Математические заметки

Том 107 выпуск 1 январь 2020

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О топологической классификации градиентно-подобных потоков с поверхностной динамикой на 3-многообразиях

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. Д. Куренков

Ключевые слова: потоки Морса–Смейла, градиентно-подобные потоки, поверхностная динамика, гетероклинические траектории, топологическая эквивалентность, топологическая классификация, многообразия Зейферта.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12519

Напомним, что поток f^t, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется *потоком Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*. *Индексом Морса* состояния равновесия p (замкнутой траектории γ) называется число, равное размерности его неустойчивого многообразия W^u_p (W^u_γ).

Далее будем предполагать, что $n=3$ и многообразие M^3 является ориентируемым. Для градиентно-подобного потока f^t на M^3 обозначим через Ω_{f^t} множество всех его состояний равновесия, через Ω^i множество всех состояний равновесия индекс Морса которых равен $i\in\{0,1,2,3\}$ и через $|\Omega^i|$ мощность множества Ω^i. Состояния равновесия индексов Морса 0 и 3 называются *узловыми* (*стоковыми и источниковыми* соответственно), а индексов 1, 2 – *седловыми*. Положим $\Sigma=\Omega^1\cup\Omega^2$.

Напомним, что *устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой* точки $\sigma\in\Sigma$ называется компонента связности многообразия $W^s_\sigma\setminus\sigma$ $(W^u_\sigma\setminus\sigma)$.

Пусть $\sigma^1\subset\Omega^1$, $\sigma^2\subset\Omega^2$ такие, что $W^u_{\sigma^2}\cap W^s_{\sigma^1}\neq\varnothing$. Согласно [1] любая компонента связности пересечения $W^u_{\sigma^2}\cap W^s_{\sigma^1}\neq\varnothing$ называется *гетероклинической траекторией*.

Следующее понятие введено аналогично определению из [2].

Определение 1. Будем говорить, что градиентно-подобный поток f^t, заданный на многообразии M^3, обладает *поверхностной динамикой* (принадлежит классу $\mathrm{GSD}(M^3)$), если множество Σ представляется в виде объединения двух подмножеств Σ_a, Σ_r таких, что каждая компонента связности множеств $\mathscr{A}_{f^t}=W^u_{\Sigma_a}\cup\Omega^0$, $\mathscr{R}_{f^t}=W^s_{\Sigma_r}\cup\Omega^3$ является ориентируемой ручно вложенной поверхностью[1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01041), кроме доказательства теоремы 3, выполненного в рамках Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2019 году (проект 100).

[1] Поверхность $S_g\subset M^3$ называется *ручно вложенной*, если для любой точки $x\in S_g$ существует окрестность $U_x\subset M^3$ и гомеоморфизм $h_x\colon U_x\to\mathbb{R}^3$ такие, что $h_x(S_g\cap U_x)=Oxy$.

В [2; теоремы 1, 2], [3; лемма 1, теорема 1] изучалась топология многообразий, допускающих градиентно-подобные диффеоморфизмы с поверхностной динамикой. Так как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий градиентно-подобного потока с поверхностной динамикой является таким диффеоморфизмом, результаты этих работ переносятся на случай потоков в следующем виде.

Предложение 1. *Пусть* $f^t \in \mathrm{GSD}(M^3)$. *Тогда существуют целые числа* $k_{f^t}, g_{f^t} \geqslant 0$ *и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм* τ_{f^t} *ориентируемой поверхности* $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$ *рода* g_{f^t} *на себя такие, что*

1) *множества* $\mathscr{A}_{f^t}$, $\mathscr{R}_{f^t}$ *состоят из одинакового числа* k_{f^t} *компонент связности, каждая из которых гомеоморфна поверхности* $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$;

2) *замыкание каждой компоненты связности* V *множества* $M^3 \setminus (\mathscr{A}_{f^t} \cup \mathscr{R}_{f^t})$ *гомеоморфно прямому произведению* $\mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0,1]$ *с границей, состоящей из двух компонент связности* $A \in \mathscr{A}_{f^t}$ *и* $R \in \mathscr{R}_{f^t}$;

3) *многообразие* M^3 *диффеоморфно фактор-пространству* $M_{g_{f^t},\tau_{f^t}} = \mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0,1]/{\sim}$ *по отношению эквивалентности* $(z,1) \sim (\tau_{f^t}(z), 0)$.

