Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

О. В. Починка, С. Х. Зинина, Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством на поверхностях, *Матем. заметки*, 2020, том 107, выпуск 2, 276–285

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12360

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 46.251.81.135
28 января 2020 г., 11:50:22

Математические заметки

Том 107 выпуск 2 февраль 2020

УДК 517

Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством на поверхностях

О. В. Починка, С. Х. Зинина

Функцией Ляпунова для потока на многообразии называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно-рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте. В силу результатов Ч. Конли такая функция существует для любого потока, порожденного непрерывным векторным полем, а сам факт существования носит название “фундаментальная теорема динамических систем”. Если множество критических точек функции Ляпунова совпадает с цепно-рекуррентным множеством потока, то такая функция называется энергетической функцией. В настоящей работе рассматриваются топологические потоки с конечным гиперболическим (в топологическом смысле) цепно-рекуррентным множеством на замкнутых поверхностях. Авторами доказано, что любой такой поток обладает энергетической (непрерывной) функцией Морса. Работа является идейным продолжением работ С. Смейла и К. Мейера, в которых установлено существование гладкой энергетической функции Морса у любого градиентно-подобного потока на многообразии.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: функция Ляпунова, энергетическая функция, цепно-рекуррентное множество.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12360

1. Введение и формулировка результатов. Пусть M^n – замкнутое n-мерное многообразие с метрикой d. *Топологическим потоком* на M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство гомеоморфизмов $f^t\colon M^n \to M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $f^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;
2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

Траекторией или *орбитой* точки $x \in M^n$ относительно потока f^t называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x),\, t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t. Любые две траектории потока либо совпадают, либо не пересекаются, поэтому фазовое пространство представляется

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 17-11-01041) в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ (2019 год). Работа также поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

© О. В. Починка, С. Х. Зинина, 2020

в виде объединения попарно не пересекающихся траекторий потока. Различают три типа траекторий:

1) *неподвижная точка* $\mathcal{O}_x = \{x\}$;
2) *периодическая траектория* $\mathcal{O}_x$, для которой существует число $\mathrm{per}(x) > 0$ такое, что $f^{\mathrm{per}(x)}(x) = x$, но $f^t(x) \neq x$ для всех действительных $0 < t < \mathrm{per}(x)$; число $\mathrm{per}(x)$ называется *периодом периодической орбиты* и не зависит от выбора точки на орбите;
3) *регулярная траектория* $\mathcal{O}_x$ – траектория, не являющаяся неподвижной точкой или периодической орбитой.

Любая регулярная траектория гомеоморфна прямой.

Для характеристики блуждаемости траекторий потока традиционно используется понятие цепно-рекуррентности.

ε-Цепью длины T, соединяющей точку x с точкой y для потока f^t, называется последовательность точек $x = x_0, \dots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен $t_1, \dots, t_n$ такая, что

$$d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon, \qquad t_i \geqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad t_1 + \dots + t_n = T.$$

Точка $x \in M^n$ называется *цепно-рекуррентной* для потока f^t, если для любого $\varepsilon > 0$ существует T, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины T, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно-рекуррентных точек f^t называется *цепно-рекуррентным множеством* f^t и обозначается $\mathcal{R}_{f^t}$, а его компоненты связности называются *цепными компонентами*. Множество $\mathcal{R}_{f^t}$ является f^t-инвариантным, т.е. состоит из орбит потока f^t, которые называются *цепно-рекуррентными*. Очевидно, что неподвижные точки и периодические орбиты являются цепно-рекуррентными.

Функцией Ляпунова для потока называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно-рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте. В силу результатов Конли [1] такая функция существует для любого потока, порожденного непрерывным векторным полем, а сам факт существования носит название “фундаментальная теорема динамических систем”. Из результата Вильсона [2] следует, что для любого такого потока можно построить гладкую функцию Ляпунова, критические точки которой совпадают с цепно-рекуррентным множеством потока. Функция Ляпунова с такими свойствами называется *энергетической функцией*. Более того, из результатов Смейла [3] и Мейера [4] следует существование энергетической функции Морса у любого градиентно-подобного потока на многообразии.

