть другие способы выражения свойства непротиворечивости, которые не подлежат этой теореме.

Феферман отметил специфику получения предложения во Второй теореме. Детлефен и Ауэрбах [Detlefsen, 1979: 297-315; Auerbach, 1985: 342] обратили внимание на интенсиональный характер предиката доказуемости в конструировании геделевого неразрешимого предложения. Предтечей такого понимания был Г. Крейзель, который подчеркнул при исследовании проблемы Генкина о выражении предложения о самодоказуемости (в некотором смысле дуального к геделевскому предложению), что важнейшее значение имеет то, как выражается доказуемость, и как конструируется формула для выражения собственной доказуемости предложения [Kreisel, 1953: 405-406].

Интенсиональный характер Второй теоремы является проявлением феномена самореферентности языка в конструкциях геделевского типа. Ф. Холбах и А. Виссер [Halbach, Visser, 2014: 671-691] называют три стадии вовлечения их в интенсиональность: во-первых, это кодирование числами выражений языка, или геделевская нумерация синтаксических образований. Во-вторых, это определение формулы, которая выражает это свойство. В-третьих, конструирование из этой формулы самореферентного предложения.

Теорема о Неподвижной Точке утверждает, что имеется некоторое предложение такое, что мы можем доказать в системе Q, что это предложение эквивалентно утверждению о геделевом номере этого самого предложения. Другими словами, предложение говорит нечто о своем собственном геделевом номере. Но что именно? По Теореме выражение $\varphi \leftrightarrow \alpha\,(\ulcorner\varphi\urcorner)$ справедливо для любого предложения α, и значит, можно найти предложение такое, которое говорит о своем собственном геделевом номере все что угодно. Суть геделевского доказательства заключается в том, чтобы тщательно выбрать то, что оно *должно* сказать о своем геделевом номере. Гедель выбрал свойство нетеоремности, выраженное через отрицание предиката доказуемости [George, Velleman, 2002:190]. Искомое предложение в доказательстве Геделя и есть геделево предложение G.

Выбор в качестве α свойства «нетеоремности» вносит свой вклад в традиционное понимание G как утверждения, говорящего о собственной недоказуемости. Однако есть сомнения в том, что в случае G мы имеем дело с подлинной самореференцией. Действительно, Теорема представляет эквивалентность в терминах истинностных функций. Но такой эквивалентности вряд ли достаточно для обоснования самореферентности. Установление эквивалентности в терминах истинностных функций не дает эквивалентности значений. Булдт полагает, что сама по себе Теорема о Неподвижной Точке виде $\varphi \leftrightarrow \alpha\,(\ulcorner\varphi\urcorner)$ не выделяет именно геделева предложения в качестве φ, поскольку таких неподвижных точек может быть много. Это является результатом использования экстенсиональной логики, в которой основное значение имеют лишь истинностные значения [Buldt, 2016].

Другими словами, формальная эквивалентность утверждений, устанавливаемая Теоремой о неподвижных точках, не является достаточной для выражения интенсионального аспекта, то есть, для понимания того, что выражается соответствующей формулой. Уже одного этого достаточно для понимания приведенного выше замечания К. Сморинского о «вопиющей» интенсиональности теорем Геделя. Однако «степень» интенсиональности Второй теоремы намного выше, чем у Первой.

Литература

1. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т.2. Теория доказательств. М.: Наука, 1979.
2. Крайзель Г. Биография Курта Геделя. М.: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. Auerbach D. Intensionality and the Godel Teorem // Philosophical Studies. 1985. Vol. 48. P. 337-351.
4. Buldt B. On Fixed Points, Diagonalization, and Self-Reference // Von Rang and Namen. Essays in Honour of Wolfgang Spohn / eds. Freitag W. et al. Munster: Mentis, 2016.
5. Castonguay C. Meaning and Existence in Mathematics. Springer, 1972.
6. Curtis F. The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
7. Detlefsen M. On Interpreting Godel's Second Incompleteness Theorem // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8, 1979. P. 297-315.
8. Feferman S. Arithmetization of Metamathematics in a General Setting // Fundamenta Mathematicae. 1960. Vol. 49. P. 35-92.

9. George A., Velleman D. Philosophies of Mathematics. Oxford: Blackwell, 2002. P. 190.
10.Halbach V., Visser A. Self-Reference in Arithmetic I // The Review of Symbolic Logic. 2014. Vol.7. N. 4. P. 671-691.
11.Kreisel G. On the Problem of Henkin // Proceedings of Netherland Academy of Science. 1963. Vol. 56. P. 405-406
12.Smorynski C. The Development of the Self-Reference: Lob's Theorem // Perspectives on the History of Mathematical Logic / ed. T. Drucker. Berlin: Birkhauser, 1991. P. 110-133.
13.Smorynski C. The Development of the Self-Reference: Lob's Theorem // Perspectives on the History of Mathematical Logic / ed. T. Drucker . Berlin: Birkhauser, 1991. P. 110-133.
14.Smorynski C. Review: Peter Smith. An Introduction to Godel's Theorem. Cambridge: Cambridge University Press, 2007 // Philosophica Mathematica. 2010. Vol. 18. P. 122-127.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ПЕРЕМЕН: ПОВОРОТ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ И ОРИЕНТАЦИЯ НА ПРИЛОЖЕНИЯ[8]

Владислав Алексеевич Шапошников
Кандидат философских наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Цель настоящего доклада предложить общий взгляд на современную ситуацию в философии математики. Особое внимание при этом уделено происхождению и нынешнему статусу философии математической практики. Показано, что именно для эпохи технонауки естественно усиление интереса к проблеме применения математики и к философии прикладной математики, а также к тем трансформациям математической практики, которые вызвала к жизни цифровая революция.

Ключевые слова: философия науки; философия математики; философия математической практики; технонаука; цифровая революция.

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE TIME OF CHANGE: THE PRACTICE TURN AND AN APPLIED-MATHEMATIC CENTERED APPROACH

Vladislav A. Shaposhnikov
CSc in Philosophy, Associate professor
Lomonosov Moscow State University

The objective of this paper is to suggest a bird's-eye view of the contemporary situation in the philosophy of mathematics. My primary concern is to analyze the origins and the present status of the philosophy of mathematical practice within broader fields of the philosophy of mathematics and the philosophy of science and against the background of the era of technoscience. It is shown to be no coincidence that one of the recent trends in the philosophy of mathematics has been to promote special interest in the applicability problem and philosophy of applied mathematics, as well as in the transformation of mathematical practice due to digital technologies.

Keywords: philosophy of science; philosophy of mathematics; philosophy of mathematical practice; philosophy of applied mathematics; technoscience; digital revolution.

Историю современной философии математики принято начинать с работ Готлоба Фреге 1870-80-х годов [Aspray & Kitcher, 1988: 3]. Для лучшего понимания того, что происходило в этой области в целом, для обзора ее, так сказать, «с высоты птичьего полета», можно условно разделить ее историю на три этапа. Первый этап связан с расцветом чистой математики и наиболее интенсивными спорами вокруг проблем ее обоснования. Символическим

[8] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ). Проект № 17-03-00257 «Онтология и эпистемология в компьютерной культуре».

завершением его служит появление в 1930 г. знаменитых ограничительных результатов Курта Гёделя. Второй этап охватывает следующие полвека (1930-1970-е годы). Иногда он воспринимается как период застоя в философии математики [Mac Lane, 1981: 462; Tymoczko, 1986: ix], однако, вряд ли можно признать такую оценку адекватной. В этот период постепенно формировалась альтернатива «фундаментализму» (foundationalism) в понимании целей и задач философии математики. Последнее было вызвано несколькими причинами. Во-первых, формированием и постепенным упрочением позиций постпозитивистской философии и социологии науки. Во-вторых, цифровой революцией и стремительным развитием компьютерной техники. В-третьих, переходом сначала к большой науке, а затем и к технонауке [Jamison, 2011]. В 1980-е годы пройденный философией математики за последние полвека путь стал предметом рефлексии. В результате, было декларировано появление, наряду с верным установкам первого этапа «магистральным направлением в философии математики» (mainstream philosophy of mathematics), альтернативного направления (maverick tradition) [Aspray & Kitcher, 1988: 16-17]. «Мэверики» противопоставили проблеме оснований *философию математической практики*. Как писал Томас Тимошко, «за исключением фундаменталистской мифологии (the foundational mythology), у философии нет иного оправдания, чтобы продолжать игнорировать действительную практику математики». Именно эта практика, как он полагал, и «должна снабжать философию математики, как проблемами, так и данными для их решения» [Tymoczko, 1986: xvi].

Следует признать, что «мэверикам» не удалось вытеснить истеблишмент и занять его место, в лучшем случае они несколько расширили границы философии математики [Mancosu, 2008: 5]. Дело в том, что споры вокруг оснований математики также представляют собой часть математической практики, где жизнь идет своим чередом. Достаточно обратить внимание на подъем в 1980-е годы и современную популярность неологицизма [Cook, 2007; Tennant, 2013; Ebert & Rossberg, 2016], а также на распространение категорного мышления и недавний проект унивалентных оснований математики [Pelayo & Warren, 2014]. В последнее время пафос конфликта и соперничества между двумя традициями все больше сменяется пафосом мирного сосуществования и обоюдно выгодного сотрудничества [Horsten, 2012: section 6]. Мэверик-традиция умерила свои амбиции и позиционирует себя как существующую *рядом* с традиционно понимаемой философией математики и лишь стремится отвоевать и разработать свою собственную нишу. В этой связи, наряду с термином «философия математики» закрепился термин «философия математической практики» (PMP – philosophy of mathematical practice). С 2009 г. функционирует международная организация “Association for the Philosophy of Mathematical Practice” (APMP). Согласно информации, размещенной на сайте этой организации, PMP – это «широкий и ориентированный вовне (outward-looking) подход к философии математики, который занимается математикой, как она существует на практике (mathematics in practice)» [APMP]. PMP интересует, как математика делается и оценивается, при этом для нее весьма важна ориентация на междисциплинарное взаимодействие, которое включает вопросы истории математики, приложений математики, преподавания математики, когнитивной науки т.д. Ряду исследователей удается успешно осуществлять деятельность «на два фронта»: писать работы, как в стиле классической философии математики, так и в стиле PMP. Однако, несмотря на утверждение создателей APMP, что относимые к PMP подходы в последние годы «процветают» (have been thriving), непризнание «мэвериков» со стороны «истеблишмента» все еще остается болезненной темой. В качестве примера можно сослаться на личную историю и ее интерпретацию, с которых начинает свою недавнюю книгу один из членов APMP Рой Вагнер [Wagner, 2017: 1-6].

Еще одна характерная особенность последнего этапа – это формирование и выделение в особую область «философии применения математики» (philosophy of applied mathematics; the applicability problem) [Шапошников, 2014]. Интерес к этой области во многом объединяет «мэвериков» и «мейнстрим». Причем речь идет не только о том, что философы, наконец, заметили, что практика прикладной математики порождает свои особые философские проблемы, которые не возникают при рассмотрении чистой математики [Pincock, 2009]. Исследователи заговорили о том, что более адекватное понимание природы математики достигается при рассмотрении в качестве исходного феномена не чистой, а как раз прикладной математики [Franklin, 1988: 81; Vincenti & Bloor, 2003: 496]. «Это хвост, который виляет собакой», как сказал еще в 1978 г. о чистой математике Куайн [Quine, 1981: 151], а еще раньше (1930-1940-е гг.) близкие соображения развивал Витгенштейн [Vincenti & Bloor, 2003: 494].

Обособление чистой математики и попытка понять прикладную математику через чистую, оказались характерными особенностями определенной эпохи. Эпоха эта стала постепенно уходить в прошлое вместе с ослаблением влияния трансцендентализма и неопозитивистской философии науки, а главное – трансформацией математической практики в контексте технонауки.

Вполне естественно, что философия науки изменяется в соответствии с изменениями самой науки. «Натуралистический поворот» [Callebaut, 1993; Шеффер, 2010] и формирование междисциплинарной сферы «исследований науки и технологии» (STS) коррелятивны цифровой революции и переходу к технонауке. Философия математики славится своим консерватизмом, однако и она на наших глазах все больше втягивается в общие процессы, происходящие с философской рефлексией науки и техники. *Описанные выше изменения объясняются именно этим.* Особого обсуждения и осмысления (с опорой на новейшие тенденции в общей философии и социологии науки) в этой связи требует роль цифровой революции в формировании современного облика философии математики [Шапошников, 2017]. Например, «поворот к материальному» [Вахштайн, 2006: 8] позволяет по-новому оценить значение происходящего сейчас в математической практике перехода от мела и доски к персональному компьютеру [Barany & MacKenzie, 2014; MacKenzie, 2001].

Литература

1. Вахштайн В. (ред.) Социология вещей. М.: Территория будущего, 2006. 392 с.
2. Шапошников В.А. Философия применения математики: конфигурация особой области исследования? / Бажанов В.А., Кричевец А.Н., Шапошников В.А. (ред.) Математика и реальность. Труды Московского семинара по философии математики. М.: Издательство Московского университета, 2014. С. 15-52.
3. Шапошников В.А. Цифровая революция, пути трансформации математической практики и философия математики / Ястреб Н.А. (ред.) Философия науки и техники в России: вызовы информационных технологий. Вологда: Вологодский государственный университет, 2017. С. 366-368.
4. Шеффер, Ж.-М. Конец человеческой исключительности. М.: Новое литературное обозрение, 2010. 392 с.
5. APMP – Association for the Philosophy of Mathematical Practice [Электронный ресурс]. URL: http://www.philmathpractice.org/about (дата обращения: 30.08.2017).
6. Aspray W., Kitcher P. (eds.) History and Philosophy of Modern Mathematics. Minneapolis, MN: The University of Minnesota, 1988. 394 p.
7. Barany M.J., MacKenzie D. Chalk: Materials and Concepts in Mathematics Research // Coopmans C., Vertesi J., Lynch M., Woolgar S. (eds.) Representation in Scientific Practice Revisited. Cambridge, MA: The MIT Press, 2014. P. 107-129.
8. Callebaut W. (ed.) Taking the Naturalistic Turn, or How Real Philosophy of Science is Done. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1993. 576 p.
9. Cook R.T. (ed.) The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction. Dordrecht: Springer, 2007. 491 p.
10. Ebert P.A., Rossberg M. (eds.) Abstractionism: Essays in Philosophy of Mathematics. New York, NY: Oxford University Press, 2016. 368 p.
11. Franklin J. Mathematics, the Computer Revolution and the Real World // Philosophica. 1988. Vol. 42. P. 79-92.
12. Horsten L. Philosophy of Mathematics (2012) / Zalta E.N. (ed.) The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Электронный ресурс]. URL: https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/ (дата обращения: 30.08.2017).
13. Jamison A. Knowledge Making in Transition: On the Changing Contexts of Science and Technology / Nordmann A., Radder H., Schiemann G. (eds.) Science Transformed? Debating Claims of an Epochal Break. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press, 2011. P. 93-105.
14. Mac Lane S. Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics // The American Mathematical Monthly. 1981. Vol. 88. No. 7. P. 462-472.
15. MacKenzie D. Mechanizing Proof: Computing, Risk, and Trust. Cambridge, MA: The MIT Press, 2001. 439 p.
16. Mancosu P. (ed.) The Philosophy of Mathematical Practice. New York, NY: Oxford University

Press, 2008. 459 p.
17.Pelayo A., Warren M.A. Homotopy Type Theory and Voevodsky's Univalent Foundations // Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. 2014. Vol. 51. No. 4. P. 597–648.
18.Pincock C. Towards a Philosophy of Applied Mathematics / Bueno O., Linnebo Ø. (eds.) New Waves in Philosophy of Mathematics. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2009. P. 173-194.
19.Quine W.V. Success and Limits of Mathematization / Theories and Things. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University Press, 1981. P. 148-155.
20.Tennant N. Logicism and Neologicism (2013) / Zalta E.N. (ed.) The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Электронный ресурс].
URL: https://plato.stanford.edu/entries/logicism/#NeoFre (дата обращения: 30.08.2017).
21.Tymoczko T. (ed.) New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology. Boston, MA: Birkhäuser, 1986. 341 p.
22.Vincenti W.G., Bloor D. Boundaries, Contingencies and Rigor: Thoughts on Mathematics Prompted by a Case Study in Transonic Aerodynamics / Social Studies of Science. 2003. Vol. 33. No. 4. P. 469-507.
23.Wagner R. Making and Breaking Mathematical Sense: Histories and Philosophies of Mathematical Practice. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017. 250 p.

GROPING TOWARD LINEAR REGRESSION ANALYSIS: NEWTON'S ANALYSIS OF HIPPARCHUS' EQUINOX OBSERVATIONS

Ari Belenkiy
Simon Fraser University
E-mail: ari.belenkiy@gmail.com

Eduardo Vila Echagüe
IBM (Santiago, Chile)

In February 1700, Isaac Newton needed a precise tropical year to design a new universal calendar that would supersede the Gregorian. However, 17th-Century astronomers were uncertain of the long-term variation in the inclination of the Earth's axis and were suspicious of Ptolemy's equinox observations. As a result, they produced a wide range of tropical years. This uncertainty led Newton to choose the ten equinox observations of Hipparchus of Rhodes as the most reliable among those available. Averaging the autumnal and vernal sets separately, he combined the results with corresponding Flamsteed's equinox observations, joining each pair with a line whose slope gave a deficiency of the tropical year *versus* the Julian year. Averaging the two, he corrected Flamsteed's year. Though Newton had a very limited sample of data, he obtained a tropical year only a few seconds longer than the average one between his and Hipparchus' time. As a by-product, Newton spotted, alongside Flamsteed, an error in the position of Hipparchus' equatorial ring, which was a matter of concern to later science.

Newton wrote down the first of the two so-called 'normal equations' known from the ordinary least squares (OLS) method. In that procedure, Newton seems to be the first to employ the *mean* (average) value of the dataset, while the other leading astronomers of the era (Tycho Brahe, Galileo, and Kepler) used the *median*. Fifty years after Newton, in 1750, Newton's method was rediscovered and enhanced by Tobias Mayer.

Remarkably, the same regression method served with distinction in the 1920s when the founding fathers of modern cosmology Georges Lemaitre (1927), Edwin Hubble (1929), and Willem de Sitter (1930) employed it to derive the Hubble constant.

Introduction: the dawn of regression analysis

"The only thing which is surprising is that this principle [of the Least Squares], which suggests itself so readily that no particular value at all can be placed on the idea alone, was not already applied 50 or 100 years earlier by others, *e.g.*, Euler or Lambert or Halley or Tobias Mayer, although it may very easily be that the latter, for example, has applied that sort of thing without announcing it, just as every calculator necessarily invents a collection of devices and methods which he propagates by word of mouth only as occasion offers..." Gauss to Olbers, Gőttingen, 1812 January 24 [1].

The OLS (ordinary least-squares) regression is an optimization procedure that consists of taking several derivatives of a certain quantity and setting them equal to zero to get a set of linear ('normal') equations. However, until 1805, this procedure was not known and optimization was carried in purely intuitive ways. In the 1748 prize-winning, 123-page-long memoir *Recherches sur les irregularités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, published in Paris in 1749, Leonhard Euler, then at the head of Berlin Academy, arrived at 75 equations with eight unknowns but only half-heartedly proceeded combining observations to form a smaller set of equations, erroneously believing that the error 'would multiply' [2].

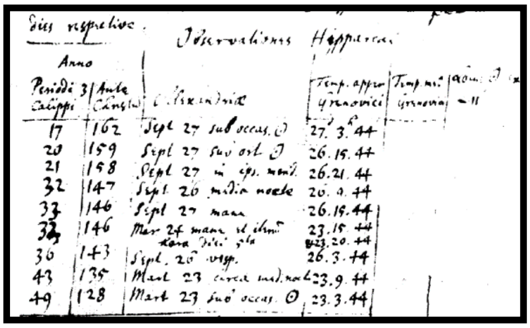
In contrast, a year later, in 1750, the German astronomer Tobias Mayer, then a cartographer at the Homann Company in Nürnberg, studied the libration of the Moon over a period of one year, performing 27 observations of the crater Manilius, and obtained a system of 27 linear equations with three unknowns [3]. Splitting all the equations into three equal groups with similar characteristics and, summing coefficients within each group, he arrived at a set of three linear equations, which he further solved in a standard 'Gaussian' way. Mayer's optimization procedure resulted in a system of three equations with dominant coefficients on the major diagonal, where, in Mayer's words, "the differences between the three sums are made as large as possible." The method later became known in Europe as Mayer's method or the 'method of averages' [4].

Averaging lies at the heart of the analytic part of the linear regression method though it is not so explicit in the modern least-squares technique. Remarkably, Mayer did not stop there but proceeded with a kind of error analysis, estimating that the combined error decreases in proportion to a number of combined equations [5]. Thus, Mayer's 1750 paper *Abhandlung über die Umwälzung des Monds um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken* ("Treatise on the rotation of the Moon on its axis / and the apparent motion of the Moon spots") became a precursor for what has later become known as *regression analysis*.

However, it is noteworthy that fifty years earlier than Mayer, in 1700, Isaac Newton had carried out similar averaging. Mayer's purely algebraic averaging can be viewed geometrically as finding the centre of gravity for three separate groups of points and then drawing a plane over them. For his part, Newton kept the geometrical picture from the very beginning. After separating two qualitatively distinct sets of points, autumnal and vernal equinoxes, he formed two regression lines that passed through the centre of gravity of each group and an *outlier*, later averaging their two slopes to form a single estimate. Though Newton did not come up with anything similar to an error analysis, there are signs that he felt he reduced the error by splitting the entire set into two groups.

Newton never published his method; it remained in a group of drafts known as Yahuda 24, now in the Jewish National Library in Jerusalem, first described by Belenkiy & Vila Echagüe in 2005 [6]. In three of them, following a request from the Royal Society in 1700 February to respond to a letter by G.W. Leibniz, Newton constructed his civil (solar) and ecclesiastical (lunar) calendars. As a benchmark for the solar calendar, he needed to know the tropical year. In three successive drafts, he chose three different values of $365^d\ 5^h\ 48^m$ and (*a*) 45^s, (*b*) 48^s, and (*c*) 56^s or 57^s.

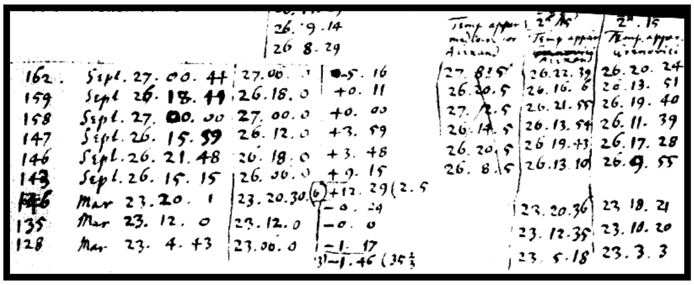
This paradoxical situation — the changing opinion about one of the *fundamental* astronomical 'constants' so quickly —demands an explanation. The simplest explanation is that at the end of the 17th Century the tropical year was uncertain to within a wide range. Therefore, Section 1 describes the state of European astronomy by 1700. Section 2 explores what motivated Newton to choose the first two values. Section 3 presents the essence of the 'ordinary least squares' regression and the two 'normal' equations needed to estimate the slope and intercept of the regression line. Section 4 examines Newton's method based on the first 'normal' equation that was responsible for the slope of the regression line. Section 5 addresses Newton's astronomical worldview in 1700. The afterword relates to how the same method served in modern cosmology. The summary reiterates our major and minor discoveries [7].