Пусть V – компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathscr{A}_{f^t} \cup \mathscr{R}_{f^t})$ с границей $A \cup R$. Обозначим через f_A^t (f_R^t) ограничение потока f^t на множество A (R). Положим $\Omega_A = \Omega_{f^t} \cap A$, $\Omega_A^i = \Omega^i \cap A$, $i \in \{0,1,2\}$, $\Omega_R = \Omega_{f^t} \cap R$, $\Omega_R^j = \Omega^j \cap R$, $j \in \{1,2,3\}$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$A = \bigcup_{p \in \Omega_A} W_p^u, \qquad R = \bigcup_{p \in \Omega_R} W_p^s.$$

Пусть $\sigma^1 \in \Omega_A^1$; тогда $W_{\sigma^1}^u \subset A$ и из [4; теорема 2.3] следует, что существуют точки $\omega_+, \omega_- \in \Omega_A^0$ (возможно, $\omega_+ = \omega_-$) такие, что $\mathrm{cl}\, W_{\sigma^1}^u \setminus W_{\sigma^1}^u = \omega_+ \cup \omega_-$. В силу [2; леммы 1, 2] справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Для любой точки* $\sigma^1 \in \Omega_A^1$ *найдутся точки* $\sigma_+^2, \sigma_-^2 \in \Omega_A^2$ (*возможно*, $\sigma_+^2 = \sigma_-^2$) *такие, что множество* $W_{\sigma^1}^s \cap (W_{\sigma_+^2}^u \cup W_{\sigma_-^2}^u)$ *состоит в точности из двух различных гетероклинических кривых*.

Аналогичное утверждение справедливо для потока f_R с формальной заменой символов $A, 1, 2, s, u$ на $R, 2, 1, u, s$ соответственно.

Обозначим через Γ_A (Γ_R) множество, являющееся объединением всех состояний равновесия, одномерных сепаратрис и гетероклинических траекторий, лежащих в множестве A (R).

Определение 2. Компоненту связности множества $A \setminus \Gamma_A$ ($R \setminus \Gamma_R$) назовем *двумерной ячейкой* потока f_A^t (f_R^t).

Из предложения 2 и работ [5], [6] следует, что границы двумерных ячеек потока f_A^t имеют в точности такие же топологические типы, как и границы двумерных ячеек некоторого градиентно-подобного потока на замкнутой поверхности[2]. Более того, с использованием методов работы [6] устанавливается следующее предложение.

Предложение 3. *Существуют гладкий градиентно-подобный поток* f_{A*}^t *на поверхности* $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$ *и гомеоморфизм* $h\colon A \to \mathbb{S}_{g_{f^t}}$ *такие, что* f_{A*}^t *топологически эквивалентен потоку* f_A^t *посредством* h, *причем образ* $h(p)$ *любой точки* $p \in \Omega_A$ *является состоянием равновесия потока* f_{A*}^t *одного из следующих типов*:

1) *стоковым, если* $p \in \Omega_A^0$;

[2] В [5], [6] ячейкой градиентно-подобного потока на замкнутой поверхности называется компонента связности дополнения до объединения замыканий устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых состояний равновесия потока.

2) *источниковым, если* $p \in \Omega^2_A$;
3) *седловым, если* $p \in \Omega^1_A$ *и устойчивые сепаратрисы* $h(p)$ *являются образами в силу* h *гетероклинических траекторий, для которых точка* p *является граничной.*

Из [4; теорема 2.3] и определения класса $\mathrm{GSD}(M^3)$ вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Для любой точки* $\omega \in \Omega^0_A$ $(\alpha \in \Omega^3_R)$ *найдется такая точка* $\sigma^1 \in \Omega^1_R$ $(\sigma^2 \in \Omega^2_A)$, *что* $\omega \subset \mathrm{cl}\, W^u_{\sigma^1}$ $(\alpha \subset \mathrm{cl}\, W^s_{\sigma^2})$.