Настоящая работа является идейным продолжением работ [3] и [4]. Именно, в п. 2 мы вводим понятие топологически гиперболической неподвижной точки потока и непрерывной функции Морса на поверхности M^2. Для класса $G(M^2)$ топологических потоков с конечным (следовательно, состоящим из неподвижных точек) гиперболическим цепно-рекуррентным множеством, заданных на поверхности M^2, в настоящей работе доказан следующий результат.

Теорема. *Любой поток $f^t \in G(M^2)$ обладает энергетической функцией Морса.*

2. Динамика топологических потоков класса $G(M^2)$. Пусть f^t – топологический поток, заданный на замкнутой поверхности M^2.

Два потока $f^t\colon M^2 \to M^2$, $g^t\colon M^2 \to M^2$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^2 \to M^2$ такой, что $g^t h = h f^t$ для любого $t \in \mathbb{R}$; при этом гомеоморфизм h называется *сопрягающим*.

В качестве модели поведения потока в окрестности неподвижной точки рассмотрим линейный поток $a^t_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $q \in \{0,1,2\}$ следующего вида:

- для $\lambda = 0$ поток имеет вид $a^t_0(x_1,x_2) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2)$; положим $E^s_0 = \mathbb{R}^2$, $E^u_0 = \{(0,0)\}$;
- для $\lambda = 1$ поток имеет вид $a^t_1(x_1,x_2) = (2^t x_1, 2^{-t}x_2)$; положим
$$E^s_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}, \qquad E^u_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\};$$
- для $\lambda = 2$ поток имеет вид $a^t_2(x_1,x_2) = (2^t x_1, 2^t x_2)$; положим $E^s_2 = \{(0,0)\}$, $E^u_2 = \mathbb{R}^2$.

Неподвижную точку назовем *топологически гиперболической*, если существует ее окрестность $U_p \subset M^2$, число $\lambda_p \in \{0,1,2\}$ и гомеоморфизм $h_p\colon U_p \to \mathbb{R}^2$ такие, что $h_p f^t|_{U_p} = a^t_{\lambda_p} h_p|_{U_p}$ всякий раз, когда левая и правая части определены. Для топологически гиперболической неподвижной точки p потока f^t множества $h_p^{-1}(E^s_{\lambda_p})$, $h_p^{-1}(E^u_{\lambda_p})$ будем называть ее *локальными инвариантными многообразиями*. Множества
$$W^s_p = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E^s_{\lambda_p})), \qquad W^u_p = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E^u_{\lambda_p}))$$
будем называть *устойчивым* и *неустойчивым инвариантными многообразиями точки* p. Из определения следует, что
$$W^s_p = \Big\{y \in M^2 : \lim_{t\to+\infty} f^t(y) = p\Big\}, \qquad W^u_p = \Big\{y \in M^2 : \lim_{t\to+\infty} f^{-t}(y) = p\Big\}$$
и $W^u_p \cap W^u_q = \varnothing$, $W^s_p \cap W^s_q = \varnothing$ для любых различных гиперболических точек p, q. Кроме того, существует инъективная непрерывная иммерсия $J\colon \mathbb{R}^{\lambda_p} \to M^2$ такая, что $W^u_p = J(\mathbb{R}^{\lambda_p})$[1].

Число λ_p будем называть *индексом* неподвижной гиперболической точки p. Точки индексов 2 и 0 будем называть *источниковыми* и *стоковыми* соответственно; любую точку p такую, что $\lambda_p = 1$, будем называть *седловой*.