Anno Periodi 3 Calippi	Ante Christum	Observationes Hipparchi, Alexandriae	Temp. appar. Greenwici
17	162	Sept 27 sub occas. ☉	27. 3. 44
20	159	Sept 27 sub ort. ☉	26. 15. 44
21	158	Sept 27 [illegible]	26. 21. 44
32	147	Sept 26 media nocte	26. 0. 44
33	146	Sept 27 mane	26. 15. 44
33	146	Mar 24 mane [illegible]	23. 15. 44 / 23. 20. 44
36	143	Sept. 26 vesp.	26. 3. 44
43	135	Mart 23 circa med. noct.	23. 9. 44
49	128	Mart 23 sub occas. ☉	23. 3. 44

FIG. 1

Yahuda MS 24 D, the upper third. Hipparchus' sample of ten equinoxes quoted in Ptolemy's *Almagest*. Column 1 specifies the year's number within the Third Callipic Cycle of 76 years. Column 2 translates them into proleptic Julian BC years. The last column shows Newton's first attempt to convert Alexandrian Time to Greenwich Time assuming 2^h 16^m difference.



		26. 9. 14 / 26 8. 29		Temp. appar. Alexand.	2h. 16 Temp. appar.	2h. 15 Temp. appar. Greenwici
162.	Sept. 27. 00. 44	27. 00.	+5. 16	27. 8.15	26. 22. 39	26. 20. 24
159	Sept 26. 18. 44	26. 18. 0	+0. 11	26. 20. 5	26. 16. 6	26. 13. 51
158	Sept. 27. 00. 00	27. 00. 0	+0. 00	27. [illegible]	26. 21. 55	26. 19. 40
147	Sept. 26. 15. 59	26. 12. 0	+3. 59	26. 14. 5	26. 13. 54	26. 11. 39
146	Sept. 26. 21. 48	26. 18. 0	+3. 48	26. 20. 5	26 19. 43	26. 17. 28
143	Sept. 26. 15. 15	26. 00. 0	+9. 15	26. 8. 15	26. 13 10	26. 9. 55
146	Mar 23. 20. 1	23. 20. 30	(6) +12. 29 (2. 5		23. 20. 36	23 18. 21
135	Mar 23. 12. 0	23. 12. 0	-0. 29		23. 12. 35	23. 10. 20
128	Mar 23. 4. 43	23. 00. 0	-0. 0 / -1. 17 / 31-1. 46 (35½		23. 5. 18	23. 3. 3

FIG. 3

The middle part of Yahuda MS 24 D: proleptic Julian years in column 1; the timings of Hipparchus' nine equinoxes in column 3; regression lines with initial Flamsteed's slope in columns 2, 6, 7

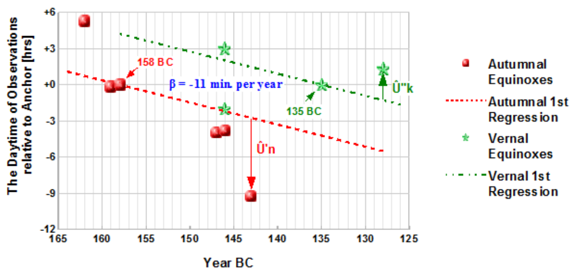


FIG. 4

Residuals of Hipparchus' equinoxes computed by Newton from the regression lines he drew via the 'anchor' equinoxes with the slope β= -11 min (the difference between Flamsteed's and Julian year).

References

1. Plackett R. L. Biometrika, 59 (2), 1972, p. 239.
2. Stigler S. M. The History of Statistics. The measurement of uncertainty before 1900. London: Harvard University Press, 1986, p. 27.
3. Forbes E. G. The Euler-Mayer Correspondence (1751–1755). A New Perspective on Eighteenth-Century Advances in the Lunar Theory. London: Macmillan, 1971, p. 5.
4. Hald A. A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713–1935. New York: Springer, 2000, p. 49.
5. Stigler, op. cit. p. 23.
6. Belenkiy A. & Vila-Echagüe E. Notes & Rec. Roy. Soc. 59 (3), 2005, pp. 223–254.

7. Belenkiy A. & Vila-Echagüe E. The Observatory, 136, 2016, pp. 1–22.

NATURALIST RESPONSE TO THE BENACERRAF'S DILEMMA: COMPARATIVE STUDY BETWEEN PENELOPE MADDY AND JOHN P. BURGESS

Jio Jeong
Independent scholar
E-mail: jiojeong2000@gmail.com

This paper will examine how Penelope Maddy and John Burgess present contrasting conclusions on what scientific success implies about mathematical ontology in relation to their rejection of the Quine-Putnam Indispensability Argument, along with what they see as proper methodology that can provide answers to questions involving mathematical identity. Maddy has to articulate how nonexistence of mathematical entities is an open possibility given the "miraculous" connection between math and empirical science, and Burgess has to provide an account for his presented epistemology on how mathematical belief becomes mathematical knowledge.
Keywords: Naturaism, the Benacerraf's Dilemma, P. Maddy, J. P. Burgess.

The Benacerraf problem is a dilemma between providing a sufficient ontological account for mathematical abstracta and explaining the epistemology behind mathematical knowledge. Two major contending philosophies on mathematical truth, platonism and nominalism, are attacked by such dilemma, as neither of them sufficiently justifies both ontology and epistemology. A philosophical stance considerably different from platonism and nominalism is scientific naturalism, and naturalism therefore may be unchallenged by Benacerraf. Scientific naturalists contend against the validity of philosophical concepts that challenge the legitimacy of the current scientific methodology, which already showed its historical success by producing effective applications to the physical world. With their respect of scientific practices, naturalists regard that continuation of science will not be deterred by philosophical questioning. To examine whether scientific naturalism can find its way around the Benacerraf's dilemma, Penelope Maddy and John P. Burgess' formulations on mathematical truth will be discussed on this paper. Penelope Maddy and John P. Burgess are two advocates of naturalism in philosophy of mathematics who hold the general naturalist belief of rejecting philosophical questions and considerations judging scientific practices with extra-scientific values. Despite sharing such stance, the subtle differences between Maddy's naturalism and Burgess' ultimately produce their distinct stance on mathematical truth and existence. The three main areas of disagreement between Maddy and Burgess are over mathematical ontology, epistemology, and on whether holism and naturalism can be reconciled. Maddy holds an agnostic stance claiming that nothing about mathematical ontology can be read off of scientific practice, unless direct empirical confirmation is discovered to prove the existence of those abstracta, while Burgess believes in mathematical existence solely based on intra-mathematical interests in relation to its practiced methodology. In addition, while Maddy argues that the holistic Indispensability Argument is incompatible with naturalism that respects practices of working scientists, Burgess holds that very holistic belief that it is possible to discover mathematical ontology in relation to practiced methodology. This paper will examine those differences between Maddy and Burgess and point out areas in their formulations that have to be strengthened. Maddy has to articulate how nonexistence of mathematical entities is an open possibility given the miraculous connection between math and empirical science, and Burgess has to provide an account for his presented epistemology on how mathematical belief becomes objective mathematical knowledge.

Given Burgess and Maddy's different opinions on mathematical ontology, their epistemological explanations would naturally differ as well. Burgess responds to the epistemological side of the Benacerraf's problem by declaring the question itself as an already invalid one that philosophy should not attempt to answer. Mathematics is something conventional and convenient, not something to criticize on unsuitable philosophical grounds and make the possibility of knowledge ambiguous. Burgess claims that philosophers' concern over epistemology is unreasonable and ill-formed. He cites Hartry Field in his discussion of philosophers' challenging task of explaining abstracta:

“[Nominalism] saves us from having to believe in a large realm of ... entities which are very unlike the other entities we believe in … and which give rise to substantial philosophical perplexities because of those differences.” Burgess claims that Field is essentially confessing that knowledge on mathematical abstracta confuses him, which Burgess interprets not as support for nominalism, but an illustration of the philosopher’s inadequacy in “approach to cognition.” He calls this “inadequacy” the problem of the philosopher, not a trouble with mathematical ontology. Of course, there is not an empirical account yet of mathematical knowledge, but this does not bother Burgess, for the concern is over the “learning theory of math,” not the existence of mathematical objects itself. Thus, Burgess does not provide an actual epistemological account here, but rather explain why it shouldn’t conflict with his account of ontology that claims mathematical objects do exist.

After setting aside the need of providing an epistemological explanation in justifying his ontology, Burgess redirects the current epistemological worry away from concern over abstractness of objects and shows how his own epistemology would look like. Burgess calls the commonly held epistemological problem a “major mystery about how we could ever acquire *knowledge* of abstract objects, independent of us, lacking spatiotemporal location, and mass and charge and the rest.” However, he calls that prevalent concern misdirected: “If we believe our current mathematically formulated science to be even probably, largely, approximately correct, taken at anything like face value, then we have got a *belief* in theories implying or presupposing the existence of abstract mathematical objects.” For Burgess, the objective existence of abstract objects is not the source of human mathematical knowledge, but rather the *belief* in such existence is the starting point. This is exactly the Thin Realist picture of epistemology: belief in set theoretic methods warrant the existence of sets. To explain then how belief becomes knowledge, Burgess suggests looking at “how the actual historical route by which we arrived at our current scientific beliefs could be a route to beliefs that are *justified*.” The reason for doing so is quite simple for Burgess because “the actual historical route” is the only available foundation for defining what the appropriate scientific standard is. According to his naturalism, scientific standards are not built by philosophical interests, but are determined by actual practices of past and working scientists. He states that the only way we can identify our “scientific standards for theory acceptance” is to look at theories that have been accepted in the past, and surely theories with a lot of mathematical components have been held true by the scientific community. Burgess concludes that the mathematics applied in scientific theories is ontologically justified with correct scientific standards, and therefore if anyone argues that there is a problem with the justification, that person is adhering to a methodology irrelevant to the scientific interest. This claim is supportive of holism for considering all belief, from the past and from the present, to be interconnected and continuous, but here Maddy can object with her argument outlined previously that if correct scientific standards and mathematical ontology can be truly identified by looking into its history, then the historically different attitudes of scientists corrupt the picture of holism and naturalism integration. Therefore, the non-uniformity in the history of science disqualifies it as an explanation for mathematical epistemology. With Burgess’ deliberately evasive approach to the epistemology, as he distances the core of the problem away from the abstractness of entities, it is important that Burgess provides an actual epistemological account of how belief produces justified, objective knowledge through acceptance of scientific practice.

As Maddy’s agnostic stance on ontology deems that mathematical objects *might* exist, she is burdened to provide an epistemological account on how that existence is possible. Maddy attempts to answer the epistemological side of Benacerraf’s problem with a scientific explanation by providing her theory backed with substantive neurophysiological evidence on how sets are causally perceived. Her motivation for this is to prove that the reason why metaphysical questions presented by philosophy are currently so difficult to address is because contemporary science is still limited. She believes that the cognitive basis of causal interaction between the observer and mathematical objects, when fully grasped by scientific means that will be developed in the future, will provide the grounds for a definitive mathematical epistemology. In this way, the real source of Benacerraf’s epistemological problem can be seen to lie not in philosophy, but rather in presumably temporary deficits in the current state of cognitive science.

The two naturalist second philosophers insist that philosophical questions that judge science with unscientific goals or mathematics with extra-mathematical values should not be considered. Explaining their views on mathematical existence in terms of their shared rejection of the Indispensability argument, Maddy is agnostic on the issue because she deems that only empirical evidence, not indispensability claims, can verify the existence of abstracta. Burgess claims that mathematical entities do exist, given that the relevant mathematical methods and practices take such belief to be true; “Indispensability” is a invalid philosophical justification. Given their ontological claims, Maddy still has to explain how objective mathematical statements can be made when the truth of mathematical ontology is not established, while Burgess has to provide an account of how belief in a theory leads to knowledge and establishes its truth-value. The insufficiency of yet another round of naturalist critiques of Benacerraf’s argument strongly suggests that the associated problem remains open.

References

1. Benacerraf P. Mathematical Truth |// Journal of Philosophy. Vol. 70, no. 19, 1973, pp. 661–679.
2. Benacerraf P. What Numbers Could Not Be // The Philosophical Review. Vol. 74, no. 1 1965. P. 47-73.
3. Burgess J. P. Reconciling Anti-nominalism and Anti-platonism in Philosophy of Mathematics. University of Princeton, 2016.
4. Burgess J. P. Why I am not a nominalist // Notre Dame J. Formal Logic. 1983. Vol. 24. P. 93-105.
5. Colyvan M. An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge Introductions to Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
6. Dummett M. Realism // Synthese. 1982. Vol.52. P. 55-112.
7. Hart W. D. Benacerraf's Dilemma // Crítica: Revista Hispanoamericana De Filosofía. 1991. Vol. 23. P. 87-103.
8. Maddy P. Indispensability and Practice// Journal of Philosophy. 1992. Vol. 89. P. 275–289.
9. Maddy P. Perception and Mathematical Intuition // Journal of Philosophy. 1980. Vol. 89. P. 163–196.
10. Maddy P. Second Philosophy: a Naturalistic Method. Oxford: Oxford University Press, 2009.
11. Maddy P. Three Forms of Naturalism. The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / S. Shapiro (ed.). Oxford University Press, 2005. P. 437 – 459.
12. Quine W. V. O. Two Dogmas of Empiricism // The Philosophical Review. 1950. Vol. 60. P. 20-43.

ВИЗУАЛЬНЫЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИИ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

Ирина Викторовна Старикова
PhD
Университет Сан Пауло
E-mail: starikova.irina@gmail.com

Доклад посвящен визуальному аспекту в пространственном математическом мышлении. Цель доклада - показать, что новая перспектива (весьма отличающийся от традиционной) на изучаемые понятия может помочь в получении новых важных математических результатов. В частности, перспектива, связанная с визуализацией, может инициировать прогресс в пространственном познании в (традиционно) непространственной математической области. В частности, она может помочь разработать новый концептуальный аппарат в пространственных терминах для изучения непространственных понятий. Традиционное отношение к непространственным объектам может быть скорректировано и обогащено, будучи привязанным к пространственному геометрическому контексту с помощью специальной работы с визуализациями.

Ключевые слова: Пространственное мышление, пространственные понятия, математические репрезентации, визуализации, геометрический подход.

VISUAL REPRESENTATIONS IN CURRENT MATHEMATICS

Irina V. Starikova
PhD
University of Sao Paulo
E-mail: starikova.irina@gmail.com

This talk is about visual impact on spatial cognition in mathematics. It will show that a particular cognitive perspective (often quite different from a traditional one) on the studied concept can help in acquiring new important mathematical results. In particular, a perspective involving visualisation can initiate spatial cognition in a non-spatial mathematical domain. It may help to develop a new conceptual setting in spatial terms to approach for the non-spatial concepts. In turn, traditional attitude to non-spatial objects can be adjusted and enriched by being adopted to the non-spatial context.

Keywords: Spatial cognition spatial concepts, mathematical representations, visualisations, geometric approach.

Introduction

Recently visual impact on mathematical reasoning has became a hot discussion theme in philosophy of mathematics and mathematical practice. Especially the impact of the visual on spatial cognition could be expected to be significant in geometry. The cognitive processing of objects embedded in space, its cognitive and formal representations are familiar for us through geometry. However, the role of the visual in non-geometric areas such as algebra and combinatorial is not well studied. Also, subject-specific or task-specific ways of using visualisations in mathematical practice are not well researched. This talk is an attempt to fill this gap. Namely it attempts to dwell on the following aspects about spatial cognition in mathematical practice:

- The cognitive processing of space, its cognitive and formal representation
- The content and the scope of spatial cognition and how universal it is
- The impact of non-spatial factors on spatial cognition and transformations of spatial cognition into non-spatial domains such as algebra
- Scale-dependency of spatial cognition and specifics of small-scale and large-scale spatial cognition

This is a not exhaustive list of questions to direct a research about spatial cognition in mathematics. The scope of this paper is to consider only the role of visualisations in spatial reasoning in applying geometry or algebra.

Case study

The case study to support the claim that visualisations can play important role in developing our understanding of space in mathematics is taken from geometric group theory. It began as an application of some topological and geometric ideas in combinatorial group theory, but in the 1980s inspired novel perspectives in the field so that it constituted its own branch. The case study demonstrates that the representations of groups as graphs facilitate studying groups by geometric methods. Namely, the graphs can be represented as metric spaces. Looking on groups through their graphs helped to reveal a number of geometric properties of groups. As a result, many combinatorial problems were solved through the application of geometry.

Groups are not completely alien to geometry. They were first studied as symmetries of geometric objects. Then in 1870s Klein's Erlangen Programme aimed to unify various geometries applying the notion of a fundamental group. That was a big step towards generalisation of mathematics along with overall algebraisation and arithmetisation. Here, in geometric group theory, the direction is reversed – algebraic groups are now in the same subject-of-study category as other metric spaces such as the Euclidean or hyperbolic. They are considered as geometric objects as such and studied by geometric methods. This twist changes our habitual thinking of geometric and algebraic concepts and our cognition of spatial objects.

The idea that groups can be compared to well-known metric spaces is usually explained by a scaling thought experiment. Groups, even equipped with a simple metric, do not have interesting structure, and it is hardly possible to grasp their geometric properties. However when they are represented by graphs and *observed from distance*, the similarity becomes evident. Roughly, the integers look like a straight line, a grid resembles the Euclidean plane and trees remind of hyperbolic spaces. All the necessary mathematics still ought to be provided, but the scaling experiment unfolds the whole idea with its fascinating opportunities.

Crucially one can realize that graphs of the groups are independent of their specific parameters (the choice of generators), therefore the properties of the graphs are the properties of the groups themselves. Also, if the graphs share some geometric properties, so do their groups. Moreover, the scaling suggests that clusters or sequences of groups can be compared, that gives a room for transcendental analysis.

The reasoning about graphs of groups involves scaling. There is a specific component in this particular scaling visualisation. Although the graphs (or groups) should be seen from the distance as if they are moving away from us, the surface on which they are depicted stays the same. This is what a cognition of a *quasi-isometric embodiment* of a graph in a metric space implies. This is a new concept developed as an adaptation of known *isomorphism* to the context of spatial subject.

Psychology of mathematical reasoning and empirical support

In this talk I will try to show how a specific kind of human cognitive ability can contribute to mathematical thinking, even at research level. I refer to our ability to transform visual images mentally, that is, in visual imagination. The reality of visual mental images as genuine cognitive representations and our ability to mentally transform them was made credible by research of Shepard and colleagues in the 1970s and later more extensively investigated by many researchers. My claim is that the ability to transform visual mental images in various ways from an initial image (usually originating from a seen external diagram) can be used in a somewhat experimental way to solve mathematical problems and to form new ideas. I will illustrate this with examples of region-bounded image transformations (e.g. rotations) and field-general transformations (e.g. scanning and zooming out) from graph theory and geometric group theory.

ФИЛОСОФСКАЯ ЛОГИКА

СЛАБОЕ ОТНОШЕНИЕ СЛЕДОВАНИЯ МЕЖДУ λ-ТЕРМАМИ

Владимир Шалак
Институт философии РАН
E-mail: shalack@mail.ru

Язык λ-исчисления находит широкое применение для решения задач в логике, информатике, лингвистике и искусственном интеллекте. Само λ-исчисление строится вокруг базисного отношения между термами, которое называется β-конверсией. В предлагаемом докладе формулируется более слабое отношение между λ-термами, которое может иметь как самостоятельное значение, так и позволит установить более тонкие связи между логикой и λ-исчислением.

Ключевые слова: λ-исчисление с типами, отношение следования.

WEAK CONSEQUENCE RELATION BETWEEN λ-TERMS

Vladimir Shalack
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
E-mail: shalack@mail.ru

The language of the λ-calculus has many applications for solving different problems in logic, informatics, linguistics and artificial intelligence. The λ-calculus is based on the basic relation between terms, which is called λ-conversion. In the proposed report, we formulate a weaker relation between the λ-terms, which may allow us to establish more subtle connections between logic and λ-calculus.

Keywords: λ-calculus with types, consequence relation.

Теория безтипового λ-исчисления подробно изложена в [Барендрегт, 1985]. Напомним лишь определения его базовых понятий – исходных символов, термов, аксиом и правил вывода.

Исходные символы λ-исчисления

1. *Var* – множество переменных;
2. λ – оператор лямбда-абстракции;
3. *), (* – скобки.

Термы

1. Всякая переменная $x \in Var$ есть терм;
2. Если X и Y – термы, то (XY) есть терм;
3. Если $x \in Var$ и Y – терм, то $(\lambda x.Y)$ – терм.

Терм $\lambda x.Y$ понимается как предписание для вычисления некоторой функции. Применение $\lambda x.Y$ к терму X записывается как $(\lambda x.Y)X$, а результатом его будет терм $Y[X/x]$, т.е. подстановка терма X вместо всех свободных вхождений переменной x в терм Y при выполнении ограничения, что после подстановки ни одна свободная переменная терма X не оказывается связанной. Подобные ограничения на подстановку термов хорошо известны из логики предикатов. Они удовлетворяются автоматически, если все свободные переменные отличны от связанных.

Простое первопорядковое λ-исчисление задается двумя аксиомами и пятью правилами вывода.

Аксиомы

1. $(\lambda x.Y)X = Y[X/x]$ – β-конверсия
2. $X = X$

Правила вывода

1. $X = Y \Rightarrow Y = X$
2. $X = Y \Rightarrow ZX = ZY$
3. $X = Y \Rightarrow XZ = YZ$
4. $X = Y, Y = Z \Rightarrow X = Z$
5. $X = Y \Rightarrow \lambda x.X = \lambda x.Y$

Определение доказательства – обычное.

Типизация в стиле Карри

При обычном понимании функций мы связываем с ними области определения и области значения. Если f – некоторая функция, то запись $f{:}A\to B$ служит обозначением того, что множество A – область ее определения, множество B – область значения, а $A\to B$ понимается как множество всех функций из A в B, т.е. B^A. Если $x\in A$, то $f(x)\in B$. Более подробно с типизацией в стиле Карри можно ознакомиться в [Hindley, Seldin, 2008].

В языке λ-исчисления нет явного указания на типы значений термов, но мы бы хотели иметь возможность, в случае необходимости, приписать их. Для этого в метаязыке определим множество меток, которые будем называть *типами*.