Определение 3. Будем говорить, что инвариантные многообразия седловых состояний равновесия потока $f^t \subset \mathrm{GSD}(M^3)$ *обладают однозначным асимптотическим поведением*, если для любого набора компонент связности $A \subset \mathscr{A}_{f^t}$, $R \subset \mathscr{R}_{f^t}$, $V \subset M^3 \setminus (\mathscr{A}_{f^t} \cup \mathscr{R}_{f^t})$ таких, что $\partial V = A \cup R$, выполняются следующие условия:

1) для любых двух различных точек $\sigma^1_{r,1}, \sigma^1_{r,2} \in \Omega^1_R$ сепаратрисы $l^u_{\sigma^1_{r,1}}$, $l^u_{\sigma^1_{r,2}}$, принадлежащие V, содержат в своем замыкании различные точки $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega^0_A$;
2) для любых двух различных точек $\sigma^2_{a,1}, \sigma^2_{a,2} \in \Omega^2_A$ сепаратрисы $l^s_{\sigma^2_{a,1}}$, $l^s_{\sigma^2_{a,2}}$, принадлежащие V, содержат в своем замыкании различные точки $\alpha_1, \alpha_2 \subset \Omega^3_R$;
3) для любой точки $\sigma^1_a \subset \Omega^1_A$ найдется в точности одна точка $\sigma^2_r \subset \Omega^2_R$ такая, что пересечение $\mathrm{cl}\, W^s_{\sigma^1_a} \cap R$ содержит $W^s_{\sigma^2_r}$; для любой точки $\sigma^2_r \subset \Omega^2_R$ найдется в точности одна точка $\sigma^1_a \subset \Omega^1_A$ такая, что $\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma^2_r} \cap A \supset W^u_{\sigma^2_a}$;
4) для любых точек $\sigma^1_a \in \Omega^1_A$, $\sigma^2_r \in \Omega^2_R$ пересечение $W^s_{\sigma^1_a} \cap W^u_{\sigma^2_r} \cap V$ либо пусто, либо состоит из единственной гетероклинической траектории.

Подкласс потоков из класса $\mathrm{GSD}(M^3)$, инвариантные многообразия седловых состояний равновесий которых обладают однозначным асимптотическим поведением, обозначим через $\mathrm{GSDU}(M^3)$.

Определение 4. Пусть $f^t \in \mathrm{GSDU}(M^3)$. Компоненту связности множества

$$M^3 \setminus \bigcup_{p\in\Sigma} (\mathrm{cl}\, W^u_p \cup \mathrm{cl}\, W^s_p)$$

будем называть *трехмерной ячейкой потока* f^t.

Для любого набора компонент связности $A \subset \mathscr{A}_{f^t}$, $R \subset \mathscr{R}_{f^t}$, $V \subset M^3 \setminus (\mathscr{A}_{f^t} \cup \mathscr{R}_{f^t})$ таких, что $\partial V = A \cup R$, обозначим через $\mathscr{C}^2_A$, $\mathscr{C}^2_R$, $\mathscr{C}^3_V$ множество всех двумерных и трехмерных ячеек, принадлежащих множествам A, R, V соответственно.

Зафиксируем любую компоненту $A \subset \mathscr{A}_{f^t}$ и занумеруем $V_1, \dots, V_{2k_{f^t}}$ все попарно различные компоненты связности множества $M^3 \setminus (\mathscr{A}_{f^t} \cup \mathscr{R}_{f^t})$ так, что $\mathrm{cl}(V_i) \cap \mathrm{cl}(V_{i+1}) \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \dots, 2k_{f^t} - 1\}$ и $\mathrm{cl}(V_{2k_{f^t}}) \cap \mathrm{cl}(V_1) \supset A$.

