Математические заметки

том 71 выпуск 6 июнь 2002

УДК 512.74

О СТАБИЛЬНОСТИ ДИАГОНАЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ

И. В. Аржанцев

В заметке доказано, что для произвольного действия полупростой группы G на аффинном многообразии X найдется натуральное число n такое, что диагональное действие $G : X \times X \times \dots \times X$ (m копий) стабильно для любого $m \geqslant n$.

Библиография: 3 названия.

Пусть G – полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики. Рассмотрим регулярное действие группы G на неприводимом аффинном алгебраическом многообразии X, также определенном над полем k. Действие $G : X$ называется *стабильным*, если типичная G-орбита на X замкнута, или, более точно, если в X найдется непустое открытое подмножество X_0, для каждой точки которого ее G-орбита замкнута в X. Свойство стабильности играет важную роль в современной теории инвариантов, поскольку для стабильных действий и только для них типичный слой морфизма факторизации состоит из одной орбиты.

Известно несколько критериев и достаточных условий стабильности действия, см. например [1, п. 7.5]. Ниже мы рассмотрим один из результатов в этом направлении. Будем обозначать через V_λ неприводимый G-модуль со старшим весом λ. Старший вес сопряженного G-модуля V_λ^* обозначим через λ^*. Пусть θ – инволюция Вейля на группе G, т.е. инволютивный автоморфизм, действующий как инверсия на некотором максимальном торе. Известно, что для любого представления R группы G θ-подкрученное представление $R \circ \theta$ изоморфно сопряженному представлению R^*. Пусть G действует на неприводимом аффинном многообразии X. Обозначим через X^* то же многообразие, но с θ-подкрученным действием. Тогда диагональное действие $G : X \times X^*$ стабильно [2], [3].

Если каждое представление группы G самосопряжено, то диагональное действие $G : X \times X$ стабильно для любого аффинного G-многообразия X. Для произвольной полупростой группы это не всегда так. Например, рассмотрим тавтологическое линейное действие $SL(n) : k^n$. При $n > 2$ диагональное действие $SL(n) : k^n \times k^n$ не является стабильным. Однако диагональное действие $SL(n) : k^n \times k^n \times \dots \times k^n$ (m копий) стабильно при $m \geqslant n$. Цель настоящей заметки – показать, что это явление имеет место для произвольного действия.

Всюду далее будем обозначать $X^m = X \times X \times \dots \times X$ (m копий) и действие $G : X^m$ считать диагональным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00756, и фонда CRDF, грант № RM1-2088.

Теорема 1. *Для произвольного действия $G : X$ полупростой группы G на неприводимом аффинном многообразии X найдется натуральное число n такое, что действие $G : X^m$ стабильно для любого $m \geqslant n$.*

Доказательство. *Этап 1.* Без ограничения общности можно предполагать, что группа G связна и действие $G : X$ эффективно.

Будем говорить, что для действия G на X существует *стабилизатор общего положения* (с.о.п.) G_*, если G_* – такая подгруппа в G, что для некоторого открытого подмножества $X_0 \subset X$ стабилизатор любой точки из X_0 сопряжен G_*.

Лемма 1. *Для произвольного эффективного действия алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X существует натуральное число k такое, что для любого $l > k$ для действия $G : X^l$ с.о.п. существует и является единичной подгруппой.*

Доказательство. Покажем, что для некоторого k в X^k найдется точка, стабилизатор которой есть единичная подгруппа. Будем рассуждать от противного. Пусть стабилизатор точки $(x_1, \dots, x_s) \in X^s$ есть подгруппа H_s. В силу эффективности действия если $H_s \neq \{e\}$, то найдется точка $x_{s+1} \in X$, стабилизатор которой не содержит H_s. Тогда стабилизатор H_{s+1} точки $(x_1, \dots, x_{s+1}) \in X^{s+1}$ есть собственная подгруппа в H_s. Получена бесконечная строго убывающая цепочка подгрупп алгебраической группы, что приводит к противоречию.