Пусть *AType* – некоторое множество *атомарных типов*. Тогда множество всех *типов Type* определяется по индукции:

1. Если $\alpha\in AType$, то $\alpha\in Type$;
2. Если $\alpha,\beta\in Type$, то $(\alpha\to\beta)\in Type$;
3. Ничто другое не принадлежит *Type*.

Тот факт, что терму X приписан тип α, будем обозначать посредством $X{:}\alpha$.

Контекстом Γ – будем называть некоторое множество переменных, каждой из которых приписан тип. При этом, если $x{:}\alpha\in\Gamma$ и $x{:}\beta\in\Gamma$, то $\alpha=\beta$.

Индуктивное определение приписывания типов λ-термам относительно контекста Γ имеет следующий вид.

T.1 $$\frac{x{:}\alpha\in\Gamma}{\Gamma \mid\!- x{:}\alpha}$$

T.2 $$\frac{\Gamma \mid\!- X{:}\alpha\to\beta,\quad \Gamma \mid\!- Y{:}\alpha}{\Gamma \mid\!- (XY){:}\beta}$$

T.3 $$\frac{\Gamma, x{:}\alpha \mid\!- Y{:}\beta}{\Gamma \mid\!- (\lambda x.Y){:}\alpha\to\beta}$$

Правило *T.1* – это базис индукции, а правила *T.2* и *T.3* – индукционный шаг.

Будем называть терм X *типизированным*, если существует контекст Γ и такой тип α, что $\Gamma \mid\!- X{:}\alpha$. Предикат *быть типизированным термом* разрешим, т.е. существует алгоритм, который позволяет по каждому типизированному терму X построить такой контекст Γ и тип α, что Γ |- $X{:}\alpha$. Более того, существует алгоритм, который позволяет по заданному терму X построить в определенном смысле *минимальный контекст* с требуемыми свойствами.

Например, если дан терм *(XY)*, где X и Y – переменные, то одним из контекстов, который позволяет приписать ему тип, будет $\{X{:}\alpha\to\beta,\ Y{:}\alpha\}$. Тогда сам терм будет иметь тип $(XY){:}\beta$. В то же время, согласно определению *T.1-T.3* приписывания типов λ-термам, терму $\lambda X.\lambda Y.(XY)$ может быть приписан некоторый тип $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\beta)$ в любом контексте, в том числе и пустом.

Вместе с тем можно показать, что ни один терм вида *(XX)* не является типизированным, т.е. не существует контекста, в котором ему может быть приписан какой-либо тип.

Остановимся на возможном содержательном истолковании отношения Γ |- $X{:}\alpha$. Контекст Γ можно представлять как фиксированный набор деталей некоторого «конструктора», из которых мы можем собирать сложные термы/предписания. Контекст Γ – это *фиксированная модель*, в которой имеют смысл (значение) все собранные из ее элементов новые более сложные термы/предписания.

Следование в классической логике

Одним из центральных понятий классической логики является понятие следования/выводимости. В ней имеет место следующая цепочка эквивалентностей:

$$A \mid\!- B \;\Leftrightarrow\; A \mid\!= B \;\Leftrightarrow\; \forall\Gamma(\Gamma \mid\!= A \;\Rightarrow\; \Gamma \mid\!= B) \;\Leftrightarrow\; \forall\Gamma(\Gamma \mid\!- A \;\Rightarrow\; \Gamma \mid\!- B),$$

где Γ – конечное множество формул. Воспользуемся этими эквивалентностями, чтобы по аналогии определить новое отношение между термами λ-исчисления, более слабое, чем отношение β-конверсии.

λ-следование

Наше определение слабого отношения λ-следования '|=' между термами имеет вид:

$$X \mid\!= Y \Leftrightarrow_{def} \forall\Gamma[\exists\alpha(\Gamma \mid\!- X{:}\alpha) \Rightarrow \exists\beta(\Gamma \mid\!- Y{:}\beta)]$$

Очевидно, что данное определение отношения λ-следования '|=' равносильно следующей формулировке в терминах отношения между множествами:

$$X \mid\!= Y \Leftrightarrow_{def} \{\Gamma{:}\exists\alpha(\Gamma \mid\!- X{:}\alpha)\} \subseteq \{\Gamma{:}\exists\beta(\Gamma \mid\!- Y{:}\beta)\}$$

Смысл отношения X |= Y заключается в том, что если терм/предписание X типизирован (может быть вычислен в некотором контексте), то он содержит в качестве составных частей такие более простые термы/предписания, из которых может быть составлен и в этом же контексте вычислен терм/предписание Y. При этом значения термов X и Y в общем случае могут не совпадать.

Можно показать, что для типизированных термов данное отношение обладает следующими свойствами:

R.1 $\varnothing \mid\!- N \;\Rightarrow\; M \mid\!= N$
R.2 $(\lambda x.M)N \mid\!= M[N/x]$
R.3 $M \mid\!= M$
R.4 $M \mid\!= N,\ N \mid\!= L \;\Rightarrow\; M \mid\!= L$
R.5 $MN \mid\!= M$
R.6 $MN \mid\!= N$
R.7 $M \mid\!= N \;\Rightarrow\; M \mid\!= \lambda x.N$
R.8 $\lambda x.M \mid\!= N \;\Rightarrow\; M \mid\!= N$

$R.9\ M \mid= N \Rightarrow \lambda x.M \mid= \lambda x.N$
$R.10\ M \mid= \lambda x.(NL) \Rightarrow M \mid= \lambda x.N$
$R.11\ M \mid= \lambda x.(NL) \Rightarrow M \mid= \lambda x.L$
$R.12\ M \mid= \lambda x.N \Rightarrow M \mid= N$ – если $x \notin FV(N)$

Свойство *R.1* говорит о том, что замкнутые типизированные термы ведут себя по аналогии с общезначимыми формулами логики – они следуют из любого терма.

О том, что отношение β-конверсии включено в отношение следования, говорит свойство *R.2*.

R.3 и *R.4* – рефлексивность и транзитивность следования.

Свойства *R.5* и *R.6* позволяют переходить от термов вида *(XY)* к подтермам *X* и *Y*.

Свойства *R.7-R.12* описывают взаимодействие следования и оператора лямбда-абстракции λ.

Если мы разрешим использовать нетипизированные термы, то окажется, что существует аналогия между их поведением и поведением противоречивых формул логики – из них, согласно определению, следуют любые термы. Как противоречивые формулы не имеют ни одной модели, в которых они истинны, так и для нетипизированных термов не существует ни одного контекста, в котором им может быть приписан какой-нибудь тип. В результате перечень свойств отношения следования пополнится, по крайне мере, еще тремя *R.13-R.15*.

$R.13\ \neg\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \mid\!- X{:}\alpha) \Rightarrow X \mid= M$
$R.14\ M \mid= N \Rightarrow ML \mid= N$
$R.15\ M \mid= N \Rightarrow LM \mid= N$

В докладе предполагается более подробно рассмотреть дальнейшие свойства отношения ‘|=’ и его связи с логикой.

Литература

1. Hindley R.J., Seldin P. Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction. Cambridge University Press, 2008. – 345 p.
2. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985. – 606 с.

О ПОГРУЖЕНИЯХ ПАРАПОЛНЫХ ЛОГИК[9]

Владимир Михайлович Попов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: pphiloslog@mail.ru

Современная наука располагает богатым спектром логических средств, позволяющих исследовать связи между логиками, между логическими исчислениями и между логическими алгебрами. Одним из эффективных средств изучения связей между логиками являются погружающие отображения (погружения). Здесь представлены некоторые результаты, полученные с использованием погружающих отображений и выявляющие связи между параполными логиками $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$,… Указанные логики возникли в процессе изучения автором логического наследия российского логика и философа Николая Александровича Васильева (описание этих логик можно найти, например, в статье В. М. Попова «Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик», опубликованной в 16 выпуске «Логических исследований» в 2010 году). Теоремы 1 и 2, формулировки которых даны в предлагаемой работе, указывают путь построения по любым целым положительным числам n и m погружения логики $I_{2,n}$ в логику $I_{2,n+m}$.

Ключевые слова: логика, теория логики, параполная логика, погружение.

[9] Исследование выполнено при поддержке РГНФ, грант № 16-03-00224а.

ON IMMERSIONS OF PARACOMPLETE LOGICS

Vladimir Mikhailovich Popov
Lomonosov Moscow State University
E-mail: pphiloslog@mail.ru

Modern science has a rich spectrum of logical tools that allow one to explore the connections between logics, between logical calculi and between logical algebras. One of the effective means of studying the connections between logics is immersive mappings (immersions). Here are some results obtained using immersive mappings and revealing the relationships between paracomplete logic $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$, ... These logics originated in the process of studying the logical legacy of the Russian logic and philosopher Nikolai Aleksandrovich Vasiliev (the description of these logics can be found, for example, in V.M. Popov's article "Sequential axiomatization of simple paralogics", published in the 16th issue of Logical Research in 2010). Theorems 1 and 2, the formulations of which are given in the proposed paper, indicate the path of construction for any positive integers n and m of the immersion of the logic $I_{2,n}$ into the logic $I_{2,n+m}$.

Keywords: logic, theory of logic, parapcomplete logic, immersio.

Языком всех, рассматриваемых здесь логик, является стандартно определяемый пропозициональный язык *L*, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: p_1, p_2, p_3, … (пропозициональные переменные языка *L*), &, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка *L*), $\neg$ (унарная логическая связка языка *L*), левая и правая круглые скобки. Допускаем применение обычных соглашений об опускании скобок в *L* - формулах и используем «формула» как сокращение для « *L*- формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка *L*, а длиной квазиэлементарной формулы называем число всех вхождений $\neg$ в эту формулу. Условимся через k обозначать (произвольное) целое положительное число. Дадим определения исчисления $HI_{2,k}$ и множества $I_{2,k}$. Исчисление $HI_{2,k}$ является исчислением гильбертовского типа. Язык исчисления $HI_{2,k}$ есть *L*. Единственное правило этого исчисления – правило modus ponens в *L*. Выводы в этом исчислении (в частности, доказательства в нем) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Стандартным образом определяется формула, доказуемая в $HI_{1,k}$. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{2,k}$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C - формулы):

(I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, (XI) $\neg A \supset (A \supset B)$, (XII,k) $(D \supset \neg (A \supset A)) \supset \neg D$, где D есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой длины меньше k.

Определяем множество $I_{2,k}$ как множество всех формул, доказуемых в $HI_{2,k}$.

Легко усматривается доказательство следующей леммы 0.

Лемма 0.

Для всякого целого положительного числа n $I_{2,n+1} \subseteq I_{2,n}$.

Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно правила modus ponens в *L* и относительно правила пропозициональной подстановки в *L*. Теорией логики L называем множество формул, включающее логику L и замкнутое относительно правила modus ponens *L*. Понятно, что множество всех формул является логикой, а также теорией любой логики. Называем множество всех формул тривиальной теорией. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой формулы A верно: A є T или $\neg$A є T. Параполной теорий логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Доказано, что все множества $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$,… являются параполными логиками.

Для всякого целого положительного числа n называем n-погружением отображение f множества всех формул в себя, удовлетворяющее следующим условиям: (f1) для всякой пропозициональной переменной q языка L $f(q) = q$, (f2) для всяких формул A и B и для всякой бинарной логической связки * языка L $f(A*B) = f(A)*f(B)$, (f3) для всякой формулы A: (f3а) $f(\neg A) = \neg A$, если $\neg A$ есть квазиэлементарная формула длины < n, (f3б) $f(\neg A) = \neg\neg\neg A$, если $\neg A$ есть квазиэлементарная формула длины n, (f3в) $f(\neg A) = \neg f(A)$, если $\neg A$ есть формула, которая не является квазиэлементарной формулой длины $\leq n$. Можно доказать, что для всякого целого положительного числа n существует единственное n-погружение.

Соглашение: для всякого целого положительного числа n φ_n есть n-погружение.

Теорема 1.

Для всякого целого положительного числа n и для всякой формулы A верно: $A \in I_{2,n}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(A) \in I_{2,n+1}$.

Для доказательства теоремы 1 потребуется ряд лемм. Широко известна следующая семиотическая лемма 1.

Лемма 1.

Для всякой формулы F верно следующее:
F есть пропозициональная переменная языка L,
или F есть (A&B) для некоторых формул A и B,
или F есть $(A\vee B)$ для некоторых формул A и B,
или F есть $(A\supset B)$ для некоторых формул A и B,
или F есть $(\neg A)$ для некоторой формулы A.
Очевидна следующая лемма 2.

Лемма 2.

Для всякого A: A есть квазиэлементарная формула тогда и только тогда, когда $(\neg A)$ есть квазиэлементарная формула.

Лемма 3.

Для всякой формулы A и для всякого целого положительного числа n: если A не является квазиэлементарной формулой, то $\varphi_n(A)$ не является квазиэлементарной формулой.

Лемма 3 доказана индукцией по построению формулы, с использованием леммы 2.

Лемма 4.

Для всякого целого неотрицательного числа n, для всякого целого положительного числа m и для всякого A: если A есть квазиэлементарная формула длины m+n, то $\varphi_m(A) = \neg\neg A$.

Лемма 4 доказана прямой индукцией, с использованием лемм 1 и 2.

Лемма 5.

Для всякого целого положительного n и всякого A: если A есть аксиома исчисления $HI_{2,n}$, то $\varphi_n(A)$ есть аксиома исчисления $HI_{2,n+1}$.

Лемма 5 доказана с помощью лемм 1, 2, 3 и 4.

Лемма 6.

Для всяких целых положительных чисел n и m и для всяких формул A и B: если $\varphi_n(A)$ и $\varphi_n(A\supset B)$ являются формулами, доказуемыми в $HI_{2,m}$, то $\varphi_n(B)$ есть формула, доказуемая в $HI_{2,m}$.

Лемму 6 легко доказать, опираясь на то, что для всякого целого положительного числа n φ_n выполняет следующее условие (вытекающее из определения отображения φ_n) : $\varphi_n(A\supset B) = \varphi_n(A)\supset\varphi_n(B)$ для всяких формул A и B.

Лемма 7.

Для всяких целых положительных чисел n и m и для всяких формул $A_1,\ldots, A_m$: если для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно m, верно, что A_i есть аксиома исчисления $HI_{2,n}$ или найдутся такие меньшие m целые положительные числа r и s, что упорядоченная тройка $<A_r, A_s, A_i>$ есть применение правила modus ponens в *L*, то $\varphi_n(A_m)$ есть формула, доказуемая в $HI_{2,n+1}$.

Стереотипное доказательство леммы 7 возвратной индукцией с использованием лемм 5 и 6 здесь не приводим.

Лемма 8.

Для всякого целого положительного числа n и для всякой формулы A: если $A \in I_{2,n}$, то $\varphi_n(A) \in I_{2,n+1}$.

Лемма 8 доказана с помощью леммы 7.

Лемма 9.

Для всякой формулы A и для всякого целого положительного числа n: $A\supset\varphi_n(A)$ и $\varphi_n(A)\supset A$ являются формулами, доказуемыми в исчислении $HI_{2,n}$.

Лемма 9 доказана индукцией по построению формулы, с использованием лемм 2, 3 и 4.

Лемма 10.

Для всякого целого положительного числа n и для всякой формулы A: если $\varphi_n(A) \in I_{2,n+1}$, то $A \in I_{2,n}$.

Лемма 10 доказана с помощью лемм 0 и 9.

Следствием лемм 8 и 10 является сформулированная выше теорема 1.

Теорема 2.

Для всякого целого положительного числа n, для всякого целого положительного числа m, которое больше 1, и для всякой формулы A:

$A \in I_{2,n}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{n+m-1}(\ldots\varphi_n(A)\ldots) \in I_{2,n+m}$.

Теорема 2 доказана прямой индукцией, с использованием теоремы 1.

Итак, теоремы 1 и 2 обеспечивают эффективное нахождение по всяким положительным целым числам n и m такого погружения Ψ, что для всякой формулы A:

$A \in I_{2,n}$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A) \in I_{2,n+m}$.

О ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ПАРАНОРМАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Доклад посвящен изложению результатов, полученных в ходе исследования литеральных паралогик. Литеральные паралогики – логики, которые обладают парасвойствами, такими, как паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность на уровне пропозициональных переменных. Рассмотрен класс, состоящий из двух функционально эквивалентных четырехзначных параномальных логик. Этот класс является супремумом полурешетки четырехзначных литеральных

паралогик относительно функционального вложения одной паралогики в другую. Приведена теорема, показывающая, что рассматриваемые две четырехзначные паралогики эквивалентны не только с функциональной точки зрения, но и по классу тавтологий.
Ключевые слова: четырехзначные логики, паранормальные логики, полурешетка паралогик, тавтология.

ON FOUR-VALUED PARANORMAL LOGICS

Natalya Evgen'evna Tomova
Institute of philosophy of RAS
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

The report is devoted to the presentation of the results obtained in the study of literal paralogics. Literal paralogics are logics in which the paraproperties such as paraconsistence, paracompleteness and paranormality, occur only at the level of literals; that is, formulas that are propositional letters or their iterated negations. The class of two functionally equivalent paranormal logics are considered. That class is the supremum of the semi-lattice of four-valued literal paralogics with respect to the relation of functional inclusion one paralogic to another. It is shown that these two paranormal logics have the same class of tautologies.
Keywords: four-valued logics, paranormal logics, semi-lattice of paralogics, tautology.

Доклад посвящен изложению результатов, полученных в ходе исследования литеральных паралогик. Напомним, литеральные паралогики – паралогики, которые обладают свойствами паранепротиворечивости, параполноты и параномальности на пропозициональном уровне. Мы использовали следующие критерии для паранепротиворечивости и параполноты. Логика **L** *паранепротиворечива*, если в ней не верифицируется закон Дунса Скота: $A\to(\neg A\to B)$ [Jaskowski, 1969]. Логика **L** *параполна*, если в ней не верифицируется закон Клавия: $(\neg A\to A)\to A$ [Ciuciura, 2015: 54].

В книге [Карпенко, Томова, 2016] описан класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики **CPC**. Исходным пунктом в исследовании является четырехзначная логика Бочвара $\mathbf{B_4}$ [Бочвар, Финн, 1972: 289] содержащая четыре изоморфа классической логики, им соответствуют следующие логические матрицы:

$M_1 = <\{0,1/3,2/3,1\}, \neg_1, \to_1, \{1\}>$,
$M_2 = <\{0,1/3,2/3,1\}, \neg_2, \to_2, \{1,2/3,1/3\}>$,
$M_3 = <\{0,1/3,2/3,1\}, \neg_3, \to_3, \{1,2/3\}>$,
$M_4 = <\{0,1/3,2/3,1\}, \neg_4, \to_4, \{1,1/3\}>$.

x	$\neg_1 x$	$\neg_2 x$	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$
1	0	0	0	0
2/3	1	0	0	1
1/3	1	0	1	0
0	1	1	1	1

$\to_1$	1	2/3	1/3	0
1	1	0	0	0
2/3	1	1	1	1
1/3	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_2$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	1	0
2/3	1	1	1	0
1/3	1	1	1	0
0	1	1	1	1

$\to_3$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	0	0
2/3	1	1	0	0
1/3	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_4$	1	2/3	1/3	0
1	1	0	1	0
2/3	1	1	1	1
1/3	1	0	1	0
0	1	1	1	1

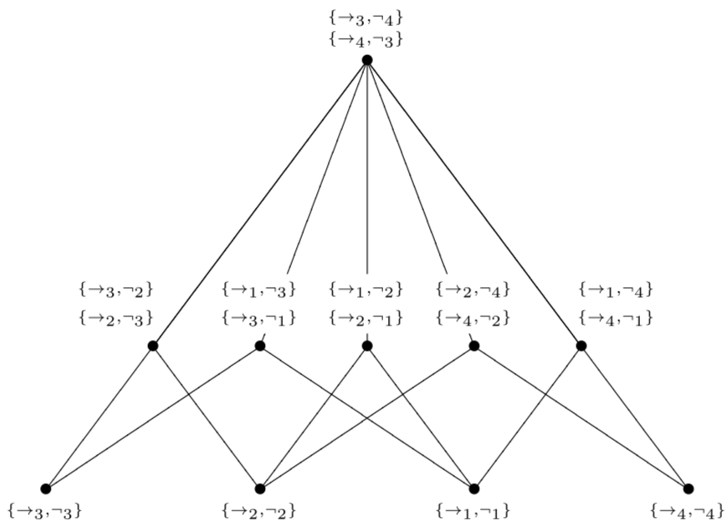


Рис. 1

Комбинирование операций выше приведенных изоморфов позволило получить класс четырехзначных литеральных паралогик.

В [Карпенко, Томова, 2016: 76] показано, что паралогики данного класса формируют 10-элементную верхнюю полурешетку относительно функционального вложения одной логики в другую (Рис. 1).

Супремуму в приведенной полурешетке соответствует класс, состоящий из двух функционально эквивалентных паранормальных логик, т.е. логик, которые являются одновременно и паранепротиворечивыми, и параполными.

Остановимся подробнее на этих двух логиках. Им соответствуют следующие логические матрицы:

M_{15} = <{0,1/3,2/3,1}, $\neg_4$, $\to_3$, {1,2/3}>,

M_{16} = <{0,1/3,2/3,1}, $\neg_3$, $\to_4$, {1,1/3}>.

Обратим внимание, что матрица M_{15} только с одним выделенным значением D = {1} совпадает с матрицей логики **V** [Puga, Da Costa, 1988: 208] и логики $\mathbf{I_0}$ [Popov, 1999: 89].

Был рассмотрен вопрос о соотношении этих паранормальных логик с точки зрения их классов тавтологий. Можно доказать теорему об эквивалентности классов тавтологий, задаваемых матрицами M_{15} и M_{16}. Мы опираемся на идею доказательства подобных теорем, предложенную в [Девяткин, 2011].

Теорема. Существуют такая формула A и оценка v в M_{15}, что $|A|_v^{M_{15}} = 0$, если и только если, существует оценка v' в M_{16}, при которой $|A|_{v'}^{M_{16}} = 0$.

Отметим некоторые идеи и определения, используемые при построении доказательства.

Оценка v в матрице M определяется как отображение множества пропозициональных переменных в носитель матрицы M.

Учитывается тот факт, что функции, соответствующие матричным операциям в M_{15} и M_{16}, таковы, что область их значения есть множество {0,1}, т.е. это внешние функции, и, следовательно, тавтология в данных матрицах – формула, при любой оценке принимающая значение 1. Промежуточные значения формулы в матрицах M_{15} и M_{16} при оценке v могут принимать только в случае, если они являются пропозициональными переменными.

Также используются следующие определения.

Пусть φ есть множество {<1,1>,<0,0>,<2/3, 1/3>,<1/3,2/3>}. Ясно, что φ есть отображение множества {0,1/3,2/3,1} на множество {0,1/3,2/3,1}.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в {0,1/3,2/3,1} называем z-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в {0,1/3,2/3,1}, что для всякой пропозициональной переменной p

$$w(p) = \begin{cases} v(p), \text{если } v(p) \in \{0,1\}, \\ {}^{1}/_{3}, \text{если } v(p) = {}^{2}/_{3}, \\ {}^{2}/_{3}, \text{если } v(p) = {}^{1}/_{3}. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в {0,1/3,2/3,1} существует единственное z-замещение этого отображения. Обозначим через v^z z-замещение отображения v.