Лемма. *Для любой двумерной ячейки* $c^2 \subset A$ *потока* f^t_A *найдется последовательность* $C^3_1, \dots, C^3_{2k_{f^t}}$ *трехмерных ячеек такая, что* $\mathrm{cl}(C^3_1) \cap A = \mathrm{cl}(c^2)$, $C^3_i \subset V_i$, $i \in \{1, \dots, 2k_{f^t}\}$, *а пересечения* $\mathrm{cl}(C^3_i) \cap \mathrm{cl}(C^3_{i+1}) \setminus A$, $i \in \{1, \dots, 2k_{f^t} - 1\}$, $\mathrm{cl}(C^3_{2k_{f^t}}) \cap A$ *непусты и каждое состоит из замыкания двумерной ячейки.*

Из леммы следует, что на множестве $\mathscr{C}^2_A$ корректно определено взаимно-однозначное отображение μ_A, ставящее в соответствие каждой ячейке $c^2 \in \mathscr{C}^2_A$ ячейку $\widetilde{c}^2$, принадлежащую пересечению $\mathrm{cl}(C^3_{2k_{f^t}}) \cap A$.

Теорема 1. *Для того, чтобы потоки* $f^t, f'^t \subset \mathrm{GSDU}(M^3)$ *были топологически эквивалентны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $k_{f^t} = k_{f'^t}$, *и существовали компоненты связности* $A \subset \mathscr{A}_{f^t}$, $A' \subset \mathscr{A}_{f'^t}$ *такие, что потоки* f^t_A, $f'^t_{A'}$ *были топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма* $h\colon A \to A'$ *такого, что* $\mu'_{A'} = h_*\mu_A h_*^{-1}$ *либо* $\mu'_{A'} = h_*\mu_A^{-1} h_*^{-1}$, *где* $h_*\colon \mathscr{C}^2_A \to \mathscr{C}^2_{A'}$ *– взаимно-однозначное соответствие, индуцируемое гомеоморфизмом* h.

Замечание. В силу предложения 3 вопрос о существовании гомеоморфизма h, удовлетворяющего условиям теоремы 1, сводится к комбинаторной задаче проверки существования изоморфизма различающих графов Пейшото [6] или трехцветных графов Ошемкова–Шарко [7], соответствующих потокам f^t_A и $f'^t_{A'}$.

Напомним, что гомеоморфизм $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ называется *периодическим гомеоморфизмом периода* $r > 1$, если $\tau^r(x) = x$ для любой точки $x \in \mathbb{S}_g$ и $\tau^l \neq \mathrm{Id}$, если $0 < l < r$. Топологическая классификация сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов поверхностей получена Нильсеном в [8].

Теорема 2. *Если $f^t \in \mathrm{GSDU}(M^3)$, то диффеоморфизм склейки τ_{f^t} изотопен сохраняющему ориентацию периодическому отображению поверхности $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$.*

Пусть ν, μ – взаимно-простые целые числа, $0 \leqslant \nu < \mu$, $\theta\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ – поворот диска $\mathbb{B}^2$ на угол $2\pi\nu/\mu$. Обозначим через $N^3 = \mathbb{B}^2 \times [0,1]/\!\sim$ фактор-пространство по отношению эквивалентности $(x,1) \sim (\theta(x),0)$, $x \in \mathbb{B}^2$.

Многообразие M^3 называется *многообразием Зейферта*, если M^3 расслоено на окружности и каждый слой имеет в многообразии M^3 окрестность, послойно гомеоморфную N^3.

Следствие. *Если $f^t \in \mathrm{GSDU}(M^3)$, то многообразие M^3 является многообразием Зейферта.*

Теорема 3. *Для любого целого $g \geqslant 0$ и произвольного сохраняющего ориентацию периодического диффеоморфизма $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ существует поток $f^t \in \mathrm{GSDU}(M^3_{f,\tau})$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56. **[2]** V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, *Regul. Chaotic Dyn.*, **22**:2 (2017), 122–135. **[3]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, С. Х. Зинина, *Нелинейная динам.*, **10**:4 (2014), 427–438. **[4]** S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817. **[5]** А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966. **[6]** M. Peixoto, *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, 389–419. **[7]** А. А. Ошемков, В. В. Шарко, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140. **[8]** J. Nielsen, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **15** (1937), 1—77.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: vgrines@hse.ru

Поступило
18.07.2019
Принята к публикации
04.09.2019

Е. Я. Гуревич
Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: egurevich@hse.ru

Е. Д. Куренков
Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: ekurenkov@hse.ru