Рассмотрим теперь класс $G(M^2)$ топологических потоков с конечным (следовательно, состоящим из неподвижных точек) гиперболическим цепно-рекуррентным множеством, заданных на M^2. Динамика потоков рассматриваемого класса близка по своим свойствам к градиентно-подобным потокам. Именно, аналогично порядку Смейла введем на множестве неподвижных точек потока $f^t \in G(M^2)$ отношение порядка условием
$$p \prec q \quad \Longleftrightarrow \quad W^s_p \cap W^u_q \neq \varnothing.$$
В силу конечности цепно-рекуррентного множества потока f^t, введенное отношение является отношением частичного порядка и, следовательно, может быть продолжено до отношения полного порядка на $\mathcal{R}_{f^t}$. В дальнейшем будем считать неподвижные точки потока f^t пронумерованными согласованно с введенным порядком:
$$p_1 \prec \cdots \prec p_k.$$

[1]Отображение $J\colon \mathbb{R}^m \to M^2$ называется *иммерсией*, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^m$ существует окрестность $U_x \in \mathbb{R}^m$ такая, что ограничение $J|_{U_x}$ отображения J на U_x является гомеоморфизмом.

Кроме того, не уменьшая общности будем полагать, что любая стоковая точка расположена в этом порядке ниже любой седловой точки, а любая источниковая точка – выше любой седловой. Аналогично тереме 2.1 книги [5] можно доказать следующее утверждение о вложении и асимптотическом поведении инвариантных многообразий неподвижных точек.

Предложение 1. *Пусть* $f^t \in G(M^2)$. *Тогда*

1) *имеет место цепочка равенств*

$$M^2 = \bigcup_{i=1}^{k} W^u_{p_i} = \bigcup_{i=1}^{k} W^s_{p_i};$$

2) $W^u_{p_i}$ $(W^s_{p_i})$ *является топологическим подмногообразием многообразия* M^2, *гомеоморфным* $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$ $(\mathbb{R}^{2-\lambda_{p_i}})$;

3) *имеют место вложения*

$$\mathrm{cl}(W^u_{p_i}) \setminus (W^u_{p_i} \cup p_i) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W^u_{p_j}(\mathrm{cl}(W^s_{p_i}) \setminus (W^s_{p_i} \cup p_i)) \subset \bigcup_{j=i+1}^{k} W^s_{p_j}.$$

3. Непрерывная функция Морса. Следуя Морсу [6], дадим понятие непрерывной функции Морса на многообразии M^2.

Пусть $\varphi\colon M^2 \to \mathbb{R}$ – действительнозначная непрерывная функция. Точка $p \in M^2$ называется *регулярной точкой* функции φ, если существует окрестность $V_p \subset M^2$ точки p и гомеоморфизм $\phi_p\colon y \in V_p \mapsto \phi_p(y) = (x_1(y), x_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ такой, что

$$x_i(p) = 0, \quad i \in \{1,2\}, \qquad \varphi(y) = \varphi(p) + x_2(y), \quad y \in V_p.$$

В противном случае p называется *критической точкой.* Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ. Если координаты x_i, $i \in \{1,2\}$, в критической точке p таковы, что существует значение $\nu_p \in \{0,1,2\}$ такое, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\nu_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\nu_p+1}^{2} x_i^2(y), \qquad y \in V_p,$$

тогда p называется *невырожденной критической точкой индекса* ν_p. Функция, невырожденная в каждой критической точке $p \in M^2$ называется *непрерывной функцией Морса.*

Из результатов работы [6] следует, что для непрерывной функции Морса справедливы классические неравенства Морса, связывающие число точек индекса ν с ν-м числом Бетти.

Для неподвижной точки p с индексом λ_p потока $f^t \in G(M^2)$ из условия гиперболичности мы имеем следующий факт существования локальной энергетической функции Морса.

Предложение 2. *Пусть* p *– неподвижная точка с индексом* λ_p *потока* $f^t \in G(M^2)$ *и*

$$h_p\colon y \in U_p \mapsto h_p(y) = (x_1(y), x_2(y)) \in \mathbb{R}^2$$

– гомеоморфизм, сопрягающий поток f^t в окрестности U_p точки p с линейным потоком $a^t_{\lambda_p}$.