В доказательстве теоремы также используется следующая лемма.

Лемма. Для каждой формулы A и оценки v в M_{15} верно: v^z есть оценка в M_{16} и $|A|_v^{M_{15}} = \varphi\, |A|_{v^z}^{M_{16}}$.

В заключение отметим, что все четыре паранормальные логики: логики, задаваемые матрицами M_{15} и M_{16}, а также логики **V** и $\mathbf{I_0}$, – эквивалентны по классу тавтологий

Литература

1. Бочвар Д.А., Финн В.К О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам М.: Наука, 1972. С. 238–295.
2. Девяткин Л.Ю. Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФ РАН, 2011. – 108 с.
3. Карпенко А.С., Томова Н.Е. Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. – 110 с.
4. Jaskowski S. A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.
5. Ciuciura J. A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. № 2. P. 53–60.
6. Popov V.M. On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.
7. Puga L.Z., Da Costa N.C.A. On the imaginary logic of N. A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

О КОНТИНУАЛЬНОМ КЛАССЕ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ МАКСИМАЛЬНО ПАРАНОРМАЛЬНЫХ ЛОГИК

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии Российской академии наук
E-mail: leonid_devyatkin@mail.ru

Этот доклад посвящен континуально бесконечному множеству четырехзначных максимально паранормальных логик. Сначала я описываю четырехзначную матрицу, которая задает логику, обладающую рядом желательных свойств. Далее я показываю, что эта логика также паранепротиворечива и параполна одновременно, но ни одно из ее собственных дедуктивных расширений не является таковым. Кроме того, эта логика алгебраизируема в стиле Блока и Пигоцци. В заключительной части я показываю, что существует континуально много попарно различных языковых расширений исследуемой логики, которые имеют те же полезные свойства, что изначальная.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность, многозначная логика.

ON A CONTINUAL CLASS OF FOUR-VALUED MAXIMALLY PARANORMAL LOGICS

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences
E-mail: leonid_devyatkin@mail.ru

This report deals with a continuum infinite set of four-valued maximally paranormal logics. First, I describe a four-valued matrix which induces a logic possessing a number of desirable properties. In the sequel, I show that this logic is also both paraconsistent and paracomplete at the same time, but none of its proper deductive extensions in the same language are. Moreover, this logic is Blok–Pigozzi algebrizable. In the closing part, I show that there are continuum many pairwise distinct linguistic extensions of the logic being investigated, which have the same useful properties as the initial one.

Keywords: paraconsistnecy, paracompleteness, paranormality, many-valued logic.

В современной философской логике важное место занимает проблема противоречивой или неполной информации. Широкое применение в этой области получили методы многозначной логики. Одним из перспективных направлений является изучение четырехзначных логик, допускающих работу как с противоречивой, так и с неполной информацией одновременно. Данная работа лежит именно в рамках этого направления.

Для экономии места опускаю элементарные определения. Необходимый для понимания работы материал изложен в указанных далее работах. Определения языка, следования, пропозициональной логики, логической матрицы, гомоморфизма, гомоморфного прообраза, языкового и дедуктивного расширения логики можно найти в книге Р. Вуйчицкого [Wójcicki, 1988: 7-35, 56-75, 189-220]. Определения паранепротиворечивости, параполноты, паранормальности, а также максимальности применительно к этим понятиям приводятся в статье А. Аврона и О. Ариэли [Arieli & Avron, 2017]. Основные понятия, связанные с замкнутыми классами функций, изложены в статье А.В. Макарова [Макаров, 1992].

В работе рассмотрена четырехзначная паранормальная логика, являющаяся языковым расширением двух известных трехзначных логик: паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^1$ и дуальной ей параполной логики $\mathbf{I}^1$. В отношении этой логики автором получены следующие результаты. Во-первых, показано, что она является сильно максимально паранормальной в смысле О. Ариэли, А. Аврона и А. Заманской [Arieli, Avron, & Zamansky, 2011], то есть, ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не является паранормальным. Более того, ни одно из таких расширений не является хотя бы паранепротиворечивым либо параполным. Во-вторых, доказывается, что существует континуум попарно различных четырехзначных языковых расширений данной логики, обладающих теми же свойствами, что и исходная.

Начнем с рассмотрения логики $\mathbf{P}^1$ и ее матрицы.

$$P^1 = \langle\{1, \mathbf{t}, 0\},\ \wedge_1, \vee_1, \supset_1, \neg_1, \{1, \mathbf{t}\}\rangle.$$

$\wedge_1$	1	**t**	0
1	1	1	0
t	1	1	0
0	0	0	0

$\vee_1$	1	**t**	0
1	1	1	1
t	1	1	1
0	1	1	0

$\supset_1$	1	**t**	0
1	1	1	0
t	1	1	0
0	1	1	1

	$\neg_1$
1	0
t	1
0	1

Как показали А. Аврон, О. Ариэли и А. Заманская [Arieli, Avron, & Zamansky, 2011], логика $\mathbf{P}^1$, задаваемая матрицей P^1, а также все ее языковые расширения максимально паранепротиворечивы в сильном смысле. Логика называется сильно максимально паранепротиворечивой, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не паранепротиворечиво.

Нетрудно построить и четырехзначную матрицу логики $\mathbf{P}^1$. Для этого добавим промежуточное значение «**f**», такое что его строка и столбец совпадут с таковыми для значения «0».

$$P^{1\mathbf{f}} = \langle\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\},\ \wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_2, \{1, \mathbf{t}\}\rangle.$$

$\wedge_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	1	1
t	1	1	1	1
f	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_2$
1	0
t	1
f	1
0	1

По построению, матрица $P^{1\mathbf{f}}$ есть гомоморфный прообраз P^1 относительно отображения h: $h(\mathbf{f}) = 0$ и $h(x) = x$, если $x \neq \mathbf{f}$. Как следствие, матрица $P^{1\mathbf{f}}$ задает логику $\mathbf{P}^1$. Эта матрица рассматривается А.С. Карпенко и Н.Е. Томовой как M_8 [Карпенко & Томова, 2016: 69]. Теперь рассмотрим матрицу, дуальную P^1:

$$I^1 = <\{1, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_3, \vee_3, \supset_3, \neg_3, \{1\}>.$$

$\wedge_3$	1	**f**	0
1	1	0	0
f	0	0	0
0	0	0	0

$\vee_3$	1	**f**	0
1	1	1	1
f	1	0	0
0	1	0	0

$\supset_3$	1	**f**	0
1	1	0	0
f	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg_3$
1	0
f	0
0	1

В силу дуальности, логика $\mathbf{I}^1$, задаваемая матрицей I^1, а также все ее языковые расширения максимально параполны в сильном смысле. Называем логику сильно максимально параполной, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не параполно.

Как и в предыдущем случае, построим четырехзначный гомоморфный прообраз I^1, на этот раз добавив значение «**t**», строка и столбец для которого совпадают с таковыми для «1». Кроме того, сделаем «**t**» выделенным значением.

$$I^{1\mathbf{t}} = <\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_4, \{1, \mathbf{t}\}>.$$

$\wedge_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	1	1
t	1	1	1	1
f	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_4$
1	0
t	0
f	0
0	1

Эта матрица рассматривается Томовой и Карпенко как M_{13} [Карпенко & Томова, 2016: 69].

Заметим, что матрицы $P^{1\mathbf{f}}$ и $I^{1\mathbf{t}}$ различаются определениями отрицаний, а бинарные операции и классы выделенных значений в них совпадают. Как вытекает из работ П. Войтыляка [Wojtylak, 1981] и Р. Вуйчицкого [Wójcicki, 1988: 56-75], если матрицы двух логик с совпадающими множествами-носителями и классами выделенных значений имеют общее функциональное расширение, то эти логики имеют общее языковое расширение. В работе А.С. Карпенко и Н.Е. Томовой [Карпенко & Томова, 2016: 76] показано, что таким функциональным расширением является матрица P^1I^1, являющаяся частью последовательности паранормальных матриц, предложенной В. Фернандесом [Fernández, 2011: 69].

$$P^1I^1 = <\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\},\ \wedge_2, {}_2\vee, \supset_2, \neg_5, \{1, \mathbf{t}\}>.$$

$\wedge_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	1	1
t	1	1	1	1
f	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_5$
1	0
t	1
f	0
0	1

Аксиоматизации $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$ предложены В. Фернандесом [Fernández, 2011: 121-123], а также Р.А. Левиным и И.Ф. Микенберг [Lewin & Mikenberg, 2006]. Э. Хиршем и Р.А. Левиным построена алгебраическая семантика для этой логики [Hirsh & Lewin, 2008].

Итак, паранормальная логика $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$ представляет собой общее языковое расширение логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. Однако выше мы установили, что все языковые расширения $\mathbf{P}^1$ максимально паранепротиворечивы, а все языковые расширения $\mathbf{I}^1$ максимально параполны. Следовательно, $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$ одновременно максимально паранепротиворечива и максимально параполна. Иными словами, все ее собственные дедуктивные расширения в том же языке ни паранепротиворечивы, ни параполны, то есть не являются паранормальными. Более того, это также верно для всех языковых расширений данной логики. Кроме того, как указывают Карниэлли и соавторы [Carnielli, Coniglio, & Marcos, 2007: 79-80], все многозначные расширения $\mathbf{P}^1$ алгебраизируемы в стиле Блока и Пигоцци. Соответственно, это верно и для многозначных расширений $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$. Покажем, что класс таких расширений имеет мощность континуум.

В данной части работы я применяю подход, предложенный А.В. Макаровым [Макаров, 1992]. Ю.И. Яновым и А.А. Мучником построен класс функций, содержащий континуум замкнутых подклассов [Янов & Мучник, 1959]. Его элементами являются функции на $\{1, \mathbf{t}, 0\}$, отвечающие следующим условиям.

- $f_i(x_1, ..., x_n) = 1$, если для некоторого j ($j = 1, ..., i$) $x_j = 1$ и $x_m = \mathbf{t}$ ($m \neq j$);
- $f_i(x_1, ..., x_n) = 0$ в противном случае.

Обозначим этот класс как F. Определим класс G функций на $\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\}$, модифицировав условия выше.

- $g_i(y_1, ..., y_n) = \mathbf{f}$, если для некоторого j ($j = 1, ..., i$) $y_j = \mathbf{f}$ и $y_m = \mathbf{t}$ ($m \neq j$);
- $f_i(x_1, ..., x_n) = 1$ в противном случае.

По построению, класс G есть гомоморфный прообраз F. Поэтому множество его замкнутых подклассов имеет мощность континуум. Поскольку операции P^1I^1 имеют область значений $\{1, 0\}$, множество функций $[\{\wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_5\} \cup G]$ также содержит континуум замкнутых подклассов. Значит, существует континуум четырехзначных языковых расширений $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$. Описанные расширения $\mathbf{P}^1\mathbf{I}^1$ попарно различны, то есть не являются языковыми вариантами друг друга, так как в расширениях $\mathbf{P}^1$ не имеет места принцип замены.

Литература

1. Arieli O., Avron A. Four-Valued Paradefinite Logics // Studia Logica. 2017. Vol. 107, N. 6. P. 1087-1122.
2. Arieli O., Avron A., Zamansky A. Maximal and Premaximal Paraconsistency in the Framework of Three-Valued Semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97, N. 1. P. 31-60.
3. Carnielli W., Coniglio M., Marcos J. Logics of Formal Inconsistency // Gabbay D. Guenthner F. (ed.) Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14. Dordrecht: Springer, 2007. P. 1-94.
4. Fernández V. L. Semântica de Sociedades para Lógicas n-valentes. Campinas: IFCH-UNICAMP, 2011. – 126 p.
5. Hirsh E., Lewin R.A. Algebraization of logics defined by literal-paraconsistent or literal-paracomplete matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2008. Vol. 54, N. 2. P. 153-166.

6. Lewin R.A., Mikenberg I.F. Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52, N. 5. P. 478-493.
7. Wójcicki R. Theory of Logical Calculi. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. – 473 p.
8. Wojtylak P. Mutual interpretability of sentential logics I // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 11. P. 69-89.
9. Карпенко А.С., Томова Н.Е. Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. – 110 с.
10. Макаров А.В. О гомоморфизмах функциональных систем многозначных логик // Математические вопросы кибернетики. 1992. Вып. 4. С. 2-29.
11. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44-46.

ПРЕДИКАТНЫЕ ВЕРСИИ СИЛЬНЫХ ЛОГИК ПЕРВОГО УРОВНЯ

Александр Александрович Беликов
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: belerevance@gmail.com

В работе обсуждается возможность формулировки логики Данна-Белнапа, а также некоторых родственных ей логик в первопорядковом языке. Исследуется возможность гильбертовской формализации отношений следования, которые детерминируют указанные логики.
Ключевые слова: логика Данна-Белнапа, отношение следования, логика предикатов.

PREDICATE VERSIONS OF SUPER-BELNAP LOGICS

Alexander Alexandrovich Belikov
Lomonosov Moscow State University
E-mail: belerevance@gmail.com

In this paper we consider a predicate version of Dunn-Belnap logic and its different extensions. We examine a possibility of Hilbert-style formalization of these logics.
Keywords: Dunn-Belnap logic, entailment relation, predicate logic.

В декабре 2017 года вышел в свет специальный выпуск журнала Studia Logica [Omori, Wansing (ред.), 2017.], посвященный юбилею публикации знаменитых статей Н. Белнапа “How a computer should think” [Belnap, 1977.] и “A useful four-valued logic” [Belnap, 1977.]. Традиционно, появление этих статей связывают с рождением логики FDE, или, как её часто называют - логики Данна-Белнапа. Во введении к упомянутому сборнику [Omori, Wansing, 2017.] авторы - Х. Омори и Х. Ванзинг - предлагают подробный обзор основных научных результатов и проблем, связанных с логикой FDE и различными её расширениями.

Одним из обсуждаемых ими направлений является изучение FDE в контексте логики предикатов. Данный вопрос на удивление мало изучен. Семантика первопорядкового варианта FDE была предложена Г. Пристом в его фундаментальной работе [Priest, 2008.]. Воспроизведем основные определения.

В качестве языка рассматриваем стандартный первопорядковый язык, включающий в себя множество индивидных переменных: x, y, z, …; индивидных констант: a, b, c, …; n-местных предикатных символов ($n < 0$): P_n, Q_n, R_n, …; логических связок: $\wedge$, $\vee$, ~; кванторов: $\forall$, $\exists$ и технических символов. Используются стандартные определения понятий терма и формулы.

Интерпретацией для логики FDE называем пару $\langle D, v\rangle$,где D есть непустая область интерпретации, а v - интерпретирующая функция, которая определяется стандартным образом (см., например [Priest, 2008.]). Единственным отличием является случай с интерпретацией предикатных символов. Для всякой индивидной константы a, $v(a)\in D$, для всякого n-местного предикатного символа P_n, $v(P_n)$ представляет собой пару $\langle D^+, D^-\rangle$, где D^+ и D^- есть подмножества

D^n. Фиксация этих подмножеств исходной области при интерпретации предикатных символов является специфической чертой данной семантики. Прист трактует область D^+ как множество индивидов, относительно которых предикат выполняется (является истинным), а D^- – как множество индивидов, относительно которых предикат не выполняется (является ложным). Условимся обозначать $v^{D+}(P_n)$ и $v^{D-}(P_n)$, соответственно.

Теперь мы можем сформулировать условия истинности для формул. Пусть ρ есть отношение между множеством всех формул нашего языка и множеством $\{1, 0\}$:

$1\in\rho\ (P_n(a_1, \ldots, a_n))\Leftrightarrow\langle v(a_1), \ldots, v(a_n)\rangle\in v^{D+}(P_n)$;
$0\in\rho\ (P_n(a_1, \ldots, a_n))\Leftrightarrow\langle v(a_1), \ldots, v(a_n)\rangle\in v^{D-}(P_n)$;

Условия истинности и ложности для логических связок определяются стандартным образом.

Для того, чтобы определить условия для кванторов, Прист расширяет исходный язык специального рода константами: k_d, такими, что $v(k_d) = d$. Фактически, каждому индивиду из D присваивается собственное имя. Итак, теперь мы можем сформулировать условия истинности и ложности для формул с кванторами:

$1\in\rho\ (\forall xA)\Leftrightarrow$для всякого $d\in D$, $1\in\rho(A_x(k_d))$;
$0\in\rho\ (\forall xA)\Leftrightarrow$для некоторого $d\in D$, $0\in\rho(A_x(k_d))$;
$1\in\rho\ (\exists xA)\Leftrightarrow$для некоторого $d\in D$, $1\in\rho(A_x(k_d))$;
$0\in\rho\ (\exists xA)\Leftrightarrow$для всякого $d\in D$, $0\in\rho(A_x(k_d))$;

Наконец для завершения необходимых семантических построений, мы должны определить отношение логического следования. Условимся рассматривать отношение следования как бинарное.

$A\Box_{fde}\, B \Leftrightarrow$ для всякой v верно, что если $1\in v(A)$, то $1\in v(B)$.

Данное отношение следования формализует предикатную версию логики Данна-Белнапа. Примечательно, что на сегодняшний день данное отношение не имеет адекватной гильбертовской формализации. Как замечают Х. Омори и Х. Ванзинг:

«At the time being we are not aware of a sound and complete Hilbert-style proof system for first-order FDE». [Omori, Wansing, 2017, стр. 1043.]

Еще одна интересная проблема, которая затрагивается в настоящей работе, заключается в том, что сформулированная семантика позволяет определить другие недавно открытые расширения логики FDE. Среди них: логика У. Ривеччио и А. Питца - ETL [Pietz, Rivieccio, 2013.], и логика Я. В. Шрамко, Д. В. Зайцева и А. А. Беликова - NFL [Shramko, Zaitsev, Belikov, 2017.].

Для рассмотрения этих логик нам необходимо подвергнуть изменению лишь определение следования в изложенной выше семантике Г. Приста.

Если мы определим следование через сохранность истинности и не-ложности, то мы получим логику ETL:

$A\Box_{etl}\, B \Leftrightarrow$ для всякой v верно, что если ($1\in v(A)$ и $0\notin v(A)$), то ($1\in v(B)$ и $0\notin v(B)$).

Если же мы определим следование через сохранность ложности и не-истинности от заключения к посылке, то мы получим логику NFL:

$A\Box_{nfl}\, B \Leftrightarrow$ для всякой v верно, что если ($0\in v(B)$ и $1\notin v(B)$), то ($0\in v(A)$ и $1\notin v(A)$).

Вопрос об адекватной гильбертовской формализации этих отношений также обсуждается в настоящей работе.

Литература

1. Belnap, N., How a computer should think // G. Ryle, (ed.), Contemporary aspects of philosophy, Oriel Press, 1977, P. 30–55.
2. Belnap, N., A useful four-valued logic // J.M. Dunn, G. Epstein, (eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, D. Reidel Publishing Co., 1977, P. 8–37.
3. Omori, H. Wansing, H, (eds.) 40 Years of FDE Studia Logica, Springer Netherlands, 2017, Vol. 105, no. 6, P. 1021–1347.

4. Omori, H. Wansing, H, 40 Years of FDE: An Introductory Overview // Studia Logica. — 2017. — Vol. 105, no. 6. — P. 1021–1049.
5. Pietz, A., U. Rivieccio, Nothing but the truth // Journal of Philosophical Logicю –2013. – N. 42. – P. 125–135.
6. Priest, G., An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is // 2 Edition, Cambridge University Press, 2008, P. 613.
7. Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. First-degree entailment and its relatives // Studia Logica. — 2017. — Vol. 105, no. 6. — P. 1291–1347.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО АНАЛОГА FDE

Ярослав Игоревич Петрухин
Студент кафедры логики
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

Н. Д. Белнап построил логику первоуровневого следования FDE, избегающую так называемых парадоксов классического следования: из противоречия следует все что угодно и тавтология следует из всего что угодно. Заметим, что FDE имеет дело с формулами, главным знаком которых является импликация, антецедент и консеквент которой содержат только отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию. Однако интуиционисткое следование имеет те же парадоксы, что и классическое. Задача элиминировать парадоксы интуиционисткого следования была решена Я.В. Шрамко, сформулировавшего интуиционистский аналог FDE. Цель этого доклада – представить корректные и полные аналитические таблицы типа Фиттинга для интуиционистского аналога FDE.

Ключевые слова: аналитические таблицы, интуиционистская логика, релевантная логика, первоуровневое следование.

ANALYTIC TABLEAUX FOR INTUITIONISTIC ANALOGUE OF FDE

Yaroslav Igorevich Petrukhin
Student of department of logic
Lomonosov Moscow State University
E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

N. D. Belnap presented a logic called FDE (First Degree Entailment) which avoids so called paradoxes of classical entailment: any proposition follows from a contradiction and a tautology follows from any proposition. Note FDE deals with formulae which have an implication as the main connective and antecedent as well as consequent of this implication contains the following connectives only: negation, disjunction, and conjunction. However, intuitionistic entailment has the same paradoxes as the classical one. Thus, Y. V. Shramko presented FDE's intuitionistic analogue. The aim of this report is to present Fitting-style sound and complete analytic tableaux for intuitionistic FDE.

Keywords: analytic tableaux, intuitionistic logic, relevant logic, first degree entailment.

В [Шрамко, 1989] представлена логика IE_{fde} – интуицонисткий аналог логики Н. Д. Белнапа FDE, впервые сформулированной в [Belnap, 1959]. Логика IE_{fde} строится в языке $L_{\rightarrow}$, все формулы которого имеют вид $A\rightarrow B$, где A и B являются формулами интуиционистской логики высказываний. Напомним, что формулами языка L интуиционистской логики высказываний являются все пропозициональные переменные, а также, если C и D формулы интуиционистской логики высказываний, выражения вида $\neg C$, $(C \& D)$, $(C \vee D)$ и $(C \supset D)$, где $\supset$ – интуцонисткая импликация (в то время как $\rightarrow$ – релевантная импликация). Заметим, что в FDE рассматриваются формулы, имеющие вид $A\rightarrow B$, но при этом A и B являются формулами классической логики высказываний и не могут иметь вид C ⇒ D, где C и D - формулы классической логики высказываний, а ⇒ – классическая импликация.