Пусть $x_0 \in X^k$ – точка с единичным стабилизатором. Тогда с.о.п. для действия $G : X^k$ конечен, см. [1, п. 7.1]. Пусть X_0 – открытое подмножество в X^k, стабилизаторы точек которого конечны. Фиксируем точку $x_1 \in X_0$. В силу эффективности действия множество точек x_2 в X^q, стабилизаторы которых пересекаются со стабилизатором G_{x_1} только по единице, открыто и плотно в X^q при $q \geqslant 1$. Поэтому множество точек с единичным стабилизатором плотно в X^{k+q}, откуда и следует, что с.о.п. для действия $G : X^l$, $l > k$, есть единичная подгруппа.

Этап 2. Пусть $\Xi_+(G)$ – полугруппа доминантных весов группы G. Для конечнопорожденной подполугруппы $M \subset \Xi_+(G)$ будем обозначать через $C(M)$ минимальный выпуклый рациональный конус, содержащий M.

Действие $G : X$ определяет линейное представление группы G в алгебре регулярных функций $k[X]$. Рассмотрим изотипное разложение

$$k[X] = \bigoplus_{\lambda \in \Xi_+(G)} k[X]_\lambda.$$

Для неприводимого многообразия X множество весов $\Xi(G, X) = \{\lambda \in \Xi_+(G) \mid k[X]_\lambda \neq 0\}$ образует подполугруппу в $\Xi_+(G)$. В частности, такая полугруппа $\Xi(G, G/H)$ связана с каждым однородным пространством G/H.

Теорема 2 (Э.Б. Винберг [3, теорема 10]). *Пусть действие $G : X$ может быть продолжено до действия большей связной редуктивной группы $F \supset G$. Предположим, что*

$$\Xi(F, X) - \Xi(F, F/G) = \{\lambda_1 - \lambda_2 \mid \lambda_1 \in \Xi(F, X),\ \lambda_2 \in \Xi(F, F/G)\}$$

является группой. Тогда действие $G : X$ стабильно.

Заметим, что для двух полугрупп $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ условие "$\Omega_1 - \Omega_2$ является группой" эквивалентно условию "конусы $C(\Omega_1)$ и $C(\Omega_2)$ имеют общую внутреннюю точку".

Мы применим теорему 2 для действия $G : X^n$, полагая $F = G^n$ с покомпонентным действием $G^n : X^n$.

Согласно лемме 1, заменяя X на X^k, можно считать, что в X содержится точка x_0 с единичным стабилизатором. Пусть $Y = \overline{Gx_0}$. Многообразие Y эквивариантно бирационально изоморфно группе G. Поэтому полугруппа $\Xi(G, Y)$ содержит внутреннюю точку доминантной камеры Вейля $C(\Xi_+(G))$. Вложение $Y \subset X$ определяет вложение $\Xi(G, Y) \subset \Xi(G, X)$. Пусть $\lambda_0 \in \Xi(G, X)$ – внутренняя точка камеры Вейля, являющаяся также внутренней точкой конуса $C(\Xi(G, X))$. Обозначим точку $(\lambda, \dots, \lambda) \in X^n$ символом λ^n. При любом n точка λ_0^n является внутренней для конуса $C\big(\Xi(G^n, X^n)\big) = C\big(\Xi(G, X)\big)^n$. Нужно подобрать n так, чтобы λ_0^n была внутренней точкой конуса $C\big(\Xi(G^n, G^n/G)\big)$.

По двойственности Фробениуса [1, п. 3.7] имеем

$$\Xi(G^n, G^n/G) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid G\text{-модуль } V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n} \text{ содержит ненулевой } G\text{-инвариантный вектор}\}.$$

Лемма 2. *Для любого $\lambda \in \Xi_+(G)$ найдется p, для которого $\lambda^p \in \Xi(G^p, G^p/G)$.*