Тогда для любой константы $c \in \mathbb{R}$ функция

$$\varphi_{p,c}(y) = c - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda_p+1}^{2} x_i^2(y), \qquad y \in U_p$$

является локальной энергетической функцией Морса для потока f^t в окрестности точки p.

4. Построение энергетической функции для потока класса $G(M^2)$. Настоящий пункт посвящен доказательству теоремы. Именно, для любого топологического потока f^t класса $G(M^2)$ мы построим непрерывную функцию Морса $\varphi\colon M^2 \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любого $x \in (M^2 \setminus \mathcal{R}_{f^t})$ и любого $t > 0$;
2) $\mathrm{Cr}_\varphi = \mathcal{R}_{f^t}$ и $\nu_{p_i} = \lambda_{p_i}$ для любой неподвижной точки p_i.

Для каждого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ положим

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{i} W^u_{p_j}, \qquad R_i = \bigcup_{j=i+1}^{k} W^s_{p_j}.$$

Индукцией по параметру $i \in \{1, \dots, k-1\}$ построим окрестность U_i множества A_i такую, что $U_i \cap R_i = \varnothing$, и функцию Морса $\varphi_i\colon U_i \to [1, i+1/3]$, являющуюся энергетической функцией потока $f^t|_{U_i}$, совпадающей с $\varphi_{p_i,i}$ в некоторой окрестности точки p_i и такой, что $U_i = \varphi_i^{-1}([1, i+1/3])$.

Последний шаг построения окрестности U_k и функции φ_k в предположении, что функция φ_{k-1} уже построена на окрестности U_{k-1}, выделим в отдельный пункт. В силу предложения 1, окрестность U_k совпадает со всей поверхностью M^2, а функция φ_k является искомой функцией φ.

Построение для $i = 1$. В силу предложения 1 точка p_1 является стоком. Предложение 2 гарантирует существование локальной энергетической функции $\varphi_{p_1,1}$ в некоторой окрестности точки p_1. Положим $U_1 = \varphi^{-1}_{p_1,1}([1, 4/3])$ и $\varphi_1 = \varphi_{p_1,1}|_{U_1}$, что и заканчивает построение в рассматриваемом случае.

Шаг индукции. Предположим что мы построили искомую функцию $\varphi_{i-1}\colon U_{i-1} \to [1, i-2/3]$. Покажем, как построить функцию $\varphi_i\colon U_i \to [1, i+1/3]$. Для этого рассмотрим три возможных случая для точки p_i.

Случай 1. *Точка p_i является стоком.* На рис. 1 изображен этап построения в окрестности U_i и функции φ_i в окрестности стока.

Аналогично построению случая $i = 1$ предложение 2 гарантирует существование локальной энергетической функции $\varphi_{p_s,s}$ в некоторой окрестности точки p_s для любого $s \in \{1, \dots, i\}$. Положим

$$\widetilde{U}_s = \varphi^{-1}_{p_s,s}\left(\left[s, i + \frac{1}{3}\right]\right), \qquad U_i = \bigcup_{s=1}^{i} \widetilde{U}_s$$

и зададим искомую функцию φ_i формулой

$$\varphi_i(x) = \varphi_{p_s,s}(x), \qquad x \in \widetilde{U}_s,$$

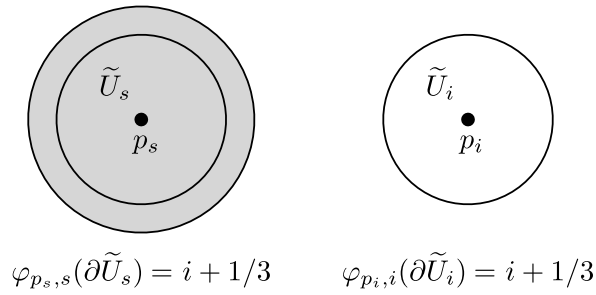

Рис. 1. Индукционный шаг в случае, если p_i является стоком

что и заканчивает построение в рассматриваемом случае.