В [Шрамко, 1989] IE_{fde} формулируется в терминах семантики обобщенных описаний состояний Е. К. Войшвилло [Войшвилло, 1988]. Напомним, что обобщенным описанием состояний называется любое подмножество множества всех литералов языка L (литералами называем пропозициональные переменные и их отрицания). Модельной структурой IE_{fde} называется пара M = <K, R>, где K – любое непустое множество обобщенных описаний состояний, а R – бинарное рефлексивное и транзитивное отношение, заданное на K, обладающее свойством сохранности интуиционистской истины (здесь и далее P – пропозициональная переменная, а α и β – обобщенные описания состояний) – если P∈α и R(α,β), то P∈β – и свойством обратной сохранности интуиционистской лжи: если $\neg P_i \in \beta$ и R(α,β), то ¬P∈α. Условия истинности и ложности формул задаются следующим образом (выражение «TA/α» обозначает «формула A истинна в α∈K», а выражение «FA/α» обозначает «формула A ложна в α∈K»):

TP/α е. и т.е. P∈α, FP/α е. и т.е. P∉α;

TA&B/α е. и т.е.TA/α и TB/α, FA&B/α е. и т.е. FA/α или FB/α;

TA∨B/α е. и т.е. TA/α или TB/α, FA∨B/α е. и т.е. FA/α и FB/α;

TA⊃B/α е. и т.е. ∀β(R(α,β)⇒(FA/β или TB/β)), FA⊃B/α е. и т.е. ∃β(R(α,β) и (TA/β и FB/β));

T¬A/α е. и т.е. ∀β(R(α,β)⇒FA/β), F¬A/α е. и т.е. ∃β(R(α,β) и TA/β).

Отношение релевантного следования определяется следующим образом: A⊨B е. и т.е. ∀M∀α∈K(если TA/α, то TB/α), где M = <K, R> – модельная структура IE_{fde}.

Отмеченными формулами называем выражения вида TA (истинно A), FA (ложно A), T`A (неистинно A), F`A (неложно A), где A – формула языка L.

Правила редукции аналитических таблиц типа Фиттинга [Fitting, 1969] для IE_{fde} имеют следующий вид:

T& S, TA&B S, TA, TB	T`& S, T`A&B S, T`A |S, T`B	F& S, FA&B S, FA |S, FB	F`& S, F`A&B S, F`A, F`B
T∨ S, TA∨B S, TA |S, TB	T`∨ S, T`A∨B S, T`A, T`B	F∨ S, FA∨B S, FA, FB	F`∨ S, F`A∨B S, F`A |S, F`B
T⊃ S, TA⊃B S, FA |S, TB	T`⊃ S, T`A⊃B S^0, F`A, T`B	F⊃ S, FA⊃B S^0, TA, FB	F`⊃ S, F`A⊃B S, T`A |S, F`B
T¬ S, T¬A S, FA	T`¬ S, T`¬A S^0, F`A	F¬ S, F¬A S^0, TA	F`¬ S, F`¬A S, T`A

S – произвольное, возможно, пустое множество отмеченных формул. S^0 – множество отмеченных формул из S видов TA или F`A. Заметим, что поскольку S – множество, {S, TA} равно {S, TA, TA}, значит правила, дублирующие отмеченные формулы, не нужны. Определения применения правила редукции, конфигурации и аналитической таблицы стандартны. Множество отмеченных формул S называется замкнутым, если оно одновременно содержит формулы вида TA и T`A или FA и F`A. Определения замкнутых конфигурации и аналитической таблицы стандартны. Конечное множество отмеченных формул S называется противоречивым, если таблица для него для него замкнута. Формула A→B является теоремой (⊢A→B), если {TA, T`B} – противоречиво. Замкнутая таблица для {TA, T`B} есть доказательство формулы A→B.

Автором доказана следующая теорема [Петрухин, 2016].

Теорема. ⊨A→B, тогда и только тогда, когда ⊢A→B.

Литература

1. Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. Москва: Издательство Московского университета, 1988. – 144 с.
2. Петрухин Я.И. Аналитико-табличная формализация интуиционистского варианта логики первоуровнего следования // Логико-философские исследования. 2016. № 7. С. 153-161.
3. Шрамко Я.В. К проблеме релевантного следования для интуиционистской логики // Логико-философские исследования. 1989. № 1. С. 165-179.
4. Belnap N.D. Tautological entailments // The Journal of Symbolic Logic. 1959. № 24. P. 316.
5. Fitting M. Intuitionistic logic model theory and forcing. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company. 1969. – 191 p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕФИНИТНЫХ МЕТОДОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ВЗАИМОСВЯЗИ ФОРМ ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ

Андрей Валентинович Титов
Кандидат технических наук, доцент,
Российский университет транспорта (МИИТ)
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Рассматривается подход к изучению взаимосвязи типов логического исчисления основанный на исследовании оценки как морфизма, сохраняющего структуру из алгебры формул в структуру значений оценки. Использование нефинитных методов, позволяет рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. К ее исследованию могут быть привлечены нефинитные методы обобщенного нестандартного анализа как раздела теории категорий. Предлагаемый подход является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки.

Ключевые слова: оценка, категория, нестандартный анализ, мера.

THE USE OF NON-FINITE METHODS IN THE STUDY OF THE RELATIONSHIP FORMS A LOGICAL CALCULUS BASED ON THE EVALUATION

Andrey V. Titov
CSc in Technology, Associate Professor
Russian University of transport (MIIT)
The Bauman Moscow state technical University

We study the approach to study the relationship of types of logical calculus is based on a study of evaluation as a morphism that preserves the structure of the algebra of formulas to the structure of the estimated values. The use of non-finite methods, allows us to consider the set of formulas of algebra of logic imposed on it by the equivalence relation as a factor-algebra of a certain structure. Her research can be attracted can be attracted by non-finite generalized methods of nonstandard analysis as a section of category theory. The proposed approach is the development of a semantic approach to the study of the types of formal logic on the basis of research evaluation.

Keywords: valuation, category, non-standard analysis, measure.

Использование одного и того же языка в исследовании, как предмета математики, так и ее метода, определяется тем, что множество формул формализованной теории является алгеброй, в общем случае с бесконечными операциями. После введения отношения эквивалентности на множестве формул, фактор-алгебра становится структурой, законами которой определяется тип логики, принимаемой в теории. Отсюда и вытекает правомерность использования в математической логике методов теории структур.

В частности, примером алгебраизации методов исследования логических исчислений может служить тот факт, что была доказана эквивалентность теоремы о полноте пропозиционального исчисления и теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр.

Применение нефинитных методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами, выявить математическое содержание рассматриваемого вида логического исчисления.

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограниченно, однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов математическому аппарату, могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Если в формализованной теории операции заменяют шаги дедукции, то вполне естественно представить такую систему как категорию. С другой стороны от вывода в исчислении требуется сохранение истинности или, в случае многозначности значений истинности, преобразование истинности по известному закону. Но это означает, что вывод или шаги дедукции связаны с сохранением или изменением по известному закону оценки, которая так же может быть представлена как морфизм определенной категории.

Если рассматривать модели как функторы, сохраняющие дополнительную структуру из категории, соответствующей данной теории, в категорию множеств, то выбор вместо категории множеств, других категорий дает возможность изучать и строить неклассические теории. Тогда категория, на которой принимает значение функтор, определяет тип логики для исследуемой модели.

Ценным для проводимого исследования является то обстоятельство, что в теории категорий свойства объекта определяются не через его внутреннюю структуру, а через его связи с другими элементами, которые выражаются через функции (стрелки).

Расширения, даваемые теорией категорий, распространяются и на логику. С философской точки зрения категорный подход к логике интересен тем, что расширяет ее возможности и при этом позволяет проследить связь между классическими и неклассическими вариантами логических исчислений.

Вариантом категорного подхода к анализу логических исчислений является обобщенная форма нестандартного анализа, который в работе В.А.Любецкого определяется как «алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка.» [Любецкий, 1986: 377].

При этом подходе различные типы логики определяются структурой, на которой принимает значение оценка.

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «А есть В» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из А, т.е. случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(A) некоторого множества А. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само А имеет меру 1.

Итак, непосредственное представление об истинности приводит к тому, что в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(X) некоторого множества X. Принимается возможным существование только двух мер истинности 0 и 1, причем только X имеет меру 1

Развитие метода, основанного на определении меры истинности как меры на некотором множестве, связано с понятием оценки.

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или, короче, $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$, $\|\phi\to\psi\| = \|\phi\| \to \|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [Любецкий, 1989: 101].

При этом типы логического исчисления определяется структурой, на которой принимает значение оценка

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «А есть В» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из А, т.е.в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(A) некоторого множества A. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само A имеет меру 1. Кроме того, если A есть бесконечное множество, то и разность A/N, где N – любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль.

В качестве структуры X, на которой принимает значение оценка, может рассматривается импликативная решетка общего вида с оценкой на ней $\|\phi_k\|_X$. При этом логические связки языка моделируются операциями в решетке X.

Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления [Титов, 2014: 391-393].

В классическом варианте нестанданртного анализа рассматривается множество - степень K^I, где K- структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на решетке P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)$ $(Tr_j(\phi_k) \equiv \|\phi_k\| \in j)$ «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j \equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2], \ldots [f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1, f_2, \ldots, f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in K^I|j$. Это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик [Титов, 2014: 392]

Вариант логики с двумя типами отрицания - Н-В логика [Васюков, 2005: 151], в которой рассматривается два вида отрицания, можно интерпретировать исчисление с оценкой на импликативной решетке общего вида.

В случае пропозиционального исчисления, в котором алгебра формул есть булева алгебра или булева решетка отрицание эквивалентно дополнению. Однако, как известно, решетка общего вида имеет два вида дополнения.

Если решетка A имеет нулевой элемент 0, то $\cap$- дополнением элемента $a \in A$ называют наибольший элемент $c \in A$, для которого выполняется равенство $c \cap a = 0$.

Если решетка A имеет единичный элемент 1, то $\cup$- дополнением элемента $a \in A$ называют наименьший элемент $d \in A$, для которого выполняется равенство $d \cup a = 1$.

Можно показать [Титов, 2016: 148-150], что аксиомы Н-В логики являются выводимыми теоремами для решеток общего вида с двумя дополнениями, которые должны играть роль структур оценки при условии трактовки оценки как морфизма сохраняющего структуру.

При переходе на язык теории категорий модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. В этом случае оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру. Вид логики будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т.д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности, в работе Голдблатта рассматривается язык PL, в который включена новая связка ∇ и, если α формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что α» [Гольдблатт, 1986: 393].

Введение в теории категорий классификатора подобъектов Ω, и связанная с этим понятием Ω -аксиома, позволяет подтвердить предположение о том, что структура оценки для алгебры формул должна сохранять ее структуру.

Литература

1. Васюков В.Л. «Категорная логика».- М.: АНО Институт логики. 2005,- 194 с.
2. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.- М: Мир, 1983. - 468 с.

3. Любецкий В.А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем.// П.Т.Джонсон. Теория топосов.- М.: «Наука», 1986. - С. 376-430.
4. Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// УМН, том 44, выпуск 4(269), 1989,- С. 99-153.
5. Титов А.В. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки //Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики / Под ред. В.А.Бажанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. С. 375-399.
6. Титов А.В. Использование нефинитных методов в семантическом подходе к исследованию типов формальных логики // Ученые записки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия, Культурология, Политология, Социология. 2016. Т.2 (68). №4. С. 143-156.

ЛОГИКА НЕКЛАССИЧЕСКОЙ НАУКИ

Владимир Леонидович Васюков
Институт философии РАН
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Первая нерешенная до сих пор проблема теоретической физики – проблема квантовой гравитации – предполагает построение единой теории, объединяющей общую теорию относительности и квантовую теорию. Все до сих пор предпринятые попытки ее построения не увенчались успехом. Но похоже, что один специфический ответ на этот вопрос существует, хотя в силу своей природы он не находился в центре внимания исследователей. Анализ логических проблем квантовой теории приводит к обнаружению общих логических оснований теории относительности и квантовой механики, но большой вопрос, может ли этот результат расцениваться как решение проблемы квантовой гравитации или хотя бы шаг на пути в этом направлении.

Ключевые слова: квантовая гравитация, квантовая логика, каузальная логика пространства-времени, неклассический тип научной рациональности.

LOGIC OF NON-CLASSICAL SCIENCE

Vladimir L. Vasyukov
Institute of Philosophy RAS
E-mail: vasyukov4@gmail.com

First up to date unresolved problem of theoretical physics – the problem of quantum gravitation –presupposes yielding of unified theory combining both general relativity theory and quantum theory. All so far made attempts failed. But it seems that there is one specific answer to this question albeit by virtue of its nature it was not in the uppermost of researcher mind. An analysis of logical issues of quantum theory leads to detection of one and the same general logical foundations both of relativity theory and quantum theory. Nevertheless, this result should be regarded only as a consequence of non-classical foundation of non-classical science on the whole.

Keywords: quantum gravitation, quantum logic, causal logic of spacetime, non-classical type of scientific rationality.

В 1916 г. А. Эйнштейн, формулируя концепцию гравитационных волн, переносящих энергию, замечает, что согласование ее с атомной физикой требует описания в терминах квантовой теории и самой энергии, переносимой гравитационными волнами. Он пишет: «атом, вследствие внутриатомного движения электронов, должен излучать не только электромагнитную, но и гравитационную энергию, хотя и в ничтожном количестве. Поскольку в природе в действительности ничего подобного не должно быть, то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации» [Эйнштейн, 1965: 522].

Однако создание подобной теории было отложено физиками на долгое время. Одной из причин было то, что в микромире мы обычно можем игнорировать гравитацию и нам достаточно рассматривать пространство и время в качестве ньютоновского неизменного фона. В макромире же – области гравитации и космологии – квантовые явления не играют никакой роли.

Так или иначе, но проблема осталась, и постепенно приобрела статус первой нерешенной проблемы теоретической физики. В настоящее время ее называют *проблемой* квантовой гравитации и формулируют следующим образом: *«Объединить общую* т*еорию* относительности и квантовую т*еорию в одну* т*еорию, которая* может *претендовать на роль полной* т*еории природы» [Smolin, 2006: 5]*.

Подобное объединение казалось всегда совершенно логичным с точки зрения места, занимаемого в физике квантовой теорией. Поскольку, как пишет Дж.Макки, «объединенными усилиями Гейзенберга, Шредингера, Дирака, Бора, Борна, фон Неймана и других ученых была создана новая, более совершенная механика, которая... включала классическую механику в качестве предельного случая для больших масс и расстояний» [Макки 1965: 59], то квантовые явления, по-видимому, должны оказывать влияние на теорию относительности, создавая какие-то рамки для ее формализма. В сущности, все изложение физики должна было бы начинаться не с классического, а с квантовомеханического описания, и лишь затем переходило бы к описанию «случая больших масс и расстояний». Это напрямую касается и теории относительности.

Однако прямые аналогии и параллели здесь не срабатывают. Дж. фон Нейман еще в 1932 году в «Математических основаниях квантовой механики» рассматривает один из примеров подобного затруднения. Он пишет: «… утверждается, что принципиально невозможно установить одновременность двух событий, происходящих в точках, разделенных расстоянием r, с точностью, превосходящей интервал длительностью r/c (c - скорость света), в то время как, согласно соотношениям неопределенности, принципиально невозможно указать положение материальной точки в фазовом пространстве с точностью, превосходящей область объема $(h/4\pi)^3$» [фон Нейман, 1964: 242-243]. Но природа неопределенности здесь различна. В теории относительности это вызвано тем, что систему координат можно выбирать бесконечно многими различными способами, а в квантовой механике вообще невозможно описывать систему, характеризуемую волновой функцией, точкой в фазовом пространстве.

Так есть ли у теории относительности и квантовой механики что-то общее вообще? Оказывается, что один специфический ответ на этот вопрос существует, хотя в силу своей природы он не находился в центре внимания исследователей. В упомянутой выше книге фон Неймана 1932 года, излагающей физическую теорию на языке чистой математики, можно найти следующее высказывание: «Мы видим, что связь между свойствами физической системы, с одной стороны, и проекционными операторами, с другой, делает возможным некое логическое исчисление над ними» [фон Нейман, 1964: 189]. Такое логическое исчисление было им построено в совместной с Г. Биркгофом статье, положившей начало исследованиям особой, неклассической логики квантовой теории. Это логическое исчисление формально основывалось на ортомодулярной решетке замкнутых подпространств гильбертова пространства.

Начиная с конца 70-х годов начали появляться работы, демонстрирующие применимость конструкции ортомодулярной решетки к описанию теории относительности. Так, в работе В. Цеглы «Каузальная логика пространства Минковского» [Cegla, 1961] рассматривалось ортогональное пространство, образуемое каузальной структурой. В специальном случае каузальной структуры семейство дважды ортогональных множеств образует полную ортомодулярную решетку.

Абстрактно каузальное пространство (M,G) можно описать как пару, где M есть непустое множество, а G является структурой, определенной с помощью выделенного покрытия G непустыми подмножествами M. Элементы $f \in G$ называются каузальными путями, а $S(x) = \{f \in G: x \in f\}$ представляет собой множество всех путей, проходящих через x. Точки x и y каузально связаны, если имеется путь проходящий через них.

Естественно определяемая операция ортодополнения для подмножеств M основывается на каузальной структуре, получаемой отождествлением всего, что каузально связано с данным множеством. Для этого определяем на M симметричное рефлексивное отношение, которое задано на каузальной структуре. Для двух точек x и y из M записываем xRy и говорим, что x и y каузально связаны или просто связаны. Ортодополнение задается как $f^{\perp} = \{x$: x не связано ни с одной точкой из $f\}$ и полагаем $f \in L(M)$ тогда и только тогда, когда $f^{\perp\perp} = f$. Ясно, что $f^{\perp}$ будет элементом $L(M)$, поскольку $f^{\perp} = f^{\perp\perp\perp}$.

В качестве конъюнкции в $L(M)$ можно рассматривать пересечение множеств $f \wedge g = f \cap g$, дизъюнкцией двух множеств будет каузальное замыкание их пересечения $f \vee g = (f \cap g)^{\perp\perp}$. В работе Х. Касини «Логика каузально замкнутых пространственно-временных подмножеств» [Casini, 2002] показано, что $L(M)$, где M есть общее пространство-время, является ортомодулярной решеткой и показано, что $L(M)$ также имеет логическую интерпретацию в терминах высказываний для классических частиц, когда высказывание, соответствующее подмножеству пространства-времени f, понимается как «частица проходит через f».

Используется конструкция ортомодулярной решетки также и в релятивистской квантовой теории. Так, например, в работе Марка Хэдли «Логика квантовой механики, выведенная из классической общей относительности» [Hadley, 1997] показано, что разумные допущения о роли измерительного прибора приводят к ортомодулярной решетке высказываний, характерной для квантовой логики.

При этом ортомодулярная решетка не закладывается в основание теории, но обнаруживается в процессе исследования. Она присутствует и в квантовой теории, и в теории относительности. Но может ли она лечь в основу единого формализма, дающего решение проблемы квантовой гравитации? Скорее, наличие ортомодулярной решеточной структуры в недрах квантовой теории и теории относительности является следствием неклассического характера этих дисциплин: отсутствие выделенной импликации в ортомодулярной решетке (как показано работе [Kalmbach, 1974], существует как минимум шесть подобных импликаций) приводит к требованию контроля за особенностями наших наблюдений, поскольку выбор «импликативной» связи между высказываниями способен повлиять на результаты наблюдения.

Литература

1. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965. – 129 с.
2. Нейман И. фон. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. – 368 с.
3. Эйнштейн А. Приближенное интегрирование уравнений гравитационного поля // А.Эйнштейн Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. – 700 с.
4. Cegla W. Causal Logic of Minkowski Space // Current Issues in Quantum Logic / S. Beltrametti and B. van Fraassen (eds.), N.Y.: Plenum, 1981, pp. 419-424.
5. Casini H. The logic of causally closed space-time subsets // arXiv:gr-qc/0205013 v2 22 Nov 2002.
6. Hadley M.J. The Logic of Quantum Mechanics Derived from Classical General Relativity // arXiv:quant-ph/9706018v1 9 Jun 1997.
7. Kalmbach G. Orthomodular Logic // Zeitschr. Math.Log. und Grundl.Math., Bd.20, H.5, 1974. S.395-406.
8. Smolin L. The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of a science, and what comes next. Boston, New York: Houghton Mifflin Company, 2006. – 414 p.

ОТ ДЕТЕРМИНИЗМА К КВАЗИДЕТЕРМИНИЗМУ В ЛОГИКЕ И ВНЕ ЛОГИКИ

Виталий Юрьевич Ивлев
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
E-mail: vitalijivlev@yandex.ru

Юрий Васильевич Ивлев
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: ivlev.logic@yandex.ru

Рассматривается переход от однозначной обусловленности в логике, социальном познании и естествознании к неоднозначной обусловленности.

Формулируется принцип квазифункциональности для логики и принцип квазидетерминизма для социального, естественнонаучного и технического знания.
Ключевые слова: однозначная обусловленность, неоднозначная обусловленность, квазифункция, неоднозначная обусловленность в науке.

FROM DETERMINISM TO QUASIDETERMINISM IN LOGIC AND BEYOND LOGIC

Vitaliy Yu. Ivlev
Bauman Moscow State Technical University
E-mail: vitalijivlev@yandex.ru

Yuriy V. Ivlev
Lomonosov Moscow state University
E-mail: ivlev.logic@yandex.ru

This article is concerned with transition from determinate causation in logic, social and natural sciences to indeterminate causation in these branches of scientific knowledge. The analysis of this transition results in formulation of principle of quasifunctionality for logic and principle of quasideterminism for social, natural and technical sciences. Quasfunctional logic is based on the generalization of the principles of classical logic. As a result of our generalization, we obtain quasi-matrix logic principles: the principle of four-valency or three-valency; consistency; the principle of excluded fifth or fourth; identity; the quasi-matrix principle (logical terms are interpreted as quasi-functions).
Keywords: determinate causation, indeterminate causation, quasifunctional logic, indeterminate causation.

Под детерминизмом будем понимать следующую обусловленность какого-либо явления другим явлением: всегда, когда есть определенное явление и определенные условия, существует другое определенное явление. Частным случаем такой обусловленность является причинно-следственная обусловленность (определенная причина при определенных условия вызывает определенное следствие). Под квазидетерминизмом будем понимать следующее: ***в познании, природе и социуме между явлениями имеет место не только отношение однозначной обусловленности, но и отношение неоднозначной обусловленности, т.е., в частности, определенная причина может вызывать не только определенное следствие, но и, при одних и тех же условиях, в одном случае, одно определенное из нескольких возможных следствий, а в другом случае – другое.*** Будем считать частным случаем квазидетерминизма детерминизм, то есть предлагаем обобщить понятия детерминизма до понятия квазидетерминизма.