Доказательство. Поскольку $G \subset SL(V_\lambda)$, достаточно указать ненулевой $SL(V)$-инвариантный вектор в $V \otimes \dots \otimes V$ для некоторого числа экземпляров V. Таким вектором является тензор $\det$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_r$ – фундаментальные веса группы G, и пусть число n таково, что $\lambda_0^n, \omega_1^n, \dots, \omega_r^n \in \Xi(G^n, G^n/G)$. Для того чтобы проверить, что точка $\lambda_0^n \in C(\Xi(G^n, G^n/G))$ является внутренней, нужно показать, что для любой линейной функции l в $\mathbb{R}^{rn}$ такой, что $l(\lambda_0^n) = 0$ и $l|_{C(\Xi(G^n, G^n/G))} \geqslant 0$, имеем $l|_{C(\Xi(G^n, G^n/G))} \equiv 0$. Из равенства $\lambda_0^n = k_1\omega_1^n + \dots + k_r\omega_r^n$, $k_i > 0$, следует $l(\lambda_0^n) = k_1 l(\omega_1^n) + \dots + k_r l(\omega_r^n)$ и, значит, $l(\omega_i^n) = 0$ и $l(\lambda^n) = 0$ для всех $\lambda \in \Xi(G^n, G^n/G)$. Если $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Xi(G^n, G^n/G)$, то и $(\lambda_{\tau(1)}, \dots, \lambda_{\tau(n)}) \in \Xi(G^n, G^n/G)$ для всякой подстановки $\tau \in S_n$. Применяя к набору $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ циклические перестановки и суммируя, получаем $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^n \in \Xi(G^n, G^n/G)$. Но из условия $l((\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^n) = 0$ следует $l(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Этап 3. На предыдущих этапах мы нашли номер n, для которого действие $G : X^n$ имеет единичный с.о.п. и стабильно. Стабильность действия $G : X^m$ при $m > n$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть действие $G : Z_1$ редуктивной группы G на аффинном многообразии Z_1 имеет конечный с.о.п. и стабильно. Тогда для произвольного действия $G : Z_2$ на аффинном многообразии Z_2 диагональное действие $G : (Z_1 \times Z_2)$ стабильно.*

Доказательство. Пусть z_1 – точка на Z_1 с конечным стабилизатором, орбита которой замкнута. Покажем, что для любой точки $z_2 \in Z_2$ орбита точки (z_1, z_2) замкнута в $Z_1 \times Z_2$. В самом деле, в замыкании орбиты $G(z_1, z_2)$ лежит (единственная) замкнутая G-орбита $\mathcal{O}$ [1, п. 4.4]. Теорема Гильберта–Мамфорда–Биркса [1, п. 6.8] утверждает, что найдется однопараметрическая подгруппа $\mu\colon k^* \to G$, для которой предельная точка $\lim_{t\to 0} \mu(t)(z_1, z_2)$ лежит в $\mathcal{O}$. В этой ситуации точка $z_0 = \lim_{t\to 0} \mu(t) z_1$ лежит в замыкании Gz_1, а значит, и в самой Gz_1. С другой стороны, стабилизатор точки z_0 содержит подгруппу $\mu(t)$. В силу конечности стабилизатора G_{z_0} подгруппа $\mu(t)$ совпадает с единичной подгруппой и $G(z_1, z_2) = \mathcal{O}$.

Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1. *Для произвольного действия $G : X$ полупростой группы G на неприводимом аффинном многообразии X найдется натуральное число n такое, что полугруппа $\Xi(G, X^m)$ совпадает с $\Xi_+(G)$ для всех $m \geqslant n$.*

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает, что при $m \geqslant n$ в X^m найдется точка x_0, стабилизатор которой единичен, а орбита замкнута. Имеем $\overline{Gx_0} \cong G$, откуда $\Xi(G, \overline{Gx_0}) = \Xi_+(G)$. Вложение $\Xi(G, \overline{Gx_0}) \subseteq \Xi(G, X^m)$ завершает доказательство.

В заключение отметим, что теорема 1 не может быть перенесена на действия редуктивных групп. Простейший пример доставляет действие одномерного тора гомотетиями на прямой.

Автор благодарен профессору Э. Б. Винбергу за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 137–314.

[2] Panyushev D. I. A restriction theorem and the Poincaré series for U-invariants // Math. Ann. 1995. V. 301. P. 655–675.

[3] Vinberg E. B. On stability of actions of reductive algebraic groups // Lie Algebras, Rings and Related Topics / ed. Fong Yuen, A. A. Mikhalev, E. Zelmanov. Hong-Kong: Springer-Verlag, 2000. P. 188–202.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступило
26.07.2001