Случай 2. *Точка p_i является седлом.* На рис. 2 изображен этап построения в окрестности U_i и функции φ_i в окрестности седла.

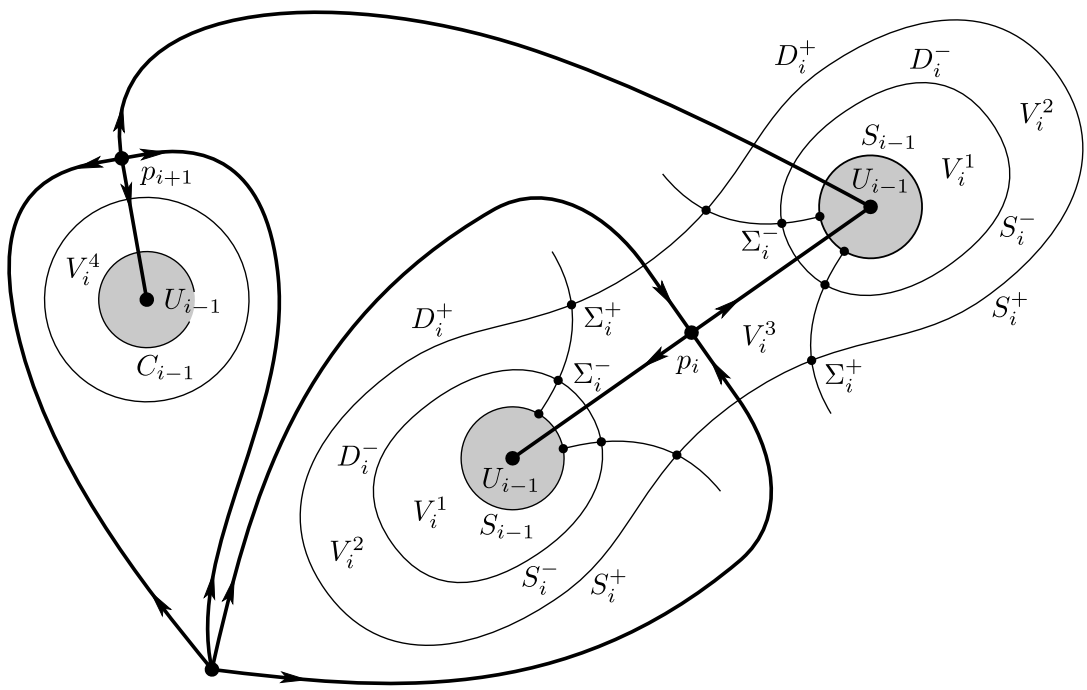

Рис. 2. Индукционный шаг в случае, если p_i является седлом

Предложение 2 гарантирует существование локальной энергетической функции $\varphi_{p_i,i}$ в некоторой окрестности точки p_i. Положим

$$\Sigma_i^{\pm} = \varphi_{p_i,i}^{-1}\left(i \pm \frac{1}{3}\right), \qquad Q_i = \Sigma_i^- \cap W_{p_i}^u.$$

Тогда множество Q_i состоит из двух точек Q_i^1, Q_i^2, лежащих на разных неустойчивых сепаратрисах седловой точки p_i. Не уменьшая общности, будем считать, что $Q_i \cap U_{i-1} = \varnothing$ (этого всегда можно добиться изменением значений функции $\varphi_{p_i,i}$).

Для точки Q_i^j, $j = 1, 2$, выберем отрезок $d_i^j \subset \Sigma_i^-$, содержащий эту точку в своей внутренности, причем так, что $d_i^j \cap U_{i-1} = \varnothing$ и $d_i^1 \cap d_i^2 = \varnothing$. Положим

$$d_i = d_i^1 \cup d_i^2, \qquad c_i = \partial d_i, \qquad R_i = \bigcup_{x \in c_i} \mathcal{O}_x.$$