От детерминизма к квазидетерминизму в логике

Современная логика создавалась как логика детерминистская. Принцип детерминизма выражался посредством принципа функциональности – логические термины представлялись в качестве функций. Так, при определении, например конъюнкции, Я. Лукасевич и С. Клини при значениях «случайно» членов конъюнкции самой конъюнкции приписывали значение «невозможно» (первый) и значение «случайно» (второй), хотя почти очевидно, что два случайных события вместе могут быть как невозможными, так и возможными. В начале шестидесятых годов Н. Решер ввел выражение «квази-истинностно функциональная логика». [Rescher, 1962] Фактически, хотя без определения, он ввел понятие квазифункции. Однако построенная им логика оказалась не квазифункциональной. Так, ситуацию «то ли истина, то ли ложь» он рассматривал как отдельное значение. Квазифункциональная (квазиматричня) логика основывается на принципе квазифункциональности: логические термины интерпретируются в качестве квазифункций. Квазифункция – это соответствие, в силу которого некоторый объект из определённого подмножества множества, являющегося областью определения квазифункции, соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества множества значений квазифункции. Частным случаем квазифункции являет функция. Примерами квазифункциональных логик являются: (1) минимальная модальная логика S_{min}; (2) трехзначная квазиматричнаяя логика S_r; (3) четырехзначные квазиматричные логики S_a^-, … S_i^+; (4) деонтические логики [Ивлев, 1972, 1973, 1985].

Замечание

В последние годы квазиматричная (квазифункциональная) логика стала разрабатываться не только в России (под названием «недетерминистская логика»). В некоторых работах учитываются отечественные результаты. Так, в статье [Marcelo, Cerro, Peron, 2015] есть разделы: 2. Ivlev (1988) systems and Nmatrices, с. 21-27; 4. More Ivlev-like systems and Nmatrices, с. 34-40. В статье [Omori, Skurt, 2016] есть параграф: 3.3. A discussion on the result of Ivlev, с. 827, 828.

Квазидетерминизм в биологии используется, например, при характеристике, случайности. Основными видовые случайности являются: классическая случайность – явление, которое неоднозначно детерминировано сущностью предмета, системы; функциональная случайность – признак является случайным, если условиями существования его носителя неоднозначно детерминировано или не детерминировано выполнение определенных функций носителем признака; случайность по обстоятельствам – явление, существование или возникновение которого неоднозначно детерминировано внешними обстоятельствами [Ивлев, 1997].

Особым видом случайности является изменение генофонда в небольших изолированных популяциях, называемое «дрейфом генов». Эту случайность можно пояснить «нарушением принципов отбора» из генеральной совокупности в «выборку», как бы производимого самой природой [Ивлев, Ивлев, 2017].

Нервные сети

Гипотетически нейрон можно представить в качестве квазиавтомата, имеющего, в частности, один вход и один выход. На вход нейрона поступает какой-то сигнал из подмножества, например из $\{n, c\}$, возможного множества $\{n, c, i\}$ сигналов. На выходе нейрон выдаёт какой-то один сигнал из подмножества, например из $\{n, i\}$. Пусть имеются два нейрона, на выход которых поступает один и тот же сигнал c. Тогда на вход системы нейронов, состоящей из двух новых нейронов, поступит либо сигнал c, либо сигнал i, если предположить, что эти два последние нейроны описаны формулой, соответствующей конъюнкции. Таким образом, поведение нейронов может быть не определено, или определено лишь частично, а поведение нейронной сети может быть определено полностью, может быть определено частично, а может быть совсем не определенно. Возможно, что в таком поведении нейронов заключается объяснение интуиции: мозг работает как машина, которая хотя и является сложной, но всё же конечной, ее работа не осознается и результаты получаются на выходе иногда правильные, а иногда – нет.

Абстрактные и реальные квазиавтоматы

Между сигналом на входе и сигналом на выходе автомата есть функциональная зависимость. В квазиавтомате зависимость квазифункциональная. На вход поступает какой-то сигнал из подмножества множества возможных входных сигналов. На выходе возникает какой-то сигнал из подмножества множества возможных сигналов. Пусть имеется множество таких квазиавтоматов. Выходными сигналами являются перемещения самих квазиавтоматов. В данный момент времени нельзя установить место нахождения каждого из автоматов, но можно рассчитать, где будет находиться система квазиавтоматов [Ивлев, 2017].

Социальное прогнозирование

Применение принципа квазифункциональности позволяет рассматривать возможные варианты развития в социальной сфере таким образом, что результаты развития отдельных составляющих социальной системы только частично предсказуемы, а результат развития системы в целом предсказуем полностью (а возможно, конечно, что только частично).

Аргументация

О высказывании (концепции) может не быть ни какого убеждения. Тогда значение высказывания 0. Более сильными значениями являются убt и убf (убежден в истинности и убежден в ложности). Более сильными, чем убt, являются значения $убt_n$ $убt_c$ $убt_C$ $убt_N$, которые читаются, соответственно, «убежден, что истинно и онтологически необходимо», «убежден, что истинно и онтологически случайно», «убежден, что логически случайно», «убежден, что логически необходимо». Очевидно образование более сильных значений для убf. Отношения между высказываниями (концепциями) выражаются посредством квазифункций [Ивлев, 2003].

Заключение

Из сказанного видно, что квазидетерминизм имеет место как в природе и социуме, так и в познании. Целесообразно с этой позиции пересмотреть техническое, естественнонаучное и социальное знание.

Литература

1. Ивлев В.Ю. Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // Философия и общество. 1997. № 3. С. 108-125.
2. Ивлев Ю.В. Логика норм. 1972. Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук.
3. Ивлев Ю.В. Табличное построение пропозициональной модальной логики // Вестник Моск. Ун-та, 1973. № 6. С.51-61.
4. Ивлев Ю.В. Содержательная семантика модальной логики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 170 с.
5. Ивлев Ю.В. Основы логической теории аргументации // Логические исследования. 2003. С. 50-60.
6. Ивлев Ю.В. Методологическая функция квазиматричной (квазифункциональной) логики. // Методология в науке и образовании. Материалы Всероссийской конференции университетов и академических институтов РАН. Москва, 30-31 марта 2017 г. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С.61-64.
7. Ивлев Ю.В., Ивлев В.Ю. Объективное содержание логических знаний. // Александр Зиновьев и актуальные проблемы логики и методологии. М.: Канон+, 2017. С. 92-114.
8. Hitoshi Omori, Daniel Skurt. More Modal Semantics Without Possible Worlds // IFColog Journal of Logics and their Applications. 2016. Vol. 3. P. 815-846.
9. Marcelo E. Coniglio, Luis Farinas del Cerro & Newton M. Peron. Finite non-deterministic semantics for some model systems // Journal of non-Classical Logics. 2015, Vol. 25, No. 1. P. 20-45.
10. Rescher N. Quasi-truth functional systems of propositional logic // The Journal of Symbolic Logic. 1962. № 27. P. 1-10.

ЛОГИКА И ТЕОРИЯ НАУКИ В ФИЛОСОФИИ XIX ВЕКА[10]

Юрий Юрьевич Черноскутов
Санкт-Петербургский государственный университет

В докладе обсуждаются ключевые моменты и основные этапы развития программы, стремившейся свести теорию науки к (формальной) логике. Подобные проекты были несовместимы с некоторыми из основных принципов Кантианской теории познания, поэтому развивались главным образом в рамках традиций, испытавших наименьшее влияние этой философии. Основное внимание уделяется истории соответствующего в Австрии, в частности, роли Больцано, Австрийским интерпретациям Лейбницевской «универсальной характеристики», учебникам Р.Циммермана для гимназий и др.

[10] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант №15-03-00321.

Ключевые слова: логика, теория науки, XIX век, Больцано, Циммерман.

LOGIC AND THEORY OF SCIENCE IN THE 19 CENTURY PHILOSOPHY

Yury Y. Chernoskutov
Saint-Petersburg State University

I discuss here some key milestones of the program, which strived, in 19th century, to reduce the general theory of science to (formal) logic. The projects of this kind were inconsistent with basic tenets of Kantianism in the philosophy of knowledge. Hence the former has been developed most in the framework of traditions, which were least influenced by the latter. The principal attention is paid to the history of this approach in Austria, in particular the role of B.Bolzano, Austrian interpretations of Leibnizean "Characteristica universalis", R.Zimmermann's learnbooks for gymnasiums et al.

Keywords: logics, theory of science, 19 century, Bolzano, Zimmermann.

Стремление к созданию общей теории науки, которое было одним из ведущих лейтмотивов всей Европейской философии Нового Времени, к середине XIX века привело к появлению нескольких, не всегда совместимых фундаментальных программ. Одна из них связывала построение такой теории с созданием тем или иным образом реформированной логики.

После Канта в немецкой философии стало общепринятым разделять форму и содержание знания. Выделенная Кенигсбергским мыслителем «общая логика» характеризовалась как формальная ровно потому, что отвлекалась от всякого содержания и особенностей познаваемых предметов. Поэтому общая логика не могла служить методом научного познания. Тренделенбург, благодаря которому такое понимание предмета этой науки стало обозначаться как «формальная логика», решительно ополчился на возможности этой самой формальной логики. Как следствие, в рамках Германской философии XIX века если какая-либо логика и претендовала на роль общей теории науки, то имелась в виду отнюдь не формальная логика.

В Австрии, где философия Канта не имела доминирующего влияния, возможности формальной логики оценивались более благосклонно. Так, Б.Больцано понимал науку как «упорядоченную совокупность истин определенного вида» [Больцано, 2003: 51]. Поэтому неудивительно, что теория науки, по его мнению, должна представлять собой не что иное, как логику: «Логика, по моему пониманию, должна быть наукоучением, т.е. указанием того, как общую область истин следует целесообразным образом разделять на отдельные науки и излагать каждую из них письменно» [Больцано, 2003: 57].

Больцано избегает обозначать своё понимание логики как формальное. Но во-первых, его трактовка формы и содержания существенно отличается от Кантовской. Под содержанием он понимает не предметную составляющую знания, но всего лишь состав, набор частей, из которых образовано объективное представление/ предложение. Под формой же он понимает не форму мышления, но форму объективных предложений и представлений. Причём эта форма представляет собой любое общее свойство многих предложений; это особого рода вид, образ суждения, его структура (*Gestalt*) [Bolzano, 1837: Bd.1, 251]. Во-вторых, последователи Больцано, говоря о формальной логике, как правило, имели в виду не форму мышления, но форму предмета мышления вообще.

Особую роль для развития этой программы сыграла своеобразная интерпретация Лейбницевского проекта универсальной характеристики. В Германии решающее влияние приобрело прочтение Тренделенбурга, который с большим сомнением относился тому, чтобы усматривать в этом проекте связь с формальной логикой. Заметно иначе интерпретировали его два австрийских автора – Ф.Экснер и Р.Циммерман. Так, Экснер полагает, что логика занимает центральное место в проекте Лейбница: «Логика была для него наукой, образующей идеал всех наук, к которому каждая из них приближается своим путём» [Exner, 1843: 40]. Причём, опять же вопреки Тренделенбургу, он считает, что Лейбниц имеет в виду именно логику как формальное знание: «по мнению Лейбница, благополучие науки покоится в заботливом внимании к логике в формальном смысле слова» [Exner, 1843: 39]. Элементы исчисления, удовлетворяющего этим требованиям, уже наблюдаются в ряде частных наук. Развитие же этого подхода в логике возможно двояким образом: во-первых, путём прямого применения методов математического исчисления. Во-вторых, путём создания собственно логического исчисления, которое не является прямым применением математической техники к логическому материалу. Первый и единственный известный Экснеру существенный шаг в этом направлении сделал не кто иной, как Больцано, предложивший метод вариации представлений.

Циммерман в своей рецензии на статью Экснера солидаризуется с его основными тезисами. Обсуждая идею установления простейших основных понятий исчисления, он приходит к интереснейшему выводу, что в центре внимания философии должно быть не установление самих категорий в духе Аристотеля, Канта или Гегеля, но те средства, посредством которых достигается отчетливое знание о составе и структуре понятий. Им соответствуют такие языковые средства, которые никогда не включаются в число категорий – это частицы, союзы и иные служебные слова. «Без слова «и» не было бы возможно соединение двух понятий. В слове «хотя», говорит Жан-Поль, скрывается целая философия» [Zimmermann, 1846: 796]. Остаётся только сожалеть, что эта прорывная мысль, обнародованная всего за год до появления эпохальных работ Буля и Де Моргана, не получила продолжения.

Кроме того, Циммерман более решительно ассоциирует проект Лейбница с построением общей теории науки, понимаемой в полном согласии с учением Больцано. Так, оценивая перспективы создания научного исчисления, он пишет: «Возможно, решение этой задачи стало бы ближе, если бы логика рассматривалась не просто как учение о мышлении, но скорее как искусство, которое делит всю область знания на отдельные науки и излагает их в соответствующих учебниках, т.е. как учение о науке» [Zimmermann, 1846: 798].

Впоследствии Циммерман стал автором двух разных изданий учебника «Формальная логика», по которым долгое время велось преподавание во всех Австрийских гимназиях. Первое издание (1853) настолько добросовестно и пространно воспроизводило многие положения учения Больцано, что автор даже заслужил обвинения в плагиате. Второе издание (1860) отражает существенный сдвиг взглядов Циммермана. Здесь он описывает научное знание как совокупность «правильных и значимых (*giltigen*)» понятий, относящихся к той или иной предметной области. Мало того, правильностью и значимостью должны отличаться также связи и соединения этих понятий, их упорядочение. Все эти потребности диктуют необходимость разработки специальной дисциплины, которая должна обеспечить способность системы понятий выступать в роли носителя научного знания: «Такая наука, которая основана на понятиях как таковых … есть логика или учение о науке» [Zimmermann, 1869: 13]. Каждая частная наука имеет свою прикладную логику, обусловленную особенностями изучаемых в ней предметов, но все они сходятся к единой всеобщей логике, которая должна обеспечить единство научных методов и полное упорядочение научного знания.

Очень известный и влиятельный при жизни философ А.Риль, чьи труды активно переводились на многие языки, включая русский – выпускник Грацского университета, который в гимназии изучал логику по учебнику Циммермана. Поэтому не удивительны его мнения о предмете и природе логического знания. В самом деле, он считает, что «Форма науки сама составляет предмет особой науки, и эта наука — логика», а «законы мышления в смысле логики — это законы мыслимого, предметного вообще, и постольку логика есть наука о простейших отношениях объектов мышления» [Риль, 2006: 88-89].

Остаётся добавить, что, будучи в течение многих лет профессором философии в Венском университете, Циммерман фактически стал своего рода проводником идей Больцано в школе Ф.Брентано. Показательно замечание Э.Гуссерля, встречающееся в начале его диссертации: «Новая логика, в отличие от старой, понимает себя как практическую дисциплину (искусство правильного суждения) и стремится к общей теории методов науки как к одной из своих главных целей» [Husserl, 1887: 4]. Гуссерль, впервые столкнувшийся с этим в период своей Венской стажировки, по сути, отождествляет логику Нового Времени только с одним из её ответвлений – Австрийским. Тем не менее, благодаря Гуссерлю Австрийский логический стиль прорвался за границы Дунайской монархии и оказал огромное, хотя и не всегда осознаваемое влияние на многие повороты, случившиеся в логике и философии в первые десятилетия двадцатого столетия.

Литература

1. Больцано Б. Учение о науке. СПб: Наука, 2003. – 520 стр.

2. Риль А. Логика и теория познания // Философия в систематическом изложении В.Дильтея, А.Риля, В.Оствальда, В.Вундта. М.: Территория будущего, 2006, с.85-116.
3. Bolzano B. Wissenschaftslehre. Sulzbach: Seidelschen Buchhandlung, 1837. – 4 Bde.
4. Exner F. Über Leibnitz'ens Universal-Wissenschaft. Prag, 1843. – 46 S.
5. Husserl E. Über den Begriff der Zahl: psychologische Analysen. [Habilitationsschrift.] Halle a. S.: Heynemann'sche Buchdruckerei (F. Beyer), 1887. – 64 S.
6. Zimmermann R. Besprechung: Exner, F. Über Leibnitz'ens Universal-Wissenschaft // Österreichische Blätter für Literatur und Kunst, dritter Jahrgang, Nr.102, Wien, 25 August 1846, S.794-798.
7. Zimmermann R. Philosophische Propädeutik. 2 aufl., Wien: Wilhelm Braumüller, 1860. – 417 s.

ЛОГИКА ОБОБЩЕННЫХ ИСТИННОСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ

Дмитрий Владимирович Зайцев
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

В выступлении я рассмотрю перспективы применения проекта обобщенных истинностных значений к логике квантовой вычислимости. На примере четырехзначной логики Данна-Белнапа будут охарактеризованы логики обобщенных истинностных значений. Далее я рассмотрю эволюцию квантовой логики с акцентом на понятии квантовой вычислимости. В основной части доклада будут предложены различные варианты логической экспликации квантовой вычислимости.

Ключевые слова: обобщенные истинностные значения, квантовая вычислимость, квантовая логика, многозначная логика.

LOGIC OF GENARALIZED TRUTH VALUES FOR QUANTUM COMPUTATION

Dmitry V. Zaitsev
Lomonosov Moscow State University
E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

In my talk, I am going to delineate prospects for application of Generalized Truth Values project to logic of quantum computation. In so doing, I will first outline the characteristic features of logics of generalized truth values with useful four-valued logic of M.Dunn and N.Belnapp as a most telling example. Secondly, I will provide a brief overview of quantum logic with the focus on quantum computation. In the final part, I plan to consider several possible directions for, and intermediate results in application of generalized truth values approach to quantum computation.

Keywords: generalized truth values, quantum computation, quantum logic, many-valued logic.

Логики обобщенных истинностных значений – это сравнительно молодой подход к семантической трактовке многозначных логик, восходящий к ранним работам М.Данна и Н.Белнапа 60-70х гг прошлого века, но получивший активное развитие лишь в начале нынешнего века. Впервые подобным образом была построена так называемая «полезная четырехзначная логика» для формализации первоуровневого релевантного следования (FDE). Отличительные черты подхода состоят в следующем:

1. Истинностные значения трактуются не как атомарные логические объекты, а как комплексные сущности, состоящие из различных компонент. При этом само значение представляет собой либо элемент множества-степени от множества соответствующих базовых значений, либо элемент множества, полученного как результат декартовой степени множества базовых значений.

2. Это приводит к обобщению функции оценки, понимаемой как отображение множества формул в множество обобщенных истинностных значений.

3. Предпринятые обобщения позволяют ввести различные виды отношений типа следования. Это отношения могут быть заданы как через сохранность тех или иных компонент обобщенного значения, так и через отношения порядка на соответствующей алгебраической структуре, обычно представляющей собой мультирешетку.

Согласно оценке авторов [Dunn et al, 2013], сегодня квантовая логика переживает третий этап развития. Первый этап был связан с разработкой алгебраического подхода, начало которому положила известная статья Г. Бирхофа и Дж. Фон Неймана 1936 года. В 50-80е гг прошлого века квантовая логика прошла второй этап, который характеризовался стремлением представить новую логику как одну из неклассических логик. Современный этап развития квантовой логики во многом инспирирован перспективой квантовых вычислений и (пока больше теоретической) задачей создания квантового компьютера. Следую известному представлению Й. ван Бентема о современной логике как теории переработки и обмена информацией между интеллектуальными агентами, следует отметить, что квантовая трактовка информации представляет более богатые возможности как для представления традиционных логических процедур (например, рассуждений, предполагающих переход от информации, зафиксированной в посылках, к информации заключения), так и для рассмотрения новых, специфических квантовых преобразований информации, соответствующих квантовым вычислениям.

Единицей представления квантовой информации является кубит (от английского qubit, то есть quantum bit). Кроме двух «классических» состояний (|1> и |0>), кубит может находиться в бесконечно большом числе состояний, представляющих собой суперпозиции базовых состояний – a |1> + b |0>, где a и b – комплексные числа, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 = 1$. Производя измерение, исследователь каждый раз обнаруживает кубит в одном из собственных состояний |1> и |0> с вероятностью a^2 или b^2, соответственно. Состояние кубита удобно представить как вектор |ψ> = a |0> + b |1> в двухмерном гильбертовом пространстве C^2. Система кубитов представляет квантовый регистр. По аналогии с классическим случаем для обработки квантовой информации используются квантовые логические операции – квантовые вентили, среди которых различают «полуклассические» и «подлинно квантовые». Полуклассические вентили представляют собой обобщение стандартных логических операций конъюнкции, отрицания и т.п., которые при применении к классическим состояниям возвращают классические состояния. Например, вентиль для отрицания меняет местами коэффициенты истинности и ложности: Not |ψ> = b |0> + a |1>. Подлинно квантовые операции описывают трансформацию классических состояний в их суперпозиции. К последним относится в частности «квадратный корень из отрицания» (SRN). Важная особенность этих операций состоит в том, что для них находятся естественные физические реализации, но при этом отсутствуют стандартные логические «напарники». Именно это позволило авторам работы [Deutsch et al, 2000] поставить перед логиками актуальную задачу – предложить логический аналог операции SRN.

Для семантического построения логики квантовой вычислимости естественным образом вводится понятие вероятностного значения, с интуитивной точки зрения представляющего вероятность того, что находящийся в суперпозиции кубит «перейдет» в классическое состояние. Далее приписывание вероятностного значения распространяется на сложные формулы (образованные с помощью конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и SRN в том числе). Законом оказывается формула, принимающая в любой реализации вероятностное значение 1, а логическое следование определяется через отношение частичного порядка между вероятностными значениями посылок и заключения.

Проект обобщенных истинностных значений представляет широкие возможности для моделирования квантовой логики. В выступлении будут обсуждаться некоторые из них.

Алгебраическая структура, лежащая в основе алгебраических семантик для ряда логик обобщенных истинностных значений, родственных FDE, представляет собой полурешетку. Для имитации отсутствующей грани используется специфические алгебраические постулаты, позволяющие в частности получить ортомодулярность как производной свойство. В результате в качестве «побочного продукта» получается алгебраическая недистрибутивная структура, основанная на ортомодулярной полурешетке, которую можно использовать для моделирования квантовой логики в духе исследований на грани первого и второго этапов развития квантовой логики.

Представление суперпозиции базовых состояний как обобщенного истинностного значения может быть использовано для моделирования обратимых логических операций, в том числе и подлинно квантовых. Некоторые перспективы такого подхода представлены в работе [Grigoriev, 2017: 70–71]. Еще одно направление использования парадигмы обобщенных истинностных значений для представления квантовой вычислимости связано с комплексным характером числовых коэффициентов в представлении суперпозиции состояний. Любое комплексное число состоит из действительной и мнимой частей. Изменив соответствующим образом базис состояний, можно представить вектор $|\psi>$ как $a_0 |F> + a_1 |FU> + b_0 |T> + b_1 |TU>$, где a_0 и b_0 вещественные составляющие комплексных коэффициентов по истинности и ложности, соответственно, а a_1 и b_1 характеризуют мнимые части этих коэффициентов. Это позволяет предложить естественную трактовку для операции SRN как минимальный «сдвиг» или «поворот». Двойное применение такого поворота дает полноценное отрицание:

$$\text{SRN } |\psi> = b_1 |F> + a_0 |FU> + a_1 |T> + b_0 |TU>;$$
$$\text{SRN SRN } |\psi> = b_0 |F> + b_1 |FU> + a_0 |T> + a_1 |TU> = \text{Not } |\psi>.$$

Кроме того, для характеристики разных типов следования удобно использовать принятую в логике трактовку логической вероятности, условной вероятности и критерии типа позитивной релевантности.