В силу введенного отношения порядка каждая траектория $\mathcal{O}_x$, $x \in d_i$, пересекает множество ∂U_{i-1} в единственной точке. Положим

$$d_{i-1} = \bigcup_{x \in d_i} (\mathcal{O}_x \cap \partial U_{i-1}).$$

По построению каждая компонента связности множества ∂U_{i-1} является окружностью, обозначим через S_{i-1} объединение тех окружностей из них, которые содержат отрезки d_{i-1}. Тогда равенство $f^{-t_1(x)}(x) = \mathcal{O}_x \cap d_i$, $x \in d_{i-1}$, определяет положительную непрерывную функцию $t_1 \colon d_{i-1} \to \mathbb{R}$, которая может быть продолжена до непрерывной положительной функции $T_1 \colon S_{i-1} \to \mathbb{R}$. Положим

$$S_i^- = \bigcup_{x \in S_{i-1}} f^{-T_1(x)}(x), \qquad V_i^1 = \bigcup_{x \in S_{i-1}} \Bigg(\bigcup_{t \in [0, T_1(x)]} f^{-t}(x) \Bigg).$$

Таким образом, каждая точка $y \in V_i^1$ единственным образом может быть представлена в виде $y = f^{-t_y}(x_y)$, где $x_y \in S_{i-1}$ и $t_y \in [0, T_1(x_y)]$. Зададим функцию $\varphi_{V_i^1} \colon V_i^1 \to [i - 2/3, i - 1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_i^1}(y) = i - \frac{2 - t_y/T_1(x_y)}{3}.$$

Положим $D_i^- = S_i^- \setminus d_i$. Тогда равенство $f^{-t_2(x)}(x) = \mathcal{O}_x \cap \Sigma_i^+$, $x \in c_i$, определяет положительную функцию $t_2 \colon c_i \to \mathbb{R}$, которая может быть продолжена до непрерывной положительной функции $T_2 \colon D_i^- \to \mathbb{R}$. Положим

$$D_i^+ = \bigcup_{x \in D_i^-} f^{-T_2(x)}(x)$$

и обозначим через $V_i^2 \subset M^2$ компактное множество, ограниченное дугами D_i^-, D_i^+ и R_i.

Каждая точка $y \in V_i^2$ единственным образом может быть представлена в виде $y = f^{-t_y}(x_y)$, где $x_y \in D_i^-$ и $t \in [0, T_2(x_y)]$. Зададим функцию $\widetilde{\varphi}_{V_i^2} \colon V_i^2 \to [i - 1/3, i + 1/3]$ формулой

$$\widetilde{\varphi}_{V_i^2}(y) = i - \frac{1 - 2t_y/T_2(x_y)}{3}.$$

Положим $I_i = R_i \cap \partial V_i^2$ и определим гомеоморфизм $\psi_{I_i} \colon I_i \to I_i$ так, что он тождественный на ∂I_i, а в каждой внутренней точке x дуг I_i он определяется формулой $\varphi_{p_i,i}(x) = \widetilde{\varphi}_{V_i^2}(\psi_{I_i}(x))$. Поскольку каждая компонента связности множества V_i^2 является двумерным диском, то гомеоморфизм ψ_{I_i} может быть продолжен до гомеоморфизма $\psi \colon V_i^2 \to V_i^2$, являющегося тождественным на множестве $\partial V_i^2 \setminus I_i$. Окончательно определим функцию $\varphi_{V_i^2} \colon V_i^2 \to [i - 1/3, i + 1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_i^2}(x) = \widetilde{\varphi}_{V_i^2}(\psi(x)).$$

Обозначим через K_i компактную часть линии уровня Σ_i^+, ограниченную дугами R_i, и через $V_i^3 \subset U_{p_i}$ – компактное множество, ограниченное дугами R_i, K_i, d_i. Зададим функцию $\varphi_{V_i^3} \colon V_i^3 \to [i - 2/3, i + 1/3]$ формулой $\varphi_{V_i^3} = \varphi_{p_i,i}$.

Положим

$$C_{i-1} = \partial U_{i-1} \setminus S_{i-1}, \qquad V_i^4 = \bigcup_{x \in C_{i-1}} \Big(\bigcup_{t \in [0,1]} f^{-t}(x) \Big).$$

Таким образом, каждая точка $y \in V_i^4$ единственным образом может быть представлена в виде $y = f^{-t_y}(x_y)$, где $x_y \in C_{i-1}$ и $t_y \in [0,1]$. Зададим функцию $\varphi_{V_i^4}\colon V_i^4 \to [i - 2/3, i + 1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_i^4}(y) = i + t_y - \frac{2}{3}\,.$$

Положим $U_i = U_{i-1} \cup \bigcup_{i=1}^4 V_i^j$ и определим искомую функцию φ_i формулой

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_{i-1}, & x \in U_{i-1}, \\ \varphi_{V_i^j}, & x \in V_i^j,\ j \in \{1,2,3,4\}, \end{cases}$$

что и заканчивает построение в рассматриваемом случае.

Случай 3. *Точка p_i является источником.* На рис. 3 изображен этап построения в окрестности U_i источниковой точки p_i и функции φ_i.

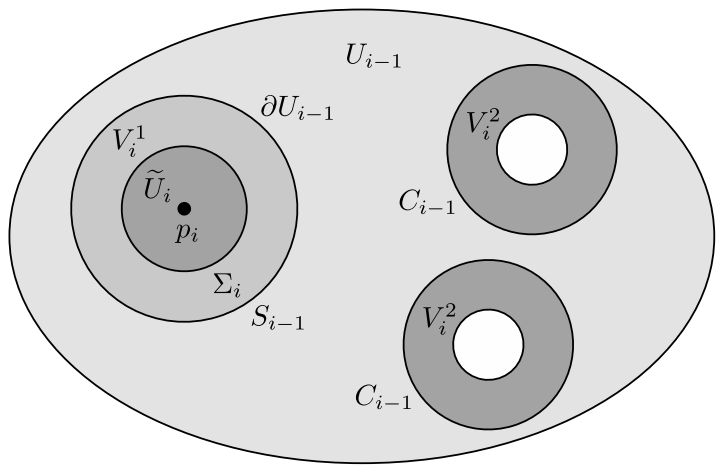

Рис. 3. Индукционный шаг в случае, если p_i является источником

Предложение 2 гарантирует существование локальной энергетической функции $\varphi_{p_i,i}$ в некоторой окрестности точки p_i. Положим

$$\widetilde{U}_i = \varphi_{p_i,i}^{-1}\Big(\Big[i - \frac{1}{3}, i\Big]\Big), \qquad \Sigma_i = \varphi_{p_i,i}^{-1}\Big(i - \frac{1}{3}\Big).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\Sigma_i \cap U_{i-1} = \varnothing$ (в противном случае этого всегда можно добиться изменением значений функции $\varphi_{p_i,i}$).

Из компонент связности множества $\partial U_{i-1} = \varphi_{i-1}^{-1}(i - 2/3)$ выберем такую компоненту S_{i-1}, что $\mathcal{O}_x \cap S_{i-1} \neq \varnothing$, $x \in \Sigma_i$. Тогда равенство $f^{t_1(x)}(x) = \mathcal{O}_x \cap S_{i-1}$, $x \in \Sigma_i$, определяет положительную непрерывную функцию $t_1\colon \Sigma_i \to \mathbb{R}$. Положим

$$V_i^1 = \bigcup_{x \in \Sigma_i} \Big(\bigcup_{t \in [0, t_1(x)]} f^t(x) \Big).$$

Каждая точка $y \in V_i^1$ единственным образом может быть представлена как $y = f^{t_y}(x_y)$ для определенной точки $x_y \in \Sigma_i$ и времени $0 \leqslant t_y \leqslant t_1(x_y)$. Зададим функцию $\varphi_{V_i^1} : V_i^1 \to [i-2/3, i-1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_i^1}(y) = i - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{t_y}{t_1(x_y)}\right).$$