Литература

1. Deutsch D., Ekert A., and Lupacchini R. Machines, logic and quantum physics // Bulletin of Symbolic Logic. 2000. №3. pp. 265-283.
2. Dunn J.M., Moss L.S., Wang Z. Editors' introduction: the third life of quantum logic: quantum logic inspired by quantum computing // Journal of Philosophical Logic/ 2013. №42(3). pp. 443–459.
3. Grigoriev O. M. Generalized truth values and quantum logic // Герасимова И. А. , Григорьев О. М. , Зайцев Д. В. (ред). Десятые Смирновские чтения по логике. Материалы Международной научной конференции. 15-17 июня 2017 года/ Москва, 2017. С. 70–71.

О ПОНЯТИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Елена Борисовна Кузина
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: elenakuzina@yandex.ru

Термин "доказательство" используется для обозначения целого спектра интеллектуальных процедур, направленных на установление истины, обоснование, объяснение некоторого высказывания и убеждение других людей в его адекватности. В математике понятие доказательства представляется центральным, но очень нечетким. Существует несколько точек зрения на сущность математического доказательства, его цели, критерии и идеалы. Доказательство в других науках рассматривается как процесс проверки и подтверждения некоторых положений (гипотез) с целью поиска и обоснования истины. Доказательство здесь явно направлено на убеждение.

Ключевые слова: истина, строгость, убедительность, подтверждающие свидетельства, историческая обусловленность.

ON THE CONCEPT OF PROOF

Elena Borisovna Kuzina
Lomonosov Moscow State University
E-mail: elenakuzina@yandex.ru

The term "proof" is used to refer to the whole spectrum of intellectual procedures aimed at establishing the truth, the justification, the explanation of a certain proposition and convincing other people it is adequate. In mathematics the concept of proof appears to be central, but is very fuzzy. There are several points of view on the essence of mathematical proof, its objectives, criteria and ideals. Proof in other Sciences is seen as the process of verification and confirmation of some provisions with the aim of finding or substantiation of the truth. The proof is clearly aimed at persuasion here.
Keywords: truth, rigor, credibility, corroborating evidence, historical causality.

Выступление будет посвящено обзору некоторых наиболее распространенных толкований термина «доказательство».

(1) Самое широкое понятие доказательства дано в Философской энциклопедии, где доказательство определяется как «процесс установления объективной истины посредством практических и теоретических действий и средств» [ФЭ, 1962: 42].

(2) В практических областях, а также многих областях естествознания доказательством называют обоснование истинности гипотезы при помощи эмпирических данных, фактов, свидетельств. При этом термином «доказательство» обозначают и сами эти свидетельства. Такой смысл имеет термин «доказательство» в юриспруденции, истории, биологии и многих других науках.

(3) В традиционном логическом учении о доказательстве им называют процесс или метод полного обоснования истинности некоторого высказывания или системы высказываний посредством рассуждения с привлечением других высказываний, истинность которых установлена.

(4) Самое узкое понимание доказательства – в формальных теориях, где доказательством называют последовательность утверждений, каждое из которых является либо исходным постулатом данной теории, либо получается из них по принятым в ней правилам рассуждения.

(5) Наконец, доказательством называют вербальную процедуру, призванную убедить и убеждающую адресата в истинности некоторого положения настолько, что он принимает это положение и готов убеждать других с помощью той же процедуры.

Эти пять понятий, связываемых с термином «доказательство», представляют три принципиально различных подхода к доказательству: во-первых, как поиску и обоснованию истины; во-вторых, как принятой в профессиональном или ином сообществе интеллектуальной игре; в-третьих, как некоторому виду рационально-психологического воздействия на адресата.

В любом из приведенных понятий доказательства оно явным или неявным образом связывается с понятием истины. Различные понимания доказательства отражают различные концепции истины: классическую, когерентную и конвенциональную. Классическое понимание истины, как интенционального согласия мысли с реальностью, существующей независимо от нашего сознания, отражается только в самом общем, философском определении доказательства.

При когерентном понимании истины как согласованности и непротиворечивости предложение называется истинным, если оно является элементом логически согласованной, когерентной, системы. Эта концепция истины находит свое выражение во всех тех определениях доказательства, где доказательство понимается как обоснование истинности высказывания посредством других высказываний, как установление логических связей между ним и другими высказываниями. Доказательство в этом смысле является, по существу, встраиванием обосновываемого утверждения в принятую систему знания.

Конвенциональная концепция истины считает истинным то знание, относительно которого достигнуто согласие, следовательно, доказательство нужно понимать как процесс склонения к согласию, к принятию адресатом предлагаемого утверждения, т. е. как процесс убеждения. Таким образом, последнее из приведенных толкований термина «доказательство» в определенной степени отражает конвенциональную трактовку истины.

По мнению подавляющего большинства людей, эталоном являются математические доказательства. Понятие доказательства не просто играет в математике центральную роль, оно, как представляется, выражает суть математики.

Но, что такое математическое доказательство, тоже не вполне ясно, и на этот счет существует также разные точки зрения. Можно представить их, по крайней мере, четыре. В них по-разному видятся цели математического доказательства, в них также отражены различные понимания математической истины. Математическое доказательство трактуется как:

1. установление непреложной несомненной истинности математического утверждения;
2. разъяснение смысла математического утверждения и сведение его к очевидности;
3. доказательство – языковая игра по установленным правилам;
4. способ убеждения других, прежде всего математического сообщества, в истинности математического утверждения.

I. Сторонники той позиции, что доказательство обосновывает истинность в классическом смысле, предполагают существование некой математической реальности, которая может быть познана. Соответствие утверждения этой реальности и обосновывается посредством доказательства. Математическое доказательство, согласно этой точке зрения, основывается на некоторых аподиктических очевидностях, неизменных и одинаковых для всех времен, всех культур, всех языков. И поэтому оно, будучи достигнутым, никогда и никем не может быть поставлено под сомнение. «Подавляющая часть принятых математиками доказательств, – пишет В.Я. Перминов, – обладает полной надежностью, которая не может быть поколеблена никакими изменениями в данной математической теории и в математике вообще». Надежность математического доказательства абсолютна, но его строгость всегда относительна. Ее критерии исторически изменчивы, каждая эпоха имеет свои критерии строгости, свои требования к логике доказательства [Перминов, 2013: 76].

II. Вторая точка зрения – что цель доказательства состоит в разъяснении смысла математического утверждения, в достижении более глубокого и полного понимания предмета – также предполагает некоторые очевидности как основание доказательства. Однако достижение ясности математических понятий и утверждений часто связано с принятием в качестве очевидных таких положений, которые известны из опыта, т.е. ассерторических. Для придания строгости интуитивным представлениям их пытаются свести к формальным выражениям, что делает доказательство не только более строгим, но и более сложным, а вместе с тем уже не таким интуитивно ясным [Гутнер, 2013: 143-144].

III. Трактовка математического доказательства как языковой игры восходит к программе Гильберта с ее идеей найти для любой отдельно взятой области математики набор аксиом и правил вывода, который был бы достаточно полным для всех возможных в данной области корректных математических рассуждений. Стремление к строгости математического доказательства, к освобождению его от опытных, ассерторических, очевидностей, реализующееся в формализации всех оснований доказательства, превращает его в языковую игру по заданным правилам, приближает к формальным доказательствам в логических исчислениях. Любая формализация исходных интуиций является конвенциональной, она должна приниматься научным сообществом как адекватная. Научное сообщество считает математическое утверждение доказанным, если оно основывается на принятых формализованных постулатах и построено по принятым правилам.

IV. Понимание математического доказательства как способа убедить себя и других членов профессионального сообщества в истинности предлагаемого утверждения преобладает среди философов математики. Суть математического доказательства, с этой точки зрения, состоит в такой его убедительности, что человек, воспринявший его, готов и может убеждать других. Доказательство – это форма апелляции к научному сообществу, и поэтому напрямую зависит от принятых в этом сообществе норм рассуждений, оценок и мнений [Бажанов, 2013: 50]. Доказательство в математике по существу ничем не отличается от доказательства в других науках – его задача убеждать, просто в математике порог убедительности доказательства выше, чем в других науках или практических областях. Как пишет В.А. Успенский, нематематические доказательства претендуют на убеждение в том, что доказываемое утверждение имеет место с очень высокой вероятностью, а предположение, что это не так, невероятно. Математические же доказательства претендуют на то, чтобы убедить, что доказываемое утверждение имеет место с необходимостью, а предположение, что это не так, невозможно [Успенский, 2012: 6].

Доказательство во всех других областях науки и практической деятельности состоит преимущественно в приведении доводов или «свидетельств» в пользу доказываемого утверждения, а не в построении рассуждения. Положительные результаты проверки, постепенно накапливаясь, снижают вероятность ошибочности гипотезы. Если суммарная "убедительность" собранных свидетельств в пользу обосновываемого положения вырастает настолько, что у компетентных ученых просто не остается причин сомневаться в его справедливости, его начинают рассматривать как доказанную истину [Доказательство эволюции]. Демонстрирующее рассуждение, которое в математике и логике и является собственно доказательством, в естествознании, так же как в истории или юриспруденции, не играет решающей или даже самостоятельной роли.

Решающую роль играет интуитивная ясность, наглядность доказательств, что непосредственно связано, на мой взгляд, с убедительностью. Сила убедительности каждого отдельного «свидетельства в пользу» определяется тем, насколько оно достоверно и конкретно. Внутреннее убеждение в истинности доказанного утверждения, о котором говорят в юриспруденции, состоит в осознании невозможности противоположного или какого-то иного мнения по обсуждаемому вопросу.

Мы привычно оперируем неоднозначным и весьма смутным термином «доказательство» так, как будто имеется строго определенное понятие доказательства, в котором ясно выражен идеал рационального обоснования. Но такого понятия, общего для любой эпохи и любой области знания, нет. Доказательством всегда считают то, что убеждает компетентного адресата.

Литература

1. Философская энциклопедия, т.2. М., 1962.
2. Перминов В.Я. Надежность и строгость математического доказательства. – Доказательство. Труды московского семинара по философии математики. М., 2013.
3. Гутнер Г.Б. Доказательство: путь к очевидности или языковая игра. – Доказательство. Труды московского семинара по философии математики. М. 2013.
4. Бажанов В.А. Математическое доказательство в социальном контексте. – Доказательство. Труды московского семинара по философии математики. М., 2013.
5. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. М., 2012.
6. См. Доказательства эволюции. Под ред. А.В. Маркова. - http://www.evolbiol.ru/evidence.htm

ДИХОТОМИЯ DE RE – DE DICTO И АПОДИКТИЧЕСКАЯ СИЛЛОГИСТИКА

Владимир Ильич Маркин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: vladimirmarkin@mail.ru

В средневековой логике было проведено различение модальностей de dicto и de re, было установлено, что они обладают различными дедуктивными свойствами. В аподиктической силлогистике Аристотеля принимаются как выводы, справедливые только при de dicto-интерпретации модальностей (напр., i□-обращение), так и выводы, правомерные только при de re-интерпретации (напр., модус Ba□rbara□). Лукасевич считал, что и другие смешанные модусы (напр., Barba□ra□) также являются корректными. В докладе формулируются два перевода аподиктических и ассерторических высказываний силлогистик Аристотеля и Лукасевича в одну из систем кванторной модальной логики.

Ключевые слова: модальности de dicto и de re, модальная силлогистика, кванторная модальная логика.

DE RE – DE DICTO DICHOTOMY AND APODEICTIC SYLLOGISTIC

Vladimir I. Markin
Lomonosov Moscow State University
E-mail: vladimirmarkin@mail.ru

In medieval logic there was made a distinction between de dicto and de re modalities. It was demonstrated that propositions with de dicto and de re modalities have different deductive characteristics. Aristotle’s apodeictic syllogistic contains both: reasonings valid only under de dicto-interpetation of modalities (e.g. the law of i□-

conversion) and reasonings valid only under de re-interpretation (e.g. modus Ba□rbara□). Łukasiewicz considered other mixed modi (e.g. Barba□ra□) also correct. In the paper we formulate two translations of apodeictic and assertoric propositions of Aristotle's and Łukasiewicz' syllogistics into one of the quantified modal logics with identity.

Keywords: de dicto and de re modalities, modal syllogistic, quantified modal logic.

В средневековой логике было произведено четкое различение двух типов модальностей – модальностей *de dicto* (о речи, о сказанном) и *de re* (о вещи). Модальности *de dicto* квалифицируют ситуацию в целом, образуют из менее сложного высказывания более сложное. Модальности *de re* квалифицируют связь признака с предметом и представляют собой особого типа предицирующие связки.

Было установлено, что высказывания с модальностями *de dicto* и *de re* обладают различными логическими дедуктивными свойствами: некоторые утверждения и рассуждения при *de dicto*-интерпретации входящих в них модальностей являются логически истинными и логически корректными, а при *de re*-интерпретации не являются таковыми, и наоборот. Например, принцип силлогистического тождества $Sa^{\square}S$ при трактовке необходимости как модальности *de dicto* («Необходимо, что всякий *S* есть *S*») имеет статус логического закона, но при трактовке их как *de re* («*S* необходимо присуще всякому *S*») лишен этого статуса. Обращение аподиктических высказываний (например, $Si^{\square}P \vdash Pi^{\square}S$) при их *de dicto*-интерпретации представляют собой корректные способы рассуждений, но при *de re*-интерпретации они логически некорректны. Так называемые смешанные модусы силлогизмов первой фигуры с большей аподиктической и меньшей ассерторической посылками и аподиктическим заключением (например, $Ma^{\square}P$, $SaM \vdash Sa^{\square}P$) неправильны при трактовке модальностей как *de dicto*, но правильны при их трактовке как *de re*.

Атрибутивные высказывания с модальностями *de dicto* и *de re* могут быть достаточно адекватно выражены в языке современных логических теорий, а именно, в языке кванторных модальных логик. Модальность *de dicto* помещается перед переводом в кванторый язык соответствующего ассерторического высказывания, а модальность *de re* – внутрь области действия кванторного комплекса перед атомарной формулой, представляющей предикат атрибутивного высказывания. Например, высказывание вида $Sa^{\square}P$ при понимании необходимости как *de dicto* («Необходимо, что всякий *S* есть *P*») может быть выражено формулой $\square\forall x(Sx \supset Px)$, а в случае *de re*-трактовки («*P* необходимо присуще всякому *S*») формулой $\forall x(Sx \supset \square Px)$. В переводах модальных атрибутивных высказываний в язык кванторной модальной логики может также быть задействован тот или иной «экзистенциальный импорт», выражающий принятие некоторой конвенции об условиях истинности и ложности высказываний с пустыми субъектами и (или) предикатами.

Таким образом, формальная реконструкция средневековой аподиктической силлогистики, основанной на различении модальностей *de dicto* и *de re*, с использованием современного логического аппарата не представляет особой сложности. Трудности и проблемы возникают, когда мы пытаемся дать адекватную современную интерпретацию другим теориям аподиктической силлогистики, прежде всего, исторически первой такой теории – аподиктической силлогистике Аристотеля.

Анализ аристотелевских текстов [Аристотель, 1978] указывает на то, что модальности в его силлогистике понимались в духе *de re*, а не *de dicto*. Сам способ языкового выражения модального суждения демонстрирует, что модальность оценивает здесь характер присущности или неприсущности свойства предмету, а принятие «смешанных» модусов (которые при *de dicto*-интерпретации должны быть отвергнуты) делает эту точку зрения еще более обоснованной. Однако, Аристотель считает корректными и правила обращения аподиктических высказываний в аподиктические. А это, согласно учению схоластов, никак не соответствует *de re*-интерпретации модальности «необходимо». Указанные обстоятельства дали основания античным и средневековым комментаторам Аристотеля заявить о непоследовательности и даже ошибочности аристотелевской модальной силлогистики.

Тем не менее, изощренный аппарат современной модальной логики может быть использован для «реабилитации» аподиктического фрагмента силлогистики Аристотеля. Достаточно найти такой перевод ассерторических и аподиктических высказываний в язык кванторной модальной логики, при котором принимаемые Аристотелем дедуктивные принципы сохраняли бы свою корректность в некоторой подходящей современной логической системе, а отвергаемые им принципы оставались бы некорректными в ней.

Рассмотрим следующий перевод высказываний аподиктической силлогистики в язык модальной логики с равенством:

$SaP \to \forall x(Sx \supset Px) \wedge \exists xSx$,
$SeP \to \forall x(Sx \supset \neg Px)$,
$SiP \to \exists x(Sx \wedge Px)$,
$SoP \to \exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists xSx$,
$Sa^{\square}P \to \forall x(Sx \supset \square Px) \wedge \exists xSx$,
$Se^{\square}P \to \forall x(Sx \supset \forall y(Py \supset \square\neg(x=y))) \wedge \exists xSx \wedge \exists xPx$,
$Si^{\square}P \to \exists x(Sx \wedge \square Px) \vee \exists x(Px \wedge \square Sx)$,
$So^{\square}P \to \exists x(Sx \wedge \forall y(Py \supset \square\neg(x=y))) \wedge \exists xPx$.

Модальное исчисление, обеспечивающее корректность аналогов принимаемых Аристотелем принципов и некорректность аналогов отвергаемых им принципов, должно удовлетворять следующим условиям:

(а) в нем должны быть доказуемы все законы стандартной теории квантификации;

(б) формулы видов $\square A \supset A$, $\square(\alpha=\alpha)$ и $\square(\alpha=\beta) \supset \square(\beta=\alpha)$ должны быть его теоремами;

(в) в нем не должна быть доказуема формула $(\alpha=\beta) \supset \square(\alpha=\beta)$, утверждающая необходимость всякого равенства.

Указанным требованиям отвечает, например, вариант модальной системы **T** – исчисление $\mathbf{T}^{\text{П-}}$ Г.Е. Минца [Минц, 1974]. Оно содержит помимо аксиом и правил классического одноместного исчисления предикатов, правило Геделя ($\vdash A \;\Rightarrow\; \vdash\square A$) и схемы аксиом:

1. $\square(A \supset B) \supset (\square A \supset \square B)$, 2. $\square A \supset A$, 3. $\alpha=\alpha$, 4. $(\alpha=\beta) \supset (A\alpha \supset A\beta)$.

На последнюю схему аксиом накладывается ограничение: заменяемые свободные вхождения α в A не должны находится в области действия модального оператора.

В исчислении $\mathbf{T}^{\text{П-}}$ могут быть обоснованы переводы всех принципов, принимаемых в аподиктической силлогистике Аристотеля: законов перехода от аподиктических высказываний к ассерторическим с тем же количеством и качеством, законы подчинения и обращения, модусы с обеими аподиктическими, обеими ассерторическими посылками и «смешанные» модусы. Что касается отбрасываемых Аристотелем принципов, то в данном исчислении корректны переводы лишь двух модусов – $Bo^{\square}cardo^{\square}$ и $Baro^{\square}co^{\square}$. Однако, как показал Л.И. Мчедлишвили [Мчедлишвили, 1985], эти модусы можно обосновать с использованием правила $o^{\square}$-эктезиса тем же самым способом, каким сам Аристотель доказывает модусы $Bo^{\square}ca^{\square}rdo^{\square}$ и $Ba^{\square}ro^{\square}co^{\square}$. Поэтому предложенный перевод можно считать вполне адекватным оригинальной системе аристотелевской аподиктической силлогистики.

Выдающимся польским логиком Я. Лукасевичем [Лукасевич, 1959] был осуществлен критический анализ дедуктивных принципов как аристотелевского, так и схоластического варианта аподиктической силлогистики. По мнению Лукасевича, обе эти теории ошибочны в оценке логического статуса «смешанных» аподиктических модусов силлогизма. Каждый подобный модус является, согласно Лукасевичу, корректным (в том числе и модусы первой фигуры с меньшей аподиктической, большей ассерторической посылками и аподиктическим заключением). Обоснование данного тезиса осуществляется с использованием законов построенной им системы позитивной ассерторической силлогистики и законов четырехзначной логики, полученной перемножением на себя классической двузначной матрицы, с последующим определением модальных операторов. При этом аподиктические высказывания трактуются как результат присоединения к ассерторическим внешней модальности, т.е. *de dicto*. Однако используемая Лукасевичем система модальной логики, с современной точки зрения, не может быть оценена как приемлемая для экспликации модальностей *de dicto*. Например, законом данной системы, применяемым для обоснования корректности смешанных аподиктических модусов, является формула $(A \supset B) \supset (\square A \supset \square B)$, которая недоказуема в нормальных модальных исчислениях. Если же поменять пропозициональную модальную часть аподиктической силлогистики, добавив к системе ассерторической силлогистики постулаты нормального модального исчисления, то нельзя будет обосновать ни один смешанный аподиктический модус. Аподиктическое заключение в силлогизмах в этом случае будет правомерным выводить, как и в традиционной силлогистике, только из двух аподиктических посылок.

Для обоснования аподиктической силлогистики Лукасевича необходимо, на мой взгляд, найти такую интерпретацию всех формул типов SyP и $Sy^{\Box}P$ в рамках стандартных кванторных систем модальной логики, при которой принимаемые Лукасевичем силлогистические принципы оказываются правомерными, а отвергаемые им положения неправомерными.

Данным требованиям удовлетворяет следующий перевод:

$$SaP \to \forall x(Sx \supset Px) \wedge (\exists xSx \vee \neg\exists xPx),$$
$$SeP \to \forall x(Sx \supset \neg Px) \wedge (\exists xSx \vee \exists xPx),$$
$$SiP \to \exists x(Sx \wedge Px) \vee (\neg\exists xSx \wedge \neg\exists xPx),$$
$$SoP \to \exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee (\neg\exists xSx \wedge \exists xPx),$$
$$Sa^{\Box}P \to \forall x(Sx \supset \forall y(\neg Py \supset \Box\neg(x{=}y))) \wedge \exists xSx,$$
$$Se^{\Box}P \to \forall x(Sx \supset \forall y(Py \supset \Box\neg(x{=}y))) \wedge (\exists xSx \vee \exists xPx),$$
$$Si^{\Box}P \to \exists x\exists y(Sx \wedge Py \wedge \Box(x{=}y)),$$
$$So^{\Box}P \to \exists x\exists y(Sx \wedge \neg Py \,\&\, \Box(x{=}y)) \vee (\neg\exists xSx \wedge \exists xPx).$$

Интерпретация ассерторических высказываний равносильна переводу В.А. Бочарова [Бочаров, 1984: с. 95], погружающему ассерторическую силлогистику Лукасевича в исчисление предикатов. В качестве модального исчисления, в которое осуществляется перевод силлогистических формул, можно взять то же самое исчисление $\mathbf{T}^{\mathbf{П}\text{-}}$ Г.Е. Минца [4].