Положим

$$C_{i-1} = \partial U_{i-1} \setminus S_{i-1} \qquad \text{и} \qquad V_i^2 = \bigcup_{x \in C_{i-1}} \left(\bigcup_{t \in [0,1]} f^{-t}(x) \right).$$

Таким образом, каждая точка $y \in V_i^2$ единственным образом может быть представлена в виде $y = f^{-t_y}(x_y)$, где $x_y \in C_{i-1}$ и $t_y \in [0,1]$. Зададим функцию $\varphi_{V_i^2}$: $V_i^2 \to [i-2/3, i+1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_i^2}(y) = i + t_y - \frac{2}{3}.$$

Положим $U_i = U_{i-1} \cup \widetilde{U}_i \cup \bigcup_{i=1}^2 V_i^j$ и определим искомую функцию φ_i формулой

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_{i-1}, & x \in U_{i-1}, \\ \varphi_{p_i,i}, & x \in \widetilde{U}_i, \\ \varphi_{V_i^j}, & x \in V_i^j,\ j \in \{1,2\}, \end{cases}$$

что и заканчивает построение в рассматриваемом случае.

Итак, методом индукции мы построили функцию $\varphi_{k-1} \colon U_{k-1} \to [1, k-2/3]$ с искомыми свойствами. Опишем, как с помощью нее построить искомую энергетическую функцию $\varphi_k \colon U_k \to [1,k]$.

Предложение 2 гарантирует существование локальной энергетической функции $\varphi_{p_k,k}$ в некоторой окрестности источниковой точки p_k. Положим

$$\widetilde{U}_k = \varphi_{p_k,k}^{-1}\left(\left[k - \frac{1}{3}, k\right]\right), \qquad \Sigma_k = \varphi_{p_k,k}^{-1}\left(k - \frac{1}{3}\right).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\widetilde{U}_k \cap U_{k-1} = \varnothing$ (в противном случае этого всегда можно добиться изменением значений функции $\varphi_{p_k,k}$). Тогда равенство $f^{t_1(x)}(x) = \mathcal{O}_x \cap \partial U_{k-1}$, $x \in \Sigma_k$, определяет положительную непрерывную функцию $t_2 \colon \Sigma_k \to \mathbb{R}$. Положим

$$V_k = \bigcup_{x \in \Sigma_k} \left(\bigcup_{t \in [0, t_1(x)]} f^t(x) \right).$$

Каждая точка $y \in V_k$ единственным образом может быть представлена как $y = f^{t_y}(x_y)$ для определенной точки $x_y \in \Sigma_k$ и времени $0 \leqslant t_y \leqslant t_1(x_y)$. Зададим функцию $\varphi_{V_k} : V_k \to [k-2/3, k-1/3]$ формулой

$$\varphi_{V_k}(y) = k - \frac{1}{3}\left(2 - \frac{t_y}{t_1(x_y)}\right).$$

Положим $U_k = U_{k-1} \cup V_k$ и определим искомую функцию формулой

$$\varphi_k = \begin{cases} \varphi_{k-1}(x), & x \in U_{k-1}, \\ \varphi_{V_k}(x), & x \in V_k, \end{cases}$$

что и заканчивает построение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.

[2] F. W. Wilson Jr., "Smoothing derivatives of functions and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 413–428.

[3] S. Smale, "On gradient dynamical systems", *Ann. of Math.* (2), **74** (1961), 199–206.

[4] K. R. Meyer, "Energy functions for Morse Smale systems", *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.

[5] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Изд-во "РХД", М.–Ижевск, 2011.

[6] M. Morse, "Topologically non-degenerate functions on a compact n-manifold M", *J. Analyse Math.*, **7** (1959), 189–208.

О. В. Починка
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
(Нижегородский филиал)
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

С. Х. Зинина
Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарева, г. Саранск;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
(Нижегородский филиал)
E-mail: suddenbee@gmail.com

Поступило
17.02.2019
После доработки
12.04.2019
Принято к публикации
22.05.2019