Литература

1. Аристотель. Первая Аналитика // Аристотель. Сочинения в четырех томах. Том 2. М.: Мысль, 1978. С. 117-254.
2. Бочаров В.А. Аристотель и традиционная логика. М.: Издательство Московского университета, 1984. - 136 с.
3. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. - 312 с.
4. Минц Г.Е. Системы Льюиса и система Т // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 422-509.
5. Мчедлишвили Л.И. Аподиктическая силлогистика Аристотеля и отношение «обозначает суть бытия» // Логика Аристотеля (Материалы симпозиума). Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1985. С. 154-167.

ЧЕМУ УЧАТ ДИАГРАММЫ? РАССУЖДЕНИЯ И ВОСПРИЯТИЯ

Ангелина Сергеевна Боброва

Российский государственный гуманитарный университет

E-mail: angelina.bobrova@gmail.com

В докладе речь пойдет об экзистенциальных графах (ключевом элементе теории экзистенциальных графов Ч. Пирса – теории ЭГ), которые предлагают графическое представление о правильном рассуждении и дедукции. Теория ЭГ позволяет с несколько иной стороны взглянуть на задачи логики и ее предназначение: экзистенциальные графы отражают мысли и показывают, как эти мысли должны соединяться друг с другом. Иконичность представления мыслей подчёркивает роль пространственной интуиции и наглядного воображения. Все это вынуждает задуматься над проблемами обмена информацией и открытия нового знания. По ходу доклада будет показано, почему построение диаграмм и их восприятие может оказаться полезным для студентов, знакомящихся с основами логики.

Ключевые слова: теория экзистенциальных графов, диаграммы, Пирс, иконичность, логика и информация.

WHAT DO DIAGRAMS TEACH? REASONING AND PERCEPTION

Angelina S. Bobrova
Russian State University for the Humanities
E-mail: angelina.bobrova@gmail.com

The talk deals with existential graphs (the core elements of Peirce's Existential Graph Theory – EGs Theory) that diagrammatically demonstrate the ideas of valid reasoning and deduction. I claim that EGs Theory offers a curious view of logic aims and its essence. Existential graphs represent thoughts; they show how the thoughts should be connected with each other. The iconicity of thoughts representation stresses the role of spatial intuition and visual imagination. It turns to the problems of information flow and new knowledge discovery. I will argue that diagrams construction and their perception can develop students' skills in logic.

Keywords: existential graph theory, diagrams, Peirce, iconicity, logic and information.

Сегодня теория экзистенциальных графов Ч. Пирса или теория графов хоть и стоит несколько в стороне от магистральной линии развития логики, определяемой вектором Фреге-Рассела, уже все же не выглядит таким изгоем, каким она была на протяжении прошлого столетия. Диаграмматическая теория графов – самобытная логическая теория, которую можно рассматривать как своеобразное развитие линии алгебры логики. Ее базовой единицей является граф (граф следует понимать как диаграмму в духе Л. Эйлера или Дж. Венна). Максимальная наглядность графов делает их удобными при использовании в педагогических целях [May, 2017; Sowa, 2001]. Однако теорию графов можно рассматривать и как теорию, пытающуюся развивать задачи, которые были поставлены перед логикой еще на заре Нового времени. В этом смысле она оказывается очень философичной.

В своем докладе я предлагаю посмотреть на графы через призму вопросов обмена информации и прироста нового знания, что может оказаться весьма продуктивным для современного осмысления природы логического. Над чем позволяет задуматься теория графов?

1. Теория оказывается максимально удобным способом для передачи фундаментальных, согласно Пирсу, положений логики: логика имеет дело с мыслями (но не с мышлением), с отношениями между ними. Говоря современным языком, она тесто связана с процессом распространения и обмена информацией. Мысли передаются с помощью различного рода знаков, в первую очередь знаков-икон [Shin, 2002; **Stjernfelt, 2007**]. Таким образом, Пирс, развивая задачи, поставленные Новым временем, нарушает многолетнюю традицию, состоящую в том, что мысли выразимы только в символах. Это позволяет рассуждать о том, что знание или информация (тонкости их различения в данной ситуации могло опустить) могут быть представлены нелинейным образом, а мысли не обязательно должны быть вербализованы [Hull, 2017].

2. Иконическая природа графов способна прояснить сущность высказываний и даже понятий (самое проблемное звено традиционной логики). Графы имеют четкую структуру и однозначные принципы построения. Они фиксируют отношения, необходимые для логического анализа, но слабо касаются лингвистической стороны высказываний (понятий). Последнее позволяет разводить процессы построения диаграмм и их прочтения.

3. Особенности графов позволяют в несколько ином ракурсе показать дедуктивные шаги от одной формулы к другой, от исходных формул (посылок) к результату (заключению). Переход выглядит не как конечная последовательность формул, а как иконическая трансформация. Такое представление подводит Пирса к важному открытию, которое он называл «методевтика (methodeutic) необходимого рассуждения» [Peirce, 1931–1958: (CP 4.613)]. Речь в данном случае идет о фундаментальном различении: диаграммы передают не только формальную сторону дедукции (signs formaliter), но и ее сущностный или материальный аспект (signs materialiter). Пирс показал узость понимания дедукции как рассуждения, в котором информация заключения содержится в посылках. Эту идею исследователь закрепил в делении дедукции на королларную (corollarian) и теорематическую (theorematic).

4. Трансформация графов регламентирована правилами, однако они оставляют место для

эксперимента, который позволяет выявлять необходимые следствия, заключенные в диаграммах. Это освобождает место для открытия нового знания, для абдукции [Pechlivandis, 2017; Hoffmann, 2010, 2011] и интуиции. Пирс переосмысляет кантовскую дихотомию интуитивного и понятийного знаний. Интуитивное и понятийное оказываются не только зависимыми друг от друга, что имеет место и у Канта, а соединяются воедино: интуиция органично вписывается в процесс рассуждения [Paolucci, 2017], позволяя «необходимому рассуждению собирать информативные истины» [Hookway, 1985; Pietarinen, 2006, 2007; Stjernfelt, 2007]. Правда, в теории графов такое соединение выглядит все же несколько однонаправленно: интуиция вписывается в процедуру рассуждений, но не наоборот. Впрочем, в современных когнитивных теориях возможна и обратная точка зрения: рассуждение вписывается в интуицию. Примером тут может послужить теория Спербера и Мерсье [Sperber, Mercier, 2017] и их аргументативного подхода.

5. Диаграммы – синтаксические структуры, хотя и максимально зависимы от процессов означивания и интерпретации. Прочтение графов оказывается тесно связанным с субъектом: отношения, представленные в графах, регулируются привычками, законами, конвенциями, принимаемыми в той или или иной репрезентационной системе [Peirce, 1931–1958: (CP 4.418)]. Это возвращает к идее диалога [Pietarinen, 2006], показывает, каким образом знание может быть представлено нелинейным образом.

Перечисленные особенности графов в новом ракурсе представляют проблемы обмена информации, открытия нового знания, порождения гипотез (абдукции). Тем самым, они обосновывают когнитивный поворот в логике, о котором говорят в последние годы [Пиетарирен 2014; Бентем, 2011]. Кроме того, эти идеи оказываются полезны и для смежных с логикой дисциплин: философия науки, теория аргументации.

Литература

1. Пиетаринен А-В. Экзистенциальные графы. К вопросу о диаграмматической логике познания// Логико-философские штудии. 2014. Вып. 12. С. 39–64.
2. Бентем ван Й. Логика и рассуждение: много ли значат факты? // Вопросы философии. 2011. Вып. 12. С. 63–77.
3. Hoffmann M.H.G. Diagrams as Scaffolds for Creativity // AAAIWS'10-07 Proceedings of the 7th AAAI Conference on Visual Representations and Reasoning. 2010. P. 42–49. URL: http://aaai.org/ocs/index.php/WS/AAAIW10/paper/view/2027 (дата обращения: 17.08.17).
4. Hoffmann M. H. G. Cognitive conditions of diagrammatic reasoning // Semiotica. 2011. Vol. 186 (1/4). 2011. P. 189–212.
5. Hookway C. Peirce. London: Routledge and Kegan Paul, 1985.
6. Hull K. The iconic Peirce: Geometry, Spatial Intuition, and Visual Imagination// Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic / K.A. Hull, R.K. Atkins (ed.). New York, NY: Routledge, 2017. P. 147–173.
7. May M. Graphs as Images vs. Graphs as Diagrams: a Problem at the Interception of Semiotics and Didactics// Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic / K.A. Hull, R.K. Atkins (ed.). New York, NY: Routledge, 2017. P. 107–118.
8. Paolucci C. Semiotics, Schemata, Diagrams, and Graphs: A New Form of Diagrammatic Kantism by Peirce // Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic / Kathleen A. Hull, Richard Kenneth Atkins (ed.). P. 74–85.
9. Pechlivandis C. A. What Is Behind the Logic of Scientific Discovery? Aristotle and Charles S. Peirce on Imagination // Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic / Kathleen A. Hull, Richard Kenneth Atkins (ed.). P. 132–146.
10. Peirce C.S. Collected Papers. Vols. 1 – 8. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press, 1931–1958. [Цитируется как CP с последующим указанием через точку номера тома и номера параграфа.]
11. Pietarinen A.-V. Getting Closer to Iconic Logic // Computation, Information, Cognition: The Nexus and the Liminal. Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2007. P. 53–74.
12. Pietarinen A.-V. Signs of Logic. Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication. Dordrecht: Springer, 2006.
13. Shin S.-J. The Iconic Logic of Peirce’s Graphs. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2002.

14. Sowa J. Existential Graphs: MS 514 by Charles Sanders Peirce with commentary by John F. Sowa. 2001. [URL] http://users.bestweb.net/~sowa/peirce/ms514.htm (дата обращения: 17.08.17).
15. Sperber D., Mercier H. The Enigma of Reason. Harvard University Press, 2017.
16. Stjernfelt F. Diagrammatology: An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics. Dordrecht: Springer, 2007.

МНОГОЗНАЧНОСТЬ И ТИПОЛОГИЯ ТЕРМИНОВ

Тарас Александрович Шиян
Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет

В статье представляется типология знаков с точки зрения природы знакового отношения и способов реализации референции. По природе знакового отношения знаки можно разделить на «нормальные» (имеющие общественное существование) и «конвенциональные» (знаки, вводимые договоренностями). «Нормальные» знаки бывают «единичными» (имена) и «общими». Знаки «по договоренности» бывают конвенциональными именами и знаками «с оперативной конвенцией» (вводятся как заготовки знаков с целью их доопределения в специальных контекстах). Знаки «с оперативной конвенцией» бывают собственно «переменными», «условными именами» и «параметрами». Различение этих типов знаков позволяет уточнить как сами принципы функционирования логико-математических обозначений, так и историю их изобретения.
Ключевые слова: семиотика, логико-математические обозначения, термин, конвенциональный знак, имя, константа, переменная, параметр, условное имя, референция.

POLYSEMY AND TYPOLOGY OF TERMS

Taras A. Shiyan
St. Tikhon’s orthodox university

The author presents a typology of terms from the point of view of their nature and of their references implementation. The signs can be divided into normal (have public existence) and conventional (signs by agreement, arbitrary signs). Normal terms are “single” (personal names) and “common”. Signs by agreement are “conventional (arbitrary) names” and signs with “the variable convention” (blank signs used for define them in special contexts). Signs with a variable convention are “variables”, “conditional names” and “parameters”. The distinction between these types allows us to specify the nature of logical-mathematic designations and the history of their invention.
Keywords: semiotics, logical-mathematic designation, term, conventional signs, name, constant, variable, parameter, conditional name, reference.

В логике термины (в традиционной терминологии – «имена») принято делить на единичные и общие. Считается, что единичные термины (константы) всегда обозначают один и тот же объект (денотат), откуда и идет их название, тогда как общие термины не имеют постоянного денотата, но в разных ситуациях могут обозначать разные объекты (референты). Существенно, что смена референта происходит в рамках функционирования одного и того же знака, используемого в одном и том же смысловом значении, то есть в способ функционирования «общих терминов» входит именно ситуативное установление референции и смена референтов. Иными словами, общие термины функционируют как своеобразные переменные.

Но «единичные имена» (по крайней мере, их знаковые формы) в разных ситуациях также могут обозначать разные объекты. Например, имя «Аристотель» может обозначать известного древнегреческого философа Аристотеля из Стагиры, архитектора московского кремля Аристотеля Фиораванти, греческого миллиардера XX в. Аристотеля Сократа Онассиса. Отсюда вовсе не следует, что различение единичных и общих терминов ошибочно, ведь механизмы смены референта в случае персональных имен и в случае общих терминов различны. В именах связь между объектом и именной формой («именем») первоначально устанавливается путем конвенции, оформляемой обычно через особый социальный ритуал наречения именем. Причем эти конвенции и ритуалы устанавливают способы именование объектов, а не способы употребления «имен» (именных форм). Если ритуал осуществлен успешно, то возникает новое персональное имя. Но в силу ограниченного числа принятых в обществе для этих целей именных форм разные объекты часто получают одно и то же «имя». Поскольку акты именования (установления соответствующих конвенций) обычно независимы друг от друга, то порождаемые ими знаки также нужно рассматривать как независимые, лишь по форме имеющие одинаковое написание и звучание. То есть в случае личных имен мы имеем группы омонимов, объединяемых лишь использованием одной и той же знаковой формы. При понимании именной формы в рамках некоторой коммуникативной ситуации, мы выбираем среди знакомых конвенций ту, которая подходит к данной ситуации. Сами конвенции при этом не меняются, как не меняется и референция в рамках каждой отдельно взятой конвенции (в отличие от общих терминов).

Но это деление терминов справедливо только по отношению к нормальным знакам, то есть знакам, реально функционирующим в качестве знаков в рамках некоторого сообщества людей. От них следует отличать «знаки», лишь мыслимые или функционирующие в качестве знаков в рамках некоторого коммуникативного контекста. Эти знаки буду называть условными, конвенциональными или знаками по договоренности. Обычно они вводятся конвенциями типа «будем считать, что … является знаком типа … и обозначает …», «будем рассматривать … как знак типа …, обозначающий …» и т.п. Такие договоренности действуют только в контексте соответствующей коммуникативной ситуации, в частности, в контексте понимания некоторого текста. Для использования такого «знака» в другом контексте необходимо повторение или расширение соответствующей конвенции.

Среди знаков по договоренности также можно выделить две группы. Первая группа – это конвенциональные имена и константы, например, обозначения числовых множеств ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и т.п.) и отдельных выделенных чисел (e, π, ω, $\aleph_0$ и др.). Между нормальными и конвенциональными именами нет четкой границы, поскольку конвенциональные имена могут прижиться, получить интертекстуальное и интерсубъектное употребление и постепенно превратиться в нормальные единичные термины. Сюда можно отнести и знаки конкретных функций и отношений, функционирующих как константы. Похожую же дорогу в естественном языке проходят и единичные названия впервые открываемых объектов (планет, биологических видов, географических объектов и т.п.), которые также вводятся в некотором специальном контексте и могут как прижиться в сообществе, так и нет. Но, в отличие от «конвенциональных имен», такие имена сразу вводятся как «интертекстуальные», предназначенные для «нормального» функционирования.

Второй большой группой конвенциональных знаков являются «знаки», знаковые формы которых специально вводятся для того, чтобы в различных контекстах доопределяться и использоваться как знаки тех или иных, относящихся к данной ситуации объектов. То есть вводящая их первичная конвенция оговаривает только их тип и возможность независимых альтернативных доопределений. В силу этого, такие знаки можно назвать знаками с переменной конвенцией. В современной математике и логике можно выделить как минимум три типа знаков по договоренности с переменной конвенцией: «переменные», «параметры», «условные имена».

В качестве условных имен я рассматриваю условные обозначения, вводимые с целью маркировки объектов в рамках некоторой конкретной задачи, теоремы, примера и т.п. При определении языка они вводятся как знаки, которые будут ситуативно использоваться в качестве меток (имен) конкретных объектов, но связываются с какими-либо объектами только в рамках некоторой конкретной коммуникативной и мыслительной ситуации. То есть, эти «знаки» принимаются для того, чтобы делать из них ситуативные имена посредством дополнительных ситуативных конвенций. Ни в каком контексте они не мыслятся как «пробегающие» некоторое множество «возможных значений» или как «неизвестные» объекты. Наоборот, будучи доопределенным, такой знак используется как полноценное имя, как знак конкретного и данного в текущей ситуации объекта. К этому виду знаков относятся, например, буквенные обозначения традиционной геометрии.

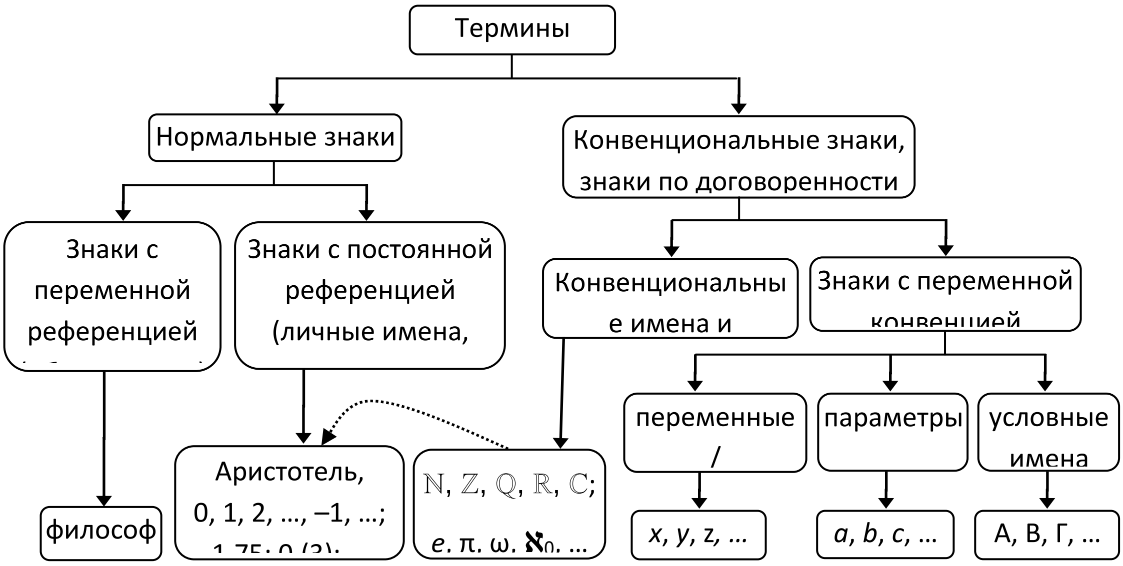
Другой вид знаков по договоренности с переменной конвенцией – собственно переменные. Они вводятся с целью (1) обозначать то, что необходимо найти (функция, перешедшая к ним от «неизвестных» древней математики), и (2) «пробегать» последовательной сменой референции по некоторому множеству объектов (области определения переменной), что позволяет утверждать что-либо обо всех объектах этого множества, но не собирательно, как о множестве, а дистрибутивно, о каждом индивидуально. Трансформация традиционных «неизвестных» в «переменные» начинается с началом изучения функций в XVII – начале XVIII вв. и оформляется в XIX в. введением Шредером и Фреге кванторов. Известно, что в древневосточной логистике и античной «математике» то, что нужно найти, вычислить передавалось при помощи слов. Буквенные обозначения неизвестных появляются не раньше конца средневековья. Достоверно они впервые систематически используются в работах Виета «In artem analyticam isagoge» (Tours, 1591) и Декарта «La géométrie / Geometria» (Leyden, 1637, 1649) вместе с третьим видом знаков с переменной конвенцией – «параметрами» (Виет называл их коэффициентами). Собственно, явное различение буквенных обозначений «неизвестных» и «известных» величин и стало началом трансформации первых в «переменные».

«Параметры» вводятся как величины, которые в противоположность неизвестным обозначают как бы известные, фиксированные, но произвольно (на области допустимых значений) выбранные величины. С самого начала систематического использования в математике «параметры» противопоставляются вначале неизвестным, потом переменным величинам. Различие (возможно, часто не осознаваемое) этих двух видов знаков выражается в ряде факторов: (1) в использовании для их обозначения разных букв (по идущей от Декарта традиции переменные обозначаются буквами x, y, z, а параметры – a, b, c); (2) в их разном отношении с кванторами (методологи математики, объединяющие эти две группы под общим названием «переменные», первую группу – «переменные» в узком смысле – называют квантифицируемыми переменными, а вторую группу – «параметры» в моем словоупотреблении – неквантифицируемыми переменными); (3) в разном статусе и функциях в рамках формальных логических языков (в качестве «переменными» называются собственно переменные, тогда как параметры маркируются как «константы»).

Как видно из приведенного выше анализа, смена референтов и функционирование в качестве «неизвестных» входит в конвенцию только переменных в узком смысле слова, тогда как ситуативные конвенции «параметров» и «условных имен» подразумевают обозначение ими какого-то одного, фиксированного, реально (в случае условных имен) или как бы (в случае параметров) известного объекта. Более того, до введения ситуативной конвенции параметры и переменные не являются реальными знаками, в силу чего и говорить о смене ими референции (как это происходит у собственно переменных) не корректно. Поэтому и использование слова «переменная» ко всем трем видам условных обозначений с переменной конвенцией не корректно и затемняет разницу в механизмах их кажущейся переменной референции.

С точки зрения оппозиции константа (имя) – переменная (общее имя), мы имеем следующую шкалу переходных типов: переменная – параметр – условное имя – конвенциональное имя – нормальное имя. Знаки последних трех видов выступают в качестве реальных имен в контекстах той или иной степени общности, «параметры» только мыслятся как «имена», но редко выступают в этой функции, «переменные» же могут рассматриваться как обозначающие один единственный объект лишь по случайному стечению обстоятельств. С этой точки зрения, параметры занимают промежуточное положение между собственно переменными и условными именами, иногда совпадая по функции с первыми (обозначая «любой» или «произвольно взятый» объект), иногда – со вторыми (обозначая фиксированный, как бы конкретный, «известный» объект).

Описанную типологию терминов можно представить в виде следующеё схемы.



Одна и та же знаковая форма (в *любом* из рассмотренных типов) может быть связана с разными объектами, но природа такой видимой переменной референции зависит от типа. Различение этих типов позволяет уточнить как сами принципы функционирования логико-математических обозначений, так и историю их изобретения.

Первый Конгресс Русского общества истории
и философии науки
«История и философия науки в эпоху перемен»

Том 1

Сборник научных статей
Сетевое электронное издание

Научная редакция и составление - И.Т. Касавин, Т.Д. Соколова,
В.А. Бажанов, Е.А. Зайцев, А.Н. Кричевец, В.И. Маркин.

Компьютерная верстка: Т.М. Хусяинов

Подписано к использованию 30.07.2018
Формат: PDF/A. Усл. печ. л. 8,5.
Объем данных - 3,2 Мбайт

Минимальные системные требования:
браузер Google Chrome v. 2.0 и выше,
пропускная способность сетевого подключения не менее 128 кбит/с

Издательство «Русское общество истории и философии науки»
105062, Россия, Москва, Лялин пер., д. 1/36, стр. 2, комн. 2.
E-mail: info@rshps.ru

ISBN 978-5-6041212-0-7

9 785604 121207